

П-169

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

ХƏБƏРЛƏРИ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-РИЈАЗИЈЈАТ ВƏ ТЕХНИКА ЕЛМЛƏРИ СЕРИЈАСЫ



СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

1

1962

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕА НƏШРИЈЈАТЫ
ИЗДАТЕЛЬСТВО АН АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

Е хы — Баку

Ю. И. ДОМШЛАК

О ПОВЕДЕНИИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЙ
ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ
ОПЕРАТОРОМ ПРИ НАЛИЧИИ НЕЛИНЕЙНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

В статье [1] нами было рассмотрено поведение на бесконечности обобщенных решений задачи Коши для линейного однородного эволюционного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (1)$$

с начальным условием

$$x(t)|_{t=0} = x_0 \quad (2)$$

Здесь $A(t)$ при каждом значении $t \in J = [0, \infty)$ есть оператор в некотором исходном пространстве B , вообще говоря, *неограниченный*. Функция $A(t)$ удовлетворяет, например, видоизмененным условиям $C_1 - C_5$ Т. Като (см. [1]); $x(t)$ — векторная функция скалярного аргумента t со значениями в B .

Целью настоящей статьи является выявление аналогичных свойств обобщенных решений задачи Коши для уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + h(x, t) \quad (3)$$

с начальным условием (2). (Смысл нелинейного оператора $h(x(t), t)$ будет уточнен ниже). Подобные теоремы для случая *ограниченного* $A(t)$ получены Массерой и Шеффером [2].

При тех условиях, которые наложены нами на $A(t)$, существует операторная функция $U(t, s)$, определенная в угле $0 \leq s \leq t < \infty$ и обладающая некоторыми свойствами, из которых нам будут нужны следующие:

- a) $U(t, s)$ сильно непрерывна по совокупности t, s ;
- b) $U(t, r) = U(t, s) U(s, r)$ при $t \geq s \geq r$; $U(t, t) = I$;
- c) существует ω такое, что $\|U(t, s)\| \leq e^{\omega(t-s)}$

Эта функция разрешает уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t)$$

равенством

$$x(t) = U(t, 0)x_0 + \int_0^t U(t, s)f(s)ds.$$

739250
Центральная научная
библиотека
Академии наук Иргизской ССР

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: З. И. Халилов, Г. Б. Абдуллаев, С. А. Алескеров, Ч. М. Джуварлы, И. И. Ибрагимов, С. М. Кулиев (зам. редактора), Г. Ф. Султанов, А. А. Эфендизаде, А. М. Мамедов (ответственный секретарь).

Адрес: г. Баку, Коммунистическая, 10. Редакция «Известий Академии наук Азербайджанской ССР (серия физико-математических и технических наук)».

Для изучения какого-либо свойства решений уравнения (3) иногда достаточно исследовать тот же вопрос для решений нелинейного интегрального уравнения

$$x(t) = U(t, 0)x_0 + \int_0^t U(t, s)h(x(s), s)ds, \quad (4)$$

которые являются обобщенными решениями уравнения (3). Мы именно так и будем поступать.

В дальнейшем, если в условиях теоремы не будет специально оговорено, мы будем всегда подразумевать, что $U(t, s)$ удовлетворяет условиям а)–с).

Мы будем употреблять банаховы пространства B , составленные из локально интегрируемых по Бохнеру функций:

$$L_p: \|x\|_p = \left(\int_0^\infty \|x(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$L_\infty: \|x\|_\infty = \text{ess sup}_{t \in J} \|x(t)\|,$$

$$M: \|x\|_M = \sup_{t \in J} \int_t^{t+1} \|x\|(t) dt$$

$$C: \text{непрерывные } x(t) \text{ с } \|x\|_C = \|x\| = \sup \|x(t)\|$$

$$C_0: \text{подпространство } C \text{ с } \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$$

Если функция $x(t)$ представима в виде $x(t) = U(t, 0)x_0$, то будем говорить, что $x(t) \in X_1$. Если же имеет место представление $x(t) = U(t, 0)x_0 + \int_0^t U(t, s)f(s)ds$ для некоторой $f(t) \in B$, то будем говорить, что $x(t) \in X_2$.

Через B_0 обозначим множество таких элементов x из B , для которых соответствующие $x(t) = U(t, 0)x$ ограничены на J . Мы будем всюду полагать, что B_0 замкнуто и имеет замкнутое прямое дополнение B_1 .

З. И. Халилов [3], впервые применив результаты Г. Като к изучению свойств решений уравнений (3) с неограниченным $A(t)$, доказал теорему, являющуюся обобщением классической теоремы Перрона:

Теорема 1. (З. И. Халилов, [3]). Пусть $U(t, s)$ удовлетворяет условиям а)–б); среди функций X_2 для любой $f(t) \in B$ имеется по крайней мере одна ограниченная. Пусть далее, $h(x, t)$ определена для $t \in J$, $x \in B$ ($\|x\| < a$, $0 < a \leq \infty$); $h(x, t) \in B$. При этом $h(x(t), t)$ преобразует всякую функцию из C в функцию из B , и существует $\gamma > 0$ такое, что

$$\|h(x'(t), t) - h(x''(t), t)\|_B \leq \gamma \|x' - x''\| \quad (5)$$

для любых $x'(t), x''(t) \in C$, $\|x\| < a$. Через β обозначим $\|h(0, t)\|_B$. Тогда, если $K\gamma < 1$, $\beta < \frac{1-K\gamma}{K} a$, то для каждого $\xi_0 \in B_0$, $\|\xi_0\| < b = S^{-1}[(1-K\gamma)a - K\beta]$ существует единственное решение $x(t, \xi_0)$ уравнения (4), определенное в J , такое, что $\|x(t, \xi_0)\| < a$ и $P_0 x(0, \xi_0) = \xi_0$. При этом

$$\|x(t, \xi_0)\| \leq \frac{K\beta + S\|\xi_0\|}{1-K\gamma}. \quad (6),$$

* K и S суть константы, зависящие только от $U(t, s)$, т. е. от $A(t)$ и от пространства B . Точнее см. леммы 1 и 2 из [3].

Если $\beta = 0$, то из теоремы 1 сразу следует устойчивость по Ляпунову нулевого решения уравнения (4) в классе ограниченных решений.

Доказывается эта теорема методом последовательных приближений, которые строятся следующим образом:

$$y_0(t) = 0, \quad y_n(t) = U(t, 0)y_n(0) + \int_0^t U(t, s)h(y_{n-1}(s) + U(s, 0)\xi_0, s)ds, \\ n = 1, 2, \dots$$

Эта последовательность выбирается так, чтобы $y_n(0) \in B_1$ ($n = 0, 1, \dots$), вследствие чего она определяется единственным образом (см. [3]). Доказывается, что $\|y_n(t)\| < a$, последовательность $\{y_n(t)\}$ сходится в C и предельная функция с добавкой $U(t, 0)\xi_0$ удовлетворяет уравнению (4).

Излагаемые ниже следствия 1 и 2 показывают, что условия теоремы 1 в части $h(x, t)$ могут быть несколько упрощены.

Следствие 1. Пусть B означает одно из пространств M , L_p ($1 \leq p \leq \infty$); функция $h(x, t)$ для любого $x \in B$, $\|x\| < a$ является измеримой; $h(0, t) \in B$; для любой пары x', x'' из области определения и $t \geq 0$ имеет место

$$\|h(x', t) - h(x'', t)\| \leq \gamma(t) \cdot \|x' - x''\|, \quad (7)$$

где скалярная функция $\gamma(t)$ выходит в $B(R)$ и $\|\gamma\|_B = \gamma$. Тогда предположения, сделанные в теореме 1 относительно $h(x, t)$, удовлетворяются и, следовательно, утверждение теоремы справедливо.

Доказательство. Покажем, во-первых, что $h(x, t) \in B$ для каждого $x \in B$, $\|x\| < a$. Действительно, положив в (7) $x' = x$, $x'' = 0$, имеем $\|h(x, t) - h(0, t)\| \leq \gamma(t) \cdot \|x\|$, $\|h(x, t)\| \leq \|h(x, t) - h(0, t)\| + \|h(0, t)\|$, $\|h(x, t)\|_B \leq \leq \gamma\|x\| + \beta$ (здесь мы учли, что $h(x, t)$ измерима). Поэтому, если $x(t) = x$ в некотором интервале и $x(t) = 0$ вне его, то, очевидно, $h(x(t), t) \in B$. То же самое, очевидно, можно сказать и про ступенчатые функции, принимающие конечное число значений в соответствующих интервалах. Каждая $x(t) \in C$, $\|x\| < a$ может быть представлена в виде точечного предела последовательности таких ступенчатых функций $\{x_n(t)\}$, $\|x_n\|_\infty < a$. Положив в (7) $x' = x(t)$, $x'' = x_n(t)$, получим

$\|h(x(t), t) - h(x_n(t), t)\| \leq \gamma(t) \|x - x_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Функция $h(x(t), t)$ есть точечный предел последовательности измеримых функций $h(x_n(t), t)$ и следовательно, измерима.

$$\|h(x(t), t)\| \leq \|h(x(t), t) - h(0, t)\| + \|h(0, t)\| \leq \gamma(t) \|x(t)\| + \|h(0, t)\|; \\ \|h(x(t), t)\|_B \leq \gamma a + \beta.$$

Взяв норму B от обеих частей неравенства $\|h(x'(t), t) - h(x''(t), t)\| \leq \gamma(t) \|x'(t) - x''(t)\| \leq \gamma(t) \|x' - x''\|$, получим (5), что и требовалось.

Следствие 2. Пусть теперь $B = C$; $h(x, t)$ при любом $x \in B$; $\|x\| < a$ является непрерывной функцией от t ; $h(0, t) \in C$; неравенство (7) имеет место с $\gamma(t) = \gamma$. Тогда предположения, сделанные в теореме 1 относительно $h(x(t), t)$, также удовлетворяются.

Доказательство аналогично предыдущему.

Докажем теорему, нужную для дальнейшего изложения.

Теорема 2. Пусть $h(x, t)$ удовлетворяет условию (7) и $h(0, t) \equiv 0$. Тогда всякое решение уравнения (4) удовлетворяет для любых $t \geq t_0 \geq 0$ неравенству

$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| \cdot \exp[\omega(t-t_0) + \int_{t_0}^t \gamma(s) ds]. \quad (7)$$

Доказательство. Пусть $x(t) = U(t, 0)x(0) + \int_0^t U(t, s)h(x(s), s)ds$.

Тогда

$$\begin{aligned} x(t) &= U(t, t_0)U(t_0, 0)x(0) + \int_0^{t_0} U(t, s)h(x(s), s)ds + \int_{t_0}^t U(t, s)h(x(s), s)ds = \\ &= U(t, t_0)[U(t_0, 0)x(0) + \int_0^{t_0} U(t_0, s)h(x(s), s)ds] + \int_{t_0}^t U(t, s)h(x(s), s)ds = \\ &= U(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t U(t, s)h(x(s), s)ds. \end{aligned} \quad (9)$$

Отсюда $\|x(t)\| \leq \|U(t, t_0)\| \cdot \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^t \|U(t, s)\| \cdot \|h(x(s), s)\| ds \leq e^{\omega(t-t_0)}$

$$\|x(t_0)\| + \int_{t_0}^t e^{\omega(t-s)} \gamma(s) \|x(s)\| ds,$$

$$e^{\omega(t-t_0)} \gamma(t) \|x(t)\| \leq \gamma(t) [\|x(t_0)\| + \int_{t_0}^t e^{\omega(t_0-s)} \gamma(s) \|x(s)\| ds]. \quad (10)$$

Обозначим $\varphi(t) = \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^t e^{\omega(t_0-s)} \gamma(s) \|x(s)\| ds$, имеем $\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \leq \gamma(t)$.

Интегрируя от t_0 до t , получим

$$\varphi(t) \leq \varphi(t_0) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t \gamma(s) ds\right),$$

$$\|x(t_0)\| + \int_{t_0}^t e^{\omega(t-t_0)} \gamma(s) \|x(s)\| ds \leq \|x(t_0)\| \exp\left(\int_{t_0}^t \gamma(s) ds\right).$$

С другой стороны, из (10) имеем

$$\|x(t_0)\| + \int_{t_0}^t e^{-\omega(t-s)} \gamma(s) \|x(s)\| ds \geq \|x(t)\| e^{-\omega(t-t_0)}. \quad (11)$$

Комбинируя (10) и (11), получим требуемое неравенство (8).

Теорема 3. Пусть для всех $f(t) \in L_p$, ($1 < p < \infty$), среди функций из X_2 имеется по крайней мере одна ограниченная; $h(x, t)$ измерима по t при каждом фиксированном $x \in B$; $h(0, t) = 0$ при любом $t \geq 0$;

для каждой пары $x', x'' \in B$ имеет место (7) с $\|f\|_p = \gamma < \frac{1}{K_p}$.

Тогда существуют положительные константы N_1, N_2, ν_1, ν_2 такие, что

1) каждое ограниченное, не обращающееся в нуль решение $x(t)$ уравнения (4) при всех $t \geq t_0 \geq 0$ удовлетворяет неравенству

$$\|x(t)\| \leq N_1 e^{-\nu_1(t-t_0)} \|x(t_0)\|$$

2) каждое ненулевое решение $x(t)$ уравнения (4) с $x(0) \in B_1$ при всех $t \geq t_0 \geq 0$ удовлетворяет неравенству

$$\|x(t)\| \geq N_2 e^{\nu_2(t-t_0)} \|x(t_0)\|$$

Доказательство. 1) Пусть $x(t)$ есть ограниченное решение уравнения (4), не обращающееся в ноль, $t_0 \geq 0$ и $\delta > 0$ — произвольны. Определим $\alpha(t) = 1$ при $t_0 \leq t \leq t_0 + \delta$ и $\alpha(t) = 0$ вне этого отрезка. Функ-

ция $y(t) = x(t) \cdot \int_0^t \frac{\alpha(u) du}{\|x(u)\|}$, очевидно, ограничена и входит в X_2 с $f(t) =$

$$= x(t) \frac{\alpha(t)}{\|x(t)\|} + h(x(t), t) \cdot \int_0^t \frac{\alpha(s) ds}{\|x(s)\|}. \text{ Действительно, } U(t, 0)y(0) +$$

$$+ \int_0^t U(t, s)f(s)ds = \int_0^t U(t, s) \left[\left\{ U(s, 0)x(0) + \int_0^s U(s, r)h(x(r), r)dr \right\} \frac{\alpha(s)}{\|x(s)\|} + \right.$$

$$\left. + h(x(s), s) \cdot \int_0^s \frac{\alpha(u) du}{\|x(u)\|} \right] ds = \int_0^t \frac{\alpha(s)}{\|x(s)\|} U(t, 0)x(0) ds +$$

$$+ \int_0^t ds \int_0^s \frac{\alpha(s)}{\|x(s)\|} U(t, r)h(x(r), r)dr + \int_0^t ds \int_0^s \frac{\alpha(u)}{\|x(u)\|} U(t, s)h(x(s), s)du.$$

Во втором члене переменим порядок интегрирования, а в третьем переобозначим переменные интегрирования (u, s) на (s, r) :

$$U(t, 0)x(0) \int_0^t \frac{\alpha(u) du}{\|x(u)\|} + \int_0^t dr \int_r^t U(t, r)h(x(r), r) \frac{\alpha(s)}{\|x(s)\|} ds +$$

$$+ \int_0^t dr \int_0^r U(t, r)h(x(r), r) \frac{\alpha(s)}{\|x(s)\|} ds = U(t, 0)x(0) \cdot \int_0^t \frac{\alpha(u) du}{\|x(u)\|} +$$

$$+ \int_0^t \int_0^t U(t, r)h(x(r), r) \frac{\alpha(s)}{\|x(s)\|} ds dr + x(t) \cdot \int_0^t \frac{\alpha(s) ds}{\|x(s)\|} = y(t).$$

Заметим, что $y(0) \in B_1$. Так как $y(t) \in X_2$, ограничен и $y(0) \in B_1$, то имеет место соотношение

$$\|y\| \leq K \|f\|_p$$

(см. [3], лемма 2).

Применив неравенство треугольника для L_p , получим

$$\|f\|_p = \|x(t) + \|y\| \cdot \gamma(t)\|_p \leq \|x(t)\|_p + \|y\|_p \cdot \|y\| = \delta^{\frac{1}{p}} + \gamma \|y\|.$$

$$\text{Из (12) имеем } \|y\| \leq K(\delta^{\frac{1}{p}} + \gamma \|y\|), \|y\| \leq \frac{K}{1-K\gamma} \delta^{\frac{1}{p}},$$

$$\|x(t_0 + \delta)\| \cdot \int_{t_0}^{t_0 + \delta} \frac{du}{\|x(u)\|} \leq \frac{K}{1-K\gamma} \delta^{\frac{1}{p}} \quad (13)$$

$$\text{Обозначив } \varphi(t) = \int_{t_0}^t \frac{du}{\|x(u)\|} \text{ и } N = \frac{1-K\gamma}{K}, \text{ имеем } \frac{\varphi'(t_0 + \delta)}{\varphi(t_0 + \delta)} \geq N \delta^{-\frac{1}{p}}.$$

Интегрируя от произвольного $\delta_0 > 0$ до $\delta \geq \delta_0$,

имеем

$$\ln \frac{\varphi(t_0 + \delta)}{\varphi(t_0 + \delta_0)} \geq Nq \left(\delta^{\frac{1}{q}} - \delta_0^{\frac{1}{q}} \right),$$

$$\int_{t_0}^{t_0 + \delta} \frac{du}{\|x(u)\|} \geq \int_{t_0}^{t_0 + \delta_0} \frac{du}{\|x(u)\|} \exp \left[Nq \left(\delta^{\frac{1}{q}} - \delta_0^{\frac{1}{q}} \right) \right]. \quad (14)$$

Неравенство (8) для нашего случая $B = L_p$ можно записать в виде

$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| \cdot \exp[\omega(t - t_0) + \gamma(t - t_0)^{\frac{1}{q}}], \quad (8')$$

так как ввиду неравенства Гёльдера, $\int_{t_0}^t \gamma(s) ds \leq \|\gamma\|_p \cdot (t - t_0)^{\frac{1}{q}}$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \int_{t_0}^{t_0 + \delta} \frac{du}{\|x(u)\|} &\geq \int_{t_0}^{t_0 + \delta_0} \frac{du}{\|x(t_0)\| \cdot \exp[\omega(u - t_0) + \gamma(u - t_0)^{\frac{1}{q}}]} \\ &\geq \frac{1}{\|x(t_0)\| \cdot \exp(\gamma \delta_0^{\frac{1}{q}})} \cdot \int_{t_0}^{t_0 + \delta_0} e^{-\omega(u - t_0)} du = \frac{1 - e^{-\omega \delta_0}}{\omega \cdot \|x(t_0)\| \cdot \exp(\gamma \delta_0^{\frac{1}{q}})}. \end{aligned} \quad (15)$$

Из (13), (14) и (15) имеем

$$\begin{aligned} \|x(t_0 + \delta)\| &\leq \frac{\omega \exp[(\gamma + Nq) \delta_0^{\frac{1}{q}}]}{N(1 - e^{-\omega \delta_0})} \cdot \delta^{\frac{1}{p}} \exp[-Nq \delta^{\frac{1}{q}}] \cdot \|x(t_0)\|, \quad \|x(t_0 + \delta)\| \leq \\ &\leq \frac{\omega \exp[(\gamma + Nq) \delta_0^{\frac{1}{q}}]}{N(1 - e^{-\omega \delta_0})} \cdot \delta^{\frac{1}{q}} \exp[-(Nq - \mu) \delta^{\frac{1}{q}}] \cdot \exp(-\mu \delta^{\frac{1}{q}}) \|x(t_0)\|, \end{aligned}$$

где $0 < \mu < Nq$. Обозначив

$$L_\mu = \max \delta^{\frac{1}{q}} \exp[-(Nq - \mu) \delta^{\frac{1}{q}}] = \left[e(Nq - \mu)(p - 1) \right]^{-\frac{q}{p}},$$

получим

$$\|x(t_0 + \delta)\| \leq \frac{L_\mu \cdot \omega \cdot \exp[(\gamma + Nq) \delta_0^{\frac{1}{q}}]}{N(1 - e^{-\omega \delta_0})} \exp(-\mu \delta^{\frac{1}{q}}) \|x(t_0)\| \quad (16)$$

для всех $\delta \geq \delta_0$. Чтобы охватить отрезок $0 \leq \delta \leq \delta_0$, воспользуемся (8'), в результате чего для таких δ получим

$$\begin{aligned} \|x(t_0 + \delta)\| &\leq \exp[\omega \delta_0 + \gamma \delta_0^{\frac{1}{q}}] \cdot \|x(t_0)\| \leq \exp[\omega \delta_0 + (\gamma + \mu) \delta_0^{\frac{1}{q}}] \cdot \\ &\cdot \exp(-\mu \delta^{\frac{1}{q}}) \cdot \|x(t_0)\|. \end{aligned} \quad (16')$$

Обозначая $M(\mu, \delta_0)$ максимум из двух коэффициентов в формулах (16) и (16'), получим уже для всех $\delta \geq 0$

$$\|x(t_0 + \delta)\| \leq M(\mu, \delta_0) e^{-\mu \delta^{\frac{1}{q}}} \cdot \|x(t_0)\|. \quad (17)$$

Заметим, что $\lim_{\delta \rightarrow \infty} e^{-\mu \delta^{\frac{1}{q}}} = 0$. Поэтому мы можем применить первую часть леммы 5.3 из [2] (леммы 3 из [1]) и заключить, что существуют такие N_1 и $\nu_1 > 0$, что для всех $t \geq t_0 \geq 0$ имеет место

$$\|x(t)\| \leq N_1 e^{-\nu_1(t - t_0)} \cdot \|x(t_0)\|$$

Тем самым, первая часть теоремы доказана.

2. Пусть $x(t)$ — ненулевое решение уравнения (4), причем $x(0) \in B_1$; δ, t_0 и t_1 — произвольны ($\delta > 0$, $0 \leq t_0 \leq t_1$); $\alpha(t) = 1$ при $t_1 \leq t \leq t_1 + \delta$ и $\alpha(t) = 0$ вне этого промежутка.

Функция $y(t) = x(t) \cdot \int_t^\infty \frac{\alpha(u) du}{\|x(u)\|}$ принадлежит X_2 , причем,

$$f(t) = -x(t) \cdot \frac{\alpha(t)}{\|x(t)\|} + h(x(t), t) \cdot \int_t^\infty \frac{\alpha(u) du}{\|x(u)\|}.$$

Это выясняется так же, как в первой части доказательства.

Очевидно, $y(t)$ ограничен и $y(0) = x(0) \cdot \int_0^{t_1 + \delta} \frac{du}{\|x(u)\|} \in B_1$. Значит, мо-

жет быть применена та же лемма 2 из [3]. Так же, как в первой части доказательства теоремы, получим

$$\|y\| \leq \frac{K}{1 - K\gamma} \cdot \delta^{\frac{1}{p}} = N \delta^{\frac{1}{p}}, \quad \|y(t_0)\| = \|x(t_0)\| \cdot \int_{t_1}^{t_1 + \delta} \frac{du}{\|x(u)\|} \leq N \delta^{\frac{1}{p}}.$$

Рассуждая аналогично, получим для любых $\delta \geq 0$

$$\begin{aligned} \|x(t_0 + \delta)\| &\geq \delta_0^{\frac{1}{p}} \exp[-\omega \delta_0 - (\gamma + Nq) \delta_0^{\frac{1}{q}}] \times \\ &\times \min\{1, N \omega^{-1} \delta_0^{\frac{1}{p}} (e^{\omega \delta_0} - 1)\} \cdot \delta^{-\frac{1}{p}} \exp(-Nq \delta^{\frac{1}{q}}) \cdot \|x(t_0)\|. \end{aligned}$$

Положив $\delta = t_1 - t_0$ и применив вторую часть леммы 5.3 из [2], получим неравенство

$$\|x(t)\| \geq N_2 e^{\nu_2(t - t_0)} \|x(t_0)\|$$

для всех $t \geq t_0 \geq 0$. При этом $N_2 = \frac{1}{N_1}$, $\nu_2 = \nu_1$.

Докажем аналогичную теорему для случая $B = C_0$ (или C).

Теорема 4. Пусть имеют место условия теоремы 3, причем в качестве B взято пространство C_0 (или C). Дополнительно пусть $h(x, t)$ непрерывна по t при каждом фиксированном $x \in B$; $\gamma(t) = \gamma < \frac{1}{K_C}$.

Тогда имеют место утверждения теоремы 3 с некоторыми положительными константами N_3, N_4, ν_3, ν_4 .

Доказательство. 1) Пусть $x(t)$ есть ограниченное не обращающееся в нуль решение уравнения (4); $t_0 \geq 0$, $\tau > 0$ произвольны,

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \leq t_0 + \tau \\ 1 - (t - t_0 - \tau) & \text{при } t_0 + \tau \leq t \leq t_0 + \tau + 1 \\ 0 & \text{при } t \geq t_0 + \tau + 1. \end{cases}$$

С помощью этой функции определим $y(t)$ и $f(t)$ так же, как в первой части доказательства теоремы 3. Имеем $\|f(t)\| \leq \alpha(t) + \gamma \|y\|$, $\|f\| \leq 1 + \gamma \|y\|$.

Применив лемму 2 из [3], получим

$$|y| \leq \frac{K}{1-K\gamma} = \frac{1}{M}, \quad \|x(t_0+\tau)\| \cdot \int_{t_0}^{t_0+\tau} \frac{du}{\|x(u)\|} \leq \frac{1}{M}. \quad (18)$$

Обозначив $\int_{t_0}^t \frac{du}{\|x(u)\|} = \varphi(t)$, имеем $\frac{\varphi'(t_0+\tau)}{\varphi(t_0+\tau)} \geq M$.

Интегрируя от произвольного $\tau_0 > 0$ до $\tau \geq \tau_0$, получим $\varphi(t_0+\tau) \geq \varphi(t_0+\tau_0) \cdot e^{M(\tau-\tau_0)}$. (19)

Неравенство (8) для нашего случая примет вид $\|x(t)\| \leq e^{(\omega+\gamma)(t-t_0)}$. (8'')

Поэтому $\int_{t_0}^{t_0+\tau} \frac{du}{\|x(u)\|} \geq \int_{t_0}^{t_0+\tau} \frac{du}{\|x(t_0)\| \exp[(\omega+\gamma)(u-t_0)]} = \frac{1-e^{-(\omega+\gamma)\tau}}{(\omega+\gamma) \cdot \|x(t_0)\|}$. (20)

Из (18), (19) и (20) получим

$$\frac{1}{M \|x_0+\tau\|} \geq \frac{1-e^{-(\omega+\gamma)\tau}}{(\omega+\gamma) \|x(t_0)\|} \cdot e^{M(\tau-\tau_0)},$$

$$\|x(t_0+\tau)\| \leq \frac{(\omega+\delta)e^{M\tau_0}}{M(1-e^{-(\omega+\gamma)\tau_0})} \cdot e^{-M\tau} \|x(t_0)\|, \quad \tau \geq \tau_0. \quad (21)$$

Для $0 \leq \tau \leq \tau_0$, воспользуясь (8''), имеем

$$\|x(t_0+\tau)\| \leq \exp[(\omega+\gamma)\tau_0] \cdot \|x(t_0)\| \leq \exp[(\omega+\gamma+M)\tau_0] e^{-M\tau} \|x(t_0)\|. \quad (21')$$

Из (21) и (21') получим уже для любых $\tau \geq 0$

$$\|x(t_0+\tau)\| \leq \exp[(\omega+\gamma+M)\tau_0] \cdot \max\left\{1, \frac{\omega+\gamma}{M(e^{(\omega+\gamma)\tau_0}-1)}\right\} e^{-M\tau} \|x(t_0)\|. \quad (21'')$$

Фактически, первая часть теоремы уже доказана, причем,

$$\nu_3 = M = \frac{1-K\gamma}{K}.$$

Однако можно улучшить константу перед $e^{-\nu_3(t-t_0)}$ в (21''), взяв в качестве N_3 ее минимум по $\tau_0 \geq 0$.

Несложные выкладки показывают, что

$$N_3 = (1+a)^{1+\frac{1}{a}}, \quad \text{где } a = \frac{K(\omega+\gamma)}{1-K\gamma}$$

Таким образом, все ограниченные, не обращающиеся в нуль решения $x(t)$ уравнения (4) при любых $t \geq t_0 \geq 0$ удовлетворяют неравенству

$$\|x(t)\| \leq N_3 e^{-\nu_3(t-t_0)} \|x(t_0)\|.$$

2) Пусть $x(t) \neq 0$ есть решение (4), причем, $x(0) \in B_1$; $t_0 \geq 0$ и $\tau > 0$ произвольны.

Определим $y(t) = x(t) \cdot \int_t^\infty \frac{\alpha(u) du}{\|x(u)\|}$, где $\alpha(t)$ определена так же, как в доказательстве первой части теоремы.

В теореме 3 показано, что $y(t) \in X_2$. Так же, как в первой части теоремы, получим

$$|y| \leq \frac{K}{1-K\gamma} = \frac{1}{M}, \quad \|x(t)\| \cdot \int_t^\infty \frac{\alpha(u) du}{\|x(u)\|} \leq \frac{1}{M}, \quad \|x(t)\| \cdot \int_t^{t_0+\tau} \frac{du}{\|x(u)\|} \leq \frac{1}{M}.$$

Ввиду произвольности $\tau > 0$ можно перейти к пределу при $\tau \rightarrow \infty$. Имеем

$$\|x(t)\| \cdot \int_t^\infty \frac{du}{\|x(u)\|} \leq \frac{1}{M} \quad (22)$$

Обозначив $\varphi(t) = \int_t^\infty \frac{du}{\|x(u)\|}$, имеем $\varphi'(t) = -\frac{1}{\|x(t)\|}$.

Отсюда $\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \leq -M$

Интегрируя от произвольного $t_0 \geq 0$ до $t \geq t_0$ и используя (22), получим

$$\int_t^\infty \frac{du}{\|x(u)\|} \geq \int_t^\infty \frac{du}{\|x(u)\|} \cdot e^{-M(t-t_0)} \leq \frac{e^{-M(t-t_0)}}{M \|x(t_0)\|}.$$

С другой стороны, используя (8''),

$$\int_t^\infty \frac{du}{\|x(u)\|} \geq \int_t^\infty \frac{du}{e^{(\omega+\gamma)(u-t)} \|x(t)\|} = \frac{1}{(\omega+\gamma) \|x(t)\|}.$$

В результате

$$\frac{1}{(\omega+\gamma) \|x(t)\|} \leq \frac{e^{-M(t-t_0)}}{M \|x(t_0)\|}, \quad \text{откуда } \|x(t)\| \geq \frac{M}{\omega+\gamma} e^{M(t-t_0)} \|x(t_0)\| \quad (23)$$

для любых t и t_0 , $0 \leq t_0 \leq t$, т. е. второе утверждение теоремы также

доказано. При этом $N_4 = \frac{1-K\gamma}{K(\omega-\gamma)}$, $\nu_4 = \frac{1-K\gamma}{K}$.

Следствие 3. Совершенно аналогично проводится доказательство теоремы 4 для случаев $B=L_\infty$ и M . При этом от $h(x,t)$ вместо непрерывности достаточно требовать измеримость (как в теореме 3).

Следствие 4. Условия теоремы 1 обеспечивают устойчивость по Ляпунову нулевого решения уравнения (4) в классе ограниченных решений. Для конкретных пространств B , т. е. M , C , C_0 и L_p ($1 < p \leq \infty$) теоремы 3, 4 и следствие 3 обеспечивают стремление к нулю (причем, с экспоненциальной скоростью) ограниченных решений. Из этого следует, что условия теоремы 1 с добавлением условия с) для $U(t,s)$ обеспечивают не только простую, но и асимптотическую устойчивость нулевого решения уравнения (4) по экспоненциальному закону.

Добавление условия с) не является слишком ограничительным, так как в конкретных задачах для дифференциальных уравнений (например, когда $A(t)$ удовлетворяет условиям Като) это условие выполняется.

Рассмотрим теперь случай $B=L_1$

Теорема 5. Пусть удовлетворены условия теоремы 4 для случая $p=1$.

Тогда существуют положительные константы N_5 и N_6 , такие, что при всех $t \geq t_0 \geq 0$:

1) каждое ограниченное не обращающееся в нуль решение уравнения (4) удовлетворяет неравенству

$$\|x(t)\| \leq N_5 \|x(t_0)\|; \quad (24)$$

2) каждое ненулевое решение $x(t)$ уравнения (4) с $x(0) \in B_1$ удовлетворяет неравенству

$$\|x(t)\| \geq N_6 \|x(t_0)\| \quad (25)$$

Доказательство. 1) В точности повторив начало доказательства первой части теоремы 3, получим

$$\|y\| \leq \frac{K}{1-K\gamma} \delta.$$

Для произвольного $t > t_0 + \delta$ имеем $\|x(t)\| \cdot \int_{t_0}^{t_0+\delta} \frac{du}{\|x(u)\|} \leq \frac{K\delta}{1-K\gamma}$. Применив

теорему о среднем и перейдя к пределу при $\delta \rightarrow 0$, получим (24), где $N_5 = \frac{K}{1-K\gamma}$.

2) Доказываем так же, как вторую часть теоремы 3. В результате получаем (25), причем,

$$N_6 = \frac{1}{N_5} = \frac{1-K\gamma}{K}.$$

В статье [1], следуя Массера и Шефферу [2], было введено угловое расстояние

$$\alpha[x, y] = \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|$$

между ненулевыми элементами $x, y \in B$, с помощью которого были описаны некоторые свойства обобщенных решений уравнения (1).

В следующей теореме это понятие применяется нами для описания аналогичных свойств решений уравнения (4).

Теорема 6. Пусть для каждой $f(t) \in B$ среди функций X_3 имеется по крайней мере одна ограниченная (здесь под B понимается одно из пространств M, L_1), относительно $h(x, t)$ удовлетворяются условия теоремы 3. Пусть далее,

$$\| \gamma \|_B = \gamma < \frac{1}{K(1+2K)} \quad (26)$$

Тогда существует такое $\alpha_0 > 0$, что для любой пары не обращающихся в нуль решений $x_0(t)$ и $x_1(t)$ уравнения (4), где $x_0(t)$ ограничено и $x_1(0) \in B_1$, для любых $t \geq 0$ имеет место $\alpha[x_0(t), x_1(t)] \geq \alpha_0$. При этом

$$\alpha_0 = \frac{1-K\gamma(1+2K)}{K(1-K\gamma)} \quad (28)$$

Доказательство. Предположим противное, т. е., что существует t_0 , для которого $\alpha[x_0(t_0), x_1(t_0)] < \alpha_0$. Тогда по непрерывности найдется $\delta > 0$ такое, что для $t_0 \leq t \leq t_0 + \delta$ имеем $\alpha[x_0(t), x_1(t)] < \alpha_0$.

Определим $\beta(t) = 1$ при $t_0 < t < t_0 + \delta$, $\beta(t) = 0$ в остальных точках. Из доказательства теоремы 4 (обеих частей) явствует, что $y(t) \in X_2$ причем соответствующая

$$f(t) = \beta(t) \left\{ \frac{x_0(t)}{\|x_0(t)\|} - \frac{x_1(t)}{\|x_1(t)\|} \right\} + h(x_0(t), t) \int_{t_0}^t \frac{\beta(u) du}{\|x_0(u)\|} + h(x_1(t), t) \int_{t_0}^t \frac{\beta(u) du}{\|x_1(u)\|}.$$

Очевидно, $y(t)$ ограничен, так как при $t > t_0 + \delta$ $y(t) = x_0(t) \int_{t_0}^{t_0+\delta} \frac{du}{\|x_0(u)\|}$

и, кроме того, $y(0) \in B_1$.

Условия леммы из [3] соблюдены, вследствие чего

$$\|y\| \leq K \|f\|_B \quad (K = K_B).$$

$$\begin{aligned} \|f(t)\| &\leq \beta(t) \cdot \alpha[x_0(t), x_1(t)] + \|h(x_0(t), t)\| \cdot \int_{t_0}^t \frac{\beta(u) du}{\|x_0(u)\|} + \|h(x_1(t), t)\| \cdot \int_{t_0}^t \frac{\beta(u) du}{\|x_1(u)\|} \\ &\leq \beta(t) \cdot \alpha[x_0(t), x_1(t)] + \gamma(t) \left\{ \|x_0(t)\| \cdot \int_{t_0}^t \frac{\beta(u) du}{\|x_0(u)\|} + \|x_1(t)\| \cdot \int_{t_0}^t \frac{\beta(u) du}{\|x_1(u)\|} \right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

Пользуясь (24), (25) и применяя к интегралам теорему о среднем, получим для $t > t_0$ и для $t \leq t_0 + \delta$, соответственно, оценки:

$$\begin{aligned} \|x_0(t)\| \cdot \int_{t_0}^t \frac{\beta(u) du}{\|x_0(u)\|} &\leq N_5 \|x_0(t_0)\| \cdot \int_{t_0}^{t_0+\delta} \frac{du}{\|x_0(u)\|} = N_5 \|x_0(t_0)\| \cdot \frac{\delta}{\|x_0(t_0 + \theta_0 \delta)\|}, \\ \|x_1(t)\| \cdot \int_{t_0}^t \frac{\beta(u) du}{\|x_1(u)\|} &\leq \frac{1}{N_6} \|x_1(t_0 + \delta)\| \cdot \int_{t_0}^{t_0+\delta} \frac{du}{\|x_1(u)\|} = N_6 \|x_1(t_0 + \delta)\| \cdot \frac{\delta}{\|x_1(t_0 + \theta_0 \delta)\|}. \end{aligned}$$

Легко видеть, однако, что эти оценки верны для всех $t \geq 0$, так как левые части неравенства для остальных t превращаются в ноль.

Таким образом, для всех $t \geq 0$

$$\|f(t)\| \leq \beta(t) \cdot \alpha[x_0(t), x_1(t)] + N_5 \delta \gamma(t) \left[\frac{\|x_0(t_0)\|}{\|x_0(t_0 + \theta_0 \delta)\|} + \frac{\|x_1(t_0 + \delta)\|}{\|x_1(t_0 + \theta_0 \delta)\|} \right].$$

Отсюда

$$\|f\|_B \leq \delta \alpha + \gamma \delta N_5 \left\{ \frac{\|x_0(t_0)\|}{\|x_0(t_0 + \theta_0 \delta)\|} + \frac{\|x_1(t_0 + \delta)\|}{\|x_1(t_0 + \delta)\|} \right\} \quad (32)$$

Применяя лемму 2 из [3], получим

$$\|y(t_0)\| = \|x_1(t_0)\| \cdot \int_{t_0}^{t_0+\delta} \frac{du}{\|x_1(u)\|} \leq K \delta \left\{ \alpha + \gamma N_5 \left[\frac{\|x_0(t_0)\|}{\|x_0(t_0 + \theta_0 \delta)\|} + \frac{\|x_1(t_0 + \delta)\|}{\|x_1(t_0 + \theta_0 \delta)\|} \right] \right\}.$$

К интегралу в левой части также применим теорему о среднем, после чего, перейдя к пределу при $\delta \rightarrow 0$, получим

$$1 \leq K(\alpha + 2N_5\gamma), \quad \alpha > \frac{1-K\gamma(1+2K)}{K(1-K\gamma)},$$

что приводит к противоречию.

Замечание. Ввиду того, что теорема 6 для случая $B = L_1$ нами доказана, она справедлива и для $B = L_p$. Надо лишь, потребовать, чтобы $\gamma(t) \in L_1(0, \infty)$.

Автор пользуется приятной возможностью выразить благодарность акад. З. И. Халилову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Домшлак Ю. И. О поведении на бесконечности решений эволюционного уравнения с неограниченным оператором. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук“, 1961, № 5.
2. Massera J. and Schöffer J. Linear differential equations and functional analysis. Ann. of Math., № 3. 1958.
3. Халилов З. И. Об устойчивости решений уравнения в банаховом пространстве. „ДАН СССР“, т. 137, № 4, 1961.

Ю. И. Домшлак

Гејри-хәтти һәдд васитәси илә һәјәчанландырылмыш
гејри-мәһдуд операторлу еволүсион тәнлијин һәлләринин
сонсузлугда тәбиәти

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә (4) интеграл тәнлијинин һәлләринин (јахуд (3) дифференциал тәнлијинин үмумиләшмиш һәлләринин) сонсузлугда тәбиәти тәдгиг олунур.

Көстәрилир ки, мүүјән шәртләр дахилиндә (4) тәнлијинин мәһдуд һәлләри экспоненциал сүр'әтлә азалыр, B_1 алт фәзасындан олан башлангыч элементләринә ујғун олан һәлләр исә экспоненциал сүр'әтлә артыр.

Һәлләрин сонсузлугда тәбиәти һаггында башга теоремләр дә исбат едилир.

Мәгалә [1] вә [3] ишләрин давамдыр.

АЗӘРБАЙҖАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазийат вә техника елмләри серијасы 1962, № 1.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР.
Серия физико-математических и технических наук, 1962, № 1

В. А. ГОЛУБЕВА

ОСОБЕННОСТИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В работе рассматривается решение линейного уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами с тремя независимыми переменными

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)E(x, y, z) = \delta(x, y, z), \quad x, y, z \in R^3, \quad (1)$$

где $L\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ — однородный дифференциальный оператор порядка

$m \geq 3$ с вещественными коэффициентами.

В случае, когда оператор L задается алгебраической кривой $L(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, не имеющей вещественных особых точек, конструкция функции $E(x, y, z)$ была дана Цейлоном [5]. Мы назовем эту функцию фундаментальным решением оператора L .

Как показал В. А. Боровиков [1], в этом случае функция $E(x, y, z)$ является аналитической во всех точках пространства R^3 , исключая точки характеристического конуса $K(x, y, z) = 0$ оператора L . Поведение фундаментального решения для n независимых переменных в окрестности точек конуса характеристик изучалось Давыдовой, Чудовым, Боровиковым (список соответствующей литературы см. в [1]). Было показано, что либо само фундаментальное решение, либо некоторая из его производных стремится к бесконечности при приближении к характеристическому конусу. В. А. Боровиков получил оценки фундаментального решения в окрестности обыкновенной точки конуса характеристик.

Цель настоящей работы — исследование поведения функции $E(x, y, z)$ в окрестности некоторых ее особых точек для большей части уравнений, задаваемых алгебраической кривой, имеющей особые точки.

Имеет место следующая.

Теорема 1. Для всякого оператора L , задаваемого алгебраической кривой $L(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, имеющей вещественные особые точки в пространстве (α, β, γ) , существует конус $K(x, y, z) = 0$, вне которого функция $E(x, y, z)$ аналитична.

Этот конус назовем характеристическим конусом оператора L .

Настоящая теорема справедлива в предположении, что алгебраическая кривая $L(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ имеет вещественные ветви. В. П. Паламодов также независимо доказал существование такого конуса для общего дифференциального оператора L .

Заметим, что изучение поведения функции $E(x, y, z)$ в окрестности точек конуса $K(x, y, z)=0$ в силу ее однородности можно свести к изучению функции $E(x, y)=E(x, y, 1)$ в окрестности точек алгебраической кривой $\Gamma(x, y)=K(x, y, 1)=0$. Можно показать, что алгебраическая кривая $\Gamma(x, y)=0$ является двойственной к алгебраической кривой $Q(\alpha, \beta)=L(\alpha, \beta, 1)=0$ [2].

Работа состоит из двух частей. В первой части мы предположим, что алгебраическая кривая $Q(\alpha, \beta)=0$ (порядка m) не имеет осо-

бенностей, т. е. имеет максимальный род $p=\frac{(m-1)(m-2)}{2}$. Тогда двой-

ственная кривая $\Gamma(x, y)=0$ необходимо имеет особенности. Мы предположим, что кривая $\Gamma(x, y)=0$ имеет лишь простейшие особенности — двойные точки и точки возврата первого рода, затем приведем разложения функции $E(x, y)$ в окрестности этих особых точек.

Во второй части работы мы предположим, что кривая $Q(\alpha, \beta)=0$ имеет простейшие особые точки. Мы приведем оценки функции в окрестности точки перегиба кривой $\Gamma(x, y)=0$, соответствующей точке возврата первого рода кривой $Q(\alpha, \beta)=0$, в окрестности точки самосапания кривой $\Gamma(x, y)=0$, соответствующей такой же особой точке кривой $Q(\alpha, \beta)=0$, в окрестности двойной касательной к кривой $\Gamma(x, y)=0$, соответствующей двойной точке кривой $Q(\alpha, \beta)=0$, в окрестности изолированной особой точки кривой $\Gamma(x, y)=0$.

Метод, которым получены оценки, будет продемонстрирован на ряде примеров. В начале первой части мы дадим конструкцию функции $E(x, y)$ для оператора L , задаваемого неособой алгебраической кривой $L(\alpha, \beta, \gamma)=0$, а затем уточним ее для случая оператора L , задаваемого алгебраической кривой, имеющей особые точки.

I. $Q(\alpha, \beta)=0$ неособая кривая

1. Предположим, что алгебраическая кривая $Q(\alpha, \beta)=0$, определяющая оператор L , имеет вещественные ветви и не имеет вещественных особых точек. В этом случае Цейлоном была дана следующая конструкция функции $E(x, y)$

$$E(x, y) = \operatorname{Re} \frac{i}{2\pi(m-3)!} \sum_{\alpha} c_{\alpha} \int_{\alpha_0}^{\alpha_{\alpha}(x, y)} \frac{(ax + \beta y + 1)^{m-3} d\alpha}{Q_{\beta}} \quad (2)$$

Интегрирование в каждом члене совершается по алгебраической кривой $Q(\alpha, \beta)=0$ до точки пересечения этой кривой с прямой $ax + \beta y + 1 = 0$. Нижние пределы интегралов — некоторые фиксированные точки. Изменение нижних пределов ведет к изменению функции E на полином степени $m-3$ относительно переменных x, y . Суммирование распространяется на корни уравнения

$$Q\left(\alpha, -\frac{1}{y}(1 + \alpha x)\right) = 0, \quad (3)$$

причем,

$$c_{\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } \operatorname{Im} \alpha_{\alpha} \geq 0 \\ -\frac{1}{2}, & \text{если } \operatorname{Im} \alpha_{\alpha} < 0. \end{cases} \quad (4)$$

Изучим более подробно структуру функции $E(x, y)$ в вещественной плоскости (x, y) . Для этого необходимо изучить множество корней $\alpha_{\alpha}(x, y)$ уравнения (3). Уравнение (3) для алгебраической функции $\alpha(x, y)$ получается исключением β из системы уравнений

$$\begin{cases} Q(\alpha, \beta) = 0 \\ ax + \beta y + 1 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Зафиксируем точку (x, y) в вещественной плоскости (x, y) . Алгебраическое уравнение (3) порядка m будет иметь в этой точке m корней, комплексных или действительных. Будем теперь изменять непрерывно точку (x, y) в вещественной плоскости (x, y) . Все корни $\alpha_{\alpha}(x, y)$ также будут изменяться непрерывно. Они будут различными до тех пор, пока мы не попадем на дискриминантную кривую уравнения (3) $\Gamma(x, y)=0$, получаемую исключением α из системы уравнений

$$\begin{cases} Q\left(\alpha, -\frac{1}{y}(1 + \alpha x)\right) = 0, \\ Q_{\alpha}\left(\alpha, -\frac{1}{y}(1 + \alpha x)\right) = 0. \end{cases}$$

Можно показать, что дискриминантная кривая уравнения (3) $\Gamma(x, y)=0$ есть двойственная к алгебраической кривой $Q(\alpha, \beta)=0$ [2]. На каждой ветви кривой $\Gamma(x, y)=0$ совпадает два корня уравнения (3), а в отдельных точках этой кривой совпадает три и большее число корней. При этом, на ветви кривой $\Gamma(x, y)=0$ совпадают те два корня уравнения (3), которые с вогнутой стороны этой ветви комплексно сопряжены, а с выпуклой — вещественны. Вся вещественная плоскость (x, y) вещественными ветвями кривой $\Gamma(x, y)=0$ делится на области, в каждой из которых число комплексно сопряженных корней уравнения (3) постоянно и равно четному числу (так как каждому комплексному корню соответствует комплексно сопряженный корень). Способ определения числа этих корней будет описан во второй части работы.

Теперь с точностью до полинома степени $m-3$ относительно переменных (x, y) формулу (2) для функции $E(x, y)$ можно записать следующим образом

$$E(x, y) = \operatorname{Re} \frac{i}{4\pi(m-3)!} \sum_{\alpha} \int_{\alpha_0(x, y)}^{\alpha_{\alpha}(x, y)} \frac{(ax + \beta y + 1)^{m-3} d\alpha}{Q_{\beta}}. \quad (6)$$

В каждой области плоскости (x, y) , на которые ее разделяет кривая $\Gamma(x, y)=0$, суммирование распространяется на комплексные корни уравнения (3) с положительной мнимой частью.

В самом деле, это утверждение вытекает из следующих двух замечаний.

а) Рассмотрим интеграл

$$\frac{i}{4\pi} \int_{\alpha_0(x, y)}^{\alpha_{\alpha}(x, y)} \frac{(ax + \beta y + 1)^{m-3} d\alpha}{Q_{\beta}}.$$

в области, где корни $\alpha_{\alpha}(x, y)$ и $\overline{\alpha_{\alpha}}(x, y)$ комплексны. В этой области он принимает чисто вещественное значение. Если теперь через

ветвь кривой $\Gamma(x, y)=0$, где эти корни совпадают, мы перейдем в область плоскости (x, y) , где эти корни становятся вещественными, написанный интеграл станет чисто мнимым и вклада в функцию $E(x, y)$ не даст.

б) Рассмотрим интеграл по алгебраической кривой $Q(\alpha, \beta)=0$

$$\int_{P_0}^{P_1} \frac{(ax+\beta y+1)^{m-3} d\alpha}{Q_\beta},$$

где P_0 и P_1 две произвольные точки на алгебраической кривой. Этот интеграл, вообще, зависит от пути интегрирования и имеет $2p$ циклических периода. Однако легко заметить, что любой циклический период этого интеграла является полиномом степени $m-3$ и не имеет существенной роли в построении функции $E(x, y)$. В дальнейшем мы будем всегда предполагать, что путь интегрирования между двумя точками кривой $Q(\alpha, \beta)=0$ выбран так, что он не включает никакого цикла на этой кривой.

Сделаем еще одно замечание, полезное для дальнейшего. Рассмотрим интеграл по алгебраической кривой $Q(\alpha, \beta)=0$

$$\int_{a(x,y)}^{a(x,y)} \frac{(ax+\beta y+1)^{m-3} d\alpha}{Q_\beta}.$$

Если алгебраическая кривая $Q(\alpha, \beta)=0$ не имеет особенностей, то этот интеграл есть аналитическая функция своего верхнего предела (нижний предел интеграла произволен). Верхний предел этого интеграла есть алгебраическая функция, удовлетворяющая уравнению (3) и ветвящаяся на алгебраической кривой $\Gamma(x, y)=0$.

На основании последнего замечания и формулы (6) для функции $E(x, y)$ можно дать следующую конструкцию.

В точке x, y вещественной плоскости x, y рассмотрим множество комплексных корней уравнения (3) $\alpha_x(x, y)$ с положительной мнимой частью. Обозначим один из них через $\alpha_x(x, y)$. Рассмотрим интеграл по алгебраической кривой $Q(\alpha, \beta)=0$

$$R(x, y) = \int_{\alpha_0}^{\alpha_x(x,y)} \frac{(ax+\beta y+1)^{m-3} d\alpha}{Q_\beta},$$

где α_0 — фиксированная точка кривой. Пусть теперь точка (x, y) описывает путь, обходящий точку ветви кривой $E(x, y)=0$, на которой корень $\alpha_x(x, y)$ совпадает со своим комплексно сопряженным. Вернувшись затем в точку (x, y) по другому пути, не обходящему точек кривой $\Gamma(x, y)=0$, мы получим в ней новое значение функции $R'(x, y)$

$$R'(x, y) = \int_{\alpha_0}^{\overline{\alpha_x(x,y)}} \frac{(ax+\beta y+1)^{m-3} d\alpha}{Q_\beta}.$$

Составим разность

$$R(x, y) - R'(x, y) = \int_{\alpha_x(x,y)}^{\overline{\alpha_x(x,y)}} \frac{(ax+\beta y+1)^{m-3} d\alpha}{Q_\beta}.$$

Мы получили один член суммы (6) в точке (x, y) . Напомним, что путь интегрирования между точками $\alpha_x(x, y)$ и $\overline{\alpha_x(x, y)}$ выбираем, таким образом, чтобы он не содержал циклов на алгебраической кривой $Q(\alpha, \beta)=0$. Чтобы теперь получить значение функции $E(x, y)$, в точке (x, y) , надо взять все комплексные корни $\alpha_x(x, y)$ в этой точке с положительной мнимой частью и поступить с ними аналогично.

Эта конструкция функции $E(x, y)$ будет нам полезна при построении фундаментальных решений уравнений, задаваемых алгебраическими кривыми, имеющими особые точки.

2. Перейдем теперь непосредственно к построению и изучению функции $E(x, y)$ в окрестности точек алгебраической кривой $Q(\alpha, \beta)=0$.

Для иллюстрации применяемого нами метода приведем оценки функции $E(x, y)$ в обыкновенной точке кривой $\Gamma(x, y)=0$. Пусть точки $(0, y_0)$ кривой $\Gamma(x, y)=0$ является обыкновенной и пусть локальное уравнение кривой в окрестности этой точки

$$\Gamma(x, y) = \beta_0(y - y_0) + \alpha x^2 + \dots \quad (\beta_0 y_0 + 1 = 0)$$

Тогда локальное уравнение двойственной кривой $Q(\alpha, \beta)=0$ в окрестности соответствующей точки $(0, \beta_0) = (0, -\frac{1}{y_0})$ имеет следующий вид

$$Q(\alpha, \beta) = y_0(\beta - \beta_0) + \frac{1}{4\alpha} \alpha^2 + \dots$$

Локальное уравнение двойственной кривой $Q(\alpha, \beta)=0$, если известно локальное уравнение кривой $\Gamma(x, y)=0$, находится следующим образом. Текущие координаты кривой $Q(\alpha, \beta)=0$ являются функциями координат точек кривой $\Gamma(x, y)=0$, определенными следующими формулами [2]

$$\alpha = -\frac{\Gamma_x}{x\Gamma_x + y\Gamma_y}, \quad \beta = -\frac{\Gamma_y}{x\Gamma_x + y\Gamma_y}, \quad (1)$$

при условии, что x и y связаны соотношением $\Gamma(x, y)=0$. Из локального уравнения кривой $\Gamma(x, y)=0$ можно получить ряд для y по степеням x . Подставляя его в соотношения (7), мы получим ряды для α и β по степеням x . Исключая x , мы найдем локальное уравнение для кривой $Q(\alpha, \beta)=0$ в окрестности соответствующей точки.

Оценим теперь функции $E(x, y)$ в окрестности точки $(0, y_0)$ по нормали к кривой $\Gamma(x, y)=0$. Имеем для функции $E(x, y)$ формулу (6). Исключая один член суммы, содержащий пару корней $\alpha_x(x, y)$ и $\overline{\alpha_x(x, y)}$, совпадающую на рассматриваемой ветви кривой $\Gamma(x, y)=0$, все члены суммы (6) аналитичны в окрестности рассматриваемой точки. Достаточно поэтому изучить только этот член

$$\Phi(x, y) = \operatorname{Re} \frac{i}{4\pi} \int_{\alpha_x(x,y)}^{\overline{\alpha_x(x,y)}} \frac{(ax+\beta y+1)^{m-3} d\alpha}{Q_\beta}.$$

Оценку мы производим по направлению нормали к кривой $\Gamma(x, y)=0$ в точке $(0, y)$, направление которой в данном случае совпадает с направлением оси x . Имеем

$$\Phi(0, y) = \operatorname{Re} \frac{i}{4\pi} \int_{\alpha_x(0,y)}^{\overline{\alpha_x(0,y)}} \frac{(\beta y+1)^{m-3} d\alpha}{Q_\beta} =$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{Re} \frac{i}{4\pi} \int_{\alpha_x(0,y)}^{\alpha_x(0,y)} \frac{[\beta_0(y-y_0)+y](\beta-\beta_0)]^{m-3} d\alpha}{Q_\beta} = \\
&= \operatorname{Re} \frac{i}{4\pi} [\beta_0(y-y_0)]^{m-3} \int_{\alpha_x(0,y)}^{\alpha_x(0,y)} \frac{d\alpha}{Q_\beta} + \dots = \\
&= \operatorname{Re} \frac{i}{4\pi} \frac{[\beta_0(y-y_0)]^{m-3}}{y_0} \int_{\alpha_x(0,y)}^{\alpha_x(0,y)} x\alpha + \dots = \\
&= \operatorname{Re} \frac{i}{4\pi} \frac{[\beta_0(y-y_0)]^{m-3}}{\alpha} [\alpha_x(0,y) - \overline{\alpha_x(0,y)}] + \dots
\end{aligned}$$

Далее, функция $\alpha_x(0, y)$ имеет локальное разложение по степеням $y-y_0$ следующего вида

$$\alpha_x = \sqrt{-\frac{4a(y-y_0)}{y_0}} \left(\overline{\alpha_x} = -\sqrt{-\frac{4a(y-y_0)}{y_0}} \right).$$

(Это разложение находится из локального уравнения кривой $Q(x, \beta)=0$ при постановке в него $\beta = \frac{1}{y}$). Мы получаем (см. рис. 1)

$$\Phi(0, y) = \begin{cases} \frac{(-1)^{m-3} \sqrt{a}}{\pi y_0^{m-\frac{3}{2}}} (y-y_0)^{m-\frac{5}{2}} + o(y-y_0)^{m-2} & \text{при } \frac{4a(y-y_0)}{y_0} > 0 \\ 0 & \text{при } \frac{4a(y-y_0)}{y_0} < 0 \end{cases}$$

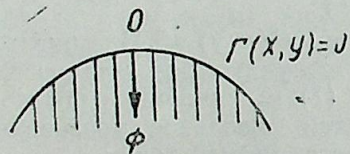


Рис. 1

3. Пусть теперь кривая $\Gamma(x, y)=0$ (рис. 2) имеет двойную точку с координатами (x_0, y_0) , и пусть локальное разложение кривой в окрестности этой точки

$$\Gamma(x, y) = (x-x_0)(y-y_0) + a(x-x_0)^3 + b(y-y_0)^3 + \varphi_4(x-x_0, y-y_0)^*$$

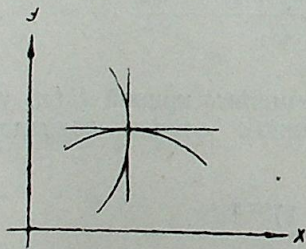


Рис. 2

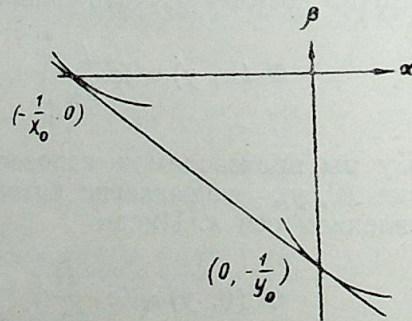


Рис. 3

Тогда локальное уравнение ветви двойственной кривой (рис. 3) в окрестности соответствующей точки $(\alpha_0, 0) = \left(-\frac{1}{x_0}, 0\right)$ есть

$$\alpha - \alpha_0 = -\frac{y_0}{x_0} \beta + \frac{1}{4b} \beta^2 + \dots,$$

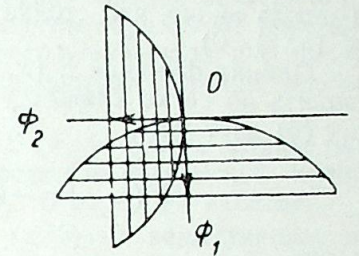
а локальное уравнение ветви двойственной кривой в окрестности другой точки $(0, \beta) = \left(0, -\frac{1}{y_0}\right)$, соответствующей точке (x_0, y_0) кривой $\Gamma(x, y)=0$, есть

$$\beta - \beta_0 = -\frac{x_0}{y_0} \alpha + \frac{1}{4a} \alpha^2 + \dots$$

Оценивая, как и ранее, лишь члены суммы (6), которые дают вклад в окрестности данной точки, мы получим

$$E(x, y) = \Phi_1(x, y) + \Phi_2(x, y) + \psi(x, y),$$

где $\psi(x, y)$ аналитическая функция, а $\Phi_1(x, y)$ и $\Phi_2(x, y)$ имеют вид (рис. 4)



$$\Phi_1(x_0, y-y_0) = \begin{cases} \frac{(-1)^{m-3} \sqrt{a}}{\pi(m-3)! y_0^{m-2}} (y-y_0)^{m-\frac{5}{2}} + o(y-y_0)^{m-2} & \text{при } 4a(y-y_0) > 0 \\ 0 & \text{при } 4a(y-y_0) < 0 \end{cases}$$

$$\Phi_2(x-x_0, y_0) = \begin{cases} \frac{(-1)^{m-3} \sqrt{b}}{\pi(m-3)! x_0^{m-2}} (x-x_0)^{m-\frac{5}{2}} + o(x-x_0)^{m-2} & \text{при } 4b(x-x_0) < 0 \\ 0 & \text{при } 4b(x-x_0) > 0 \end{cases}$$

4. Пусть кривая $\Gamma(x, y)=0$ имеет точку возврата первого рода с координатами $(x_0, 0)$ (рис. 5) и пусть локальное уравнение кривой в окрестности этой точки

$$\Gamma(x, y) = (x-x_0)^2 - y^3 + \dots$$

Тогда локальное уравнение ветви двойственной кривой в окрестности соответствующей точки $(\alpha_0, 0) = \left(-\frac{1}{x_0}, 0\right)$ имеет следующий вид (рис. 6)

* Здесь и в дальнейшем через $\varphi_k(u, v)$ мы обозначаем сумму членов порядка не ниже $k-1$ в локальном уравнении рассматриваемой кривой.

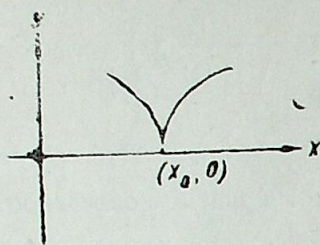


Рис. 5

$$Q(\alpha, \beta) = \alpha - x_0 + \frac{4x_0}{27} \beta^3 + \dots$$

(отсюда видно, что точка $(x_0, 0)$ является точкой перегиба кривой $Q(\alpha, \beta)=0$).

Оценку функции $E(x, y)$ в окрестности точки $(x_0, 0)$ будем производить по сетке кривых $y^3 = k(x - x_0)^2$. Неаналитический вклад в сумму (6) дает член

$$\Phi(x, y) = -\operatorname{Re} \frac{i}{4\pi} \int_{\beta_x(x, y)}^{\alpha_x(x, y)} \frac{(\alpha x + \beta y + 1) d\beta}{Q\alpha},$$

где $\beta_x(x, y)$ вдоль сетки кривых $y^3 = k(x - x_0)^2$ удовлетворяет следующему уравнению

$$\frac{4x_0^3}{27} \beta^3 - \beta x_0 k^{\frac{1}{3}} (x - x_0)^{\frac{2}{3}} + (x - x_0) = 0.$$

Локальное разложение функции $\beta(x, y)$ в окрестности точки $(x_0, 0)$ имеет вид

$$\beta(x, y) = \varphi(k) (x - x_0)^{\frac{1}{3}},$$

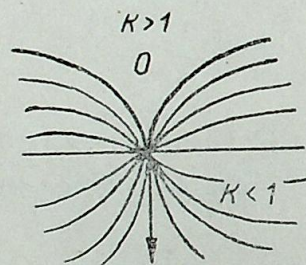
где $\varphi(k)$ комплексный корень уравнения третьего порядка с положительной мнимой частью

$$\frac{4x_0^3}{27} \varphi^3 + \varphi x_0 k^{\frac{1}{3}} + 1 = 0 \quad (k < 1)$$

(при $k < 1$ все корни этого уравнения вещественны). Как и ранее, мы получаем

$$E(x, y) = \Phi(x, y) + \psi(x, y),$$

где $\psi(x, y)$ аналитическая функция, а функция $\Phi(x, y)$ имеет следующий вид (рис. 7)



$x = x_0, K < 1$

Рис. 7

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} \frac{i}{2\pi(m-3)!} \operatorname{Im} \varphi \left(\frac{y^3}{(x-x_0)^2} \right) (x-x_0)^{m-\frac{8}{3}} + o(x-x_0)^{m-\frac{7}{3}} & x \neq x_0 \text{ при } k < 1 \\ & \text{при } k > 1 \\ 0 & \\ \frac{i \cdot 3}{2\pi(m-3)!} \frac{(m-2)3}{(m-2)(2x_0)^{m-2}} \operatorname{Im} y^{\frac{3m-8}{2}} + o\left(y^{\frac{3m-9}{2}}\right) & \text{при } x = x_0, k < 1 \end{cases}$$

II. $Q(\alpha, \beta)=0$ имеет особенности.

Предположим теперь, что алгебраическая кривая $Q(\alpha, \beta)=0$ имеет вещественные особые точки. Формула (6), справедливая и в этом случае, нуждается в некотором уточнении. Если алгебраическая кривая имеет особенности, интеграл по этой алгебраической кривой

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{(\alpha x + \beta y + 1)^{m-3} d\alpha}{Q\beta} \quad (8)$$

также имеет особенности, сосредоточенные в окрестности особых точек кривой $Q(\alpha, \beta)=0$. Например, если алгебраическая кривая $Q(\alpha, \beta)=0$ имеет двойную точку или точку самокасания, то интеграл (8) имеет в этой точке логарифмическую точку ветвления или соответственно полюс первого порядка. Если теперь верхний предел интеграла (8) будет зависеть указанным в предыдущем разделе образом от переменных x и y , то интеграл (8) будет иметь логарифмическую или полярную особенность на прямых плоскости x, y , соответствующих особым точкам кривой $Q(\alpha, \beta)=0$ [3].

Очень удобной для изучения функции $E(x, y)$ в этом случае оказывается конструкция римановой поверхности алгебраической кривой $Q(\alpha, \beta)=0$, принадлежащая Ф. Клейну [4]. Опишем ее вкратце.

Пусть $\Gamma(x, y)=0$ — двойственная к $Q(\alpha, \beta)=0$ вещественная алгебраическая кривая (класса m [2], если m — порядок кривой $Q(\alpha, \beta)=0$). Рассмотрим график кривой $\Gamma(x, y)=0$ в вещественной плоскости x, y . Из всякой точки вещественной плоскости x, y к кривой $\Gamma(x, y)=0$ можно провести m касательных, вещественных или комплексных. Кривая $\Gamma(x, y)=0$ вместе с вещественными асимптотами и вещественными касательными в точках перегиба делит вещественную плоскость x, y на конечное число областей, в каждой из которых число комплексных касательных, которые можно провести из точек этой области к кривой $\Gamma(x, y)=0$, постоянно и равно четному числу (так как вместе с каждой комплексной касательной имеется и комплексно сопряженная касательная к кривой). Каждой такой области поставим в соответствие это число комплексных касательных.

Риманова поверхность, по Клейну, строится тогда так. Над областями плоскости x, y , на которые ее делит кривая $\Gamma(x, y)=0$ вместе с асимптотами и касательными в точках перегиба, строим столько листов, каково поставленное в соответствие этой области число. Листы склеиваем естественным образом: каждый лист склеиваем с листом, изображающим комплексно-сопряженные касательные, вдоль ветвей $\Gamma(x, y)=0$, на которых эти две касательные становятся вещественными. Полученная замкнутая поверхность гомеоморфна римановой поверхности S алгебраической кривой $Q(\alpha, \beta)=0$, построенной обычным образом (см., например [3]).

Гомеоморфизм устанавливается следующим образом. Касательной прямой к $\Gamma(x, y)=0$ на S ставится в соответствие точка (α, β) , соответствующая точке касания этой прямой с $\Gamma(x, y)=0$ в двойственном соответствии (более подробно о гомеоморфизме S и поверхности Клейна см. [4]).

Легко показать, что число комплексно сопряженных касательных в данной области плоскости x, y равно числу комплексно сопряженных корней уравнения (3) в этой области.

Риманова поверхность алгебраической кривой $Q(\alpha, \beta)=0$, построенная над плоскостью (x, y) , оказывается очень удобной для изучения интегралов на алгебраической кривой $Q(\alpha, \beta)=0$, как функций параметров x, y .

Конструкция функции $E(x, y)$ в этом случае сохраняется. Изменение состоит лишь в том, что некоторым особым точкам кривой $Q(\alpha, \beta)=0$ соответствуют целые особые прямые функции $E(x, y)=0$. Эти особенности функции $E(x, y)$ мы теперь охарактеризуем на конкретных примерах.

5. Пусть кривая $Q(\alpha, \beta)=0$ имеет (рис. 8) точку возврата первого рода с координатами $(\alpha_0, 0)$, и пусть ее локальное уравнение в окрестности этой точки есть

$$Q(\alpha, \beta) = (\alpha - \alpha_0)^2 - \beta^3 + \dots$$

Тогда двойственная кривая (рис. 9) в окрестности соответствующей

точки $(x_0, 0) = \left(-\frac{1}{\alpha_0}, 0\right)$ состоит из ветви кривой

$$\Gamma(x, y) = (x - x_0) + \frac{4\alpha_0}{27} y^3 + \dots$$

имеющей точку перегиба, и прямой $x = x_0$, касательной к этой ветви в точке перегиба.

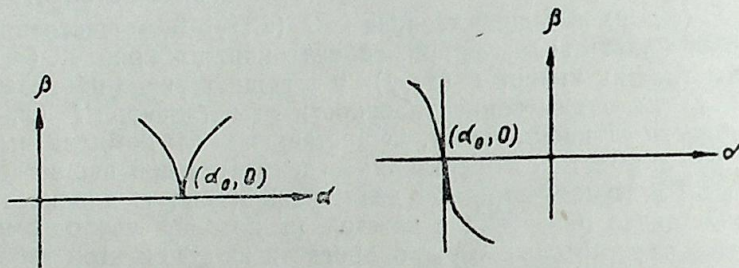


Рис. 8

Рис. 9

Функция $E(x, y)$ в окрестности точки $(x_0, 0)$ имеет вид

$$E(x, y) = \Phi(x, y) + \psi(x, y),$$

где $\psi(x, y)$ аналитическая функция, а $\Phi(x, y)$ — функция, в заштрихованной области (рис. 10) имеющая вид

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2\pi(m-3)!} \frac{(x-x_0)^{m-\frac{10}{3}}}{x_0^{m-\frac{11}{3}}} + o((x-x_0)^{m-3}) & \text{при } y=0, \\ \frac{(-1)^{m-3}\sqrt{y}}{\pi(m-3)!} [\alpha_0(x-x_0)]^{m-\frac{7}{2}} + o((x-x_0)^{m-3}) & \text{на касательной в точке перегиба,} \end{cases}$$

а в остальных областях равная нулю. Заметим, что ветви кривой являются обыкновенными точками фундаментального решения, оценки в которых известны [1].

6. Пусть кривая $Q(\alpha, \beta)=0$ имеет точку самокасания (рис. 11) с координатами $(0, \beta_0)$ и пусть локальное уравнение кривой $Q(\alpha, \beta)=0$ в окрестности этой точки

$$\begin{aligned} Q(\alpha, \beta) &= [y_0(\beta - \beta_0) + ax^2][y_0(\beta - \beta_0) + bx^2] + \dots = \\ &= y_0^2(\beta - \beta_0)^2 + y_0(a+b)x^2(\beta - \beta_0) + \dots \\ a < 0, b < 0, a \neq 0, \beta_0 y_0 + 1 &= 0, y_0 > 0. \end{aligned}$$

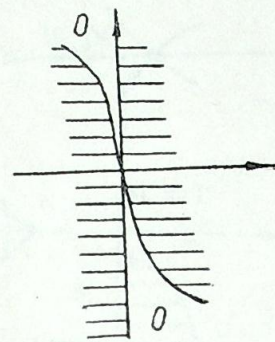


Рис. 10

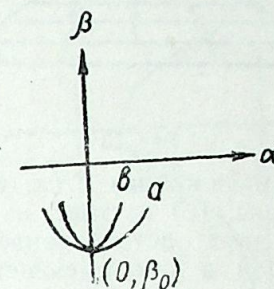


Рис. 11

Тогда локальное уравнение двойственной кривой (рис. 12) в окрестности соответствующей точки $(0, y_0) = \left(0, -\frac{1}{\beta_0}\right)$

$$\Gamma(x, y) = \left[\beta_0(y - y_0) + \frac{1}{4a}x^2\right] \left[\beta_0(y - y_0) + \frac{1}{4b}x^2\right] + \dots$$

(следовательно, точка $(0, y_0)$ также является точкой самокасания кривой $\Gamma(x, y)=0$.)

Функция $E(x, y)$ в окрестности точки $(0, y_0)$ имеет следующий вид

$$E(x, y) = \Phi(x, y) + \psi(x, y),$$

где $\psi(x, y)$ аналитическая функция, а $\Phi(x, y)$ — функция, (рис. 13) имеющая следующий вид

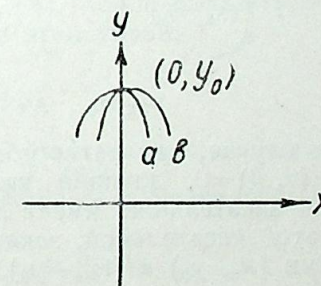


Рис. 12

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} \frac{(-1)^{m-2}}{\pi i(m-3)!} \frac{1}{b-a} \left(-\frac{1}{y_0}\right)^{m-3} \sqrt{\frac{-a}{y_0}} (y-y_0)^{m-\frac{7}{2}} + \\ + \frac{(-1)^{m-2}}{\pi i(m-3)!} \frac{1}{a-b} \left(-\frac{1}{y_0}\right) \sqrt{\frac{-a}{y_0}} (y-y_0)^{m-\frac{7}{2}} + \\ + o((y-y_0)^{m-3}) & \text{при } y-y_0 < 0 \\ 0 & \text{при } y-y_0 > 0 \end{cases}$$

7. Пусть кривая $Q(\alpha, \beta)=0$ имеет (рис. 14) точку самопересечения с координатами $(\alpha_0, 0)$ и пусть локальное уравнение кривой $Q(\alpha, \beta)=0$ окрестности этой точки

$$Q(\alpha, \beta) = x_0^2(\alpha - \alpha_0)^2 - y_0^2 \beta^2 + \varphi_3(\alpha - \alpha_0, \beta) \quad (\alpha_0 x_0 + 1 = 0).$$

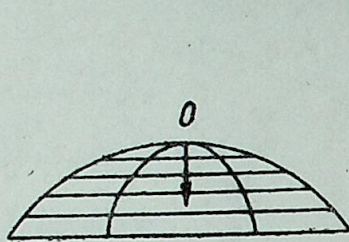


Рис. 13

Двойственная кривая $\Gamma(x, y)=0$ в этом случае (рис. 15) состоит из трех компонент: двух ветвей кривой и общей касательной к ним, имеющей уравнение

$$x = x_0 \left(x_0 = -\frac{1}{\alpha_0} \right)$$

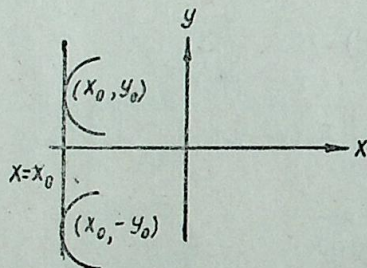


Рис. 15

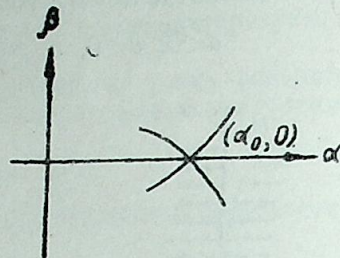


Рис. 14

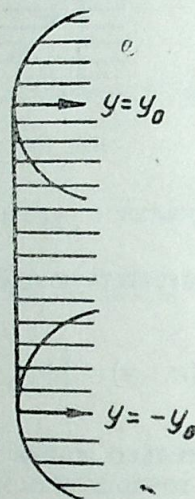


Рис. 16

В этом случае, как легко убедиться, интеграл по алгебраической кривой $Q(\alpha, \beta)=0$, дающий вклад в функцию $E(x, y)$ в окрестности двойной касательной, имеет логарифмические точки ветвления на отрезке этой касательной, заключенном между точками касания с координатами (x_0, y_0) и $(x_0, -y_0)$.

Функция $E(x, y)$ в окрестности двойной касательной имеет вид

$$E(x, y) = \Phi(x, y) + \psi(x, y),$$

где $\psi(x, y)$ аналитическая функция, а $\Phi(x, y)$ функция, определенная следующим образом

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2x_0^{m-2}y_0(m-3)!} (x-x_0)^{m-3} + o(x-x_0)^{m-2} \quad \text{при } -y_0 < y < y_0,$$

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{4x_0^{m-2}y_0(m-3)!} (x-x_0)^{m-3} + o(x-x_0)^{m-2} \quad \text{при } y = y_0,$$

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{4x_0^{m-2}(-y_0)(m-3)!} (x-x_0)^{m-3} + o(x-x_0)^{m-2} \quad \text{при } y = -y_0.$$

Значение функции $E(x, y)$ в области, заключенной между касательной и ветвями кривой (рис. 16), получается как разность двух значений интегралов на алгебраической кривой $Q(\alpha, \beta)=0$ общего вида (7), одного из его значений и значения, полученного после обхода логарифмической точки ветвления этого интеграла.

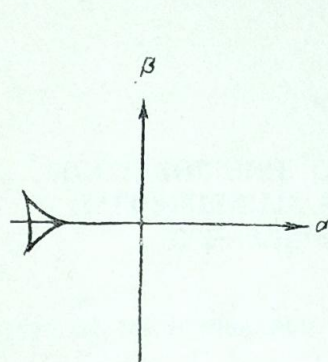


Рис. 17

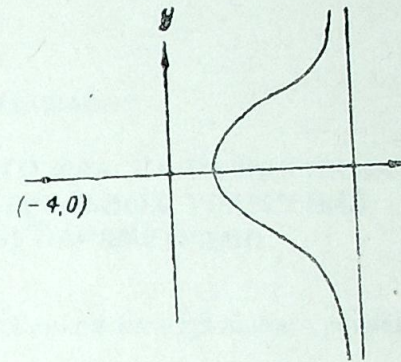


Рис. 18

8. Пример. Пусть уравнение кривой $Q(\alpha, \beta)=0$ имеет вид (рис. 17)

$$\left[\left(\alpha + \frac{1}{4} \right)^2 - \beta^2 + 2 \left(\alpha + \frac{1}{4} \right) \right]^2 - 4 \left[\left(\alpha + \frac{1}{4} \right)^2 - \beta^2 \right] = 0.$$

Тогда двойственная кривая (рис. 18) с уравнением

$$108 y^2 (x-4) + (17x-4)(x+4)^2 = 0$$

имеет изолированную особую точку $(0, -4)$. Можно показать, что функция $E(x, y)$ аналитична в окрестности этой точки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боровиков В. А. Труды Московского математического общества, т. 8, 1959.
2. Уокер Р. Алгебраические кривые. ИЛ, М., 1952.
3. Appell. et Goursat E. Fonctions algébriques et leur intégrales. Paris. 1926, vol. 1.
4. Klein F. Ges. Math. Abh., XXXVIII—XLI.
5. Zeilon N. Arkiv för Math. Astr. och. Fys. B. 9, 1913.

В. А. Голубева

Сабит эмсаллы хүсуси төрэмэли дифференциал
тэнликлэрин фундаментал хэллэринин хүсусијјэтлэри
наггында

ХҮЛАСӨ

Мэгалэ сабит эмсаллы хүсуси төрэмэли

$$L \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) E(x, y, z) = \delta(x, y, z) \quad (1)$$

тэнлијин фундаментал хэллэринин хүсусијјэтлэринин тэдгигинэ нэср олунмушдур.

Көстэрилир ки, хэги ги мэхсуси нөгтэси олан бирчинсли $L(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ чэбри эјриси васитэсилэ верилмиш ихтијари L оператору үчүн $k(x, y, z) = 0$ конусу вардыр ки, онун харичиндэ хэр бир $E(x, y, z)$ фундаментал хэлли аналитикдир.

К. А. НАДЖАФОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ НАГРУЖЕННЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗЛИЧНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Пусть имеем нелинейное нагруженное интегральное уравнение вида

$$\varphi(x) = \int_0^1 k(x, s) F[s, \lambda_1, \lambda_2, \varphi(s), \varphi(\alpha-0), \varphi(\alpha+0)] ds, \quad (1)$$

где $\varphi(x)$ есть неизвестная функция, $k(x, s)$ есть ядро второго рода, заданное в $0 \leq x, s \leq 1$, т. е. оно ограничено в заданном квадрате и имеет конечное число линий разрыва первого рода параллельных оси ou . F — непрерывная относительно s в $0 \leq s \leq 1$ и аналитическая функция относительно $\lambda_1, \lambda_2, \varphi(s), \varphi(\alpha-0), \varphi(\alpha+0)$. λ_1 и λ_2 есть, вообще говоря, комплексные параметры и, наконец, α есть точка, взятая в отрезке $[0, 1]$.

Предположим, что при $\lambda_1 = \lambda_{10}, \lambda_2 = \lambda_{20}$ уравнение (1) имеет решение $\varphi_0(x)$.

Пользуясь аналитичностью заданной функции F и предполагая $\varphi(x) = \varphi_0(x) + \psi(x)$ при $\lambda_1 = \lambda_{10} + \mu_1$ и $\lambda_2 = \lambda_{20} + \mu_2$, уравнение (1) можем представить в виде:

$$\varphi_0(x) + \varphi(x) = \int_0^1 k(x, s) \left[\sum_{\substack{5 \\ \sum_{i=1}^5 \alpha_i > 0}} A_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5}(s, \lambda_{10}, \lambda_{20}) \mu_1^{\alpha_1} \mu_2^{\alpha_2} \psi^{\alpha_3}(s) \psi^{\alpha_4}(\alpha-0) \psi^{\alpha_5}(\alpha+0) \right] ds \quad (2)$$

Учитывая, что решение уравнения (1) есть $\varphi_0(x)$, то уравнение (2) примет следующий вид:

$$\psi(x) = \int_0^1 k(x, s) \left[\sum_{\substack{5 \\ \sum_{i=1}^5 \alpha_i > 0}} A_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5}(s, \lambda_{10}, \lambda_{20}) \mu_1^{\alpha_1} \mu_2^{\alpha_2} \psi^{\alpha_3}(s) \psi^{\alpha_4}(\alpha-0) \psi^{\alpha_5}(\alpha+0) \right] ds \quad (3)$$

(Σ' показывает, что все α_i ($i = \overline{1, 5}$) одновременно не равны нулю); где $A_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5}(s, \lambda_{10}, \lambda_{20})$ есть коэффициенты разложения функции F . Решение уравнения (3) будем искать в виде ряда

$$\psi(x) = \sum_{i+j \geq 1} \mu_1^i \mu_2^j \psi_{ij}(x) \quad (4)$$

Подставляя ряд (4) в уравнение (3), получим:

$$\sum_{i+j \geq 1} \mu_1^i \mu_2^j \psi_{ij}(x) = \int_0^1 k(x, s) \left\{ \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \\ \sum \alpha_i \geq 0}} A_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5}(s, \lambda_{10}, \lambda_{20}) \cdot \mu_1^{\alpha_1} \mu_2^{\alpha_2} \left(\sum_{i+j \geq 1} \mu_1^i \mu_2^j \psi_{ij}(s) \right)^{\alpha_3} \times \right. \\ \left. \times \left(\sum_{i+j \geq 1} \mu_1^i \mu_2^j \psi_{ij}(\alpha-0) \right)^{\alpha_4} \left(\sum_{i+j \geq 1} \mu_1^i \mu_2^j \psi_{ij}(\alpha+0) \right)^{\alpha_5} \right\} ds \quad (5)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\mu_1^i \mu_2^j$ в уравнении (5), получаем систему линейных нагруженных интегральных уравнений относительно функции $\psi_{ij}(x)$

$$\begin{aligned} \psi_{01}(x) &= B(x) \psi_{01}(\alpha-0) + C(x) \psi_{01}(\alpha+0) + \int_0^1 Q(x, s) \psi_{01}(s) ds + f_{01}(x) \\ \psi_{10}(x) &= B(x) \psi_{10}(\alpha-0) + C(x) \psi_{10}(\alpha+0) + \int_0^1 Q(x, s) \psi_{10}(s) ds + f_{10}(x) \\ \psi_{11}(x) &= B(x) \psi_{11}(\alpha-0) + C(x) \psi_{11}(\alpha+0) + \int_0^1 Q(x, s) \psi_{11}(s) ds + f_{11}(x) \\ \psi_{02}(x) &= B(x) \psi_{02}(\alpha-0) + C(x) \psi_{02}(\alpha+0) + \int_0^1 Q(x, s) \psi_{02}(s) ds + f_{02}(x) \\ \psi_{20}(x) &= B(x) \psi_{20}(\alpha-0) + C(x) \psi_{20}(\alpha+0) + \int_0^1 Q(x, s) \psi_{20}(s) ds + f_{20}(x) \\ &\dots \dots \dots \\ \psi_{m+n}(x) &= B(x) \psi_{m+n}(\alpha-0) + C(x) \psi_{m+n}(\alpha+0) + \int_0^1 Q(x, s) \psi_{m+n}(s) ds + f_{m+n}(x) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Пронумеруем функции $\psi_{ij}(x)$, входящие в эту систему, и получим линейные нагруженные интегральные уравнения в виде:

$$\omega_i(x) = B(x) \omega_i(\alpha-0) + C(x) \omega_i(\alpha+0) + \int_0^1 Q(x, s) \omega_i(s) ds + W_i(x, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{i-1})_{(i=1, \infty)} \quad (6)$$

Здесь $B(x)$, $C(x)$, $Q(x, s)$ и $W_i(x, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{i-1})$ есть вполне определенные функции.

Теперь покажем, что при определенных условиях линейное нагруженное интегральное уравнение

$$\omega(x) = B(x) \omega(\alpha-0) + C(x) \omega(\alpha+0) + \int_0^1 Q(x, s) \omega(s) ds + f(x) \quad (7)$$

можно привести к линейному интегральному уравнению Фредгольма. С этой целью перехода к пределу, в равенстве (7), соответственно будем иметь

$$[1-B(\alpha-0)] \omega(\alpha-0) - C(\alpha-0) \omega(\alpha+0) = \int_0^1 Q(\alpha-0, s) \omega(s) ds + f(\alpha-0) \quad (8)$$

$$-B(\alpha+0) \omega(\alpha-0) + [1-C(\alpha+0)] \omega(\alpha+0) = \int_0^1 Q(\alpha+0, s) \omega(s) ds + f(\alpha+0) \quad (9)$$

Очевидно, что из (8) и (9) можно определить $\omega(\alpha-0)$ и $\omega(\alpha+0)$, т. е.

$$\omega(\alpha-0) = \frac{\begin{vmatrix} \int_0^1 Q(\alpha-0, s) \omega(s) ds + f(\alpha-0) & C(\alpha-0) \\ \int_0^1 Q(\alpha+0, s) \omega(s) ds + f(\alpha+0) & 1-C(\alpha+0) \end{vmatrix}}{\Delta} \quad (10)$$

$$\omega(\alpha+0) = \frac{\begin{vmatrix} 1-B(\alpha-0) & \int_0^1 Q(\alpha-0, s) \omega(s) ds + f(\alpha-0) \\ -B(\alpha+0) & \int_0^1 Q(\alpha+0, s) \omega(s) ds + f(\alpha+0) \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad (11)$$

где положено

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-B(\alpha-0) & -C(\alpha-0) \\ -B(\alpha+0) & 1-C(\alpha+0) \end{vmatrix} \neq 0$$

Выражение $\omega(\alpha-0)$ и $\omega(\alpha+0)$, определяемые равенствами (10) и (11), подставим в (7) и, обозначив

$$\begin{aligned} T(x, s) &= Q(x, s) + B(x) E_1(s) + C(x) E_2(s) \\ g(x) &= f(x) + \gamma_1 + \gamma_2, \end{aligned}$$

получим

$$\omega(x) = \int_0^1 T(x, s) \omega(s) ds + g(x), \quad (12)$$

где функции $E_1(x)$, $E_2(x)$ и постепенные γ_1 , γ_2 вполне определены.

Следовательно, решение нагруженного линейного интегрального уравнения (7) приводится к решению линейного интегрального уравнения Фредгольма (12). Тогда, очевидно, решение каждого уравнения (6) можно привести к решению системы уравнений:

$$\omega_i(x) = \int_0^1 T(x, s) \omega_i(s) ds + g_i(x, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{i-1})_{(i=1, \infty)} \quad (13)$$

Известно, что если единица не является характеристическим числом для ядра $T(x, s)$, то система (13), а также система (6), имеет однозначное решение. Все эти рассуждения показывают, что формально мы построили ряд (4).

Теперь покажем, что ряд (4) есть сходящийся. С этой целью рассмотрим функциональное уравнение:

$$\varphi(\psi^*, \mu_1, \mu_2) \equiv \psi^* - M \cdot \frac{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot (\psi^*)^3}{\left(1 - \frac{\mu_1}{\rho_1}\right) \left(1 - \frac{\mu_2}{\rho_2}\right) \left(1 - \frac{\psi^*}{\rho_3}\right) \left(1 - \frac{\psi^*}{\rho_4}\right) \left(1 - \frac{\psi^*}{\rho_5}\right)} = 0, \quad (14)$$

где $\Phi(\psi^*, \mu_1, \mu_2)$ есть аналитическая функция относительно своих аргументов, причем $\Phi(0, 0, 0) = 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial \psi^*} \Big|_{\psi^*=\mu_1=\mu_2=0} = 1$. Поэтому из соотношения

$\Phi(\psi^*, \mu_1, \mu_2) = 0$, ψ^* можно найти через μ_1 и μ_2 . Если $\psi^* = N(\mu_1, \mu_2)$ есть решение этого уравнения, то $N(\mu_1, \mu_2)$ представляет собой аналитическую функцию относительно μ_1 и μ_2 в определенной окрестности $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0$.

Решение уравнения (14) ищем в виде ряда:

$$\psi^* = \sum_{i+j \geq 1} \mu_1^i \mu_2^j \psi_{ij}^* \quad (15)$$

Подставляя (15) в уравнение (14) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\mu_1^i \mu_2^j$, вводя нумерования ψ_{ij}^* , получим систему нагруженных функциональных уравнений вида:

$$\omega_i^* = B^* \omega_i^*(\alpha-0) + C^* \omega_i^*(\alpha+0) + Q^* \omega_i^* + W_i^*(\omega_1^*, \omega_2^*, \dots, \omega_{i-1}^*)_{(i=1, \infty)} \quad (16)$$

(очевидно, что $\omega_i^* = \omega_i^*(\alpha-0) = \omega_i^*(\alpha+0)$).

Так как уравнение (14) есть мажоранта для уравнения (3), то непосредственно проверкой можно убедиться, что

$$|\omega_i(x)| < \omega_i^* \quad (i=1, \infty) \quad (17)$$

Мы показали, что решение уравнения (14), т. е. $\psi^* = N(\mu_1, \mu_2)$, есть аналитическая функция относительно своих аргументов, а это показывает, что ряд (15) сходится. На основании неравенства (17) утверждается сходимость ряда (4).

Результат этого исследования можем сформулировать в виде следующей теоремы:

Теорема: Если единица не является характеристическим числом ядра $T(x, s)$, то решение уравнения (1) продолжается однозначно в окрестности точки $(\lambda_{10}, \lambda_{20})$, причем, это решение представляет голоморфную функцию относительно λ_1 и λ_2 указанной окрестности так, что

$$\lim_{\substack{\lambda_1 \rightarrow \lambda_{10} \\ \lambda_2 \rightarrow \lambda_{20}}} \varphi(x, \lambda_1, \lambda_2) = \varphi_0(x).$$

Г. Э. Нэчэфов

Бир синиф хэтти олмажан мүхтәлиф параметрли жүкләнмиш интеграл тәнликләрин һәллинин тәдгиги

ХҮЛАСӘ

Мәғаләдә

$$\varphi(x) = \int_0^1 k(x, s) F[s, \lambda_1, \lambda_2, \varphi(s), \varphi(\alpha-0), \varphi(\alpha+0)] ds \quad (1)$$

шәклиндә олан, хәтти олмажан мүхтәлиф параметрли жүкләнмиш интеграл тәнликләрин һәллине бахылып.

Бурада $\varphi(x)$ —ахтарылан функција, $k(x, s)$ $0 \leq x, s \leq 1$ квадратында верилмиш икинчи нөв нүвәдир. F — $[0, 1]$ парчасында S -ә көрә кәсилмәз вә $\lambda_1, \lambda_2, \varphi(s), \varphi(\alpha-0), \varphi(\alpha+0)$ аргументләринә нәзәрән аналитик функциядыр. λ_1 вә λ_2 үмумијәтлә комплекс параметрләрdir. α исә $[0, 1]$ парчасында көтүрүлмүш нөгтәдир.

F функцијасынын аналитиклијиндән, верилмиш тәнлијин $\lambda_1 = \lambda_{10}, \lambda_2 = \lambda_{20}$ гијмәтләриндә $\varphi_0(x)$ һәллиндән вә $\lambda_1 = \lambda_{10} + \mu_1, \lambda_2 = \lambda_{20} + \mu_2$ гијмәтләриндә исә $\varphi(x) = \varphi_0(x) + \psi(x)$ һәллинин варлығыны фәрз едәрәк, (1) тәнлијини ашағыдакы шәкилдә јазмаг олар.

$$\psi(x) = \int_0^1 k(x, s) \left[\sum_{\substack{i=1 \\ \sum_{j=1}^i \alpha_j > 0}}^{\infty} A_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4} (s, \lambda_{10}, \lambda_{20}) \mu_1^{\alpha_1} \mu_2^{\alpha_2} \psi^{\alpha_3}(s) \psi^{\alpha_4}(\alpha-0) \psi^{\alpha_5}(\alpha+0) \right] ds \quad (2)$$

$$(2) \text{ тәнлијинин һәллини } \psi(x) = \sum_{i+j \geq 1} \mu_1^i \mu_2^j \psi_{ij}(x) \quad (3) \text{ сырасы шәклиндә}$$

ахтараг. Она көрә (3) сырасындан $\psi(x)$ -ин гијмәтини (2) тәнлијиндә јазыб, $\mu_1^i \mu_2^j$ -ин ејни дәрәчәлиләринин әмсалларынын мүгајисәси нәтичәсиндә $\psi_{ij}(x)$ -ә нәзәрән $(i+j = \overline{1, \infty})$ хәтти жүкләнмиш интеграл тәнликләр системи алмыш оларыг. Бу системә дахил олан $\psi_{ij}(x)$ функцијаларыны јенидән нөмрәләсәк

$$\omega_i(x) = B(x) \omega_i(\alpha-0) + C(x) \omega_i(\alpha+0) + \int_0^1 Q(x, s) \omega_i(s) ds + W_i(x, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{i-1}) \quad (i=1, \infty) \quad (4)$$

шәклиндә олан хәтти жүкләнмиш интеграл тәнликләр системини аларыг.

Бурада $B(x), C(x), Q(x, s)$ вә $W_i(x, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{i-1})$ тамамилә тәјин олунмуш функцијалардыр.

Интеграл тәнликләр нәзәријјәсиндән мәлүмдур ки, мүјјән шәртләр дахилиндә һәр һансы

$$\omega(x) = B(x) \omega(\alpha-0) + C(x) \omega(\alpha+0) + \int_0^1 Q(x, s) \omega(s) ds + f(x)$$

шәклиндә олан хәтти жүкләнмиш интеграл тәнлији

$$\omega(x) = \int_0^1 T(x, s) \omega(s) ds + g(x)$$

шәклиндә олан хәтти интеграл тәнлијинә кәтирилир.

Бурада $T(x, s) = Q(x, s) + B(x) E_1(s) + C(x) E_2(s)$

$$g(x) = f(x) + \gamma_1 + \gamma_2$$

ишарә едилмишдир ки, $E_1(s), E_2(s)$ функцијалары вә γ_1, γ_2 сабитләри мәлүмдур.

Демәли (4) системинин һәлли

$$\omega_i(x) = \int_0^1 T(x, s) \omega_i(s) ds + g_i(x, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{i-1}) \quad (i=1, \infty) \quad (5)$$

хәтти интеграл тәнликләр системинин һәллине кәтирилир. Сонра исә формал олараг гурдуғумуз (3) сырасынын јығылан олдугу кәстәрилир.

Беләликлә, бу арашдырманын нәтижәсини ашағыдакы теорем шәк-
линдә ифадә етмәк олар.

Теорем: Әкәр ваһид $T(x, s)$ нүвәсинин характеристик әдәди
дежилсә, онда λ_1 вә λ_2 -јә нәзәрән һоломорф функција олан (1) тәнли-
јинин һәлли $(\lambda_{10}, \lambda_{20})$ нөгтәси әтрафында биргиләтли давам едир,
белә ки, кәстәрилән әтрафда

$$\lim_{\substack{\lambda_1 \rightarrow \lambda_{10} \\ \lambda_2 \rightarrow \lambda_{20}}} \varphi(x, \lambda_1, \lambda_2) = \varphi_0(x) \text{ олур.}$$

С. Я. ЯКУБОВ

ТЕОРИЯ ГИЛЬБЕРТА-ШМИДТА ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕ- СИММЕТРИЧНЫМ ЯДРОМ

Эта статья посвящена некоторым применениям ранее полученных
автором результатов [1].

Удастся доказать ряд новых теорем о существовании собственных
значений интегральных и интегро-дифференциальных операторов. На-
пример, если ядро $K(x, y)$ таково, что

$$\sum_{v=0}^m (-1)^v \overline{f_v(x)} \frac{\partial^{2v}}{\partial x^{2v}} \left[f_v(x) K(x, y) \right] = S(x, y)$$

симметричное ядро (здесь $f_v(x)$ — произвольные комплекснозначные
функции) и $K^*(a, y) = 0$; $K^{(v)}(b, y) = 0$; $v = 0, 1, \dots, m-1$, то для ядра $K(x, y)$
справедлива обобщенная теория Гильберта-Шмидта.

Через $C^{(m)} (m \geq 0)$ будем обозначать пространство, состоящее из
всех комплекснозначных функций, имеющих m -ю непрерывную про-
изводную в $[a, b]$ с метрикой

$$\|\varphi\|_m = \max_{\substack{a \leq x \leq b \\ 0 \leq v \leq m}} |\varphi^{(v)}(x)|$$

Очевидно, $C^{(m)}$ есть банахово пространство. Используя теоремы
статьи [1], докажем теоремы существования, нахождения и т. д. соб-
ственных значений для интегральных операторов, при менее ограни-
чительных предположениях, чем симметричность ядра.

Рассмотрим интегральный оператор

$$A\varphi(x) = \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy$$

Теорема 1. Пусть функция $K(x, y)$ ($x, y \in [a, b]$) удовлетворяет
условиям:

- а) $K(x, y)$ измерима по y при всех $x \in [a, b]$;
- б) для любого $x \in [a, b]$

$$\int_a^b |K(x, y)| dy < \infty$$

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ x+h \in [a,b]}} \int_a^b |K(x+h, y) - K(x, y)| dy = 0;$$

в) существует $f(x) \in L_2$, такой, что почти при всех $x, y \in [a, b]$

$$|f(x)|^2 K(x, y) = |f(y)|^2 \overline{K(y, x)}, f(x) \neq 0$$

и функция $K(x, y)$ не эквивалентна нулю.

Тогда:

1. Существует по крайней мере одно собственное значение оператора A .

2. Все его собственные значения вещественны.

3. Собственные функции φ_i и φ_k соответствующие различным собственным значениям λ_i и λ_k , удовлетворяют условию ортогональности с весом $|f(x)|^2$, т. е.

$$(\varphi_k, I\varphi_i) = \int_a^b |f(x)|^2 \varphi_k(x) \overline{\varphi_i(x)} dx = 0.$$

4. Совокупность собственных значений $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| \geq \dots$ которым соответствуют собственные функции, нормированные условиями $(\varphi_k, I\varphi_i) = \delta_{ik}$, обладает следующими вариационными свойствами: на множество непрерывных функций удовлетворяющих условиям

$$(\varphi, I\varphi) = \int_a^b |f(x)\varphi(x)|^2 dx = 1$$

$$(\varphi, I\varphi_k) = \int_a^b |f(x)|^2 \varphi(x) \overline{\varphi_k(x)} dx = 0 \quad k = 1, n-1$$

абсолютное значение функционала

$$(\varphi, IA\varphi) = \int_a^b \int_a^b \overline{K(x, y)} |f(x)|^2 \varphi(x) \overline{\varphi(y)} dx dy$$

достигает на функции $\varphi_n(x)$ максимума, равного $|\lambda_n|$ $n=1, 2, \dots$

Доказательство. Известно, что условия а) и б) являются необходимыми и достаточными для полной непрерывности интегрального оператора A в банаховом пространстве [2]. Определим дистрибутивный оператор I , действующий из C в C^* равенством

$$(\psi, I\varphi) = \int_a^b |f(x)|^2 \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx. \quad (1)$$

Действительно, так как при любом фиксированном $\varphi(x) \in C$ функция $|f(x)|^2 \varphi(x)$ суммируема в (a, b) , то при всех $\psi(x) \in C$

$$|(\psi, I\varphi)| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 |\varphi(x)| dx \right) \cdot \|\psi\|,$$

т. е. при любом фиксированном $\varphi \in C$ равенство (1) определяет линейный функционал в C . Очевидно, I является положительным оператором, так как при любом $\varphi \in C$,

$$(\varphi, I\varphi) = \int_a^b |f(x)\varphi(x)|^2 dx \geq 0. \quad (2)$$

Покажем, что оператор A I -симметризуемый. При доказательстве будем пользоваться теоремой Фубини, которая предполагает суммируемость подинтегральной функции. Мы должны установить суммируемость функции $K(x, y)|f(x)|^2 \varphi(x) \overline{\varphi(y)}$ в $(a, b; a, b)$ при любом

$\varphi(x), \psi(x) \in C$. Ясно, что из условия б) вытекает, что $\int_a^b |K(x, y)| dy$ не-

прерывна в $[a, b]$.

В самом деле,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b |K(x+h, y)| dy - \int_a^b |K(x, y)| dy \right| &\leq \int_a^b \|K(x+h, y) - K(x, y)\| dy \leq \\ &\leq \int_a^b |K(x+h, y) - K(x, y)| dy. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу условия б), следует непрерывность $\int_a^b |K(x, y)| dy$ в $[a, b]$.

$$\text{Тогда} \quad \max_{a \leq x \leq b} \int_a^b |K(x, y)| dy < \infty \text{ и}$$

$$\int_a^b \left(\int_a^b \overline{K(x, y)} |f(x)|^2 \varphi(x) \overline{\psi(y)} dy \right) dx \leq$$

$$\leq \max_{a \leq x \leq b} |\varphi(x)| \max_{a \leq y \leq b} |\psi(y)| \int_a^b |f(x)|^2 \left(\int_a^b |K(x, y)| dy \right) dx \leq$$

$$\leq \|\varphi\|_0 \|\psi\|_0 \cdot \max_{a \leq x \leq b} \int_a^b |K(x, y)| dy \cdot \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Тогда, по известной теореме* $\overline{K(x, y)|f(x)|^2 \varphi(x) \overline{\psi(y)}}$ суммируема. Значит при любом $\varphi(x) \in C$

$$\begin{aligned} (\varphi, IA\psi) &= \int_a^b |f(x)|^2 \varphi(x) \left(\int_a^b K(x, y) \psi(y) dy \right) dx = \\ &= \int_a^b \int_a^b \overline{K(x, y)} |f(x)|^2 \varphi(x) \overline{\psi(y)} dy dx = \end{aligned}$$

* См. например, И. П. Натансон. Теория функций вещественной переменной, стр. 378.

$$= \int_a^b \int_a^b K(y, x) |f(y)|^2 \varphi(x) \overline{\psi(y)} dy dx = \\ = \int_a^b |f(y)|^2 \overline{\psi(y)} \left(\int_a^b K(y, x) \varphi(x) dx \right) dy = \overline{(\psi, IA)\varphi},$$

т. е. интегральный оператор A I -симметризуемый.

С другой стороны, так как для ограниченного оператора условия регулярности на бесконечности выполняются, то к оператору A можно применять теорему 2 статьи [1]. Покажем, что все ее условия выполняются.

Так как A вполне непрерывный оператор в банаховом пространстве C , то по теории Рисса-Шаудера условие 2) теоремы 2 выполняется.

Поскольку почти при всех $x \in [a, b]$ $f(x) \neq 0$, то ввиду (2), $(\varphi, I\varphi) \geq 0$ и из $(\varphi, I\varphi) = 0$ следует, что $\varphi(x) \equiv 0$. Значит условие 3) теоремы 2 имеет место.

С другой стороны, если $IA = 0$, то при любом $\varphi \in C$ $(A\varphi, IA\varphi) = 0$, откуда следует, что $A\varphi = 0$. Но интегральный оператор A равен нулю в пространстве C тогда и только тогда, когда ядро $K(x, y)$ эквивалентно нулю, что противоречит условиям теоремы. Значит условие 1) теоремы 2 также выполняется.

Итак, все условия теоремы 2 выполняются, после применения которой теорема полностью доказывается.

Доказанная теорема остается в силе при других условиях, налагаемых на $K(x, y)$. Предварительно надо установить ряд фактов.

Через $C_0^{(2m)}$ ($m \geq 1$) будем обозначать пространством функций из $C^{(2m)}$ удовлетворяющих граничным условиям: $\varphi^{(k)}(a) = \varphi^{(k)}(b) = 0$, $k = 0, m-1$. Очевидно, $C_0^{(2m)}$ есть банахово пространство.

Лемма. Множество $M \subset C^{(m)}$ ($m \geq 0$) компактно в $C^{(m)}$, если для любого $\varphi \in M$ $|\varphi^{(v)}(x)| \leq K$ ($v = 0, m$) и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех $|x_1 - x_2| < \delta$, $x_1, x_2 \in [a, b]$

$$|\varphi^{(v)}(x_1) - \varphi^{(v)}(x_2)| < \varepsilon \quad (v = 0, m).$$

Доказательство. Так как функции из M равномерно ограничены и равномерно непрерывны, то по теореме Арцеля существует последовательность $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty \subset M$, равномерно сходящаяся к некоторой непрерывной функции $\varphi_0(x)$.

Рассмотрим множество непрерывных функций $\varphi'_n(x)$. Так как эти функции равномерно ограничены и равномерно непрерывны, то существует подпоследовательность $\varphi'_{n_1}(x)$, равномерно сходящаяся к некоторой непрерывной функции $\varphi'_1(x)$. При помощи таких рассуждений находим последовательность $\varphi^{(v)}_{n_v}(x)$ $v = 1, m$ равномерно стремящуюся к непрерывной функции $\varphi_v(x)$. Однако по известной теореме анализа $\varphi_v(x) = \varphi^{(v)}_0(x)$ $v = 1, m$. Итак, $\varphi_0(x) \in C^{(m)}$ и последовательность φ_{n_m} в метрике $C^{(m)}$ сходится к $\varphi_0(x)$.

Замечание. Аналогичный результат верен и для пространства $C_0^{(2m)}$.

Рассмотрим оператор

$$\psi(x) = A_p \varphi(x) = \int_a^b K(x, y) \varphi^{(p)}(y) dy.$$

Теорема 2. Пусть функция $K(x, y)$ удовлетворяет условиям:

- а) $K^{(v)}_x(x, y)$ $v = 0, m$ [$v = 0, 2m$] непрерывна в $[a, b; a, b]$
б) [при всех $y \in [a, b]$, $K^{(v)}_x(a, y) = K^{(v)}_x(b, y) = 0$, $v = 0, m-1$]

Тогда, оператор A_p , $p = 0, m$ [$p = 0, 2m$] действует из $C^{(m)}$ в $C^{(m)}$ [из $C_0^{(2m)}$ в $C_0^{(2m)}$] и вполне непрерывен в $C^{(m)}$ [$C_0^{(2m)}$].

Доказательство. Так как функция $K^{(v)}_x(x, y)$ $v = 0, m$ [$v = 0, 2m$] непрерывна в $[a, b; a, b]$, то по теореме о дифференцировании под знаком интеграла имеем при любом $\varphi \in C^{(m)}$ [$\varphi \in C_0^{(2m)}$],

$$\psi^{(v)}(x) = \int_a^b K^{(v)}_x(x, y) \varphi^{(p)}(y) dy \quad v, \quad p = 0, m \quad [v, p = 0, 2m]$$

Значит, оператор A_p $p = 0, m$ [$p = 0, 2m$] действует из $C^{(m)}$ в $C^{(m)}$ [из $C_0^{(2m)}$ в $C^{(2m)}$]. Докажем полную непрерывность оператора A_p $p = 0, m$ [$p = 0, 2m$] в $C^{(m)}$ [$C_0^{(2m)}$].

Из непрерывности функции $K^{(v)}_x(x, y)$ $v = 0, m$ [$v = 0, 2m$] в $[a, b; a, b]$ вытекает, что существует число M , такое, что

$$|K^{(v)}_x(x, y)| \leq M, \quad v = 0, m \quad [v = 0, 2m]$$

Пусть Φ ограниченное множество в $C^{(m)}$ [$C^{(2m)}$], т. е. при всех $\varphi \in \Phi$

$$\|\varphi\|_m = \max_{\substack{a < x < b \\ 0 < v < m}} |\varphi^{(v)}(x)| \leq N, \quad \|\varphi\|_{2m} = \max_{\substack{a < x < b \\ 0 < v < 2m}} |\varphi^{(v)}(x)| \leq N$$

Покажем, что множество $A_p \Phi$ $p = 0, m$ [$p = 0, 2m$] компактно в $C^{(m)}$ [$C_0^{(2m)}$]. Для всех $\varphi \in \Phi$

$$|\psi^{(v)}(x)| \leq \int_a^b |K^{(v)}_x(x, y)| \cdot |\varphi^{(p)}(y)| dy \leq M \cdot \max_{a < y < b} |\varphi^{(p)}(y)| (b-a) \leq \\ \leq MN(b-a) \quad v, \quad p = 0, m \quad [v, p = 0, 2m],$$

где $M = \max_{0 < v < m} M_v$, $[M = \max_{0 < v < 2m} M_v]$.

С другой стороны, из непрерывности $K^{(v)}_x(x, y)$ $v = 0, m$ [$v = 0, 2m$] в $[a, b; a, b]$ вытекает, что всякому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta_v(\varepsilon) > 0$, что при всех $|x_1 - x_2| < \delta_v$, $y \in [a, b]$

$$|K^{(v)}_x(x_1, y) - K^{(v)}_x(x_2, y)| < \varepsilon.$$

Тогда, при всех $|x_1 - x_2| < \delta$, где $\delta = \min_{0 < v < m} \delta_v$, $[\delta = \min_{0 < v < 2m} \delta_v]$

$$|\psi^{(v)}(x_1) - \psi^{(v)}(x_2)| \leq \int_a^b |K^{(v)}_x(x_1, y) - K^{(v)}_x(x_2, y)| \cdot |\varphi^{(p)}(y)| dy \leq$$

$$\leq \varepsilon \max_{a < y < b} |\varphi^{(p)}(y)| \leq \varepsilon N \quad v, \quad p = 0, m \quad [v, p = 0, 2m].$$

Значит, по лемме, множество $A_p \Phi p = \overline{0, m} [p = \overline{0, 2m}]$ компактно в $C^{(m)}[C_0^{(2m)}]$. Итак, полная непрерывность оператора $A_p p = \overline{0, m} [p = \overline{0, 2m}]$ доказана.

Рассмотрим интегральный оператор

$$A\varphi = \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy.$$

Теорема 3. Пусть функция $K(x, y)$ удовлетворяет условиям

- а) $K_x^{(\nu)}(x, y)$, $\nu = \overline{0, 2m}$ непрерывна в $[a, b; a, b]$
 б) $K_x^{(\nu)}(a, y) = K_x^{(\nu)}(b, y) = 0$ при всех $y \in [a, b]$ $\nu = \overline{0, m-1}$ ($m \geq 1$)
 в) существуют функции $f_\nu(x) \in C^{(2\nu)}$ $\nu = \overline{1, m}$ $f_0(x) \in L_2$, такие, что почти при всех $x, y \in [a, b]$

$$\sum_{\nu=0}^m (-1)^\nu f_\nu(x) [f_\nu(x)K(x, y)]_x^{(2\nu)} = \sum_{\nu=0}^m (-1)^\nu \overline{f_\nu(y)} [f_\nu(y)K(y, x)]_y^{(2\nu)},$$

$f_0(x) \neq 0$ и функция $K(x, y)$ не эквивалентна нулю.

Тогда существует, по крайней мере, одно собственное значение оператора A , все его собственные значения вещественны, собственные функции φ_i и φ_k , соответствующие различным собственным значениям λ_i и λ_k , удовлетворяют условию

$$(\varphi_k, I\varphi_i) = \sum_{\nu=0}^m (-1)^\nu \int_a^b f_\nu(x) \varphi_k(x) [f_\nu(x) \varphi_i(x)]^{(2\nu)} dx = 0$$

Совокупность собственных значений $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| \geq \dots$ которым соответствуют собственные функции, нормированные условиями $(\varphi_k, I\varphi_i) = \delta_{ik}$, обладает следующими вариационными свойствами: на множестве функций $\varphi(x) \in C_0^{(2m)}$, удовлетворяющих условиям

$$(\varphi, I\varphi) = \sum_{\nu=0}^m (-1)^\nu \int_a^b f_\nu(x) \varphi(x) [\overline{f_\nu(x) \varphi(x)}]^{(2\nu)} dx = 1$$

$$(\varphi, I\varphi_k) = \sum_{\nu=0}^m (-1)^\nu \int_a^b f_\nu(x) \varphi(x) [\overline{f_\nu(x) \varphi_k(x)}]^{(2\nu)} dx = 0 \quad k = \overline{1, n-1}$$

абсолютное значение функционала

$$(\varphi, IA\varphi) = \sum_{\nu=0}^m (-1)^\nu \int_a^b \int_a^b f_\nu(x) [\overline{f_\nu(x) K(x, y)}]_x^{(2\nu)} \varphi(x) \overline{\varphi(y)} dy dx$$

достигает на функции $\varphi_n(x)$ максимума, равного $|\lambda_n|$ $n = 1, 2, \dots$

Доказательство. Определим оператор I , действующий из $C_0^{(2m)}$ в $[C_0^{(2m)}]^*$ равенством

$$(\psi, I\varphi) = \sum_{\nu=0}^m (-1)^\nu \int_a^b f_\nu(x) \psi(x) [\overline{f_\nu(x) \varphi(x)}]^{(2\nu)} dx.$$

Докажем положительность оператора I . Так как при любом $\varphi \in C_0^{(2m)}$ функции $[f_\nu(x) \varphi(x)]^{(k)}$ $k = \overline{0, 2\nu-1}$, $\nu = \overline{1, m}$ абсолютно непрерывны, то интегрируя по частям, получаем, что при $\nu = \overline{1, m}$

$$\begin{aligned} \int_a^b f_\nu(x) \varphi(x) [\overline{f_\nu(x) \varphi(x)}]^{(2\nu)} dx &= [f_\nu(x) \varphi(x)] [\overline{f_\nu(x) \varphi(x)}]^{(2\nu-1)} \Big|_a^b + \dots + \\ &+ (-1)^{\nu-1} [f_\nu(x) \varphi(x)]^{(\nu-1)} [\overline{f_\nu(x) \varphi(x)}]^{(\nu)} \Big|_a^b + \\ &+ (-1)^\nu \int_a^b [f_\nu(x) \varphi(x)]^{(\nu)} [\overline{f_\nu(x) \varphi(x)}]^{(\nu)} dx = \\ &= (-1)^\nu \int_a^b |f_\nu(x) \varphi(x)|^{2\nu} dx. \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} (\varphi, I\varphi) &= \sum_{\nu=0}^m (-1)^\nu \int_a^b f_\nu(x) \varphi(x) [\overline{f_\nu(x) \varphi(x)}]^{(2\nu)} dx = \\ &= \sum_{\nu=1}^m (-1)^{2\nu} \int_a^b |f_\nu(x) \varphi(x)|^{2\nu} dx + \int_a^b |f_0(x) \varphi(x)|^2 dx \geq 0 \quad (3) \end{aligned}$$

По теореме 2 оператор A действует из $C_0^{(2m)}$ в $C_0^{(2m)}$ и вполне непрерывен в $C_0^{(2m)}$. Тогда, спектр оператора A не содержит никаких точек, кроме, быть может, множества собственных значений конечной кратности, не имеющих предельных точек кроме нуля.

С другой стороны, так как оператор A действует из $C_0^{(2m)}$ в $C_0^{(2m)}$, а оператор I действует из $C_0^{(2m)}$ в $[C_0^{(2m)}]^*$, то при всех $\varphi, \psi \in C_0^{(2m)}$

$$\begin{aligned} (\psi, IA\varphi) &= \sum_{\nu=0}^m (-1)^\nu \int_a^b f_\nu(x) \psi(x) [\overline{f_\nu(x) \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy}]_x^{(2\nu)} dx = \\ &= \sum_{\nu=0}^m (-1)^\nu \int_a^b \int_a^b f_\nu(x) [\overline{f_\nu(x) K(x, y)}]_x^{(2\nu)} \overline{\varphi(y)} \psi(x) dy dx = \\ &= \sum_{\nu=0}^m (-1)^\nu \int_a^b \int_a^b \overline{f_\nu(y)} [f_\nu(y) K(y, x)]_y^{(2\nu)} \overline{\varphi(y)} \psi(x) dy dx = \\ &= \sum_{\nu=0}^m (-1)^\nu \int_a^b \overline{f_\nu(y) \varphi(y)} \left(\int_a^b [f_\nu(y) K(y, x)]_y^{(2\nu)} \psi(x) dx \right) dy = \overline{(\varphi, IA\psi)} \end{aligned}$$

Так как при всех $x \in [a, b]$ $f_0(x) \neq 0$, то из (3) вытекает

$$(\varphi, I\varphi) \geq \int_a^b |f_0(x) \varphi(x)|^2 dx \geq 0$$

и из $(\varphi, I\varphi) = 0$ следует, что $\varphi(x) \equiv 0$. С другой стороны, если $IA = 0$, то $(A\varphi, IA\varphi) = 0$, и тем самым $A\varphi = 0$, т. е. при любом $\varphi \in C_0^{(2m)}$

$$\int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = 0. \quad (4)$$

Так как множество C_0^{∞} плотно в L_2 , то и $C_0^{(2m)}$ плотно в L_2 , и тем самым из (4) следует, что $K(x, y)$ эквивалентно нулю, т. е. пришли к противоречию.

Итак, все условия теоремы 2 статьи [1] выполняются и после их применения теорема полностью доказывается.

Замечание 1. В теоремах 1 и 3 для доказательства существования, пользуясь теоремой 1, а не теоремой 2, статьи можно высвободиться от части ограничений, а именно, вместо условия, что почти при всех $x \in [a, b]$ $f_0(x) \neq 0$ и функция $K(x, y)$ не эквивалентна нулю, потребовать, что существует хотя бы один номер v_0 , $0 \leq v_0 \leq m$ такой, что функция $[f_{v_0}(x)K(x, y)]_x^{(v_0)}$ не эквивалентна нулю. При этом доказательство $IA \neq 0$ следует из

$$(A\varphi, IA\varphi) \geq \int_a^b \int_a^b [f_{v_0}(x)K(x, y)]_x^{(v_0)} \varphi(y) dy |^2 dx.$$

Замечание 2. Ниже приводимый пример показывает насколько существенно, что в условия симметричности входят четные производные от $K(x, y)$. Если $K(x, y) = \sin \pi x \cos \pi t x$, $t \in [0, 1; 0, 1]$, то A действует из $C_0^{(1)}$ в $C_0^{(1)}$ и вполне непрерывен.

Так как $K'_x(x, y) = \pi \cos \pi x \cos \pi t x$, то $K'_x(x, y) = K'_y(y, x)$. Но, как видно, оператор A не имеет отличное от нуля собственное значение.

Замечание 3. Как легко видеть, можно отбрасывать условие б) и рассматривать вместо пространства $C_0^{(2m)}$ пространство $C^{(2m)}$, если $f^{(p)}(a) = f^{(p)}(b) = 0$, где $p = 0, \dots, m-1$.

Общие теоремы, доказанные в начале статьи, позволяют исследовать вопрос о существовании собственных значений не только интегральных, но и интегро-дифференциальных операторов. Рассмотрим оператор

$$A\varphi = \int_a^b K(x, y) \varphi^{(p)}(y) dy$$

Теорема 4. Пусть функция $K(x, y)$ удовлетворяет условиям:

а) $K'_x(x, y)$ $v=0$, m непрерывна в $[a, b; a, b]$ $m \geq p$;

б) существует функция $f(x) \in L_2$ такая, что почти при всех $x, y \in [a, b; a, b]$

$|f(x)|^2 K'_x(x, y) = |f(y)|^2 \overline{K'_y(y, x)}$, $f(x) \neq 0$ и функция $K'_x(x, y)$ не эквивалентна нулю.

Тогда, существует, по крайней мере, одно собственное значение оператора A , все его собственные значения вещественны, собственные функции φ_1 и φ_k , соответствующие различным собственным значениям λ_1 и λ_k удовлетворяют условию (ортогональности)

$$(\varphi_k, I\varphi_1) = \int_a^b |f(x)|^2 \varphi_k^{(p)}(x) \overline{\varphi_1^{(p)}(x)} dx = 0.$$

Совокупность собственных значений $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| \geq \dots$ которым соответствуют собственные функции, нормированные условиями

* C_0^{∞} — это множество бесконечно дифференцируемых функций, исчезающих вместе со своими производными на границе.

$(\varphi_k, I\varphi_1) = \delta_{jk}$, обладает следующими вариационными свойствами на множестве непрерывных функций, удовлетворяющих условиям

$$(\varphi, I\varphi) = \int_a^b |f(x)|^2 \varphi^{(p)}(x) \overline{\varphi^{(p)}(x)} dx = 1$$

$$(\varphi, I\varphi_k) = \int_a^b |f(x)|^2 \varphi^{(p)}(x) \overline{\varphi_k^{(p)}(x)} dx = 0 \quad k = 1, \dots, n-1$$

абсолютное значение функционала

$$(\varphi, IA\varphi) = \int_a^b \int_a^b \overline{K'_x(x, y)} |f(x)|^2 \varphi^{(p)}(x) \overline{\varphi^{(p)}(y)} dx dy$$

достигает на функции $\varphi_n(x)$ максимума, равного $|\lambda_n|$ $n = 1, 2, \dots$

Доказательство. Так как при любом $\varphi \in C^{(m)}$ функция $|f(x)|^2 \varphi^{(p)}(x)$ суммируема в $[a, b]$, то

$$\left| \int_a^b |f(x)|^2 \varphi^{(p)}(x) \overline{\varphi^{(p)}(x)} dx \right| \leq \|\varphi\|_m \int_a^b |f(x)|^2 |\varphi^{(p)}(x)| dx$$

т. е. равенство

$$(\varphi, I\varphi) = \int_a^b |f(x)|^2 \varphi^{(p)}(x) \overline{\varphi^{(p)}(x)} dx \quad (5)$$

определяет в $C^{(m)}$ линейный функционал.

Итак, равенством (5) определили оператор I , действующий из $C^{(m)}$ в $[C^{(m)}]^*$.

Из равенства

$$(\varphi, I\varphi) = \int_a^b |f(x)|^2 \varphi^{(p)}(x) \overline{\varphi^{(p)}(x)} dx = \int_a^b |f(x)|^2 \varphi^{(p)}(x) \overline{\varphi^{(p)}(x)} dx \quad (6)$$

вытекает положительность оператора I .

По теореме 2 оператор A действует из $C^{(m)}$ в $C^{(m)}$ и вполне непрерывен в $C^{(m)}$. Тогда, по теории Рисса-Шаудера спектр оператора A не содержит никаких точек, кроме, быть может, множества собственных значений конечной кратности, не имеющих предельных точек кроме нуля.

Используя формулу (5) при любом $\varphi, \psi \in C^{(m)}$, получаем, что

$$\begin{aligned} (\psi, IA\varphi) &= \int_a^b |f(x)|^2 \psi^{(p)}(x) \left(\int_a^b K(x, y) \varphi^{(p)}(y) dy \right)^{(p)} dx = \\ &= \int_a^b \int_a^b |f(x)|^2 \overline{K'_x(x, y)} \psi^{(p)}(x) \overline{\varphi^{(p)}(y)} dy dx = \\ &= \int_a^b \int_a^b |f(y)|^2 K'_y(y, x) \psi^{(p)}(x) \overline{\varphi^{(p)}(y)} dy dx = \\ &= \int_a^b |f(y)|^2 \overline{\varphi^{(p)}(y)} \left(\int_a^b K'_y(y, x) \psi^{(p)}(x) dx \right) dy = \overline{(\varphi, IA\psi)}. \end{aligned}$$

Докажем, что $IA \neq 0$. Ввиду равенства (6) при любом $\varphi \in C^{(m)}$

$$(A\varphi, IA\varphi) = \int_a^b |f(x)|^2 \left[\int_a^b K(x, y) \varphi^{(p)}(y) dy \right]^{(p)} dx =$$

$$= \int_a^b |f(x)|^2 \left| \int_a^b K_x^{(p)}(x, y) \varphi^{(p)}(y) dy \right|^2 dx$$

Если бы $IA = 0$, то при любом $\varphi \in C^{(m)}$ $(A\varphi, IA\varphi) = 0$, и тем самым почти при всех $x \in [a, b]$

$$\int_a^b K_x^{(p)}(x, y) \varphi^{(p)}(y) dy = 0,$$

так как по условию почти $f(x) \neq 0$. С другой стороны, когда φ пробегает $C^{(m)}$, то $\varphi^{(p)}(x)$ пробегает все C^∞ , потому, что при любом $\psi \in C^\infty$ решение уравнения

$$\frac{d^p \varphi(x)}{dx^p} = \psi(x)$$

существует и $\varphi \in C^{(m)}$. Так как C^∞ плотна в L_2 , то $K^{(p)}(x, y)$ эквивалентна нулю, что противоречит условию.

Покажем, что для любого собственного элемента φ оператора A , $(\varphi, I\varphi) \neq 0$. Действительно, если $(\varphi, I\varphi) = 0$, как легко видеть из (6) следует, что $\varphi^{(p)}(x) \equiv 0$. Отсюда

$$\varphi(x) = \frac{1}{\lambda} \int_a^b K(x, y) \varphi^{(p)}(y) dy \equiv 0,$$

который противоречит тому, что φ есть собственный элемент оператора A .

Итак, все условия теоремы 2 статьи [1] выполняются, и после ее применения теорема полностью доказывается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Якубов С. Я. Теория Гильберта-Шмидта для симметризуемых операторов, действующих в банаховом пространстве, „Изв. АН Азерб. ССР“, 1961, № 1.
2. Radon I. О линейных функциональных преобразованиях и функциональных уравнениях. УМН, 1936, вып. 1.

С. Я. Якубов

Гејри-симметрик нүвәли интеграл вә интегро-дифференциал тәнликләр үчүн Һилберт-Шмидт нәзәријјәси

ХҮЛАСӘ

Бу мәгаләдә гејри-симметрик нүвәли интеграл вә интегро-дифференциал тәнликләр үчүн Һилберт-Шмидт нәзәријјәси тәдқиғ едилір. [1] мәгаләдә исбат олунмуш үмуми теоремләр тәтқиғ етмәклә ашағыдакы нәтичәләр алыныр:

Теорем 1. *Тутаг ки, $K(x, y)$ ашағыдакы шәртләрә өдәјир:*
 а) $K_x^{(\nu)}(x, y)$, $\nu = 0, 2m$ $[a, b; a, b]$ -дә кәсилмәздир; б) $K_x^{(\nu)}(a, y) = K_x^{(\nu)}(b, y) = 0$ ихтијари $y \in [a, b]$, $\nu = 0, m-1$ ($m \geq 1$); в) елә $f_\nu(x) \in C^{(2\nu)}$ $\nu = 1, m$ $f_0(x) \in L_2$ функцијалары вар ки, санки ихтијари $x, y \in [a, b]$ үчүн

$$\sum_{\nu=0}^m (-1)^\nu f_\nu(x) \overline{[f_\nu(x) K(x, y)]_x^{(2\nu)}} = \sum_{\nu=0}^m (-1)^\nu \overline{f_\nu(y)} [f_\nu(y) K(y, x)]_y^{(2\nu)},$$

$f_\nu(x) \neq 0$ дир вә $K(x, y)$ сыфра эквивалент дејил.]

Онда $A\varphi = \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy$ операторунун һеч олмәзса сыфьрдан

фәргли бир мәхсуси әдәди вар, бүтүн мәхсуси әдәдләр һәгигидир, мұхтәлиф мәхсуси әдәдләрә ујғун мәхсуси $\varphi_i(x)$, $\varphi_k(x)$ функцијалары үчүн

$$(\varphi_k, I\varphi_i) = \sum_{\nu=0}^m (-1)^\nu \int_a^b f_\nu(x) \varphi_k(x) \overline{[f_\nu(x) \varphi_i(x)]^{(2\nu)}} dx = 0$$

шәрти өдәнилмир, мәхсуси $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| \geq \dots$ әдәдләринә ујғун $(\varphi_k, I\varphi_i) = \delta_{ik}$ шәртини өдәјән мәхсуси $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ функцијалары ашағыдакы экстремал хәсусијјәтләрә маликдир: $\varphi(x) \in C_0^{(2m)}$ вә

$$(\varphi, I\varphi) = \sum_{\nu=0}^m (-1)^\nu \int_a^b f_\nu(x) \varphi(x) \overline{[f_\nu(x) \varphi(x)]^{(2\nu)}} dx = 1$$

$$(\varphi, I\varphi_k) = \sum_{\nu=0}^m (-1)^\nu \int_a^b f_\nu(x) \varphi(x) \overline{[f_\nu(x) \varphi_k(x)]^{(2\nu)}} dx = 0 \quad k = 1, n-1$$

шәртләрини өдәјән $\varphi(x)$ функцијалары чохлағунда

$$(\varphi, IA\varphi) = \sum_{\nu=0}^m (-1)^\nu \int_a^b \int_a^b f_\nu(x) \overline{[f_\nu(x) K(x, y)]_x^{(2\nu)}} \varphi(x) \overline{\varphi(y)} dx dy$$

функционалынын мүтләг гижмәти φ_n элементиндә $|\lambda_n|$ -ә бәрәбәр максимум гижмәтини алыр.

Теорем 2. *Тутаг ки, $K(x, y)$ ашағыдакы шәртләрә өдәјир:*

а) $K_x^{(\nu)}(x, y)$ $\nu = 0, m$ $[a, b; a, b]$ -дә кәсилмәздир; б) елә $f(x) \in L_2$ функцијасы вар ки, санки бүтүн $x, y \in [a, b; a, b]$ үчүн

$$|f(x)|^2 K_x^{(p)}(x, y) = |f(y)|^2 K_y^{(p)}(y, x), \quad f(x) \neq 0$$

вә $K_x^{(p)}(x, y)$ сыфра эквивалент дејил.

Онда $A\varphi = \int_a^b K(x, y) \varphi^{(p)}(y) dy$ операторунун һеч олмәзса сыфьрдан

фәргли бир мәхсуси әдәди вар, бүтүн мәхсуси әдәдләр һәгигидир, мұхтәлиф мәхсуси әдәдләрә ујғун мәхсуси $\varphi_i(x)$, $\varphi_k(x)$ функцијалары үчүн

$$(\varphi_k, I\varphi_i) = \int_a^b |f(x)|^2 \varphi_k^{(p)}(x) \overline{\varphi_i^{(p)}(x)} dx = 0$$

шәрти өдәнилмир, мәхсуси $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| \geq \dots$ әдәдләринә ујғун $(\varphi_k, I\varphi_i) = \delta_{ik}$ шәртини өдәјән мәхсуси функцијалар ашағыдакы экстремал хәсусијјәтләринә маликдир: $\varphi(x) \in C^{(m)}$ вә

$$(\varphi, I\varphi) = \int_a^b |f(x)|^2 \varphi^{(p)}(x) \overline{\varphi^{(p)}(x)} dx = 1$$

$$(\varphi, I\varphi_k) = \int_a^b |f(x)|^2 \varphi^{(p)}(x) \overline{\varphi_k^{(p)}(x)} dx = 0 \quad K = 1, n-1$$

шәртләрини өдәјән $\varphi(x)$ функцијалары чохлағунда

$$(\varphi, IA\varphi) = \int_a^b \int_a^b K_x^{(p)}(x, y) |f(x)|^2 \varphi^{(p)}(x) \overline{\varphi^{(p)}(y)} dx dy$$

функционалынын мүтләг гижмәти φ_n элементиндә $|\lambda_n|$ -ә бәрәбәр максимум гижмәтини алыр.

С. Н. ГАДЖИЕВ И К. А. ШАРИФОВ

ЭНТАЛЬПИЯ ОБРАЗОВАНИЯ ДВУОКИСИ ТЕЛЛУРА

В ходе изучения термохимических свойств некоторых халькогенидов возникла необходимость знать надежное значение энтальпии образования двуокиси теллура— $\Delta H \text{ TeO}_2$.

В литературе имеются три работы, посвященные определению этой величины; две из них имеют почти одинаковую величину: 77,6 [10] и 77,58 ккал/моль [11], в то время как в третьей работе дается величина, значительно отличающаяся от первых—87,1 ккал/моль [8]. Причем, все определения сделаны косвенным путем. В циркуляре № 500, не приводя новой литературы, авторы дают значение 77,69 ккал/моль [9]. Поэтому мы считали нужным определить $\Delta H \text{ TeO}_2$ прямым методом—сжиганием теллура в калориметрической бомбе.

Работа проводилась на калориметрической установке с изотермической оболочкой, изготовленной в мастерских МАИ (Московского авиационного института) по принципу калориметра Купса [7]. Калориметр сконструирован А. М. Сопрыкиным и Н. А. Чесноковым.

О применении такого типа калориметра было сообщено нами в [2], и в работе А. А. Баландина с сотрудниками [1], но описания установки не приводилось. Оно дается в настоящей работе с некоторыми изменениями, произведенными в ходе эксплуатации.

Основным преимуществом калориметра является интенсивность и равномерность перемешивания воды как в калориметрическом сосуде, так и в оболочке. Это достигается следующим образом. Калориметрический сосуд 2 (рис. 1) имеет, в отличие от существующих, не эллиптическое, а круглое поперечное сечение и мешалка помещена не сбоку бомбы, а сверху. Пропеллерная мешалка 4 подает воду в сосуде 2 вниз внутри открытого с обоих концов цилиндра 3; вода, омывая при этом калориметрическую бомбу равномерно со всех сторон, поднимается обратно вверх через пространство между цилиндром 3 и стенками сосуда 2. Перемешивание воды в оболочке происходит по тому же принципу, как и в сосуде; мощной пропеллерной мешалкой 5 вода подается снизу вверх через пространство между рубашкой 6 и особым цилиндром 7 (имеющим такое же назначение, как и находящийся в сосуде 2 цилиндр 3) и, омывая рубашку 6 равномерно со всех сторон возвращается вниз через пространство между цилиндром 7 и оболочкой 8.

Мешалка 4 сосуда соединяется с синхронным электромотором с помощью гибкого валика и зубчатых колес и вращается со скоростью

С. Н. ГАДЖИЕВ И К. А. ШАРИФОВ

ЭНТАЛЬПИЯ ОБРАЗОВАНИЯ ДВУОКИСИ ТЕЛЛУРА

В ходе изучения термохимических свойств некоторых халькогенидов возникла необходимость знать надежное значение энтальпии образования двуокиси теллура— $\Delta H \text{ TeO}_2$.

В литературе имеются три работы, посвященные определению этой величины; две из них имеют почти одинаковую величину: 77,6 [10] и 77,58 ккал/моль [11], в то время как в третьей работе дается величина, значительно отличающаяся от первых—87,1 ккал/моль [8]. Причем, все определения сделаны косвенным путем. В циркуляре № 500, не приводя новой литературы, авторы дают значение 77,69 ккал/моль [9]. Поэтому мы считали нужным определить $\Delta H \text{ TeO}_2$ прямым методом—сжиганием теллура в калориметрической бомбе.

Работа проводилась на калориметрической установке с изотермической оболочкой, изготовленной в мастерских МАИ (Московского авиационного института) по принципу калориметра Купса [7]. Калориметр сконструирован А. М. Сопрыкиным и Н. А. Чесноковым.

О применении такого типа калориметра было сообщено нами в [2], и в работе А. А. Баландина с сотрудниками [1], но описания установки не приводилось. Оно дается в настоящей работе с некоторыми изменениями, произведенными в ходе эксплуатации.

Основным преимуществом калориметра является интенсивность и равномерность перемешивания воды как в калориметрическом сосуде, так и в оболочке. Это достигается следующим образом. Калориметрический сосуд 2 (рис. 1) имеет, в отличие от существующих, не эллиптическое, а круглое поперечное сечение и мешалка помещена не сбоку бомбы, а сверху. Пропеллерная мешалка 4 подает воду в сосуде 2 вниз внутри открытого с обоих концов цилиндра 3; вода, омывая при этом калориметрическую бомбу равномерно со всех сторон, поднимается обратно вверх через пространство между цилиндром 3 и стенками сосуда 2. Перемешивание воды в оболочке происходит по тому же принципу, как и в сосуде; мощной пропеллерной мешалкой 5 вода подается снизу вверх через пространство между рубашкой 6 и особым цилиндром 7 (имеющим такое же назначение, как и находящийся в сосуде 2 цилиндр 3) и, омывая рубашку 6 равномерно со всех сторон возвращается вниз через пространство между цилиндром 7 и оболочкой 8.

Мешалка 4 сосуда соединяется с синхронным электромотором с помощью гибкого валика и зубчатых колес и вращается со скоростью

260 об/мин. Мешалка 5 оболочки вращается со скоростью 600 об/мин электромотором, присоединенным снизу калориметра к оси мешалки через зубчатую передачу.

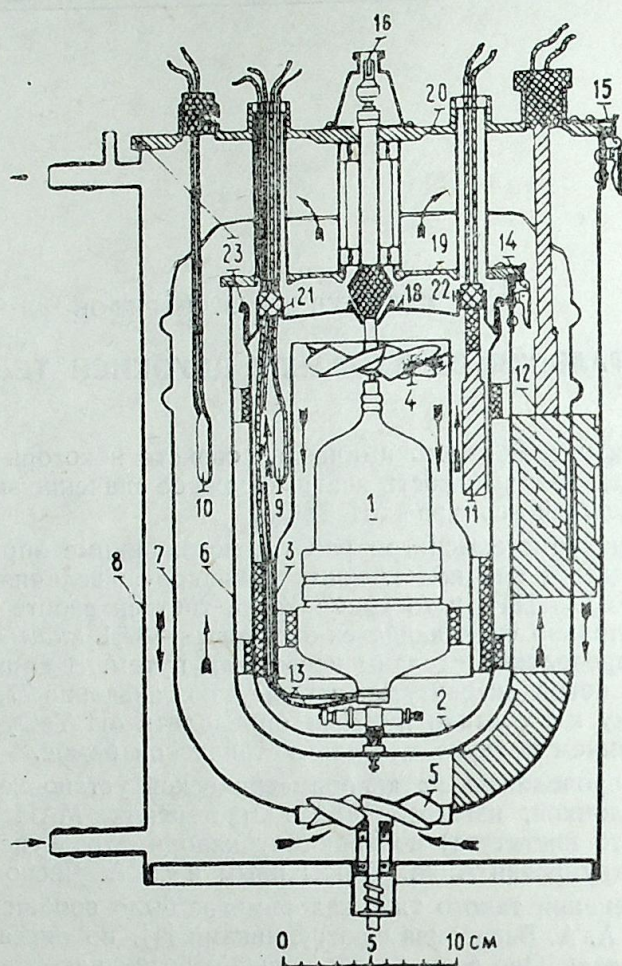


Рис. 1.

Тепловое значение калориметра определено по эталонной бензойной кислоте из ВНИИМ им. Д. И. Менделеева (образец № 1069). Изотермическая—при 25°C—теплота горения кислоты (вес в вакууме) принята 6318,0 калорий на грамм навески (1 кал=4,1840 абс. дж.)

Калибровка калориметра произведена следующим образом. В бомбе конструкции Термической лаборатории МГУ [5] весом 2252 г и объемом 265 см³, устанавливалась платиновая чашечка с брикетом кислоты. Один конец хлопчатобумажной нити для сжигания подкладывался под брикет, а другой привязывался к платиновой проволоке накаливания.

Нить каждый раз взвешивалась, так как при одинаковой длине (6 см) ее вес может различаться на 0,001 г, что соответствует 4 кал.

Бомба наполнялась кислородом до 30 ± 1 атм после „промывки“ током кислорода в течение 2—3 мин. Наполнение бомбы контролировалось также и взвешиванием.

Надо отметить, что при работе с кислородом все прокладки (в том числе и прокладки на самой бомбе) были изготовлены из тефлона,

который оказался для этой цели весьма подходящим материалом. Калориметрический сосуд наполнялся дистиллированной водой в количестве 2549 г (вес воды со стаканом равнялся $3000 \pm 0,01$ г); в него ставился цилиндр 3, а в последний—заполненная бомба.

В воду добавлялось цилиндрическое масло (1 мл) с целью уменьшения испарения воды, и сосуд закрывался крышкой 18. При этом уровень воды должен достигнуть трубок 21, 22, имеющих на крышке стакана для ввода термометра и нагревателя, т. е. между крышкой сосуда и поверхностью находящейся в нем воды не должно быть свободного (воздушного) пространства. В противном случае, вследствие разбрызгивания воды на поверхности во время вращения мешалки, может происходить ее испарение, что явится источником погрешностей. Поэтому было произведено уплотнение зазора между крышкой и краями сосуда при помощи пластилина, что дало возможность заполнить водой свободное пространство, имеющееся между поверхностью воды и крышкой.

Ранее нагреватель и термометр вставлялись в сосуд через указанные трубки не герметично и концы их высовывались наружу. Для устранения этого положения была изменена конструкция нагревателя, а также вместо термометра применен термистор; имея небольшую величину, они оба целиком загружались в калориметрическую жидкость, наружу выходили только их отводы, пропускаемые через тефлоновые пробки, которые плотно вставлялись в трубки на крышке сосуда.

После сборки калориметрического сосуда 2, крышкой 19 закрывалась рубашка 6 и в пространство между ним и оболочкой 8 впускалась вода, температура которой при вращающейся мешалке 5 доводилась до 25°C. Далее закрывалась верхняя крышка 20, через гибкий валик и вилку 16 с мотором соединялась мешалка 4, в оболочку вставлялись нагреватель и термистор и начинался калориметрический опыт.

При проведении измерений руководствовались методикой, подробно описанной С. М. Скуратовым и сотрудниками [6].

Температура калориметра измерялась, как было сказано, полупроводниковым термосопротивлением—термистором. Методика этого измерения дана в [3, 4]. Температура оболочки также измерялась термистором. Температура воды в оболочке поддерживалась при $25 \pm 0,002^\circ$ при помощи нагревателя и тока холодной воды.

При отсчете температуры применялось релейное устройство, которое автоматически подавало звуковые сигналы через каждые 30 сек, производило (с интервалами в 15 сек) переполюсовку на выходах моста и показывало направление полюсов световым сигналом. Схема этого устройства дана на рис. 2.

Образцы бензойной кислоты в количестве 1 г, взвешенные на аналитических весах, спрессовывались в брикеты на прессформе. Кислота до и после изготовления из нее брикетов держалась в вакуум-экксикаторе над P₂O₅.

Перед определением брикеты взвешивались на микроаналитических весах, с точностью до 0,00002 г.

Сжигание нити производилось при помощи платиновой проволоки, привязанной к контактам бомбы. Диаметр проволоки 0,25—0,30 мм, длина 30—40 мм. На проволоку подавался ток силой 8—10 а в течение 0,5 сек. При этом проволока только накаливалась, но не переплавлялась. Размыкание цепи производилось автоматически, с помощью реле (рис. 3).

Для проверки достоверности получаемых на установке результатов было произведено контрольное определение теплот сгорания чистых образцов α -нафтола и α -глюкозы. Первое вещество горело хорошо, а

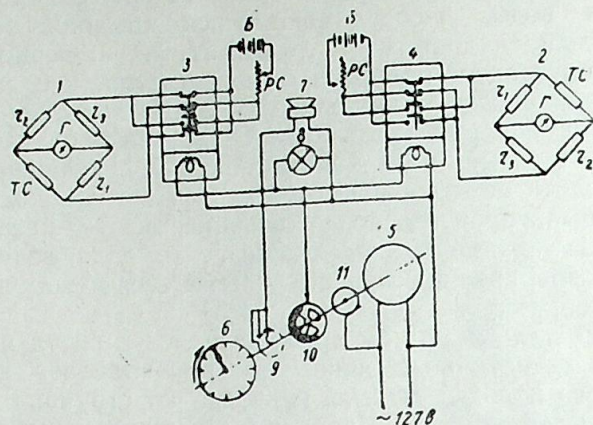


Рис. 2

Схема релейного устройства переполюсовки. 1, 2—мосты постоянного тока для измерения сопротивления термисторов —ТС; 3—4—промежуточные реле МКУ—48; 5—двигатель с редуктором, дающий 2 об/мин; 6—циферблат со стрелкой; 7—телефонный зуммер; 8—сигнальная лампа; 9—контактная система для зуммера; 10—прерыватель двух реле и сигнальной лампы; 11—скользящий токоподвод к оси.

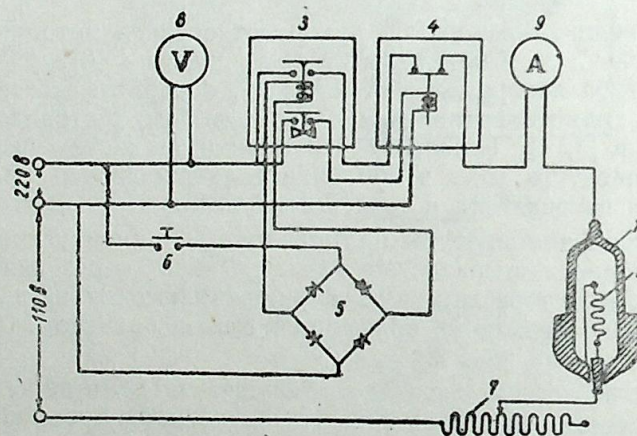


Рис. 3

Схема накаливания платиновой проволоки. 1—бомба; 2—платиновая проволока накаливания; 3—реле времени; 4—промежуточное реле; 5—выпрямитель; 6—ключ; 7—реостат; 8 и 9—вольтметр и амперметр переменного тока.

α -глюкоза сгорала полностью только при измельчении брикета (на 5—10 частей). Были получены приемлемые значения, а именно: результаты отличались от табелизуемых примерно на 0,03—0,04 %.

Таким образом было установлено, что данные установки надежны и грубых систематических ошибок не имеется.

Константа охлаждения при каждом опыте не превышала 2% от среднего значения.

Результаты работ по калибровке и проверке сжиганием контрольных веществ, а также хорошее совпадение константы охлаждения отдельных опытов показывают, что калориметрическая установка данной конструкции удовлетворяет современным требованиям.

Очистка кислорода нами не производилась, но тепловое значение W определялось каждый раз при замене кислородного баллона, а также и при различных изменениях, производимых в установке.

При определении $\Delta H^\circ \text{TeO}_2$ W равнялось $2018,4 \pm 0,3$ ккал/град.

До разработки методики применения термисторов измерения производились ртутным калориметрическим термометром [2]. Начальная температура калориметра была во всех опытах $23 \pm 0,02^\circ \text{C}$, и подъем температуры составлял около 2°C .

Для определения $\Delta H \text{TeO}_2$ взят кристаллический теллур, чистотой 99,9 %. Основной примесью был кислород, имелись также следы меди, свинца, магния, кремния, серебра.

Опыты показали, что теллур не только в чистом виде, но и в смеси с различными вспомогательными веществами (бензойной кислотой, сажой, коллодием) при обычных условиях калориметрических опытов почти не горит. С повышением давления кислорода горение улучшалось. Но достигнуть необходимой степени сгорания только этим путем не удалось вследствие того, что теллур прежде, чем сгореть, разливался по поверхности кварцевой чашечки, застывал, и прекращалось его дальнейшее горение (сгорало примерно 10—15 % теллура).

Для устранения этого явления к веществу примешивалось $\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$, что намного улучшало сгорание. Но из-за гигроскопичности Al_2O_3 возникали новые источники ошибок.

В результате большого числа предварительных опытов были разработаны условия, при которых достигалась высокая степень сгорания без применения Al_2O_3 и с уменьшенным количеством вспомогательного вещества.

Брикет в виде полого цилиндрика, изготовленный на специальной прессформе из хорошо перемешанной смеси теллура с бензойной кислотой в отношении 5:0,4 ставился не на поверхность чашки, а укреплялся на „держателе“ на высоте 2 см от чашки. „Держатель“ изготовленный из кварцевой палочки, диаметром 1,5 мм, припаивался к чашечке и имел такую форму, чтобы на нем можно было укрепить брикет. Вес чашечки с „держателем“ 4 г. Давление кислорода в бомбе 45 ± 1 атм.

Брикет сжигался, так же как и в случае калибровки, при помощи хлопчатобумажной нити и платиновой проволоки накаливания. При этих условиях теллур сгорал на 95—98 % и доля тепла за счет его сгорания составляла более 55% от общего тепла, выделяющегося в бомбе.

Степень сгорания определялась по прибавлению веса в результате горения.

Продукты горения были следующие: 1) кристаллическая, белого цвета со слабозеленоватым оттенком окись, собирающаяся в чашечке в виде плавленной массы (95—97 % всей образовавшейся окиси); 2) легкая снежно-белого цвета окись, осевшая на внутренней поверхности

*) Работа выполнена в 1960 г.

бомбы (3—5 % окиси) и 3) несгоревший остаток теллура, черного цвета, находящийся также в чашечке в массе плавленной окиси.

Весь продукт горения тщательно собирался, и после определения его постоянного веса отделялась часть продукта, содержащая остаток теллура и отбиралась чистая кристаллическая TeO_2 для исследования ее других свойств. Здесь необходимо отметить, что данный способ может служить для получения чистой TeO_2 , чистота которой лимитируется чистотой исходного теллура и бензойной кислоты.

Проведение сжигания в кварцевом стакане и других сосудах, вставляемых в бомбу с целью облегчения сбора продуктов горения, что часто применяется, не привело к удовлетворительным результатам, так как при этом ухудшалось горение.

Рентгенанализом* было определено, что из указанных выше продуктов горения 1) основная часть—кристаллическая окись состоит из тетрагональной двуокиси теллура (с незначительной долей аморфной фазы), 2) легкая хлопьевидная окись аморфна и 3) остаток теллура также аморфен.

Таким образом, при горении теллура в бомбе, в основном, образуется кристаллическая тетрагональная (95—97 %) и немного аморфная TeO_2 . Составы образовавшихся окислов определены также химическим анализом, объемно-аналитическим методом (титрованием растворами KMnO_4 и щавелевой кислоты), и установлено наличие только двуокиси теллура.

При вычислении результатов введены необходимые поправки: на теплообмен (по формуле Реньо-Пфаундлера-Усова), на теплоту сгорания вспомогательных веществ, на теплоту превращения несгоревшей части теллура из кристаллической в аморфную модификацию. Веса веществ приводились к весу в вакууме. Поправки на замену платиновой чашечки кварцевой 1 кал и на отсутствие воды, вливаемой в бомбу во время калибровки 1 кал компенсируются между собой.

На теплоту, которая выделяется вследствие накаливания платиновой проволоки (1,5 кал) поправка не вводилась, так как такое же накаливание происходит и при определении теплового значения.

Результаты опытов приведены в табл. 1.

Таблица 1

Навеска, г		Сгоревший Те		Количество выделившегося тепла, кал				Теплота превр. несгор. Те	ΔT , исправл. в условн. граду- сах*	$-\Delta U \text{ ТеO}_2$ ккал/моль
Те	Бен- зой- ная кис- лота	г	%	всего	за счет сгорания					
					Те	бенз. к-ты	нити			
4,82207	0,38721	4,67965	97,04	5790,79	3330,35	2446,32	17,08	2,96	2,8690	90,81
4,61346	0,36031	4,41023	95,59	5371,97	3083,83	2276,37	16,08	4,30	2,6615	89,23
4,88980	0,40718	4,82244	98,62	5990,41	3402,73	2572,48	16,60	1,40	2,9679	90,04

* 1 условный градус = 0,7027°

* Рентгенанализ произведен К. П. Мамедовым и К. Мехтиевым, за что им выражаем нашу благодарность.

Таким образом, принимая, что тепловой эффект превращения указанного количества (3—5 %) TeO_2 из кристаллического в аморфную модификацию незначителен, для теплоты образования TeO_2 из кристаллического теллура и газообразного кислорода получено:

$$\Delta U_{298}^{\circ} \text{TeO}_2 (\text{тетрагон}) = -90,0 \pm 0,3 \text{ ккал/моль}$$

А при учете значения $\Delta pRT = -0,6 \text{ ккал/моль}$

$$\Delta H_{298}^{\circ} \text{TeO}_2 (\text{тетрагон}) = -90,6 \pm 0,3 \text{ ккал/моль.}$$

(среднее отклонение от среднего арифметического—0,6 %.)

Как видно, наши результаты близко подходят к вышеприведенному значению Микстера [8], значительно отличаясь от данных Томсена [10] и Шумана [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Баландин А. А., Клабуновский Е. И., Обермок-Якубова А. П. и Бурсова И. И. „Изв. АН СССР, отд. хим. наук“, 1960, № 5.
2. Гаджиев С. Н., Шарифов К. А. „ДАН Азерб. ССР“, 1959, т. 15, № 8.
3. Гаджиев С. Н. и Шарифов К. А. ЖФХ, 1961, т. 35, № 5.
4. Гаджиев С. Н., Агарунов М. Я. и Шарифов К. А. ЖФХ (в печати).
5. Попов М. М. Термометрия и калориметрия. Изд. МГУ, М., 1954.
6. Скуратов С. М., Стрелихеев С. А., Кочинская О. Н., Штегер С. Н. и Брыкина Е. П. „Уч. зап. МГУ“, 1953, вып. 164.
7. Coops J., Nes R. van, Kentia A. a. Dienske J. S. Rec. trav. chim., 66, 113—130 (1947); Coops J. a. Nes R. van. Rec. trav. chim., 66, 131—141 (1947).
8. Mixer W. G. J. Am. J. Sci., 29, № 174, 488—496 (1910).
9. Rossini F. D. [и др.]. Selected Values of Chemical Thermodynamic Properties, Circ., № 500, 1952.
10. Thomsen S. Thermochemische Untersuchungen, Bd. 2. Barth. Leipzig, 1882.
11. Schumann R. J. Am. Chem. Soc., 47, № 2 356—362 (1925).

С. Н. Гачижев, К. Э. Шарифов

Теллур 4-оксидин эмэлэкәлмә енталпијасы

ХҮЛАСӘ

Теллур 4-оксидин эмэлэкәлмә енталпијасы һаггында әдәбијатда олан гижмәтләр бир-бириндән хејли фәрғлидир. Һәм дә бу рәғәмләр һамысы долајы јолларла тәјин едилмишдир.

Теллурун калориметрик бомбада јандырылмасынын ефектив шәраити ишләнмиш вә бу үсулла—оксикендә теллуру јандырмаг јолу илә теллур 4-оксидин эмэлэкәлмә енталпијасы тәјин едилмишдир.

Илк дәфә олараг билаваситә јандырмаг јолу илә алынмыш нәтичә $\Delta H_{298}^{\circ} \text{TeO}_2 (\text{тетрагон}) = -90,6 \pm 0,3 \text{ ккал/мол}$ олмушдур.

Н. Г. ГУСЕЙНОВ

СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ В РОМБИЧЕСКИХ АНТИФЕРРОМАГНЕТИКАХ И СЛАБЫХ ФЕРРОМАГНЕТИКАХ

Различные свойства магнетиков ромбической симметрии исследовались уже рядом авторов. Гортер и др. [6] рассмотрели типы кривых намагничивания в ромбических скомпенсированных антиферромагнетиках. Е. А. Туров и В. Е. Найш [5] показали, что в ромбических кристаллах возможны два слабоферромагнитных и одно антиферромагнитное состояния. Ими же были исследованы типы кривых намагничивания и вычислен спектр спиновых волн в слабоферромагнитном состоянии для случая, когда внешнее поле параллельно спонтанному магнитному моменту.

Н. Г. Гусейнов и Е. А. Туров [1] произвели подробный анализ термодинамического потенциала для ромбического кристалла со структурой типа $M_n P$.

Н. М. Крейнс [2] исследовала типы кривых намагничивания для ромбического слабого ферромагнетика в случае, когда исходным является антиферромагнитное состояние.

Для полноты исследования магнитных свойств в ромбических ферромагнетиках и слабых ферромагнетиках представляет интерес вычислить спектр спиновых волн, резонансные частоты и тензор в. ч. магнитной восприимчивости в ромбических скомпенсированных антиферромагнетиках, а также в ромбических антиферромагнитных кристаллах со структурой, допускающей существование слабого спонтанного магнитного момента.

1. Рассмотрим ромбический скомпенсированный антиферромагнетик, плотность энергии которого из соображений симметрии можно записать в виде [1, 5]:

$$H = \frac{A}{2} m^2 + \frac{a_x}{2} m_x^2 + \frac{a_y}{2} m_y^2 + \frac{b_x}{2} l_x^2 + \frac{b_y}{2} l_y^2 - \frac{1}{2} c_\eta \left(\frac{\partial M_{i\eta}}{\partial r_\eta} \right)^2 - q_\eta \frac{\partial M_{1\eta}}{\partial r_\eta} \frac{\partial M_{2\eta}}{\partial r_\eta} - m h \quad (1)$$

$$(i=1,2; \eta \equiv x, y, z), \quad m = \frac{1}{2M_0} (M_1 + M_2), \quad l = \frac{1}{2M_0} (M_2 - M_1)$$

Н. Г. ГУСЕЙНОВ

СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ В РОМБИЧЕСКИХ АНТИФЕРРОМАГНЕТИКАХ И СЛАБЫХ ФЕРРОМАГНЕТИКАХ

Различные свойства магнетиков ромбической симметрии исследовались уже рядом авторов. Гортер и др. [6] рассмотрели типы кривых намагничивания в ромбических скомпенсированных антиферромагнетиках. Е. А. Туров и В. Е. Найш [5] показали, что в ромбических кристаллах возможны два слабоферромагнитных и одно антиферромагнитное состояния. Ими же были исследованы типы кривых намагничивания и вычислен спектр спиновых волн в слабоферромагнитном состоянии для случая, когда внешнее поле параллельно спонтанному магнитному моменту.

Н. Г. Гусейнов и Е. А. Туров [1] произвели подробный анализ термодинамического потенциала для ромбического кристалла со структурой типа M_nP .

Н. М. Крейнс [2] исследовала типы кривых намагничивания для ромбического слабого ферромагнетика в случае, когда исходным является антиферромагнитное состояние.

Для полноты исследования магнитных свойств в ромбических ферромагнетиках и слабых ферромагнетиках представляет интерес вычислить спектр спиновых волн, резонансные частоты и тензор в. ч. магнитной восприимчивости в ромбических скомпенсированных антиферромагнетиках, а также в ромбических антиферромагнитных кристаллах со структурой, допускающей существование слабого спонтанного магнитного момента.

1. Рассмотрим ромбический скомпенсированный антиферромагнетик, плотность энергии которого из соображений симметрии можно записать в виде [1, 5]:

$$H = \frac{A}{2} m^2 + \frac{a_x}{2} m_x^2 + \frac{a_y}{2} m_y^2 + \frac{b_x}{2} l_x^2 + \frac{b_y}{2} l_y^2 \quad (1)$$

$$- \frac{1}{2} c_\eta \left(\frac{\partial M_{i\eta}}{\partial r_\eta} \right)^2 - q_\eta \frac{\partial M_{1\eta}}{\partial r_\eta} \frac{\partial M_{2\eta}}{\partial r_\eta} - mh$$

$$(i=1,2; \eta \equiv x, y, z), \quad m = \frac{1}{2M_0} (M_1 + M_2), \quad l = \frac{1}{2M_0} (M_2 - M_1)$$

M_1 и M_2 намагниченности подрешеток, для которых предполагается что

$$M_1^2 = M_2^2 = \text{const} \text{ или } l^2 = m^2 = 1, (ml) = 0 \quad (2)$$

Здесь $A > 0$ — параметр обменного взаимодействия, приводящий к антиферромагнитному расположению намагниченностей подрешеток, a_x, a_y, b_x, b_y — константы магнитной анизотропии второго порядка, члены с производными M_1 и M_2 описывают изменение обменной энергии, обусловленной неоднородностями $M_1(r)$ и $M_2(r)$. Последний член в (1) представляет собой плотность энергии магнетика во внешнем поле $H = h/2M_0$.

Легко видеть, что в этом кристалле возможны три естественных оси антиферромагнетизма ($l//a, l//b, l//c$). Предположим, что в рассматриваемом кристалле реализуется состояние $l//c$. Из требования, чтобы именно это состояние соответствовало наименьшей энергии, находим условия его реализации

$$b_x > 0, b_y > 0 \quad (3)$$

Допустим для определенности, что следующее ближайшее состояние к $l//c$ является состояние $l//a$, т. е. что кроме (3), должно удовлетворяться соотношение:

$$b_x < b_y \quad (3')$$

Приведем теперь результаты расчета спектра спиновых волн, резонансных частот и тензора в. ч. восприимчивости ромбического антиферромагнетика для случая, когда исходным является состояние $l//c$ и для h , направленных вдоль осей кристалла.

1. $h//c$. В этом случае магнитный момент растет линейно с полем и до насыщения M_1 и M_2 остаются в плоскости (010), т. е.

$$l//c, |m_0| = m_{0x} = \frac{h_x}{H_2}, |l_0| = l_{0z} = \sqrt{1 - m_{0x}^2}; (H_2 = A + a_x)$$

Рассматривая далее малые однородные колебания m и l около значения m_0 и l_0 , находим обычным образом [4] выражения для энергии ϵ двух ветвей спиновых волн.

$$\begin{aligned} \epsilon_{1k} &= h' \gamma [\beta^2 (b_x + \bar{c}_k) (H_3 + \bar{c}_k) + \alpha^2 (H_3 + \bar{c}_k) (A + \bar{c}_k)]^{1/2} \\ \epsilon_{2k} &= h' \gamma [\beta^2 (b_y + \bar{c}_k) (H_2 + \bar{c}_k) + \alpha^2 \bar{c}_k (b_y + \bar{c}_k)]^{1/2}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{где } H_3 = A + a_y; \alpha = \frac{h_x}{H_2}; \beta = \sqrt{1 - \alpha^2} \text{ и}$$

$$\bar{c}_k = \frac{1}{2} (c_\gamma \pm q_\gamma) k_\gamma^2; \kappa \text{ — волновой вектор; } \gamma \text{ — магнетомеханическое}$$

отношение; h' — постоянная планка, деленная на 2π .

Отличие от одноосных антиферромагнетиков (см. [4]) в этом случае заключается в том, что в ромбических антиферромагнетиках даже при $h=0$ расщепление спектра спиновых волн на две ветви не исчезает*.

* Это сравнение проведено для случая, когда не учитывается дипольное взаимодействие для обоих типов кристаллитов.

В частности, полагая $k=0$ в формуле (4), получим величины энергетических щелей, т. е. величины магнитных энергий, необходимых для возбуждения спиновых волн, которые определяют две ветви антиферромагнитного резонанса.

$$\begin{aligned} \omega_{01} &= \gamma [\beta^2 H_3 b_x + \alpha^2 A H_3]^{1/2} \\ \omega_{02} &= \gamma \beta (H_2 b_x)^{1/2} \end{aligned} \quad (5)$$

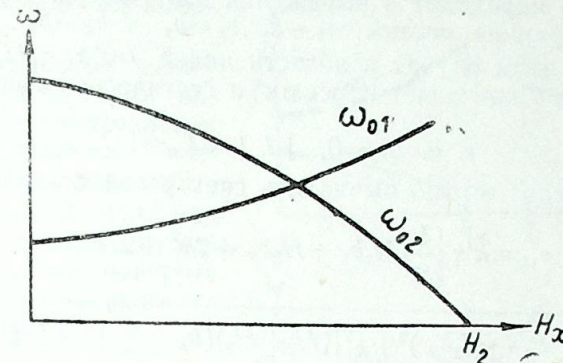


Рис. 1
Зависимости (схематические) резонансных частот от внешнего магнитного поля H .

Используя (3) и (3'), легко показать, что при $h_y = 0$ $\omega_{02} > \omega_{01}$, с увеличением внешнего магнитного поля ω_{01} увеличивается, а ω_{02} уменьшается и при значении $h_x = \sqrt{A(b_x - b_y)}$, $\omega_{01} = \omega_{02}$. При дальнейшем увеличении поля ω_{02} стремится к нулю (рис. 1). Наконец, при $h_x = H_2$ остается одна щель, так же как и в ферромагнетиках [4].

Оценка порядка величины, входящих в (5) ($b = \frac{H_A^{(2)}}{2M_0}$, $H_A^{(2)} \sim 10^4 \text{ э}$; $A = \frac{H_E}{2M_0}$, $H_E \sim 10^6 \text{ э}$) показывает, что при $h_x = 0$ для наблюдения резонанса в этом случае требуется электромагнитное излучение с длиной волны 10^{-2} см . Для того, чтобы наблюдать резонанс в сантиметровых диапазонах необходимо $H_x \sim H_E \sim 10^6 \text{ э}$.

Включим теперь в. ч. магнитное поле h_ω и выясним, при каких условиях возбуждаются колебания ω_{01} и ω_{02} . Исходя из уравнения движения [3] для магнитных моментов подрешеток M_1 и M_2 при условии $h_y \gg h_{\omega\omega}$ ($h_{\omega\omega}$ — амплитуда в. ч. поля), можно определить тензор в. ч. восприимчивости.

$$\begin{aligned} \chi &= \begin{vmatrix} \chi_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ 0 & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{vmatrix} \\ \chi_{xx} &= \chi_0 \frac{\omega_{02}^2}{\omega_{02}^2 - \omega^2}, \quad \chi_{yy} = \chi'_0 \frac{\omega_{01}^2}{\omega_{01}^2 - \omega^2}, \quad \chi_{zz} = \frac{\gamma^2 H_3 h_x^2 / H_2}{\omega_{01}^2 - \omega^2} \\ \chi_{zy} &= -\chi_{yz} = i \omega \chi_0 \frac{\gamma h_x}{\omega_{01}^2 - \omega^2}; \quad \chi_0 = 1/H_2, \quad \chi'_0 = 1/H_3 \end{aligned} \quad (6)$$

ω_{01} и ω_{02} определяются выражениями (5).

Из приведенных формул видно, что колебания с частотой ω_{01} возбуждается при перпендикулярном направлении в. ч. поля по отношению к постоянному полю, а колебания с частотой ω_{02} — при параллельном их расположении. Наличие недиагональных элементов тензора χ указывает на то, что в среде имеется гиротропия.

Аналогичная картина получается и при $|h|=h_y$. Тогда выражения при $|h|=h_x$ точно переходят в выражения для случая $|h|=h_y$, если произвести следующие замены: $a_x \leftrightarrow a_y, b_x \leftrightarrow b_y$ и $h_x \rightarrow h_y$.

2. $|h|=h_z$. В этом случае в области полей $0 < h_z < H_{11}$ ось антиферромагнетизма l совпадает с осью c , и статическая восприимчивость равна нулю,

$$\text{т. е. } m_0 = 0, \quad |l_0| = l_{0z} = 1$$

Зная m_0 и l_0 , снова можно вычислить спектр спиновых волн.

$$\begin{aligned} \epsilon_{1k} = & h' \gamma \left\{ \frac{1}{2} (H_3 b_x + H_2 b_y + 2h_z^2 + 2A \bar{c}_k) + \right. \\ & \left. + \sqrt{\frac{1}{4} (H_3 b_x - H_2 b_y)^2 + h_z^2 [(H_2 + H_3)(b_x + b_y) + 4A \bar{c}_k]} \right\}^{1/2} \\ \epsilon_{2k} = & h' \gamma \left\{ \frac{1}{2} (H_3 b_x + H_2 b_y + 2h_z^2 + 2A \bar{c}_k) - \right. \\ & \left. - \sqrt{\frac{1}{4} (H_3 b_x - H_2 b_y)^2 + h_z^2 [(H_2 + H_3)(b_x + b_y) + 4A \bar{c}_k]} \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (7)$$

Полагая $k=0$, получим выражение для резонансных частот в виде:

$$\begin{aligned} \omega_{01} = & \gamma \left\{ \frac{1}{2} (H_2 b_x + H_2 b_y + 2h_z^2) + \right. \\ & \left. + \sqrt{\frac{1}{4} (H_3 b_x - H_2 b_y)^2 + h_z^2 (H_2 + H_3)(b_x + b_y)} \right\}^{1/2} \\ \omega_{02} = & \gamma \left\{ \frac{1}{2} (H_3 b_x + H_2 b_y + 2h_z^2) - \right. \\ & \left. - \sqrt{\frac{1}{4} (H_3 b_y - H_2 b_y)^2 + h_z^2 (H_2 + H_3)(b_x + b_y)} \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (8)$$

Из (8) легко видеть, что при $h_z > H_{11} = \sqrt{H_2 b_x}$ ω_{02} становится мнимой величиной. Это связано с тем, что при $h_z > H_{11}$ происходит поворот направления антиферромагнетизма. Здесь в отсутствие поля $\omega_{01} > \omega_{02}$. С увеличением внешнего поля ω_{01} увеличивается, а ω_{02} уменьшается и при $h_z = H_{11}$, ω_{02} обращается в нуль. (рис. 2)

В этом случае возможно наблюдение антиферромагнитного резонанса в сантиметровом диапазоне длин волн при $H_z = \sqrt{H_2 b_x} \sim 10^5 \text{ э}$.

Вычислим тензор в. ч. восприимчивости для этого случая. Исходя опять-таки из уравнения движения для магнитных моментов подрешеток, получим:

$$\chi = \begin{vmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & 0 \\ \chi_{xy} & \chi_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\chi_{xx} = \gamma^4 \frac{b_y (b_x H_3 - h_z^2 b_x |b_y - \omega^2)}{(\omega_{01}^2 - \omega^2)(\omega_{01}^2 - \omega^2)}, \quad \chi_{yy} = \gamma^4 \frac{b_x (b_y H_2 - h_z^2 b_y |b_x - \omega^2)}{(\omega_{01}^2 - \omega^2)(\omega_{01}^2 - \omega^2)} \quad (9)$$

$$\chi_{xy} = -\chi_{yx} = i\omega \frac{\gamma^3 h_z (b_x + b_y)}{(\omega_{01}^2 - \omega^2)(\omega_{02}^2 - \omega^2)}$$

ω_{01} и ω_{02} определяется выражениями (8).

При критическом значении поля, при котором наступает поворот направления антиферромагнетизма, возможны два типа переходов.

1) $a_x + b_x < 0$. Переход $l \parallel h_z \rightarrow l \perp h_z$ происходит постепенно, а угол поворота направления определяется соотношением:

$$\cos^2 \theta = \left(\frac{H_2}{b_x} \right)^{1/2} \frac{H_{11} - h_z}{a_x + b_x},$$

ными словами переход начинается при $h_z = H_{11}$ и кончается при $h_z = H_{\perp}$ причем

$$H_{11} < H_{\perp} \left(H_{\perp} = H_{11} \frac{H'_2}{H_2} \right)$$

(рис. 2а).

2) В случае $a_x + b_x > 0$, когда $H_{11} > H_{\perp}$ переход $l \parallel h_z \rightarrow l \perp h_z$ происходит скачком при $h_z = H_{11}$, а обратный переход с уменьшением поля происходит при $h_z = H_{\perp}$ (рис. 2б).

В области полей $H_{\perp} < h_z \leq H'_2$ (здесь уже $l \perp h_z$) магнитный момент линейно растет с полем $|m_0| = m_{0z} = h_z / H'_2$ $l \parallel a$ и при $h_z = H'_2$ достигается насыщение вдоль направления c .

Стандартный расчет в этом случае дает следующие выражения для энергии двух ветвей спиновых волн:

$$\epsilon_{1k} = h' \gamma \left\{ \beta_1^2 (\bar{c}_k - b_x) (H_3 - b_x + \bar{c}_k) + (h_z + a_1 a_y + a_1 \bar{c}) (h_z + a_1 a_x + a_1 \bar{c}_k) \right\}^{1/2} \quad (10)$$

$$\epsilon_{2k} = h' \gamma \left\{ \beta_1^2 (b_y - b_x + \bar{c}_k) (H'_2 + \bar{c}_k) - a_1 \bar{c}_k (H'_2 - h_z - \bar{c}_k) \right\}^{1/2},$$

$$\text{где } H'_2 = A - b_x, \quad a_1 = \frac{h_z}{H'_2}, \quad \beta_1 = \sqrt{1 - a_1^2}, \quad H_3 = A - b_y$$

Полагая $k=0$, получим формулы для резонансных частот:

$$\omega_{01} = \gamma [(H_3 - b_x) (h_z^2 H_2 / (H'_2)^2 - b_x)]^{1/2} \quad (11)$$

$$\omega_{02} = \gamma [\beta_1^2 H'_2 (b_y - b_x)]^{1/2}$$

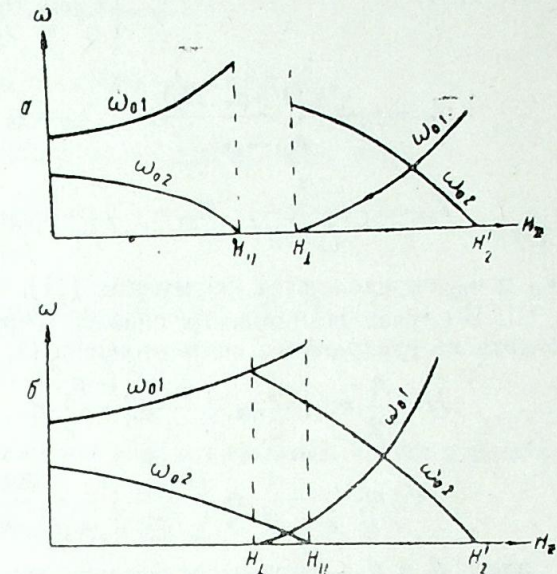


Рис. 2
Зависимости (схематические) резонансных частот от внешнего магнитного поля.
а — случай $a_x + b_x < 0$, б — случай $a_x + b_x > 0$

Анализ формул (11) показывает, что действительно они пригодны только при $h_z \gg H_{\perp}$. При $h_z = H_{\perp}$ $\omega_{01} = 0$, а $\omega_{02} \neq 0$. С увеличением поля ω_{01} растет, а ω_{02} уменьшается и, наконец, при $h_z = H_2$, $\omega_{02} = 0$ (рис.2).

Выражение для тензора в. ч. восприимчивости в этом случае имеет вид:

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & 0 \\ \chi_{xy} & \chi_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\chi_{xx} = \chi_0 \frac{\gamma^2 h_z^2 (1 + a_y / H_2')}{\omega_{01}^2 - \omega^2}, \quad \chi_{yy} = \chi_0 \frac{\gamma^2 (h_z^2 H_2 - H_2'^2 b_x)}{H_2' (\omega_{01}^2 - \omega^2)} \quad (12)$$

$$\chi_{zz} = \chi_0 \frac{\omega_{02}^2}{\omega_{02}^2 - \omega^2}, \quad \chi_{yx} = -\chi_{xy} = i\omega\chi_0 \frac{\gamma h_z}{\omega_{01}^2 - \omega^2}, \quad \chi_0 = 1/H_2'$$

ω_{01} и ω_{02} определяются формулами (11).

II. В случае ромбических слабых ферромагнетиков мы будем исходить из следующего гамильтониана (1, 5):

$$H = \frac{A}{2} m^2 + \frac{a_x}{2} m_x^2 + \frac{a_y}{2} m_y^2 + \frac{b_x}{2} l_x^2 + \frac{b_y}{2} l_y^2 - d_x m_x l_y + \\ + d_y m_y l_x - \frac{1}{2} c_{\eta} \left(\frac{\partial M_{1\eta}}{\partial r_{\eta}} \right)^2 - q_{\eta} \frac{\partial M_{1\eta}}{\partial r_{\eta}} \frac{\partial M_{2\eta}}{\partial r_{\eta}} - mh, \quad (13)$$

здесь d_x и d_y — параметры Дзялошинского, ответственные за слабый ферромагнетизм. При $h=0$ в этом кристалле возможны два слабо-ферромагнитных ($l \parallel a$, $l \parallel b$) и одно чисто антиферромагнитное состояние ($l \parallel c$) [1].

Предположим, что в рассматриваемом кристалле реализуется чисто антиферромагнитное состояние ($l \parallel c$), а следующим ближайшим состоянием к $l \parallel c$ является состояние $l \parallel a$. Для этого должны выполняться соотношения:

$$b_y > d_x^2 / (A + a_x - b_y), \quad b_y > d_y^2 / (A + a_y - b_x) \text{ и} \\ b_y - b_x - d_x^2 / (A + a_x - b_y) + d_y^2 / (A + a_y - b_x) > 0.$$

Вычислим теперь спектр спиновых волн, резонансные частоты и тензор в. ч. восприимчивости для ромбического слабого ферромагнетика в случае, когда исходным является антиферромагнитное состояние ($l \parallel c$).

1. $|h| = h_x$

В этом случае рост магнитного момента одновременно сопровождается поворотом типа $l \parallel c \rightarrow l \parallel b$ [2]. При $h_x = H_k = (A + a_x - d_x^2/b_y) / (1 + d_x^2/b_y)^{1/2}$ l становится параллельным оси [010] и при дальнейшем увеличении h_x l не выходит из плоскости (001), т. е. в области полей

$$0 < h_x < H_k \quad |m| = m_{ox} = \frac{h_x}{(A + a_x - d_x^2/b_y)}, \quad \sin \theta = \frac{d_x h_x / b_y}{V(A + a_x - d_x^2/b_y)^2 - h_x^2},$$

а при значении поля $h_x > H_k$ магнитный момент m_{ox} определяется уравнением:

$$h_x = m_{ox} (A + a_x - b_y) - d_x (2m_{ox}^2 - 1) / (1 - m_{ox}^2)^{1/2}. \quad l \parallel b$$

θ — угол между вектором l и осью z .
Следует отметить, что вращение направления оси антиферромагнетизма, полученное здесь, связано с неколлинеарностью магнитных моментов подрешеток. Действительно, из (13) видно, что если поле (h_x) создаст момент $m_x \neq 0$, то это состояние будет энергетически выгодным, если $l_y \neq 0$. Выражения для энергии спиновых волн в области полей $0 < h_x < H_k$ имеют вид:

$$\epsilon_{1k} = h' \gamma \{ \beta^2 [(b_x + \bar{c}_k)(H_3 + \bar{c}_k) - d_y^2] + \\ + \alpha^2 (A + \bar{c}_k)(H_3 + \bar{c}_k - 2d_x d_y / b_y - \bar{c}_k d_x^2 / b_y^2 + d_x^2 b_x / b_y^2) \}^{1/2} \\ \epsilon_{2k} = h' \gamma \{ \beta^2 [(b_y + \bar{c}_k)(H_2 + \bar{c}_k) - d_x^2] + \\ + \alpha^2 \bar{c}_k [\bar{c}_k + b_y + 2d_x^2 / b_y + (H_2 + \bar{c}_k) d_x^2 / b_y^2] \}^{1/2}, \quad (14)$$

$$\text{здесь } \alpha = \frac{h_k}{A + a_x - d_x^2/b_y}, \quad \beta = (1 - h_x^2 / H_k^2)^{1/2}.$$

Полагая $k=0$, получим выражения для резонансных частот в ромбических слабых ферромагнетиках.

$$\omega_{01} = \gamma \{ \beta^2 (H_3 b_x - d_y^2) + \alpha^2 A (H_3 - 2d_x d_y / b_y + d_x^2 b_x / b_y^2) \}^{1/2} \\ \omega_{02} = \gamma \beta (H_2 b_y - d_x^2)^{1/2} \quad (15)$$

Сравнивая (15) и (5), видим, что в ромбических слабых ферромагнетиках величины энергетических щелей, необходимые для возбуждения спиновых волн, за счет члена Дзялошинского могут уменьшаться.

Включая h_{ω} , легко найти выражения для тензора в. ч. восприимчивости и в этом случае

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ 0 & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\chi_{xx} = \frac{\gamma^2 \beta^2 b_y}{\omega_{02}^2 - \omega^2}, \quad \chi_{yy} = \frac{\gamma^2 (A \alpha^2 + b_x \beta^2)}{\omega_{01}^2 - \omega^2}, \quad \chi_{zz} = \gamma^2 \alpha^2 \frac{H_3 + d_x^2 b_x / b_y^2 - 2d_x d_y / b_y}{\omega_{01}^2 - \omega^2} \quad (16)$$

$$\chi_{yz} = (\chi_{zy})^* = -i\omega \frac{\alpha \gamma}{\omega_{01}^2 - \omega^2} + \gamma^2 \alpha \beta \frac{d_y - b_x d_x / b_y}{\omega_{01}^2 - \omega^2}$$

ω_{01} и ω_{02} определяется выражениями (15).

Поскольку $d_x, d_y \ll H_3$, то члены $b_x d_x^2 / b_y^2 - 2d_x d_y / b_y$ в (16) практически не влияют на χ_{zz} . Недиагональные компоненты тензора χ , как видно из (16), комплексны, причем действительные части их, которые отсутствуют в компенсированных антиферромагнетиках (см. [3]), обусловлены наличием членов, ответственных за неколлинеарность магнитных моментов подрешеток.

Разумеется, тензор $\overleftrightarrow{\chi}$ является попрежнему эрмитовым, так как мы не учитываем затухания в уравнениях движения для магнитных моментов подрешеток. По-видимому, действительные части в недиагональных компонентах тензора $\overleftrightarrow{\chi}$ будут играть существенную роль (в области частот $\omega < \gamma H_d$; $H_d = \frac{d}{2M_0}$)* в явлениях вращения плоскости поляризации и отражения электромагнитных волн в слабоферромагнитных диэлектриках.

В области полей $h_x \geq H_k$ система уже находится в слабоферромагнитном состоянии. Спектр спиновых волн для этого случая был вычислен Е. А. Туровым и В. Е. Найшом [5].

2. $h_z = h_x$

Внешнее постоянное магнитное поле направлено вдоль оси антиферромагнетизма (l). Здесь, так же как и в антиферромагнетиках, до некоторого порогового поля H_0 (при котором ось антиферромагнетизма скачком переходит в положение, перпендикулярное внешнему полю) статическая восприимчивость равна нулю, т. е. $m_0 = 0$, $l_0 = l_{0z} = 1$.

Это вращение (переход $l \parallel h_z \rightarrow l \perp h_z$) в антиферромагнетиках происходит при $h_z = \sqrt{b_x H_2}$ вокруг оси $n = [l^0 m^0]$, (m^0 и l^0 единичные векторы по направлению m и l , соответственно). В слабых ферромагнетиках этот поворот происходит** при

$$h_z = H_0 = \frac{1}{2} \left(H_3 b_y + H_2 b_x + 2 d_x d_y - \sqrt{\frac{1}{4} (H_3 b_y - H_2 b_x)^2 + (b_x d_x + b_y d_y) (H_3 d_x + H_2 d_y)} \right)$$

и очень сложным образом (l — вращается вокруг оси m , и одновременно вектор m изменяет свое направление). Легко показать, что $H_0 < H_k$ ***.

Зная равновесные значения m и l в области полей $0 < h_z < H_0$, мы можем и в этом случае рассчитать спектр спиновых волн:

$$\begin{aligned} \gamma_{1k} = h \alpha \left\{ \frac{1}{2} (2h_z^2 + H_2 b_y + H_3 b_x - d_y^2 - d_x^2 + 2A \bar{c}_k) + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{1}{4} (H_2 b_y - H_3 b_x)^2 + h_z^2 [(H_2 + H_3)(b_x + b_y) - (d_x + d_y)^2 + 4A \bar{c}_k]} \right\}^{1/2} \\ \epsilon_{2k} = h \alpha \left\{ \frac{1}{2} (2h_z^2 + H_2 b_y + H_3 b_x - d_y^2 - d_x^2 + 2A \bar{c}_k) - \right. \\ \left. - \sqrt{\frac{1}{4} (H_2 b_y - H_3 b_x)^2 + h_z^2 [(H_2 + H_3)(b_x + b_y) - (d_x + d_y)^2 + 4A \bar{c}_k]} \right\}^{1/2} \quad (17) \end{aligned}$$

* В обычных антиферромагнетиках при низких частотах (по сравнению с резонансными) вращение ничтожно мало.

** Как показано в работе [2], определение критического поля, когда $l \parallel h_z$ термодинамическим путем приводит к математическим трудностям. Оказывается, что это поле очень легко определить из выражения для резонансных частот.

*** При сравнении H_0 и H_k и мы предполагаем, что A , a_x , a_y , b_x , b_y одинаковы для обоих типов кристаллов.

Выражения для резонансных частот в этом случае имеют вид:

$$\begin{aligned} \omega_{01} = \gamma \left\{ \frac{1}{2} (2h_z^2 + H_2 b_y + H_3 b_x - d_y^2 - d_x^2) + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{1}{4} (H_2 b_y - H_3 b_x)^2 + h_z^2 [(H_2 + H_3)(b_x + b_y) - (d_x + d_y)^2]} \right\}^{1/2} \\ \omega_{02} = \gamma \left\{ \frac{1}{2} (2h_z^2 + H_2 b_y + H_3 b_x - d_y^2 - d_x^2) - \right. \\ \left. - \sqrt{\frac{1}{4} (H_2 b_y - H_3 b_x)^2 + h_z^2 [(H_2 + H_3)(b_x + b_y) - (d_x + d_y)^2]} \right\}^{1/2} \quad (18) \end{aligned}$$

Стандартный расчет в случае, когда $|h| = h_z$ дает следующее выражение для тензора в. ч. восприимчивости

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\chi} = \begin{vmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & 0 \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \chi_{xx} = \gamma^2 \frac{b_y [\gamma^2 (b_x H_3 - d_y^2 - h_z^2 b_x / b_y) - \omega^2]}{(\omega_{01}^2 - \omega^2)(\omega_{02}^2 - \omega^2)}, \\ \chi_{xy} = \gamma^2 \frac{b_x [\gamma^2 (b_y H_2 - d_x^2 - h_z^2 b_y / b_x) - \omega^2]}{(\omega_{01}^2 - \omega^2)(\omega_{02}^2 - \omega^2)}, \\ \chi_{xy} = (\chi_{yx})^* = \gamma^2 h_z \frac{i \omega \gamma (b_x + b_y) + \gamma^2 (d_y b_y - d_x b_x)}{(\omega_{01}^2 - \omega^2)(\omega_{02}^2 - \omega^2)}. \quad (19) \end{aligned}$$

ω_{01} и ω_{02} определяются выражениями (18). Здесь, так же как в предыдущем случае, члены Дзялошинского дают существенный вклад на χ_{xy} .

III. На основе проведенного выше рассмотрения можно сделать следующие выводы.

1. В случае, когда $h \perp l$, ($l \parallel c$) в слабых ферромагнетиках под влиянием внешнего постоянного магнитного поля h происходит переход из одного равновесного (антиферромагнитного) состояния в другое (слабоферромагнитное) (4), в то время как в антиферромагнетиках в этом случае переход отсутствует.

2. В случае, когда $h \parallel l$, ($l \parallel c$) как в антиферромагнетиках, так и в слабых ферромагнетиках при критическом значении внешнего магнитного поля происходит переход типа $l \parallel h \rightarrow l \perp h$ [2]. Однако переход (вращение l) в антиферромагнетиках происходит при $h = \sqrt{H_2 b_x}$ вокруг оси $n = [l^0 m^0]$, а в слабых ферромагнетиках — при $h = \frac{1}{2} (H_3 b_y +$

$+ H_2 b_x + 2 d_x d_y - \sqrt{\frac{1}{4} (H_3 b_y - H_2 b_x)^2 + (b_x d_x + b_y d_y) (H_3 d_x + H_2 d_y)})$ вокруг

оси m , и одновременно вектор m изменяет свое направление.

Следует отметить, что здесь в слабых ферромагнетиках речь идет о переходе от антиферромагнитного состояния к слабоферромагнитному.

3. Как в ромбических антиферромагнитах, так и в слабых ферромагнетиках при $h=0$ спектр спиновых волн расщепляется на две ветви. Иными словами, в этих кристаллах существуют две энергетические щели, необходимые для возбуждения спиновых волн. В антиферромагнетиках со структурой, допускающей существование слабого спонтанного магнитного момента, величина этих щелей может уменьшаться за счет члена Дзялошинского.

4. В обоих типах кристаллов одно из энергетических щелей (определяющаяся колебаниями магнитных моментов подрешеток относительно кристаллографических осей) исчезает при переходе из одного равновесного состояния к другому под влиянием внешнего магнитного поля.

5. Действительные части недиагональных компонентов тензора в. ч. магнитной восприимчивости, вызванные членом Дзялошинского, определяют вращение плоскости поляризации в области частот $\omega < \gamma H_d$.

Пользуясь приятным случаем, выражаю глубокую благодарность Е. А. Турову, руководившему выполнением настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусейнов Н. Г., Туров Е. А. „Изв. АН Азерб. ССР“, № 4, 1960.
2. Крейнс Н. М. ЖЭТФ, 40, 3, 762, 1961.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. J. Sow. Phys., 8, 1953, 1935.
4. Туров Е. А., Ирхин Ю. П. „Изв. АН СССР, сер. физич. т. 22, № 10, 1958
5. Туров Е. А., Найш В. Е. ФММ, 9, 10, 1960.
6. Wier Olga P. van, Peski-Tinbergen Tineke van, Gorter C. J. Physica, 25, № 2, 116, 1959.

Н. Г. Гусейнов

Ромбик антиферромагнит вэ зэф ферромагнит кристалларда спин далгалары нагда

ХУЛАСӘ

Ромбик кристалларын магнит хассәләри бир нечә мўәллифләр тәрефиндән өйрәнилмишдир. [1, 2, 5, 6].

Мәгаләдә һәмин кристалларын магнит хассәләринин өйрәнилмәсини тамамламаг мәгсәди илә ромбик антиферромагнитләрин вэ зэф ферромагнитләрин (ахырынчыда, систем бу тип кристалларда мүмкүн олан антиферромагнит һалындадыр) енержи спектри, резонанс тезлији вэ жүксәк тезликли магнит нүфузлуғу тензору һесаблинмышдыр. һәр ики кристал үчүн алынған нәтичәләрин мүгајисәси кәстәрир ки, зэф ферромагнитләрде систем антиферромагнит һалында олдугда белә, онлар өзләринин һәм статик, һәм дә динамик магнит хассәләринә кәрә ади антиферромагнитләрдән фәргләнир.

В. И. ТАГИРОВ и А. А. КУЛИЕВ

ДИФФУЗИЯ ТАНТАЛА В МОНОКРИСТАЛЛИЧЕСКОМ ГЕРМАНИИ

В связи с широким развитием полупроводниковой техники необходимы исследования в направлении изысканий путей управления электрическими свойствами полупроводниковых материалов.

Целесообразное изменение свойств полупроводников обычно достигается введением в чистый материал соответствующих примесей. Такое легирование полупроводников часто осуществляется путем диффузии.

Изучение температурной зависимости коэффициентов диффузии различных примесей в полупроводниковых материалах позволяет правильно выбирать режим легирования. Кроме того, знание коэффициентов диффузии необходимо для учета некоторых явлений, имеющих место при эксплуатации полупроводниковых приборов.

Изучение диффузионных процессов имеет так же и большое научное значение, так как значение энергии активации диффузии коррелируется с энергией связи в твердых растворах.

В широко применяемом для изготовления полупроводниковых приборов в германии акцепторные и донорные уровни создаются введением элементов III и V групп таблицы Менделеева.

Целью настоящей работы является изучение диффузии элемента V группы тантала в германии.

Изготовление образцов и порядок проведения опытов

Определение коэффициента диффузии проводилось по методу снятия тонких слоев с применением радиоактивного изотопа тантала-182, с периодом полураспада 111,2 дня.

Для проведения эксперимента готовились цилиндрические образцы диаметром 10—15 мм из монокристаллического германия. Основания цилиндров шлифовались.

Тантал-182 растворялся в смеси $\text{HF}-\text{HNO}_3$ и электролитически наносился на один из торцов каждого образца. При определении коэффициента диффузии толщина нанесенного слоя составляла доли микрона.

Затем образцы помещались в кварцевые ампулы, которые откачивались до вакуума 10^{-4} мм рт. ст. и после чего отпайвались.

Образцы подвергались диффузионному отжигу в печи, температура которой регулировалась электронным терморегулятором. Продолжительность отжига варьировалась от 15 до 60 час. После температурного отжига с нанесенной поверхности образца снимались тонкие слои и считалась их активность на установке „Б“.

Снятие слоев производилось при помощи специального приспособления (рис. 1), позволяющего сохранять параллельность. Толщина снятого слоя измерялась на горизонтальном оптиметре и проверялась взвешиванием на микроаналитических весах.

По результатам эксперимента строились кривые зависимости логарифма удельной активности от квадрата расстояния, отсчитываемого от первоначальной поверхности, на которую наносилась активность.

Для случая диффузии из непостоянного источника, находящегося на поверхности полубесконечного цилиндра, решение уравнения диффузии имеет вид:

$$c = \frac{Q_0}{2\sqrt{\pi}Lt} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}, \quad (1)$$

где c — концентрация диффундирующей примеси вдоль x ; Q_0 — начальное количество диффундирующей

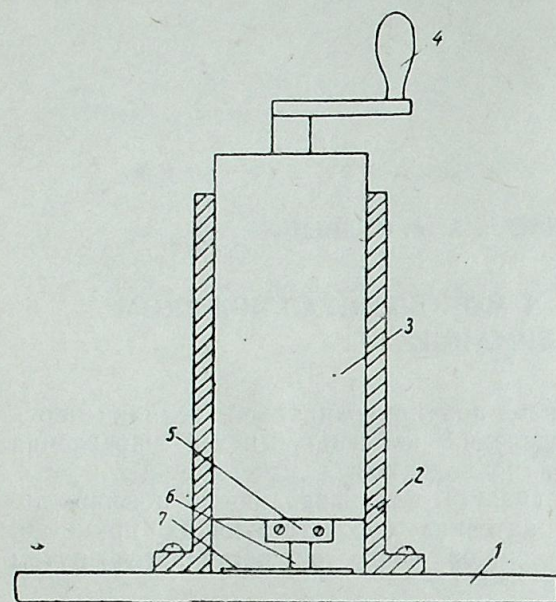


Рис. 1

Схема приспособления для снятия тонких параллельных слоев.

1 — подставка; 2 — цилиндр неподвижный; 3 — цилиндр подвижный; 4 — ручка; 5 — держатель образца; 6 — образец; 7 — наждачная бумага.

примеси; t — время диффузионного отжига.

Так как удельная активность снятого слоя пропорциональна концентрации примеси c , то

$$I = Ae^{-\frac{x^2}{4Dt}} \quad (2)$$

Логарифмирование (2) дает

$$\lg I = \lg A - \frac{0,1083}{Lt} x^2. \quad (3)$$

Как видно из (3), $\lg I$ линейно зависит от x^2 , причем:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{0,1083}{Dt} \quad (4)$$

Строя зависимость $\lg I = f(x^2)$ по известному t из наклона прямой определяется D :

$$D = -\frac{0,1086}{t \cdot \operatorname{tg} \alpha}.$$

Результаты опытов

Опыты проводились в температурном интервале 750—900°C и 800—900°C на образцах, имеющих удельное сопротивление 10 и 45 ом·см, соответственно. Зависимость коэффициента диффузии от обратной температуры представлена на рис. 2. Из наклона прямых (рис. 2) были определены энергии активации диффузии и предэкспоненциальные множители.

Коэффициенты диффузии тантала в германии с удельными сопротивлениями 10 и 45 ом·см можно выразить следующими уравнениями:

$$D_{\rho=10 \text{ ом. см}} = 2,5 \cdot 10^{-6} e^{-\frac{1,16}{\text{кг}} \frac{\text{см}^2}{\text{сек}}} \quad (6)$$

$$D_{\rho=45 \text{ ом. см}} = 0,2 e^{-\frac{2,86}{\text{кг}} \frac{\text{см}^2}{\text{сек}}} \quad (7)$$

Как видно из температурной зависимости коэффициента диффузии тантала в германии, предэкспоненциальный множитель и энергия активации больше для образцов с большим удельным сопротивлением. Такая зависимость была наблюдаема также в работе [1].

Значение энергии активации тантала в германии с удельным сопротивлением 60 ом·см, полученное авторами [1] в пределе

ошибки эксперимента хорошо согласуется с нашим значением для германия с удельным сопротивлением 45 ом·см, в то же время значения коэффициента диффузии расходятся, что, по-видимому, связано с различным совершенством монокристаллического германия.

Известно [3], что элементы III и V групп таблицы Менделеева характеризуются высокими значениями коэффициента распределения и низкими значениями коэффициента диффузии в германии. Сравнение значения коэффициента диффузии тантала с его коэффициентом распределения в германии [2] показывает, что такая зависимость сохраняется и для системы Ge—Ta.

В заключение авторы выражают свою признательность проф. Г. Б. Абдуллаеву за обсуждение результатов и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сандулова А. В. и Хе Ю-й-ян. „ДАН СССР“, 128, 2, 1959.
2. Тагиров В. И. и Кулиев А. А. ФТТ, 1961, т. 3, № 9.
3. Шашков Ю. М. Металлургия полупроводников. Металлургиздат. 1960.

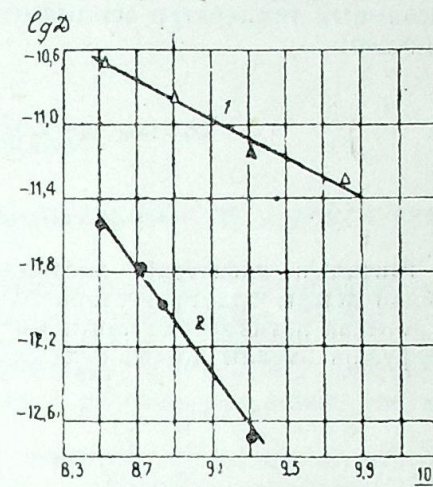


Рис. 2

Температурная зависимость коэффициента диффузии тантала в монокристаллическом германии с удельными сопротивлениями 10 ом·см (1) и 45 ом·см (2)

Танталын монокристал кәрманиума диффузијасынын тәдгиги

ХҮЛАСӘ

Мәгалә монокристал кәрманиумда танталын диффузија әмсалынын өйрәнилмәсинә һәср едилмишдир.

Тәчрүбәләр танталын радиоактив изотопунун ($Ta-182$) тәтбиги илә хусуси мугавимәти 10 вә 45 $ом/см$ олан монокристал кәрманиум нүмунәләри үзәриндә апарылмышдыр. Танталын кәрманиумда диффузија әмсалынын температур асылылығы үчүн ашағыдакы дүстурлар алынмышдыр:

$$D_{\rho=100м.см} = 2,52 \cdot 10^{-6} e^{-\frac{11,6}{KT}} \frac{см^2}{сан}$$

$$D_{\rho=450м.см} = 0,198 e^{-\frac{2,86}{KT}} \frac{см^2}{сан}$$

Танталын диффузија әмсалынын кәрманиумун хусуси мугавимәтиндән асылы олдуғу көстәрилмишдир.

Алынған нәтичәләрдә танталын кәрманиумда пәјланма әмсалы илә диффузија әмсалы арасында асылылығ олдуғу көстәрилир.

Х. М. ХАЛИЛОВ

НЕКОТОРЫЕ ИТОГИ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЯЗКОСТИ ЖИДКОСТЕЙ

При фазовых переходах с изменением основных термодинамических параметров происходит довольно резкое изменение свойств системы. В частности, при приближении жидкости к критическому состоянию ее сжимаемость быстро возрастает, флуктуации плотности становятся значительными и возникает сильное рассеяние света — критическая опалесценция.

Иногда критическая область простирается несколько выше той температуры, при которой происходит исчезновение мениска. При этом еще сохраняется некоторое различие в плотностях обеих фаз вещества.

Такое различие в плотностях вещества, находящегося в стеклянной трубке, приводит к тому, что проходящий через двухфазную неоднородную среду свет преломляется не везде одинаково, хотя мы рассматриваем очень малые участки высот. Благодаря резкому преломлению лучей внутренний диаметр трубки выше линии, где раньше находился мениск, как бы уменьшен, а ниже не — увеличен. Нагревая вещество до исчезновения такого кажущегося расхождения во внутреннем диаметре трубки, можно установить точное значение „ложной“ критической температуры. Это значение на несколько градусов выше температуры исчезновения мениска.

Наблюдения, проведенные таким путем, показали, что если молекулы жидкости однородны, то закритической области не существует. Напротив, закритическая область рельефно проявляется в смесях и когда среди одиночных молекул среды присутствуют и ассоциированные молекулы. Отсюда можно сделать вывод, что в случае наличия закритической области „ложная“ критическая температура является истинной.

На рис. 1 представлен температурный ход вязкости сосуществующих фаз вещества в критической области. Здесь сплошная линия проходит как раз через критическую точку, относящуюся к исчезновению мениска, а пунктирная линия проведена через так называемую „ложную“ критическую точку. Сплошная линия в непосредственной близости к критической точке претерпевает резкий спад — скачок, в то время как пунктирная линия носит более или менее плавный непрерывный характер.

Между тем, Михельс, Ботцен и Шурман [8] при исследовании вязкости CO_2 в интервале давления 200 : 300 $атм$ и при температурах

31,1; 32,2; 34,6°C обнаружили наличие трех максимумов на графике вязкость—давление, в то время как до них другими исследователями было установлено наличие лишь одной пики, соответствующей 70 атм. В работах же [2, 6, 7] указывается на наличие гистерезисных явлений в поведении некоторых физических параметров (плотность, вязкость и др.) в критической области.

Наличие аномальных и гистерезисных явлений обнаруживается в тех случаях, когда методика измерения не допускает перемешивания вещества в критической области [3] или это перемешивание не достаточно [1] или же вообще не соблюдены критические условия.

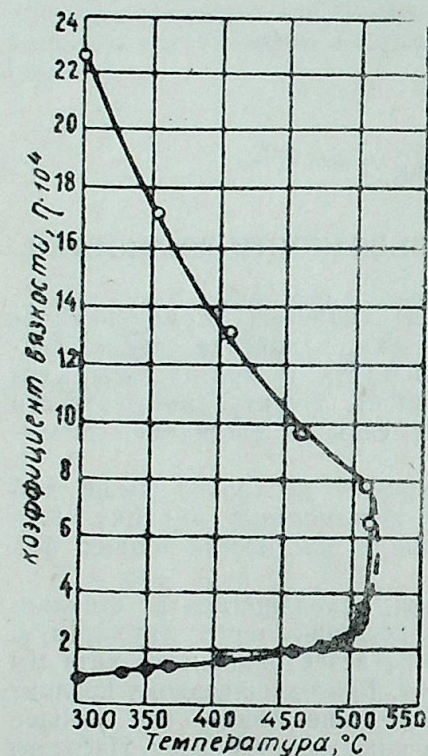


Рис. 1

Температурная зависимость вязкости жидкой и парообразной фазы смеси дифенилового эфира с фенолом (0,1%) в критической области.

как и перегрева, возрастает интенсивность процесса фазового перехода. Величина переохлаждения зависит от трудности возникновения зародышей новой фазы.

Как известно, у некоторых веществ при переохлаждении их ниже температуры плавления внезапно происходит довольно сильное увеличение вязкости, не связанное, однако, с заметным изменением других физических свойств. Это особенно рельефно проявляется для полярных жидкостей.

Так, например, на рис. 2 приведены результаты исследования вязкости ксилола (0) (Халилов Х. М., Ибрагимов К.). Чтобы проследить изменение вязкости во времени в области переохлажденного состояния при каждом значении температуры измерения были проведены через 20, 30, 40 и 50 мин. На концах кривой показаны интервалы времени ожидания до начала измерения вязкости. При этих условиях эксперимента получается несколько ветвей кривых вязкости (веер кривых вязкости).

Из рис. 2 видно, что начало расхождения веера кривых вязкости (узловая точка) соответствует температуре начала кристаллизации жидкости.

Причина нарастания вязкости с увеличением интервалов времени ожидания в переохлажденном состоянии состоит в образовании в составе жидкости все большего числа молекулярных групп.

Таким образом, здесь имеет место неустойчивое состояние вещества и поэтому не представляется возможным со временем получение однозначных результатов. Следовательно, не может быть и речи о проверке теоретических формул вязкости в этой области.

В области, близкой к точке плавления, если исключить переохлаждение состояния, формула Френкеля дает хорошие результаты.

Так что, при исследовании вязкости жидкостей точные однозначные результаты можно получить вдали от критической области и области плавления.

В этой связи необходимо остановиться на зависимости вязкости жидкостей от их структуры.

Передача количества движения частицами жидкости может быть реализована как при максимальном сближении колеблющихся частиц, так и при их перескоках из одного положения „оседлой жизни“ в другое.

Рассмотрим механизм передачи количества движения между слоями жидкости, считая, что характер основных формул, описывающих явления переноса в газообразной среде, при этом не претерпевает особых изменений, но зато физические величины, входящие в эти формулы, в случае жидкостей должны существенно отличаться от физических величин, относящихся к газообразным средам.

Находя избыток количества движения, передаваемого в единицу времени со стороны более медленного слоя более быстрому, и приравняв его силе трения, выраженной по закону Ньютона, для коэффициента вязкости получим [4, 5]:

$$\eta = \frac{\lambda p_i}{c} \quad (1)$$

При определении значений λ , p_i , c необходимо учесть структурные особенности вещества.

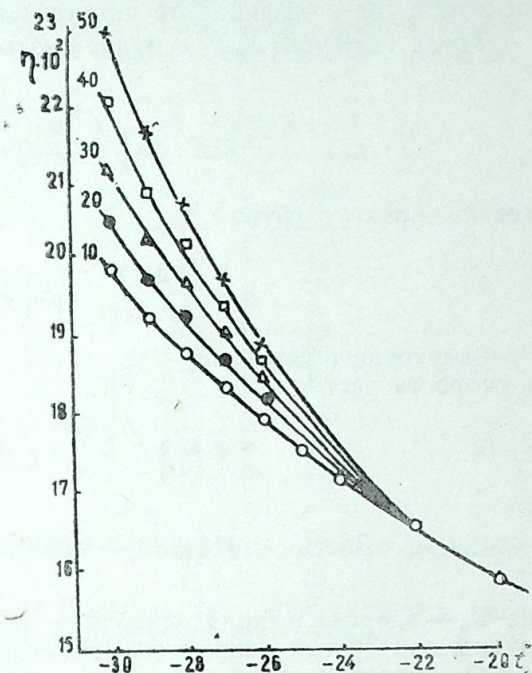


Рис. 2

Вязкость ксилола (0) в области переохлажденного состояния.

Будем считать, что в большинстве случаев жидкости состоят из молекулярных групп и одиночных молекул, совершающих колебательное движение относительно временных положений равновесия; одиночные молекулы находятся в поле притяжения групп.

Групповое поведение молекул ряда веществ, особенно имеющее место при относительном движении слоев жидкости, сказывается, в основном, на коэффициенте потенциальной энергии частиц.

Тогда величины λ , p_i и $\bar{c}$ будут соответственно равны

$$\lambda = r_r = \sqrt[3]{\frac{3n\mu}{4\pi N\rho}}, \quad (2)$$

где r_r — радиус группы,

$$p_i = \frac{4RT}{\rho_k^{2/3} e^{n/3}} \cdot \rho^{5/3} \left(e^{\frac{nT_k}{6T}} - 1 \right) \quad (3)$$

P_i — внутреннее давление,
а скорость частиц

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} l^{-\frac{\Delta u}{KT}} \quad (4)$$

$$\text{Здесь } \Delta U = U_0 - U(T) = \frac{n}{6} (KT_k - KT),$$

где U_0 — энергия выхода одиночной молекулы из потенциальной ямы группы или другой одиночной молекулы при абсолютном нуле;

$U(T)$ — потенциальная энергия молекул в поле притяжения другой молекулы или группы при температуре T .

Тогда (4) будет выражать ту энергию, которая необходима при данной температуре для отделения молекулы от группы посредством внешнего воздействия, n является предэнергетическим коэффициентом, в общем случае — это функция давления, температуры, числа степеней свободы и сил межмолекулярного взаимодействия.

Подставляя в (1) значения λ , p_i и $\bar{c}$, по (2—4) получим для коэффициента вязкости

$$\eta = A_0 \frac{n^{1/3}}{\rho_k^{2/3} l^{1/3} T^{1/2}} \rho^{4/3} T^{1/2} l^{\frac{nT_k}{6T}} \left[e^{\frac{nT_k}{6T}} - 1 \right], \quad (5)$$

где

$$A_0 = 4 \sqrt{\frac{R}{2}} \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi N}} = 20,9 \cdot 10^{-5} \frac{\text{эрг}^{1/2}}{\text{град}^{1/2} \cdot \text{моль}^{1/2}}$$

Эта формула отличается от ранее известных тем, что она содержит лишь один произвольный параметр n .

Зависимость n от температуры, иначе, учет влияния термической диссоциации может быть произведен следующим образом.

Если написать выражение $\frac{n}{a} KT = -\frac{b}{r_r^6}$ один раз для случая температуры плавления, а другой — для переменной температуры, то получим

$$n = n_0 \frac{T_0^{1/3}}{T^{1/3}} \frac{\rho^{2/3}}{\rho_0^{2/3}} \quad (6)$$

Тогда в правой части равенства (5) на экспонентах вместо n будет фигурировать выражение (6).

Формула (5) была проверена нами в смысле обеспечения постоянства A_0 и удовлетворения температурного хода коэффициента вязкости. Результаты по обеспечению перехода от вещества к веществу представлены в табл. 1.

Таблица 1

Жидкости	n	$A_0 \cdot 10^5$
Пентан	5,08	20
Гексан	5,09	20
Гептан	4,52	20
Октан	4,56	19
Бензол	6,37	20
Метилловый спирт	6,78	19
Этиловый спирт	10,52	21
Пропиловый спирт	11,43	20
Этилформиат	4,98	20
Пропилформиат	5,20	20

Некоторые из результатов проверки температурного хода вязкости представлены в табл. 2.

Оказалось, что полученная нами формула для коэффициента вязкости хорошо обеспечивает как температурный ход вязкости, так и переход от вещества к веществу.

Таблица 2

$t, ^\circ\text{C}$	Гептан		Этиловый спирт		Этилформиат	
	$\eta_{\text{эксп.}} \cdot 10^5$	$\eta_{\text{выч.}} \cdot 10^5$	$\eta_{\text{эксп.}} \cdot 10^5$	$\eta_{\text{выч.}} \cdot 10^5$	$\eta_{\text{эксп.}} \cdot 10^5$	$\eta_{\text{выч.}} \cdot 10^5$
20	413	413	—	—	416	416
40	334	334	917	917	326	326
60	277	275	654	636	271	268
80	233	229	466	457	228	223
100	195	194	338	338	191	187
120	165	165	253	255	160	158
140	141	141	194	194	134	134
160	120	121	148	150	113	113
180	101	104	116	116	95	95
200	89	89	90	90	76	77
220	73	75	67	66	61	60
240	61	61	—	—	—	—

Выводы

1. Если молекулы жидкости однородны, то за критической области не существует. Напротив, за критической областью рельефно проявляется в смесях и когда среди одиночных молекул среды присутствуют и ассоциированные молекулы.

В непосредственной близости к критической точке имеет место искажение экспериментальных данных. Это не позволяет опровергнуть или подтвердить теоретические выводы о наличии экстремальных значений коэффициента вязкости в критической точке.

2. В области переохлажденного состояния вещества для полярных жидкостей получается веер кривых температурного хода вязкости, т. е. не имеет места воспроизводимость результатов со временем. Поэтому здесь не может быть речи о проверке применимости термических формул вязкости.

3. С учетом структурных особенностей жидкостей, для вычисления коэффициента вязкости получено соотношение (5), которое хорошо обеспечивает как температурный ход вязкости, так и переход от вещества к веществу.

Структурные особенности вещества учитываются коэффициентом перед потенциальной энергией. Учет термической диссоциации, в свою очередь, связан с изменением этого коэффициента с температурой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мандельштам С. Л. и Леонтович М. А. ЖЭТФ, 7, 3 (1937).
2. Мясников Л. и Фрейман Л. Современные проблемы физической акустики, М., 1935.
3. Неклепаев Н. ЖРФХО, 43, 100 (1911).
4. Халилов Х. М. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук. 1959, № 4.
5. Халилов Х. М. Изв. высших учебных заведений. "Нефть и газ". 1960, № 7.
6. Bergman L. Der Ultraschall, Berlin (1944).
7. Kneser H. Ann. der Phys., 32, вып. 5, 277 (1938).
8. Michels A., Botzen A., Schurman. Physica, 2, 95, (1957).

Х. М. Халилов

Мајеләрин өзлүлүүнүн тәдгигинин бә'зи јекунлары

ХҮЛАСӘ

Бә'зи ән критик област менискин итдији температурдан бир гәдәр јухарыны әһатә едир. Бу заман маддәнин һәр ики фазасынын сыхлығында һәлә мүүјјән фәрг галыр. Мүүјјән едилмишдир ки, мајенин молекуллары бирчинс олдугда, бу област критик нөгтәдән јухары давам етмир. Әксинә гарышыгларда вә мүнһитин тәк-тәк молекуллары арасында ассосиасија олуңмуш молекуллар олдугда, бу област критик нөгтәдән јухарыны әһатә едир.

Бурадан белә бир нәтичә чыхармаг олар ки, һәмин област критик температурдан јухары кечдикдә, „јанлыш“ критик температур һәгиги температурдур. Көстәрилмишдир ки, критик областын билаваситә јахынлығында маддәнин фазаларынын өзлүлүү һаггындакы экспериментал гијмәтләрдә мүүјјән јанлышлыг вардыр.

Критик областда экспериментал нәтичәләрин тәһрифи ја маддәнин критик областда кифәјәт гәдәр јахшы гарышдырмаға тәчрүбә имкан вермәдикдә, ја да үмумијјәтлә критик шәртләрә риајәт едилмәдикдә баш верир.

Критик областда маддәнин һәр фазасынын ичәрисиндә чохла хырда маје бухар габарчыглары, бухар фазасынын ичәрисиндә исә маје дамчылары олур. Бундан башга өзлүлүү тәдгиг едәркән капилјар методдан истифадә етдикдә капилјарын ичәрисиндә: маје фаза өјрәниләркән һава габарчыглары, дојмуш бухар өјрәниләркән маје дамчылары әмәлә кәлә биләр.

Нәтичәдә һәр ики һалда өзлүлүк үчүн һәгиги гијмәтдән бөјүк гијмәт мүшаһидә едилир вә өзлүлүүн температурдан асылылыг әјрисини үзәриндә јанлыш максимум алыңыр.

Беләликлә, критик нөгтәнин билаваситә јахынлығында маддәнин ејни вахтда мөвчуд олан фазаларынын өзлүлүү һаггында тәһриф олуңмуш нәтичәләр алыңыр. Бу, өзлүлүк әмсалынын критик нөгтәдә ки гијмәти һаггында олан нәзәри нәтичәләри инкар вә ја тәсдиг етмәјә имкан вермир. Көстәрилмишдир ки, полјар мајеләр ифрат сојумуш һалда чоҳ галдыгча, онларын өзлүлүү бир о гәдәр дә чоҳ олур. Бу, заман кечдикчә молекул группларына дахил олан һиссәчикләрин сајынын артмасы илә, һәм дә бу группларын бөјүмәси илә әләгәдардыр. Бу, маддәнин дајаныгсыз һалына тәфавүг едир вә буна көрә дә заман кечдикчә биргијмәтли нәтичәләр алмаг мүмкүн олмур. Белә ки, мајеләрин өзлүлүүнү тәдгиг едәркән јалныз критик областдан вә әримә областындан узагда дәгиг биргијмәтли нәтичәләр алмаг олар.

Бунуңла әләгәдар олараг тәддим олуңан ишдә мајеләрин өзлүлүү онларын гурулушундан асылы олараг өјрәнилир вә белә һесаб едилир ки, газ мүнһитдә ки көчүрмә һадисәләрини ифадә едән әсас дүстурларын характери маје һалына тәтбиг едиләркән, демәк олар ки, дәјишмир, лакин бу дүстурлара дахил олан физики кәмијјәтләр маје һалында әсаслы сурәтдә фәргләнмәлидир.

Буну нәзәрә алараг вә маддәнин маје һалынын гурулушу үчүн мүүјјән механизм гәбул едәрәк, мүхтәлиф температурларда өзлүлүк әмсалыны һесабламаг үчүн (5) дүстуру алынмышдыр. Әввәлки дүстурлардан фәргли олараг бу дүстура ихтијари бир n параметри дахилдир.

Бундан башга, маддәнин гурулушу хүсусијјәтләрини нәзәрә алан n параметринин температурдан асылы олараг дәјишмәсини ифадә едән (6) мүнәсибәти верилмишдир.

Мәгаләдә (5) дүстурунун јохланылмасынын нәтичәләри дә верилмишдир вә бу нәтичәләр дүстурун мүхтәлиф маддәләр үчүн доғру олдугуңу, һәм дә өзлүлүүн температурдан асылылыгы әјрисини јахшы тә'мин етдијини көстәрир.

М. А. БАГИРОВ, Г. В. ВЕЧХАЙЗЕР, Ч. М. ДЖУВАРЛЫ, Э. М. ЭПШТЕЙН

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ И НЕКОТОРЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ГОРЕНИЯ ПРИ ТЕРМИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ НА НЕФТЕНОСНЫЙ ПЛАСТ

При термическом воздействии на истощенные нефтеносные пласты, заключающемся в разогреве призабойной зоны скважины с последующим закачиванием в нее воздуха, в нефтеносном пласте образуется очаг горения. По мере сгорания нефти фронт горения продвигается во все стороны от забоя скважины. При этом вязкость нефти, находящейся перед фронтом горения, в результате нагрева уменьшается, вследствие чего облегчается ее вытеснение из пласта газами, закачиваемыми в пласт и образующимися при сгорании части нефти.

Тепловые характеристики процесса горения—распределение температуры в зоне горения и вокруг нее как функция координат и времени, время установления стационарного режима и другие зависят от многих факторов—термических характеристик породы, ее нефтесодержания, толщины зоны горения, содержания кислорода в закачиваемом воздухе, скорости подаваемого потока воздуха и т. д.

Влияние различных факторов на процесс горения рассматривалось в ряде работ [3, 4, 6], из которых наиболее подробной является работа Купермана [4]. На основании гидродинамических, химических и тепловых соображений автор выводит три критерия, соблюдение которых необходимо для обеспечения устойчивого горения:

$$z_{\text{н}} > z_{\text{н} \cdot \text{min}} = \frac{\rho_{\text{в}} k_{\text{н}}}{\rho_{\text{н}} k_{\text{в}}} z_{\text{в}}; \quad (1)$$

$$\frac{\text{весовое содержание углерода в нефти}}{\text{весовое содержание водорода в нефти}} > 18; \quad (2)$$

$$U > \varphi v + \frac{q}{k} \quad (3)$$

где $\rho_{\text{в}}$, $\rho_{\text{н}}$ —вязкости воды и нефти;
 $k_{\text{в}}$, $k_{\text{н}}$ —проницаемость породы для воды и нефти;
 $z_{\text{в}}$, $z_{\text{н}}$ —содержание воды и нефти в породе;
 U , v —скорость подачи воздуха и скорость продвижения фронта горения;
 φ —пористость среды;

М. А. БАГИРОВ, Г. В. ВЕЧХАЙЗЕР, Ч. М. ДЖУВАРЛЫ, Э. М. ЭПШТЕЙН

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ И НЕКОТОРЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ГОРЕНИЯ ПРИ ТЕРМИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ НА НЕФТЕНОСНЫЙ ПЛАСТ

При термическом воздействии на истощенные нефтеносные пласты, заключающемся в разогреве призабойной зоны скважины с последующим закачиванием в нее воздуха, в нефтеносном пласте образуется очаг горения. По мере сгорания нефти фронт горения продвигается во все стороны от забоя скважины. При этом вязкость нефти, находящейся перед фронтом горения, в результате нагрева уменьшается, вследствие чего облегчается ее вытеснение из пласта газами, закачиваемыми в пласт и образующимися при сгорании части нефти.

Тепловые характеристики процесса горения—распределение температуры в зоне горения и вокруг нее как функция координат и времени, время установления стационарного режима и другие зависят от многих факторов—термических характеристик породы, ее нефтесодержания, толщины зоны горения, содержания кислорода в закачиваемом воздухе, скорости подаваемого потока воздуха и т. д.

Влияние различных факторов на процесс горения рассматривалось в ряде работ [3, 4, 6], из которых наиболее подробной является работа Купермана [4]. На основании гидродинамических, химических и тепловых соображений автор выводит три критерия, соблюдение которых необходимо для обеспечения устойчивого горения:

$$z_{II} > z_{II \cdot \min} = \frac{\nu_B k_{II}}{\nu_{II} k_B} z_B; \quad (1)$$

$$\frac{\text{весовое содержание углерода в нефти}}{\text{весовое содержание водорода в нефти}} > 18; \quad (2)$$

$$U > \varphi v + \frac{q}{k} \quad (3)$$

где ν_B, ν_{II} —вязкости воды и нефти;

k_B, k_{II} —проницаемость породы для воды и нефти;

z_B, z_{II} —содержание воды и нефти в породе;

U, v —скорость подачи воздуха и скорость продвижения фронта горения;

φ —пористость среды;

q —количество тепла, выделяющееся на единице площади фронта горения;

k —коэффициент, зависящий от ряда констант среды.

Описанные выше критерии качественно дают правильную зависимость той или иной стороны процесса от ряда факторов, однако их трудно использовать для количественных расчетов. Кроме того, эти критерии выведены лишь для одного идеального случая: фронта горения в виде бесконечной плоскости, движущейся с постоянной скоростью.

Следует отметить, что критерий (2) противоречит проведенным различными исследователями экспериментам, в которых устойчивый процесс горения имел место при значительно большем содержании водорода в нефти, а критерий (3) не может служить для определения минимального значения скорости подачи воздуха, так как после подстановки значений v и q в (3) неравенство оказывается не зависящим от этой скорости.

В настоящей работе приведен расчет для приближенной оценки температуры на фронте горения, скорости продвижения фронта горения и ряда других факторов, обуславливающих устойчивость процесса горения.

При расчете принято, что все химические процессы происходят в плоскости фронта горения, тепло от фронта отводится за счет теплопроводности и переноса его газами. При расчете не учитывается расход тепла на испарение жидкости, так как ввиду относительно больших градиентов температуры и небольших скоростей движения газов конденсация происходит вблизи от места испарения и при этом скрытая теплота парообразования возвращается породе. Минимальная температура, при которой возможно горение нефти, была принята 250°C [5].

Бесконечный цилиндрический фронт горения

В реальном случае фронт горения представляет цилиндрическую поверхность, движущуюся с уменьшающейся скоростью (при постоянной скорости расхода воздуха).

Можно показать из условий горения, что при цилиндрическом фронте горения, распространяющемся во все стороны от забоя скважины, скорость его продвижения равна:

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{y R_n Q}{4\pi z_n \rho_n l} \cdot \frac{1}{r} = \frac{B}{r}, \quad (4)$$

где y —содержание кислорода в подаваемом газе;

R_n —весовое отношение нефть—кислород в реакции горения нефти;

Q —расход воздуха (по массе);

z_n —количество нефти, сгорающей в единице объема породы*;

ρ_n —плотность породы;

l —длина фильтра на забое скважины (толщина фронта горения).

Из (4) путь, пройденный фронтом за время t ,

$$r = \sqrt{r_0^2 + 2Bt}, \quad (5)$$

где r_0 —положение фронта при $t = 0$.

Скорость v можно также представить в виде

$$v = \frac{y R_n M}{z_n \rho_n},$$

где M —поток воздуха (по массе) на единицу поверхности в данной точке.

Время продвижения фронта на расстояние r от забоя и скорость его движения v на этом расстоянии, приведены в табл. 1. При составлении таблицы приняты следующие значения параметров $y = 0,2$; $R_n = 0,3$; $\rho_n = 2,0 \text{ г/см}^3$; $z_n = 1,5 \text{ вес. \%}$.

Указанные в таблице значения расхода воздуха на единицу длины скважины взяты из предположения, что проницаемость породы для воздуха $k = 300 \text{ мдс}$, а давление воздуха у устья скважины соответственно 8 атм и $2,5 \text{ атм}$.

Таблица 1

$r, \text{ м}$	$t, \text{ час}$		$v \cdot 10^3 \text{ см/сек}$	
	$Q/2l = 285 \text{ кг/час} \cdot \text{м}$	$Q/2l = 285 \text{ кг/час} \cdot \text{м}$	$Q/2l = 285 \text{ кг/час} \cdot \text{м}$	$Q/2l = 55 \text{ кг/час} \cdot \text{м}$
0,5	1,3	6,5	5	1
1	5,5	27	2,5	0,5
2	20	110	1,25	0,25
4	90	440	0,6	0,12
8	350	1750	0,3	0,06
16	1400	7000	0,15	0,02
32	5650	28300	0,08	0,015

Создаваемое бесконечным цилиндрическим источником распределения температуры (перенос тепла воздухом для данного случая не учитывается) описывается уравнением:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{a}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) + \frac{A}{\sqrt{r_0^2 + 2Bt}} \delta(r - \sqrt{r_0^2 + 2Bt}), \quad (15)$$

где a —температуропроводность рассматриваемой среды;

$$A = \frac{M_0 r_0 y R_n \gamma}{c_n \rho_n};$$

$\delta(r - \sqrt{r_0^2 + 2Bt})$ —дельта-функция.

При $t \gg \frac{r_0^2}{2B}$ это уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{a}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) + \frac{A}{\sqrt{2Bt}} \delta(r - \sqrt{2Bt}) \quad (16)$$

и становится ковариантным относительно преобразования $r' = kr$, $t' = k^2 t$ (k —произвольная постоянная). Этим свойством обладают также начальные и граничные условия. Поэтому ϑ будет зависеть только от

одной переменной—критерия Фурье $Fo = \frac{at}{r^2}$:

$$\vartheta(r, t) = \varphi(Fo)$$

Для точек фронта $Fo = \frac{a}{2B} = \text{const}$, откуда следует, что при $t \gg \frac{r_0^2}{2B}$

температура на фронте не зависит от времени.

* По экспериментальным данным [1], z_n составляет 15—25% от первоначального содержания нефти.

Бесконечный плоский фронт горения

Получить более подробные сведения о распределении температуры для случая цилиндрического фронта представляется затруднительным. Поэтому рассмотрим более простую задачу о распределении температуры, создаваемой бесконечным плоским источником, движущимся с постоянной скоростью v , на единице поверхности которого выделяется мощность $q = yMR\gamma$, где γ — теплотворная способность нефти. Такое упрощение возможно, так как после продвижения фронта на расстояние нескольких метров от забоя скважины его кривизной можно пренебречь и считать его скорость на определенном участке постоянной. В этой задаче можно приближенно учесть перенос тепла воздухом, если предположить, что его температура в каждой точке равна температуре породы. Однако при этом роль воздуха в переносе тепла будет несколько завышенной.

Распределение температуры $\vartheta(x, t)$ описывается уравнением теплопроводности в движущейся среде:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \alpha U \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + P \delta(x - vt), \quad (6)$$

$$\text{где } \alpha = \frac{c_r \rho_r}{c_n \rho_n}; \quad P = \frac{q}{c_n \rho_n};$$

c_n, c_r — теплоемкость породы и газа;
 ρ_n, ρ_r — плотность породы и подаваемого газа;
 $\delta(x - vt)$ — дельта-функция.

Граничные условия задачи:

$$\vartheta(-\infty, t) = \vartheta(+\infty, t) = 0.$$

Начальное условие —

$$\vartheta(x, 0) = 0$$

Решая это уравнение методом, развитым в [2], получим:

$$\vartheta = TS(\xi, \tau) \quad (7)$$

$$T = \frac{P}{V} \quad (8)$$

$$S(\xi, \tau) = \frac{1}{2} e^{-\xi} \left\{ e^{-|\xi|} \left[1 + \operatorname{erf} \left(V\tau - \frac{|\xi|}{2V\tau} \right) \right] - e^{|\xi|} \left[1 - \operatorname{erf} \left(V\tau + \frac{|\xi|}{2V\tau} \right) \right] \right\} \quad (9)$$

$$V = v + \alpha U, \quad \tau = \frac{V^2 t}{4a}, \quad \xi = \frac{V\chi}{2a}, \quad \chi = x - vt$$

Распределение температуры в соответствии с (9) совпадает с тем, которое было получено в [2], если в последнем заменить v на V , что учитывает перенос тепла воздухом.

Значения функции $S(\xi, \tau)$ представлены в табл. 2.

Установившуюся температуру на фронте горения $T = \frac{P}{V}$ можно

Таблица 2

ξ	0	0,25	0,5	0,75	1,0	1,5	2,0
0,1	0,34	0,12	0,03	0,01	0	0	0
0,5	0,68	0,36	0,18	0,09	0,04	0,01	0
1,0	0,84	0,48	0,27	0,15	0,07	0,03	0
2,0	0,95	0,56	0,34	0,20	0,13	0,04	0,01
∞	1,00	0,61	0,37	0,22	0,14	0,05	0,02

представить в виде:

$$T = \frac{\gamma}{\frac{c_n}{z_n} + \frac{c_r}{yR_n}} \quad (10)$$

Устремляя в (9) t к бесконечности, получим установившееся распределение температуры перед фронтом

$$\vartheta(x, \infty) = \frac{\gamma}{\frac{c_n}{z} + \frac{c_r}{yR_n}} e^{-\frac{V\chi}{a}} \quad (\chi > 0) \quad (11)$$

Позади фронта на малых расстояниях от него температура при $t \rightarrow \infty$ будет стремиться к T — температуре на фронте.

Установившееся значение, как следует из (10), зависит от содержания кислорода в подаваемом газе и не зависит от количества газа. Горение может происходить при условии

$$z_n > z_{n \min} = \frac{c_n}{\frac{\gamma}{T_{\min}} - \frac{c_r}{yR_n}}, \quad (12)$$

где $T_{\min}$ — минимальная температура, при которой еще возможно горение.

Температура на фронте горения меняется со временем по закону

$$\vartheta(0, t) = T \operatorname{erf} \left(\frac{V}{2} \sqrt{\frac{t}{a}} \right), \quad (13)$$

откуда следует, что при увеличении потока подаваемого воздуха установившийся режим наступает быстрее.

Если за время установления $t_{\text{уст}}$ принять время, по истечении которого температура на фронте горения достигает 0,95 T , то из (13) можно получить:

$$t_{\text{уст}} \approx \frac{8a}{V^2}. \quad (14)$$

Теперь можно определить значение величины $\varphi \left(\frac{a}{2B} \right)$ из задачи

для цилиндрического источника, исходя из тех соображений, что при $t \rightarrow \infty$ фронт можно считать плоским. Так как установившаяся температура на плоском фронте не зависит от скорости его движения, то

$$\varphi \left(\frac{a}{2B} \right) = T = \frac{P}{V} = \frac{A}{B}.$$

В случае плоского фронта процесс устанавливается при $t \gg \frac{a}{V^2} \approx 10^5 \text{ сек.}$ При цилиндрическом фронте таким характеристическим временем будет $\frac{r_0^2}{2B} \approx 10^3 \text{ сек.}$

Таким образом, при цилиндрическом фронте процесс устанавливается гораздо быстрее, чем в случае плоского фронта, причем установившиеся значения температуры при одном и том же расходе воздуха в обоих случаях одинаковы.

Плоский фронт конечной ширины

Реальным случаем является цилиндрический фронт конечной ширины. Однако численное решение уравнения для этого случая затруднительно. Сравнительно более просто удастся решить уравнение для фронта в виде ленты конечной ширины и бесконечной длины. Сравнение решений для бесконечных цилиндрического и плоского фронтов позволяет предположить, что решение для ленточной формы фронта будет достаточно близким к решению для цилиндрического фронта конечной ширины.

Расчет для плоского фронта конечной ширины приводится ниже. Направим ось x , как раньше, в направлении движения фронта, а плоскость yz совместим с фронтом горения, причем ось y расположим вертикально. Если ширину фронта горения принять равной $2l$, то распределение температуры будет описываться уравнением:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \right) + \alpha U \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + P(y) \vartheta(x - vt) \quad (17)$$

$$P(y) = \begin{cases} P = \frac{q}{c_p \rho_n} & \text{при } |y| < l \\ 0 & \text{при } |y| > l \end{cases}$$

Сделав подстановку $\chi = x - vt$, получим:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \right) + \alpha U \frac{\partial \vartheta}{\partial \chi} + P(y) \vartheta(\chi) \quad (18)$$

Подстановка $\vartheta = \Phi(\chi, t) \cdot e^{-\frac{\alpha U \chi}{2a} - \frac{\alpha^2 U^2 t}{4a}}$ исключает член с первой производной:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) + P(y) \vartheta(\chi) e^{\frac{\alpha U \chi}{2a} + \frac{\alpha^2 U^2 t}{4a}} \quad (19)$$

Применяя метод функций Грина, получим:

$$\begin{aligned} \vartheta(\chi, y, t) &= \frac{1}{4\pi a} \int_0^t \frac{dt'}{t-t'} \int_{-\infty}^{+\infty} P(y') dy' \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \vartheta(x') \times \\ &\times \exp \left[-\frac{V(\chi-x')}{2a} - \frac{V^2(t-t')}{4a} - \frac{(\chi-x')^2 + (y-y')^2}{4a(t-t')} \right] = \\ &= \frac{Pe^{-\frac{V\chi}{2a} + 1}}{4\pi a} \int_{-1}^1 dy' \int_0^t \frac{dt'}{t'} e^{-\frac{V^2 t'}{4a} - \frac{\chi^2 + (y-y')^2}{4at'}} \end{aligned} \quad (20)$$

Вычисление интеграла (20) для произвольных значений t весьма затруднительно. Однако, как было показано для случая бесконечного фронта, установившийся режим наступает уже через несколько суток и поэтому можно ограничиться рассмотрением лишь установившегося процесса ($t = \infty$). При этом интегрирование по t' дает:

$$\vartheta = \frac{T e^{-\xi}}{\pi} \int_{-h}^{+h} K_0 \sqrt{\xi^2 + (\eta - \eta')^2} d\eta', \quad (21)$$

где использованы безразмерные величины:

$$\xi = \frac{V\chi}{2a}, \quad \eta = \frac{Vy}{2a}, \quad h = \frac{Vl}{2a},$$

K_0 — функция Макдональда нулевого порядка.

Уравнение (21) можно представить в виде:

$$\vartheta(\xi, \eta, h) = \frac{T e^{-\xi}}{\pi} [F(h + \eta, \xi) + \text{sgn}(h - \eta) \cdot F(|h - \eta|, \xi)] \quad (22)$$

где

$$F(x, \xi) = \int_0^x K_0(\sqrt{\xi^2 + u^2}) du,$$

$$\text{sgn } x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Значение функции $F(x, \xi)$, найденные численным интегрированием приведены в табл. 3.

Таблица 3

$\xi \backslash x$	0	0,1	0,2	0,5	1,0	1,5
0,1	0,35	0,23	0,17	0,09	0,04	0,02
0,2	0,55	0,42	0,33	0,18	0,08	0,04
0,5	0,93	0,78	0,66	0,41	0,20	0,10
1,0	1,24	1,10	1,00	0,66	0,35	0,19
2,0	1,47	1,38	1,23	0,87	0,53	0,29
5,0	1,57	1,42	1,29	0,95	0,56	0,32
∞	1,57	1,42	1,29	0,95	0,58	0,35

Температуры в плоскости $\xi = 0$, на краю фронта и в его центре соответственно равны

$$\vartheta(0, \eta, h) = \frac{T}{\pi} [F(h + \eta, 0) + \text{sgn}(h - \eta) F(|h - \eta|, 0)]. \quad (23)$$

$$\vartheta(0, h, h) = \frac{T}{\pi} F(2h, 0); \quad (24)$$

$$\vartheta(0, 0, h) = \frac{2T}{\pi} F(h, 0). \quad (25)$$

Отношение двух последних величин равно:

$$\frac{\vartheta(0, h, h)}{\vartheta(0, 0, h)} = \frac{1}{2} \frac{F(2h, 0)}{F(h, 0)}$$

и при $h \rightarrow \infty$ стремится к $\frac{1}{2}$.

В ходе вычислений предполагалось, что горение происходит на фронте шириной $2l$. Горение будет устойчивым лишь в том случае, если при заданных условиях температура на краю фронта будет не меньше некоторого ее минимального значения. Для достаточно больших h ($h > 2$) это означает, что температура в центре горения должна вдвое превышать минимальную температуру горения. При этом полученный выше критерий (12) станет более жестким:

$$z > z_{\min} = \frac{c_n}{\frac{\gamma(F(2h, 0))}{\pi T_{\min}} - \frac{c_r}{yR_n}} \quad (26)$$

При $h > 2$ условие (26) принимает вид:

$$z > \frac{c_n}{\frac{\gamma}{2T_{\min}} - \frac{c_r}{yR_n}} \quad (27)$$

так как $F(4, 0)$ мало отличается от $\frac{\pi}{2}$.

Выясним, насколько устойчивым будет режим горения по отношению к малым изменениям параметров скорости потока воздуха и нефте-содержания породы. При этом лучше отдельно рассматривать случаи

больших h (когда $h = \frac{Vl}{2a} > 2$) и малых h .

При $h > 2$, ϑ практически не зависит от h . Поэтому при увеличении h за счет повышения скорости потока воздуха температура на фронте не изменится. При уменьшении h температура остается прежней до тех пор, пока значение h остается большим 2. Так как при малых h температура на фронте горения является возрастающей функцией от h (формула (23), табл. 3), то в этом случае увеличение v приводит к повышению температуры во всей плоскости $\xi=0$; при этом температура $T_{\min}$ будет достигнута в точках, которые раньше не захватывались фронтом горения, то есть произойдет расширение фронта, что вновь приведет к увеличению h (за счет увеличения l). Процесс расширения фронта горения и повышения температуры будет продолжаться до тех пор, пока h не станет настолько большим, что перестанет влиять на ϑ . При малых h даже небольшое уменьшение h ведет к обратному процессу: происходит сжатие фронта, как следует из (24), (25) и таблицы 3, что приводит к дальнейшему снижению температуры на всем фронте горения и, следовательно, к его сужению, которое будет происходить до тех пор, пока фронт не исчезнет.

Таким образом, при больших h равновесие будет устойчивым по отношению к большим увеличениям скорости потока воздуха и умень-

шениям ее до определенных пределов. При малых h равновесие неустойчиво.

Рассмотрим, как будет вести себя фронт горения при изменениях нефтенасыщенности z_n .

В случае $h > 2$ при увеличении z_n температура во всех точках фронта повысится, ширина фронта увеличится, а поскольку h на температуру в данном случае не влияет, процесс расширения фронта горения на этом закончится. При малых уменьшениях произойдет некоторое сжатие фронта.

При $h < 2$ изменение z_n будет влиять на ширину фронта качественно так же, как и скорость потока воздуха.

Таким образом, при больших h равновесие будет безразличным по отношению к большим увеличениям и малым уменьшениям z_n , а при малых h — неустойчивым.

Заключение

Практически единственной величиной, которую мы можем изменить для обеспечения условия (26), является h , зависящая от скорости продвижения фронта горения и толщины слоя, охваченного горением.

Скорость продвижения фронта пропорциональна скорости подачи воздуха и уменьшается обратно пропорционально расстоянию фронта от скважины.

Скорость подачи воздуха ограничивается приемистостью скважины, которая имеет определенную величину. Поэтому при заданной толщине слоя, охваченного горением (2l), при определенном удалении фронта от оси скважины наступят такие условия, при которых уравнение (26) не будет соблюдаться из-за уменьшения скорости движения фронта. Это поведет к снижению температуры на краю фронта ниже температуры горения и затуханию процесса, как было описано выше.

Точку, до которой должен дойти фронт горения следует выбирать таким образом, чтобы в ней обеспечивались условия устойчивого горения в соответствии с (26).

При повышении количества подаваемого воздуха до величины, обеспечивающей значение $h > 2$, температура в центре фронта перестает зависеть от скорости подачи воздуха и становится равной температуре на бесконечном фронте.

Температура по краям фронта равняется половине температуры в его центре. Увеличение скорости подаваемого воздуха в этом случае влияет только на распределение температур перед фронтом и в плоскости фронта (рис. 1, 2). Температура в центре фронта прямо пропорционально теплотворной способности нефти и зависит в значительной степени от нефтенасыщенности породы и содержания кислорода в подаваемом воздухе, повышаясь с их увеличением. Под нефтенасыщенностью во

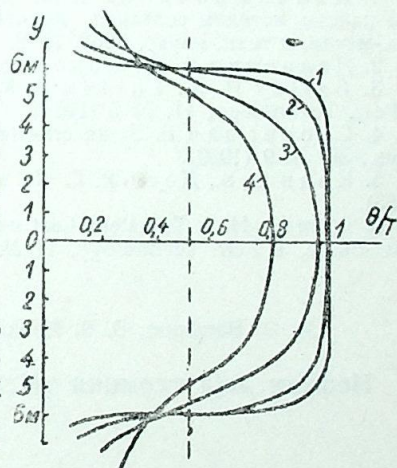


Рис. 1
Распределение температуры вдоль фронта горения (вдоль оси Y) при различных скоростях его продвижения:
1 — $v_1 = 3,2 \cdot 10^{-4}$ см/сек; 2 — $v_2 = 1,6 \cdot 10^{-4}$ см/сек; 3 — $v_3 = 0,5 \cdot 10^{-4}$ см/сек; 4 — $v_4 = 0,25 \cdot 10^{-4}$ см/сек.

всех вышеприведенных формулах следует понимать количество сгорающей в единице объема нефти. По экспериментальным данным она составляет 15—25% от первоначального содержания нефти в породе.

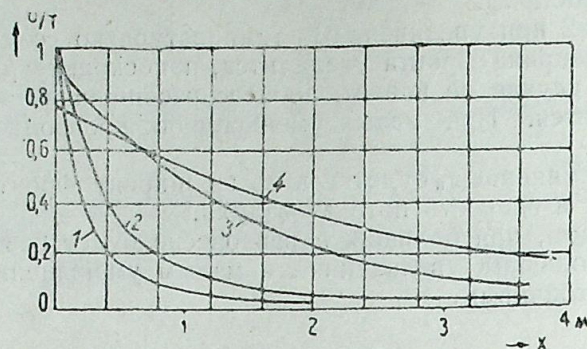


Рис. 2
Распределение температуры перед фронтом горения (вдоль оси X) при различных скоростях его движения (скорости те же, что и на рис. 1).

Распределение температур перед движущимся фронтом горения определяется формулой (22). При уменьшении скорости потока воздуха нагретая зона растягивается (рис. 2), и поэтому по мере продвижения фронта горения нагретая впереди него зона увеличивается.

Анализ входящих в уравнения величин показывает, что тепло переносится главным образом за счет движения самого фронта горения и значительная его часть тратится на нагрев твердой основы породы. Перенос тепла газами составляет 20—30% от тепла, переносимого за счет движения самого фронта горения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аликишибекова Т. М. Тепловое воздействие на истощенные нефтеносные пласты методом создания фронта горения в них. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук“, 1960, № 2.
2. Иваненко Д. Д., Соколов А. А. Классическая теория поля. ГИТТЛ, 1951.
3. Bailey H. R., Larkin B. K. Heat conduction in underground combustion. J. Petr. Technology, 11, № 5 (1959).
4. Cooperman P. Some criteria for the on situ combustion of crude oil. J. Appl. Phys., 30, № 9 (1959).
5. Kuhn C. S., Koch R. L. In situ combustion. Oil and Gas Journal, 52, № 14 (1953).
6. Ramey H. I. Transient heat conduction during radial movement of cylindrical heat source. J. Petr. Technology, 11, № 5 (1959).

М. Э. Бағыров, Г. В. Вечхазер, Ч. М. Чуварлы, Е. М. Епштейн

Нефтли лаја термики тә'сир заманы истиликвермә просеси

ХҮЛАСӘ

Термики тә'сир нефт гујусунун ишчи зонасыны гыздырыб она һава вурулмасы илә әлдә едилір. Бу заман нефт лајында јанғын мәркәзи әмәлә кәлир. Нефтин јанмасы нәтичәсиндә јанма чәбһәси гујунун ишчи зонасындан әтрафлара јайылыр. Јанма чәбһәси гаршысында олан нефтин гызмасы онун өзлүлүјүнүн азалмасына сәбәб олур ки, бу да она вурулан һаванын јанмадан әмәлә кәлән газларын көмәји илә сыхышдырылыб чыхарылмасына имкан јарадыр.

Термики тә'сир заманы температурун лајда јайылмасы мәгаләдә нәзәри олагаз изаһ едилір. Јанманын сонсуз мүстәви чәбһәсинин јаратдығы температурун јайылмасы һесабылыр; бурада һава илә истилијин бир һиссәсинин дашынымасы тәхмини нәзәрә алыныр.

Јанманын сонсуз цилиндрик чәбһәсинин јаратдығы температурун гәрарлашмыш јайылмасы сонсуз мүстәви чәбһәси һалына ујғун кәлир. Силиндрик чәбһә һалы гәрарлашма заманы олдуғча кичикдир.

Лајын үст вә алт һиссәләриндән истилик иткиләринин тә'сирини өјрәнмәк үчүн мәһдуд енә малик мүстәви чәбһәнин јаратдығы температурун јайылмасы һесабылыр. Ишдә көстәрилир ки, верилән һаванын тә'јин едилмиш сүр'әтиндә јанма чәбһәсинин ени мүәјјән минимал гијмәтиндән артығ оларса, јанма просеси дајанағлы олар. Јанма просесинин дајанағлығы вурулан һаванын сүр'әтинә вә сүхурун тәркибиндәки нефтин миғдарына нәзәрән тәдгиг едилір.

Сүхурун тәркибиндәки јанмаға имкан верән нефтин минимал гијмәти үчүн дүстур әлдә едилмишдир.

Р. М. ВАГАБОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ СВОЙСТВ ПОРИСТОГО БЕТОНА

Дренажные устройства в гидротехническом строительстве занимают значительное место. Объемы материала, укладываемого в дренажные устройства, довольно велики.

Конструкция современных дренажных устройств, несмотря на кажущуюся их простоту, довольно сложна в производстве работ и имеет ряд недостатков.

Укладку дренажей с многослойными фильтрами, имеющими часто сложную конфигурацию, невозможно механизировать, и в значительной ее части приходится выполнять ручную, причем процесс укладки длится продолжительное время. Это в свою очередь вносит ряд осложнений и удлиняет сроки возведения сооружений, особенно намывных плотин, при возведении которых не удается совместить намыв плотины с укладкой дренажа.

В связи с возросшими современными темпами строительства и большими объемами работ возникла необходимость в конструкции более совершенного типа дренажа—сборного, изготавливаемых из пористого бетона блоков.

В соответствии с назначением, сборные дренажные устройства из пористого бетона должны удовлетворять следующим требованиям:

- а) иметь достаточную водопроницаемость для обеспечения свободного отвода грунтовых вод;
- б) не допускать выноса вместе с водой частиц дренируемого грунта нарушающего его устойчивость;
- в) не подвергаться заилению вследствие оседания мелких частиц в дренаже;
- г) сохранять указанные свойства в течение длительного времени.

Для того чтобы удовлетворялось основное требование — достаточная водопроницаемость — необходимо, наряду с сопротивляемостью выносу скелетных частиц грунта, подбирать состав пористого бетона в зависимости от характеристик дренируемого грунта: его крупности, коэффициента фильтрации и неоднородности.

Опыты показали, что пористый бетон, приготовленный из того или иного заполнителя, имеет несколько пониженную водопроницаемость и повышенную сопротивляемость выносу по сравнению с несцементированным заполнителем, причем разница тем больше, чем выше марка бетона. Однако в пределах испытанных составов пористого бетона эта разница сравнительно невелика.

Р. М. ВАГАБОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ СВОЙСТВ ПОРИСТОГО БЕТОНА

Дренажные устройства в гидротехническом строительстве занимают значительное место. Объемы материала, укладываемого в дренажные устройства, довольно велики.

Конструкция современных дренажных устройств, несмотря на кажущуюся их простоту, довольно сложна в производстве работ и имеет ряд недостатков.

Укладку дренажей с многослойными фильтрами, имеющими часто сложную конфигурацию, невозможно механизировать, и в значительной ее части приходится выполнять ручную, причем процесс укладки длится продолжительное время. Это в свою очередь вносит ряд осложнений и удлиняет сроки возведения сооружений, особенно намывных плотин, при возведении которых не удается совместить намыв плотины с укладкой дренажа.

В связи с возросшими современными темпами строительства и большими объемами работ возникла необходимость в конструкции более совершенного типа дренажа—сборного, изготавливаемых из пористого бетона блоков.

В соответствии с назначением, сборные дренажные устройства из пористого бетона должны удовлетворять следующим требованиям:

- а) иметь достаточную водопроницаемость для обеспечения свободного отвода грунтовых вод;
- б) не допускать выноса вместе с водой частиц дренируемого грунта нарушающего его устойчивость;
- в) не подвергаться заилению вследствие оседания мелких частиц в дренаже;
- г) сохранять указанные свойства в течение длительного времени.

Для того чтобы удовлетворялось основное требование — достаточная водопроницаемость — необходимо, наряду с сопротивляемостью выносу скелетных частиц грунта, подбирать состав пористого бетона в зависимости от характеристик дренируемого грунта: его крупности, коэффициента фильтрации и неоднородности.

Опыты показали, что пористый бетон, приготовленный из того или иного заполнителя, имеет несколько пониженную водопроницаемость и повышенную сопротивляемость выносу по сравнению с несцементированным заполнителем, причем разница тем больше, чем выше марка бетона. Однако в пределах испытанных составов пористого бетона эта разница сравнительно невелика.

Конструкция и размеры плит и блоков из пористого бетона зависят от многочисленных факторов, связанных с условиями работы дренажных устройств, технологией их изготовления и производством работ по укладке блоков.

Конструкции сборных дренажных устройств из пористых бетонных блоков, устанавливаемых в земляных плотинах, можно изготавливать разнообразных типов: трубчатые, в виде призм, ленточные и т. п.

Пористым блокам могут быть приданы наиболее рациональные формы и размеры, удобные для изготовления, транспортирования и укладки. Качество сборного дренажа улучшается при изготовлении блоков на заводе, где контроль за материалом и выполнением блоков осуществляется более надежно, а следовательно, может быть достигнута высокая однородность материала фильтра.

Пористый бетон готовят из дренажных материалов, частицы которых обволакиваются клеящим веществом. Эти частицы в точках соприкосновения, склеиваясь между собой, образуют пористую массу, которая представляет однослойный фильтр. Для изготовления пористого бетона необходимо применять такое количество склеивающего вещества, которое только обволакивало бы частицы массы, а поры между ними оставляло незаполненными.

В качестве склеивающего вещества можно применять цемент, битум и другие материалы, обеспечивающие пористым блокам долговременную прочность, а также жидкое стекло, сульфитно-спиртовую барду, гипс и другие подобные материалы, способствующие лишь временно-му закреплению пористых блоков.

В наших исследованиях в качестве склеивающего материала рассматривается только цемент, придающий блокам долговременную прочность.

По условиям прочности, водопрпускной способности и по экономическим соображениям нецелесообразно применение цемента марки ниже 400, так как в противном случае для сохранения прочности бетона необходимо будет увеличить жирность бетонной смеси, т. е. увеличить расход цемента. При этом понизится водопрпускная способность бетона.

Количество заполнителя в пористом бетоне определяется необходимостью получения бетонной смеси с консистенцией, соответствующей способу формовки изделий. При уплотнении бетонной смеси вибраторами требуется меньше воды, чем при уплотнении вручную.

При изготовлении опытных образцов пористого бетона особое внимание обращалось на чистоту и однородность заполнителей, имеющих очень большое значение для получения однородной продукции с заданными свойствами.

На основании договора между лабораторией фильтрации Энергетического института и Отделом гидравлических исследований Научно-исследовательского сектора Гидропроекта МЭС им. С. Я. Жук о совместном проведении научно-исследовательских работ по фильтрации через жесткий дренажный материал, нами по образцам пористого бетона были произведены в ОГИ НИС'а опыты по установлению пропускной способности с определением коэффициента фильтрации.

Исследования фильтрационных свойств пористого бетона проводились на пяти сериях образцов, причем каждая серия была изготовлена из известковой крошки от 5 до 10 мм на портланд-цементе марки „500“ с добавлением 55% (от веса цемента) мелкозернистого известкового песка 0,15÷0,50 мм.

Образцы изготавливались в металлических обоймах с внутренним диаметром 110 и 105 мм и высотой 100 мм.

В основных опытах обойма заполнялась пористым бетоном на всю высоту и, таким образом, толщина образцов составляла 100 мм.

Образцы всех пяти серий обрабатывались на стандартном вибраторе, причем время вибрирования каждой последующей серии увеличивалось на 50 сек: время вибрирования I серии — 50 сек, II серии — 100, III серии — 150, IV серии — 200 и V серии — 250.

Опыты по исследованию фильтрационных свойств пористого материала проводились на фильтрационном стенде с внутренним водооборотом. При работе установки вода из верхнего бака поступала через штуцера, стеклянные трубки, соединительные муфты и дюймовые вентиля в напорные бачки приборов. Из приборов вода через сливные бачки поступала в нижний бак.

Прибор для испытания пористого материала состоял из двух цилиндров, изготовленных из органического стекла, сменной обоймы с пористым бетоном и двух металлических крышек.

Напор в приборе создавался с помощью двух подвижных бачков, напорного и сливного, в каждом из которых имелись водосливные стенки, обеспечивающие постоянство горизонтов воды в бачках во время опытов.

Изменение напора производилось путем перемещения бачков по вертикальным направляющим штангам.

Для изменения падения напора в образце пористого материала пьезометрическое давление из отверстий на цилиндрах прибора и обоймы отводилось через резиновые трубки на пьезометрические щиты.

Горизонты воды в пьезометрических трубках определялись специальным приспособлением с зеркальным манометром.

Перед испытанием образцов пористого бетона производилось первоначальное определение пористости и объемного веса для каждого образца. Определение производилось объемным способом в специальном бачке из органического стекла.

Полученная пористость распределялась по сериям следующим образом:

Серия	Пористость
I	0,236
II	0,208
III	0,193
IV	0,145
V	0,136

Таким образом, наибольшую пористость имели образцы после вибрации 50 сек, наименьшую — после вибрации 250 сек.

Для определения водопроницаемости обоймы с образцом закладывалась в прибор и зажималась с помощью болта.

После этого прибор медленно заполнялся водой снизу для вытеснения воздуха из пор образца. Кроме того, перед началом опыта оставшийся воздух удалялся периодическими нажатиями на подводящий гофрированный шланг (пульсацией).

Величинами, которые измерялись непосредственно в опытах, были расходы Q и потери напора H фильтрационного потока. Тотчас по измерению этих величин вычислялись гидравлические градиенты I и скорости фильтрации V .

Опыт начинался с небольших напоров с последующим увеличением до максимального, получаемого на установке.

Точность измерения уровней воды в пьезометрических трубках с помощью зеркального манометра равнялась 0,1 мм.

Измерение расходов производилось с большой точностью.

Хотя можно было бы ограничиться определением коэффициента фильтрации k при малых градиентах I , какие встречаются в дренажах гидротехнических сооружений, однако для общей характеристики определение k производилось для всего диапазона градиентов, возможного на данной установке.

Гидравлические градиенты фильтрационного потока I в опытах были $0,134 \div 6,465$.

Во время проведения опытов вычислялся градиент напора в пористом материале по формуле:

$$I = \frac{H}{h},$$

где H — потеря напора на образце пористого бетона, равная разности показаний пьезометров перед и за образцом;

h — высота образца пористого бетона в обойме.

Скорость фильтрации:

$$V = \frac{Q}{\omega},$$

где Q — измеренный расход в $\text{см}^3/\text{сек}$;

ω — площадь поперечного сечения образца.

В нашем случае при обработке экспериментальных данных удобнее всего было принять зависимость между средней скоростью фильтрации и гидравлическим градиентом в обычном виде:

$$V = kI^{\frac{1}{m}} = kI^n$$

и определить значение входящих в нее величин n и k при помощи логарифмических графиков $\lg V = f(\lg I)$.

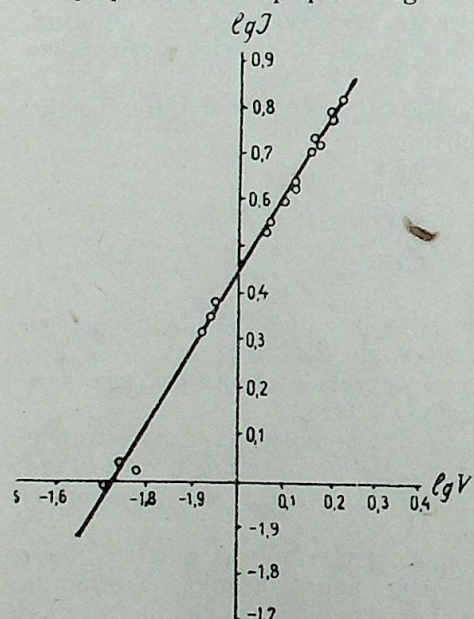


Рис. 1
Значение величин в формуле

$V = kI^{\frac{1}{m}}$ для I серии опытов: $I = 0,987$
 $-6,405$; $m = 1,66$; $k = 0,537$.

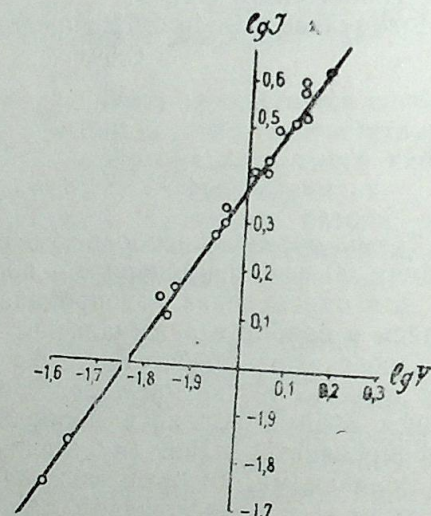


Рис. 2
Значение величин в формуле

$V = kI^{\frac{1}{m}}$ для II серии опытов: $I = 0,134$
 $-4,014$; $m = 1,56$; $k = 0,590$.

Для получения кривой зависимости строим логарифмическую анаморфозу: $\lg V = \lg k + n \lg I$.

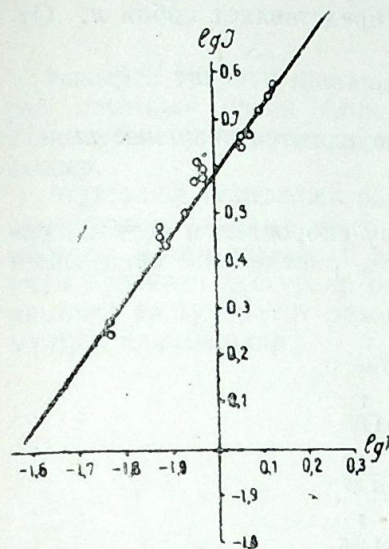


Рис. 3
Значение величин в формуле

$V = kI^{\frac{1}{m}}$ для III серии опытов:
 $I = 0,534 - 5,980$; $m = 1,35$; $k = 0,372$.

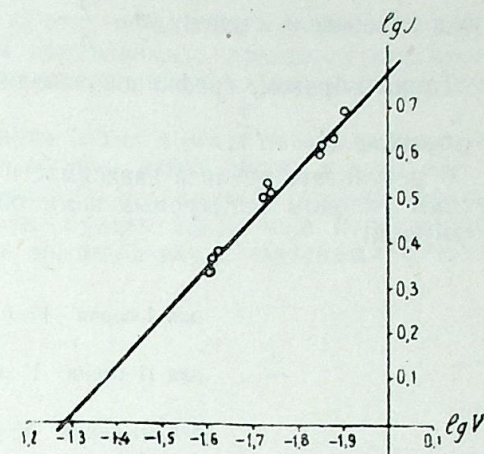


Рис. 4
Значение величин в формуле

$V = kI^{\frac{1}{m}}$ для IV серии опытов: $I = 2,117$
 $-4,992$; $m = 1,085$; $k = 0,195$.

Для каждой серии величины $\lg V$ и $\lg I$ нанесены на чертежи (см. рис. 1—5) из которых видно, что все точки укладываются очень бл.

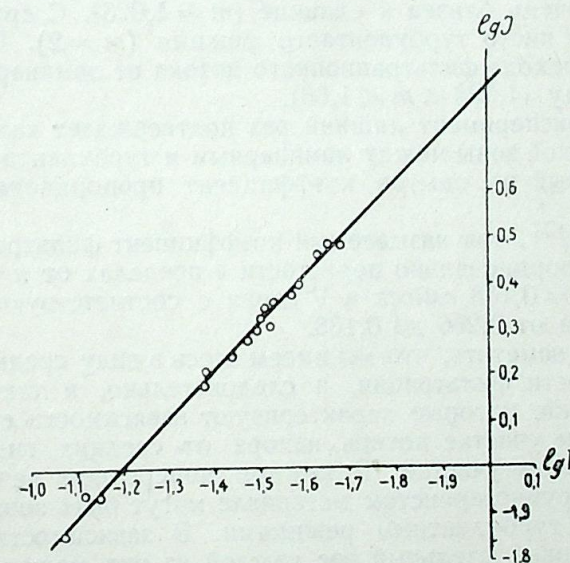


Рис. 5
Значение величин в формуле

$V = kI^{\frac{1}{m}}$ для V серии опытов: $I = 0,741$
 $-3,016$; $m = 1,025$; $k = 0,188$.

ко к некоторой осредненной прямой, которая отсекает на оси абсцисс отрезок, равный $\lg k$, а значит, и легко определяет коэффициент фильтрации.

Тангенс наклона прямой к оси абсцисс представляет собой n . Отсюда показатель степени $m = \frac{1}{n}$.

Таким образом, графически вполне определяются значения m и k в формуле $V = kI^{\frac{1}{m}}$.

В результате анализа зависимости между скоростью и пьезометрическим уклоном испытуемых нами образцов, определены следующей формулой:

$$\begin{aligned} \text{для I серии} \quad V &= 0,537 I^{\frac{1}{1,66}} \\ \text{для II серии} \quad V &= 0,590 I^{\frac{1}{1,56}} \\ \text{для III серии} \quad V &= 0,372 I^{\frac{1}{1,35}} \\ \text{для IV серии} \quad V &= 0,195 I^{\frac{1}{1,085}} \\ \text{для V серии} \quad V &= 0,158 I^{\frac{1}{1,025}} \end{aligned}$$

В результате проведенных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Ламинарный режим фильтрации ($m = 1$) в наших опытах не имеет места. Очень близко к ламинарному режиму подходит фильтрационный режим V серии образцов. В этой серии величина показателя степени m была очень близка к единице ($m = 1,025$). С другой стороны, мы не имеем и чисто турбулентного режима ($m = 2$). Опыты лежат в диапазоне перехода фильтрационного потока от ламинарного режима к турбулентному ($1,025 \leq m \leq 1,66$).

2. Данный эксперимент лишний раз подтверждает наличие определенной переходной зоны между ламинарным и турбулентным режимом.

3. Полученный из опытов коэффициент пропорциональности k в формуле $V = kI^{\frac{1}{m}}$, так называемый коэффициент фильтрации, изменяется прямо пропорционально пористости в пределах от $k = 0,537$ см/сек в I серии до $k = 0,158$ см/сек в V серии с соответствующим изменением пористости от 0,266 до 0,136.

Необходимо заметить, что мы имеем здесь в виду средние в сечении условные скорости фильтрации, а следовательно, и такие условные параметры потока, которые характеризуют зависимость суммарных на рассматриваемом участке потерь напора от средних гидравлических градиентов на этом участке. В каждом поперечном сечении потока фильтрации в крупнозернистом материале могут быть зоны с ламинарным и зоны с турбулентным режимами. В зависимости от данных конкретных условий удельный вес каждой из них может приобретать то или иное значение.

4. Результаты опытов можно рассматривать как свидетельство того, что при увеличении градиентов I турбулентная зона не мгновенно занимает рассматриваемую область потока, фильтрующего в крупнозернистом материале, а распространяется на нее постепенно.

Р. М. Вахабов

Мәсамәли бетонун сүзүлмә хассәләринин тәдгиги

ХҮЛАСӘ

Һазырда тикинти ишләринин сүр'әтли инкишафы илә әләгәдар оларга мәсамәли бетон блоклардан һазырланмыш дренаж-гурашдырма типли конструксиянын даһа да тәкмилләшдирилмәси мәсәләси мејдана чыхыр.

Мүхтәлиф техноложии режимләрлә һазырланмыш мәсамәли бетонун нүмунәләри, сүзүлмә хассәләрини мүәјјән етмәк үчүн, тәдгиг едилмишдир. Тәдгигатларла 5 сәрија тәчрүбә нәтичәсиндә сүзүлмә сүр'әти үчүн дәрәчәли дүстурлар верилмиш, бундан әләвә маје һәрәкәтинин ламинар вә турбулент режимләри арасында кечид зонасынын олмасы мүәјјән едилмишдир.

М. Ю. ВАГАБОВ

УСТАНОВЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ СКОРОСТЕЙ СДВИГА НАНОСОВ

ВВЕДЕНИЕ

Наличие наносов в естественных потоках создает ряд затруднений для рационального использования водных ресурсов. Достаточно сказать, что объем ежегодных работ по очистке только оросительных каналов в Азербайджане составляет свыше 7 млн m^3 . Аналогичная картина наблюдается на водоемах, водохранилищах и других гидротехнических сооружениях республики.

Борьба с вредным воздействием наносов на сооружения возможна лишь на основе знания гидравлических законов их передвижения в потоке.

При известных условиях наносы из состояния покоя на дне переходят в состояние движения по дну, а при других — из состояния движения по дну переходят во взвешенное состояние и, наконец, при некоторых условиях взвешенные наносы начинают осаждаться на дно.

Важность изучения процесса движения твердых частиц усматривается из следующего.

Наряду с механическими характеристиками наносов в динамике потоков с деформируемым руслом большое значение имеют две их гидравлические характеристики. Обе стороны связаны с сопротивлениями зерен, с той существенной разницей, что для установления первой из них необходимо рассматривать сопротивления в условиях равномерного падения зерен в спокойной жидкости, а для установления второй характеристики необходимо рассматривать условия обтекания турбулентным потоком зерен, находящихся на дне потока.

Первая из этих характеристик носит название гидравлической крупности, а вторая — критической скорости. Разумеется, что для практического их использования необходимо установить расчетные выражения между обеими гидравлическими характеристиками наносов.

Исследования, произведенные нами, преследовали цель путем лабораторных опытов получить данные, позволяющие внести коррективы в расчетные формулы по определению критической скорости сдвига наносов в потоке.

Состояние изученности вопроса

Существующие формулы расчета влекомых наносов основаны на общих теоретических соображениях и для их использования необходимо иметь конкретные данные по отдельным параметрам, входящим

М. Ю. ВАГАБОВ

УСТАНОВЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ СКОРОСТЕЙ СДВИГА НАНОСОВ

ВВЕДЕНИЕ

Наличие наносов в естественных потоках создает ряд затруднений для рационального использования водных ресурсов. Достаточно сказать, что объем ежегодных работ по очистке только оросительных каналов в Азербайджане составляет свыше 7 млн m^3 . Аналогичная картина наблюдается на водоемах, водохранилищах и других гидротехнических сооружениях республики.

Борьба с вредным воздействием наносов на сооружения возможна лишь на основе знания гидравлических законов их передвижения в потоке.

При известных условиях наносы из состояния покоя на дне переходят в состояние движения по дну, а при других — из состояния движения по дну переходят во взвешенное состояние и, наконец, при некоторых условиях взвешенные наносы начинают осаждаться на дно.

Важность изучения процесса движения твердых частиц усматривается из следующего.

Наряду с механическими характеристиками наносов в динамике потоков с деформируемым руслом большое значение имеют две их гидравлические характеристики. Обе стороны связаны с сопротивлениями зерен, с той существенной разницей, что для установления первой из них необходимо рассматривать сопротивления в условиях равномерного падения зерен в спокойной жидкости, а для установления второй характеристики необходимо рассматривать условия обтекания турбулентным потоком зерен, находящихся на дне потока.

Первая из этих характеристик носит название гидравлической крупности, а вторая — критической скорости. Разумеется, что для практического их использования необходимо установить расчетные выражения между обеими гидравлическими характеристиками наносов.

Исследования, произведенные нами, преследовали цель путем лабораторных опытов получить данные, позволяющие внести коррективы в расчетные формулы по определению критической скорости сдвига наносов в потоке.

Состояние изученности вопроса

Существующие формулы расчета влекомых наносов основаны на общих теоретических соображениях и для их использования необходимо иметь конкретные данные по отдельным параметрам, входящим

в эти формулы. Последнее возможно получить на основе опытных данных.

Так как лабораторные опыты производятся при ограниченных условиях (глубин, фракционного состава и др.), поэтому полученные данные требуют внесения значительных корректив, могущих пополнить неучтенные условия движения наносов в естественных условиях. А исследования в естественных условиях движения страдают еще большими погрешностями. Последнее связано с тем, что до сих пор отсутствуют рациональные приборы для учета донных наносов и существующие приборы не точны и при одновременных определениях количества донных наносов различными приборами расхождения достигают нескольких сот процентов.

Кроме отсутствия рациональной конструкции приборов, большим недостатком их является то, что они своим присутствием в потоке нарушают естественный режим движения наносов и в результате искажают фактические данные.

Следовательно, расчетные формулы по определению движения влекомых наносов страдают еще большей приближенностью, чем расчетные формулы для взвешенных наносов. И несмотря на значительный вклад, сделанный советскими учеными в деле установления закономерности движения влекомых наносов, тем не менее разработка наиболее рациональной формулы по определению закономерности движения влекомых наносов является делом дальнейших исследований.

Наши исследования в настоящей разработке не претендуют на установление рациональной формулы по расчету влекомых наносов. Эти исследования следует рассматривать как дополнительный материал, могущий служить для уточнения существующих формул расчета влекомых наносов, а также некоторым критерием при суждении перехода твердых частиц из одного состояния в другое и установления связи между гидравлической крупностью зерен и критическими скоростями сдвига их в потоке.

Производство опытов и их результаты

Опыты по установлению критических скоростей сдвига наносов на дне потока производились в малом зеркальном лотке гидравлической лаборатории Энергетического института Академии наук Азербайджана.

Путем тщательных сортировок производилась подготовка наносов с различными фракционными составами.

Сортировка наносов по фракциям производилась следующим образом. Предварительно промытые наносы после воздушной сушки просеивались через сито. Таким путем были получены наносы с возрастающим фракционным составом. Для точного определения диаметра частиц пользовались микроскопом.

Таким образом были приготовлены для опытов наносы с диаметрами частиц

$$\begin{aligned} D_1 &= 0,315 \text{ мм} & D_5 &= 1,580 \text{ мм} \\ D_2 &= 0,700 \text{ " } & D_6 &= 1,066 \text{ " } \\ D_3 &= 0,876 \text{ " } & D_7 &= 4,100 \text{ " } \\ D_4 &= 1,100 \text{ " } \end{aligned}$$

Приготовленные таким путем наносы перед каждым опытом засыпались в лоток в полете с опущенным дном. Имевшиеся с боков зеркальные стекла, вдоль всего лотка давали возможность производить визуальные наблюдения за поведением отдельных частиц наносов в зависимости от скорости пропускаемого через лоток потока.

Для более тщательного исследования путем визуальных наблюдений за режимом потока и движением наносов пользовались оптическим методом. Схема оптической установки приведена на рис. 1.

В соответствии с изложенным выше методом были проведены опыты по определению критических скоростей сдвига зерен на дне.

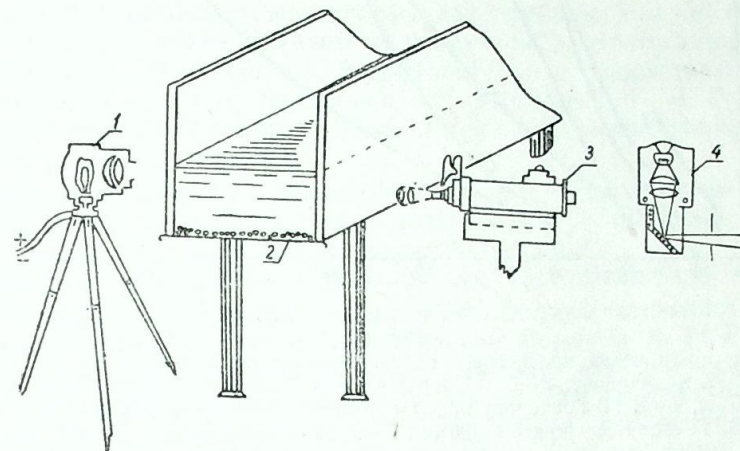


Рис. 1

Схема опытной установки для исследования режима потока и движения донных наносов оптическим методом:
1—осветитель (дуговая лампа или лампа накаливания); 2—зеркальный лоток; 3—оптическое устройство (микроскоп, линза-насадка, съемный киноаппарат); 4—осветитель с теплофильтром.

Опыты по определению критических скоростей сдвига наносов на дне потока с каждой фракцией наносов производились при трех различных глубинах повторностью каждого опыта от 3 до 5 раз.

Таблица 1

Значения критических (срывающих) скоростей по опытным данным для различных фракций наносов

Фракции, мм	H, см	По опытным данным, см/сек	По формуле В. Н. Гончарова
0,315	4,49	20,8	23,7
0,700	7,4	34,0	34,2
0,870	6,48	34,4	35,65
1,100	7,34	39,6	39,5
1,580	9,00	42,35	46,17
2,970	6,29	53,4	59,2
4,100	15,32	68,0	69,3

Гидравлические элементы опытных данных приведены в табл. 1. Для возможности оценки полученных в опытах величин критических скоростей сдвига были произведены сравнения путем теоретических расчетов по формулам различных авторов. Результаты подсчета графически изображены на рис. 2.

Сравнения были произведены:

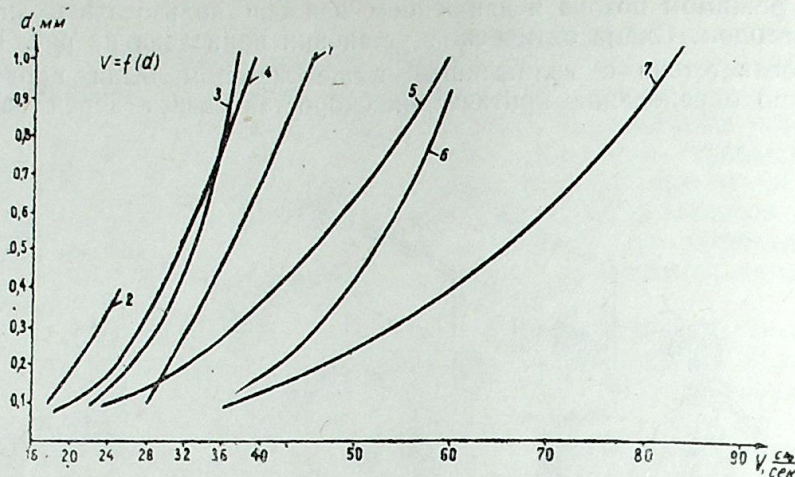


Рис. 2

Значения критических скоростей в функции от d по:
1—М. А. Великанову; 2—Г. В. Лопатину при $H=10$ см; 3—И. И. Леви при $H=10$ см; 4—В. Н. Гончарову при $H=10$ см; 5—И. И. Леви при $H=300$ см; 6—В. Г. Лопатину при $H=300$ см; 7—В. Н. Гончарову при $H=300$ см.

- 1) по М. А. Великанову $v_{cp} = a_1 \sqrt{gD}$ где $a_1 = \sqrt{15 + \frac{6}{D}}$; D в мм;
- 2) по И. И. Леви $v_{cp} = 1,4 \sqrt{gD} \ln \frac{h}{7D}$;
- 3) по В. Н. Гончарову $v_{cp} = 1g \frac{8,8H}{D} \sqrt{\frac{2g(\gamma_1 - \gamma)D}{1,75\gamma}}$;
- 4) по Г. В. Лопатину $v_{cp} = 0,5 \sqrt{d_{cp}} H^{0,2}$.

При этом, за исключением формулы М. А. Великанова, сравнения по всем формулам произведены для глубин, равным 10 см, в интервале которых и производились наши опыты.

Из сравнения видно, что наши опытные данные вполне согласуются с расчетной формулой В. Н. Гончарова, а потому и рекомендуется ею пользоваться при теоретических расчетах для лабораторных исследований.

Так как ошибки по формуле И. И. Леви лежат в допустимых пределах, поэтому этой формулой также рекомендуется пользоваться при теоретических расчетах.

Что касается формулы М. А. Великанова и Г. В. Лопатина, то они при расчете дают резкие отклонения и вправо, и влево от данных наших опытов, как и по расчетным формулам В. Н. Гончарова и И. И. Леви, а потому пользоваться при теоретических расчетах в лабораторных исследованиях ими не рекомендуется. Как усматривается из формул В. Н. Гончарова, И. И. Леви, Г. В. Лопатина, критические скорости пропорциональны глубине потока. Поэтому для сравнительных расчетов. Теоретические расчеты были произведены для глубины 3 м.

Для лучшего восприятия графические изображения этих расчетов приведены на одном чертеже (см. рис. 2). Из рассмотрения рис. 2 видно, что:

а) кривая теоретического расчета по формуле В. Н. Гончарова для глубин в 10 см, по сравнению с теоретическим расчетом для тех же глубин по формуле Г. В. Лопатина, И. И. Леви и М. А. Великанова занимает среднее положение;

б) характер расположения кривых для глубины 3 м по этим же формулам имеет резкое отличие от характера расположения кривых для глубины 10 см. А именно, последовательное возрастание скорости получается по М. А. Великанову, И. И. Леви и Г. В. Гончарову. А самое главное, процентное расхождение полученных данных выходит за пределы допустимого.

Таким образом можно заключить, что полученные нами лабораторные данные согласуются с результатами В. Н. Гончарова и И. И. Леви. Однако при переходе к большим глубинам, т. е. с целью применения их для натуральных условий, эта согласованность исчезает.

Для уяснения этой согласованности необходимо вспомнить, что как наши опытные данные, так и теоретическая формула В. Н. Гончарова базируются на лабораторных данных. Поэтому для распространения на натурные данные необходимо исходить из критических замечаний, сделанных И. В. Егизаровым в той части, что в лабораторных опытах, если в среднем коэффициент лобового сопротивления $C_x = 0,4$, то для натуральных горных потоков при неизбежно больших значениях Re_d , C_x близко к 0,2.

Таким образом, заключает И. В. Егизаров, для перехода по данным лабораторных исследований к натурным для соблюдения моделирования явления необходимо принятие правильного значения C_x в соответствии с режимом потока в условиях обтекания шара.

Исходя из необходимости применения формулы для равнинных рек, в частности в условиях Куры и Аракса, в их низовьях, мы можем для натуральных C_x принимать равным 0,3, тогда отношение

$$\frac{C_{x \text{ лабор.}}}{C_{x \text{ нат.}}} = 1,3.$$

Эту поправку вносим в расчетную формулу В. Н. Гончарова для натуральных условий. В этом случае формула примет вид:

$$v_{cp} = 1,31g \frac{8,8H}{D} \sqrt{\frac{2g(\gamma_1 - \gamma)D}{1,75\gamma}}$$

Результаты расчета по этой формуле изображены графически на рис. 3 в виде кривой 2. Данную формулу рекомендуем для практических расчетов.

Попытаемся полученные фактические данные сравнить с данными других авторов, в частности с формулами И. И. Леви и Г. В. Лопатина. Как усматривается из приведенных сравнительных кривых, расхождения лежат в допустимых пределах (см. рис. 3).

Для определения [на неразрываемость по техническим условиям рекомендуется пользоваться табличными данными Г. В. Лопатина [5].

Одновременно, зная о том, что между скоростью неразрываемой и срывающей скоростью существует установленная опытным путем зависимость $v_{cp} = 1,2 v_{неразм.}$, нами произведены перерасчеты и результаты

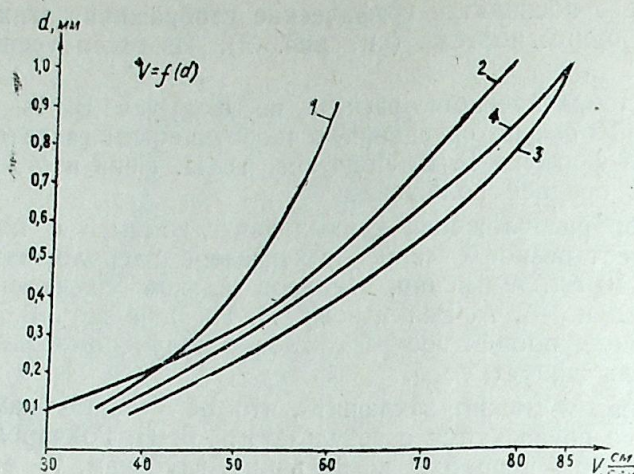


Рис. 3
Значения критических скоростей для $H=300$ см по:
1—Г. В. Лопатину; 2—В. Н. Гончарову с нашей поправкой;
3—И. И. Леви; 4—по таблице норм.

их изображены графически (см. рис. 3). Из сравнения этих графиков видно, что за исключением кривой, рассчитанной по формуле Г. В. Лопатина, расчетные данные И. И. Леви, В. Н. Гончарова с нашей поправкой и по табличным данным теоретических норм лежат в пределах допустимых погрешностей (в пределах 10—15%).

Нами выше графические сравнения были приведены для натуральных условий при глубинах, равных 3 м. А какие показатели будут для глубины более 3 м?

Обычно в технических условиях нормами на размываемость для 3 м и больших глубин ограничиваются одним показателем. В какой степени для натуральных условий это ограничение допустимо? Для уяснения этого, нами по формулам И. И. Леви, В. Н. Гончарова с нашей поправкой, М. А. Мосткова и Г. В. Лопатина произведены расчеты для глубин от 3 до 10 м. Результаты расчета графически изображены на рис. 4.

Из сопоставления конкретных величин, полученных для различных глубин, видно, что крайние величины расхождений, за исключением данных по формуле Г. В. Лопатина, лежат в пре-

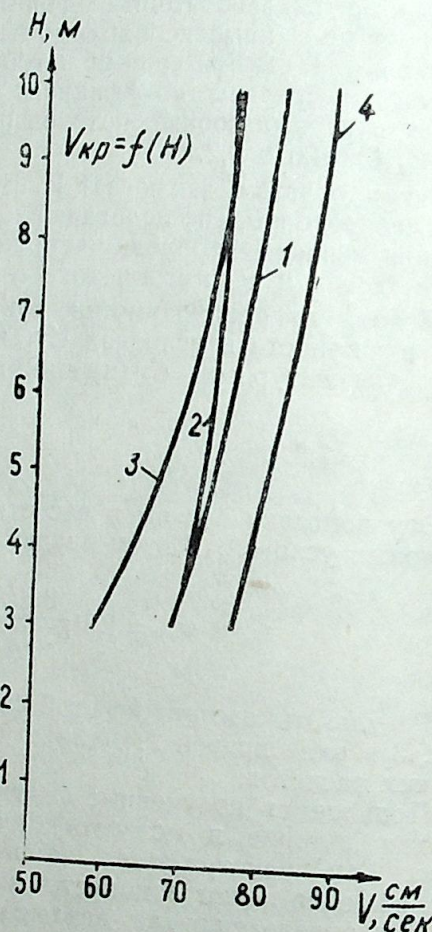


Рис. 4
Значения критических скоростей в функции от H по:
1—М. А. Мосткову; 2—В. Н. Гончарову с нашей поправкой; 3—Г. В. Лопатину; 4—И. И. Леви.

делах допустимых ошибок (10—15%). Таким образом, для рек наших условий вполне можно ограничиться данными какой-либо одной глубины, как средней из крайних величин.

Исходя из сказанного, мы вполне согласны с составителями норм допустимых скоростей на размываемость, где в последней графе приведены скорости для глубин от 3 м и более.

Все сказанное позволило нам для облегчения пользования конкретными величинами критических скоростей на размываемость для глубины 3 м и более привести в табличной форме полученные как среднеарифметическое из расчетных формул И. И. Леви В. Н. Гончарова с нашей поправкой, по данным таблиц норм на размываемость с нашей поправкой (см. табл. 2).

Таблица 2

Среднеарифметические значения срывающих скоростей для глубин 3 м и более по формулам И. И. Леви, В. Н. Гончарова с нашей поправкой и по нормам на размываемость

d , мм	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
v , см/сек	32,9	41,6	48,2	53,2	57,7	61,4	64,9	67,7	70,7	73,5

Из сравнения также данных этой таблицы с данными, получаемыми по формулам других авторов (см. табл. 3), видно, что и здесь расхождение лежит в пределах 10—15%, т. е. допустимых для пользования ими.

Таблица 3

Значение критических (срывающих) скоростей для $d=0,5$ мм при глубине 3 м по формулам различных авторов

Автор	v , см/сек	Отклонения, ± %
По нашей расчетной таблице	57,7	—
По И. И. Леви	66,2	+11,6
По Г. В. Лопатину	52,7	-10,0
По нормам допускаемых скоростей с поправкой = 1,2	62,64	+11,0
По В. Н. Гончарову с нашей поправкой	59,3	+ 2,4
По М. А. Мосткову	59,0	+ 2,3

ВЫВОДЫ

1. Несмотря на важность вопросов по установлению закономерности движения наносов в потоке и длительности их изучения до настоящего времени еще не предложены зависимости, с исчерпывающей полнотой охватывающие явления, связанные с установлением закономерности влекомых наносов.

Такое положение объясняется главным образом сложностью и неясностью кинематической структуры потока в правильном понимании взаимодействия потока и ложа водотока.

2. Советские ученые в объяснении механизма скачкообразного движения наносов, в равной степени и взвешивания их в турбулентном потоке, базируются на учении Н. Е. Жуковского о наличии в потоке вихревых шнуров с горизонтальными поперечными осями.

3. В последующем, на основе проведенных исследований, учение о механизме влечения наносов получило дальнейшее развитие и доп. В числе ученых, внесших значительный вклад в дело дальнейшего понимания механизма движения наносов и практического их приложения, можно назвать М. А. Великанова, М. В. Потапова, В. Н. Гончарова, И. И. Леви, И. В. Егизарова, Е. А. Замарина и др.

4. На основе проведенных нами лабораторных исследований с учетом результатов других авторов в деле определения критических скоростей сдвига наносов в потоке, для лабораторных условий можно пользоваться теоретической формулой В. Н. Гончарова и И. И. Леви, для натуральных условий, имея в виду низовья рек Куры и Аракса, рекомендуется пользоваться формулой В. Н. Гончарова с нашей поправкой следующего вида:

$$v_{cp} = 1,3 \lg \frac{8,8H}{L} \sqrt{\frac{2g(\gamma_1 - \gamma)D}{1,75 \gamma}}$$

Для этих же условий можно пользоваться также формулой И. И. Леви:

$$v_{срив} = 1,4 \sqrt{gD \ln \frac{h}{7D}}$$

5. Кроме расчетов по вышеприведенным формулам для натуральных условий можно пользоваться данными таблиц, составленных нами с целью удобства их практического применения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Великанов М. А. Движение наносов. М., 1948.
2. Гончаров В. Н. Движение наносов. Л., 1948.
3. Егизаров И. В. Критический анализ исследований Цюрихской гидролаборатории и работ Х. А. Эйштейна, посвященных расходу влекомых наносов. Изв. АН Арм. ССР, 1950, № 3.
4. Леви И. И. Динамика русловых лотков. Л., 1948.
5. Лопатин Г. В. Наносы рек СССР. М., 1952.

М. J. Вахабов

Лиллэрин һәрәкәтинин бөһран (критик) сүр'әтлэринин мүүжән едилмәси

ХҮЛАСӘ

Лиллэрин ахымда һәрәкәтинин узун мүддәт өйрәнилмәсинә бахмә-
җараг, индијә гәдәр һәммин лиллэрин ганунауҗунлуғунун мүүжән едил-
мәси илә әлагәдар һадисәләри там әһатә едән битмиш бир асылылыг
тәклиф едилмәмишдир.

Белә вәзијјәт әсасән ахымын кинематик структурасынын мүрәккәб-
лији вә ајдын олмәмәси илә изаһ едилир.

Апардығымыз лабораторија тәдгигатлары әсасында башга мүүәлиф-
ләрин тәдгигатларыны нәзәрә алараг, ахымда лиллэрин һәрәкәтинин
бөһран (критик) сүр'әтлэринин тәјин едилмәси ишиндә ашағыдакылар
мәсләһәт көрүлүр:

а) лабораторија шәраитләри үчүн В. Н. Гончаровун вә И. И. Леви-
нин нәзәри дүстурундан истифадә едилмәли;

б) тәбии шәраитләр үчүн Күр вә Араз чајларынын ашағы ахарыны
нәзәрдә тутмагла бизим вердијимиз дүзәлишлә В. Н. Гончаровун
дүстурундан истифадә етмәли:

$$V_{гон} = 1,3 \lg \frac{8,8H}{D} \sqrt{\frac{2g(\gamma_1 - \gamma)D}{1,75 \gamma}}$$

в) бу шәраит үчүн И. И. Левинын дүстурундан да истифадә етмәк
олар:

$$V_{гон} = 1,4 \sqrt{2D \ln \frac{h}{7D}}$$

г) тәбии шәраитләр үчүн јухарыда көстәрилән дүстурлардан баш-
га, тәчрүби тәтбиғи јүнкүлләшдирмәк мәгсәди илә бизим тәртиб
етдијимиз чәдвәлдән истифадә етмәк олар.

Д. Р. ДАДАШЕВ

О ВЫБОРЕ ЧИСЛА СТУПЕНЕЙ И ПЕРЕДАТОЧНЫХ ЧИСЕЛ В КОРОБКАХ ПЕРЕДАЧ ЛЕГКОВЫХ АВТОМОБИЛЕЙ

Способность автомобиля преодолевать возможно большие сопротивления дороги, быстро разгоняться и иметь достаточно высокие средние скорости движения находятся в определенной зависимости от числа ступеней и передаточных чисел коробки передач и главной передачи. Выгодное в конструктивном отношении увеличение числа ступеней и правильный подбор передаточных чисел в коробке передач и главной передаче повышают указанные динамические качества и топливную экономичность автомобиля.

Несмотря на разносторонность развития автомобильных коробок передач, в настоящее время из-за достаточной простоты и дешевизны изготовления, а также возможности достижения необходимого предела изменения передаточных чисел наибольшее распространение все же получили ступенчатые коробки передач. Поэтому, вопрос дальнейшего совершенствования их конструкции представляет большой интерес.

Передаточное число главной передачи, оказывая большое влияние на тяговые качества автомобиля, ставит в зависимость от себя и правильный подбор передаточных чисел коробки передач. Поэтому, проанализируем сначала правильность выбора передаточных чисел главной передачи рассматриваемых в работе легковых автомобилей „Волга“ М-21В и ГАЗ-12.

С этой целью воспользуемся (рис. 1) кривыми скоростной характеристики двигателя $N_{e(n,c)} = f(n)$ об/мин и зависимости суммарного сопротивления движению от скорости автомобиля $\Sigma N_{vc} = f(v)$, где $\Sigma N_{vc} = N_r + N_\phi + N_w$.

Для автомобилей „Волга“ и ГАЗ-12 строим сначала кривые при $i_0 = 4,55$.

На графиках точки пересечения кривых N_e и ΣN_{vc} определяют собой максимальные скорости движения, которых достигают указанные автомобили при данном сопротивлении дороги при соответствующем значении i_0 . Этим скоростям на прямой передаче соответствуют максимальные обороты двигателя n_{max} , которые, как известно, обычно больше оборотов n_n , соответствующих максимальной мощности его.

Если дополнительно на графиках построить кривые N_e , соответствующие двум значениям i_0 , из которых одно больше, а другое меньше 4,55, например, 5,0 и 4,0, то будем иметь, соответственно,

Д. Р. ДАДАШЕВ

О ВЫБОРЕ ЧИСЛА СТУПЕНЕЙ И ПЕРЕДАТОЧНЫХ ЧИСЕЛ В КОРОБКАХ ПЕРЕДАЧ ЛЕГКОВЫХ АВТОМОБИЛЕЙ

Способность автомобиля преодолевать возможно большие сопротивления дороги, быстро разогнаться и иметь достаточно высокие средние скорости движения находятся в определенной зависимости от числа ступеней и передаточных чисел коробки передач и главной передачи. Выгодное в конструктивном отношении увеличение числа ступеней и правильный подбор передаточных чисел в коробке передач и главной передаче повышают указанные динамические качества и топливную экономичность автомобиля.

Несмотря на разносторонность развития автомобильных коробок передач, в настоящее время из-за достаточной простоты и дешевизны изготовления, а также возможности достижения необходимого предела изменения передаточных чисел наибольшее распространение все же получили ступенчатые коробки передач. Поэтому, вопрос дальнейшего совершенствования их конструкции представляет большой интерес.

Передаточное число главной передачи, оказывая большое влияние на тяговые качества автомобиля, ставит в зависимость от себя и правильный подбор передаточных чисел коробки передач. Поэтому, проанализируем сначала правильность выбора передаточных чисел главной передачи рассматриваемых в работе легковых автомобилей „Волга“ М-21В и ГАЗ-12.

С этой целью воспользуемся (рис. 1) кривыми скоростной характеристики двигателя $N_{e(l.c)} = f(n)$ об/мин и зависимости суммарного сопротивления движению от скорости автомобиля $\Sigma N_{vc} = f(v)$, где $\Sigma N_{vc} = N_r + N_\psi + N_w$.

Для автомобилей „Волга“ и Газ-12 строим сначала кривые при $i_0 = 4,55$.

На графиках точки пересечения кривых N_e и ΣN_{vc} определяют собой максимальные скорости движения, которых достигают указанные автомобили при данном сопротивлении дороги при соответствующем значении i_0 . Этим скоростям на прямой передаче соответствуют максимальные обороты двигателя n_{max} , которые, как известно, обычно больше оборотов n_n , соответствующих максимальной мощности его.

Если дополнительно на графиках построить кривые N_e , соответствующие двум значениям i_0 , из которых одно больше, а другое меньше 4,55, например, 5,0 и 4,0, то будем иметь, соответственно,

$n_{\max} > n_N$ и $n_{\max} < n_N$ в обоих случаях максимальная скорость будет меньше максимальной скорости, соответствующей передаточному числу 4,55.

Из рис. 1 наглядно видно, при первом случае, т. е. при большом значении i_0 , несмотря на уменьшение максимальной скорости, запас мощности при движении автомобиля на прямой передаче увеличивается.

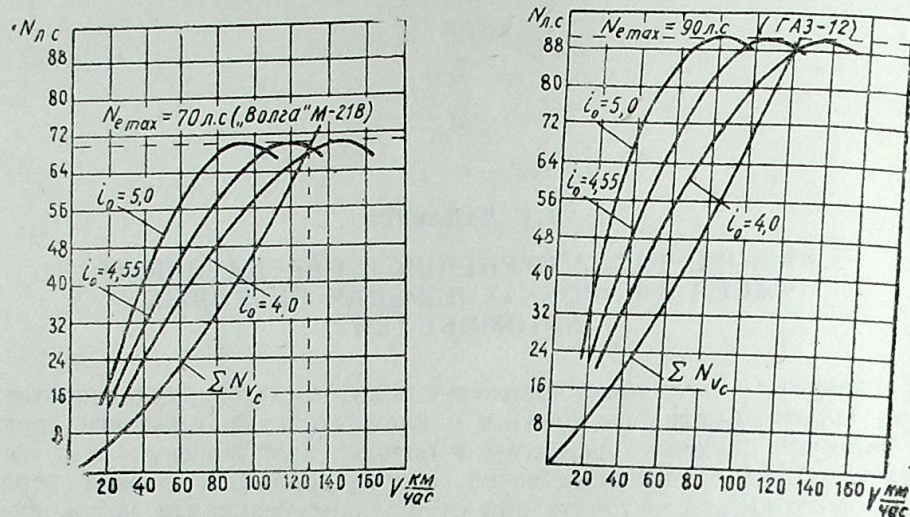


Рис. 1

ется; во втором случае, т. е. при меньшем значении i_0 , имеет место снижение как запаса мощности, так и максимальной скорости.

Топливная экономичность автомобиля будет тем выше, чем меньше значение i_0 . Однако при этом снижение запаса мощности ухудшает динамические качества автомобиля, а именно способность его быстро разгоняться, преодолевать на прямой передаче незначительные подъемы и т. д.

Излишнее увеличение передаточного числа i_0 также нерационально. Незначительное увеличение запаса мощности в этом случае, помимо уменьшения максимальной скорости и снижения топливной экономичности автомобиля, сопровождается увеличением числа оборотов двигателя на единицу пути. Последнее вызывает повышенный износ двигателя и приводит к уменьшению срока службы его.

Для обеспечения легковых автомобилей с трехступенчатыми коробками передач достаточно высоким запасом мощности для их разгона на прямой передаче отношение $n_{\max}/n_N$, рекомендуется принимать равным 1,2—1,25. Однако эти пределы указанного отношения для многооборотных двигателей современных легковых автомобилей не оправдывают себя, ибо это приводит к повышенному износу двигателя и резкому снижению топливной экономичности автомобиля. Помимо сказанного, наличие четырехступенчатой коробки передач позволяет обеспечить легковой автомобиль достаточно высокими динамическими качествами, в частности интенсивным разгоном на второй и третьей передачах.

В силу рассмотренного, а также необходимости наличия небольшого запаса мощности, учитывающего износ двигателя в процессе эксплуатации, для двигателей легковых автомобилей среднего класса

целесообразно иметь условие, при котором обороты двигателя $n_{\max}$ на 10% больше оборотов его n_N , т. е. когда $n_{\max} = 1,1n_N$.

При этом условии передаточное число главной передачи i_0 указанных автомобилей является наиболее рациональным. Тогда, пользуясь известной формулой зависимости скорости движения автомобиля от оборотов его двигателя, т. е.

$$v_{\max} = 0,377 \frac{r_k \cdot n_{\max}}{i_0 \cdot i_k}$$

для определения передаточного числа главной передачи легковых автомобилей среднего класса, получим:

$$i_0 = 0,377 \frac{1,1n_N \cdot r_k}{v_{\max} \cdot i_k} \quad (1)$$

Имея в виду прямую передачу, когда $i_k = 1$

$$i_0 = 0,415 \frac{n_N \cdot r_k}{v_{\max}} \quad (1')$$

Предлагаемая с работ [3] исследователей НАМИ формула для определения передаточных чисел главной передачи малолитражных автомобилей „Москвич“-402 и 407 имеет вид:

$$i_0 = 0,396 \frac{n_N \cdot r_k}{v_{\max}} \quad (2)$$

Результаты расчета с указанием использованных формул и необходимые параметры автомобилей для определения передаточных чисел i_0 приведены в табл. 1.

Таблица 1

Марка автомобиля	n_N об/мин.	$v_{\max}$ км/час	$r_k, м$	Расчетн. формула	i_0 действ.	i_0 расчетное
„Волга“ М-21 В	4000	130	0,35	(1')	4,55	4,5
ГАЗ-12	3600	120	0,36	(1')	4,55	4,5
„Москвич“ - 407	4500	11	0,317	(2)	4,71	4,7
„Москвич“ - 402	4200	105	0,317	(2)	5,14	5,05

Данные табл. 1 еще раз подтверждают правильность выбора передаточных чисел i_0 на рассматриваемых легковых автомобилях. Это в свою очередь в целях повышения динамики и топливной экономичности наших легковых автомобилей обязывает, главным образом, обратить внимание на правильность выбора числа ступеней и передаточных чисел в их коробках передач.

Легковые автомобили „Волга“ М-21В, ГАЗ-12, „Москвич“-402 и первая модель „Москвич“-407 и их модификации снабжены на сегодня трехступенчатыми коробками передач с третьей прямой передачей.

Практика эксплуатации и теоретические исследования динамики этих автомобилей указывают на недостаточность использования в их коробках передач трех ступеней.

Наличие трехступенчатой коробки передач на современном легковом автомобиле, не позволяя полнее использовать максимальную

мощность двигателя, не обеспечивает его достаточно высокими динамическими качествами. Передаточное число первой передачи i_1 комбинированных автомобилей, как это видно из табл. 2, найденное из условия необходимости преодоления автомобилем максимального сопротивления дороги с $\psi_{\max}=0,3-0,35$ является явно недостаточным.

Таблица 2

Марка автомобиля	Трехступенчатая коробка передач									
	1-я передача					2-я		3-я		i_1
	$\psi_{\max}$	$P_{\text{пр. max}}$	$P_{\text{сц}}$	$P_{\text{сц}} - P_{\text{пр. max}}$	$v_{\text{кр.}}$	$\psi_{\max_2}$	$v_{\text{пр.}}$	$\psi_{\max_3}$	$v_{\text{пр.}}$	
„Волга“ М - 21В	0,33	635	1020	385	37,8	0,19	66,4	0,10	130	3,11
ГАЗ - 12	0,32	760	1240	480	35,0	0,18	61,0	0,10	120	3,11
„Москвич“ - 407	0,33	430	660	230	31,2	0,16	63,2	0,09	115	3,53
„Москвич“ - 402	0,31	400	660	260	28,5	0,14	57,5	0,08	105	3,53

Развиваемая на ведущих колесах максимальная тяговая сила $P_{\text{пр. max}}$ при таком передаточном числе i_1 получается намного меньше силы сцепления $P_{\text{сц}}$ колес на дороге с твердым покрытием. Для автомобилей „Волга“ М-21В и „ГАЗ-12“ разница между $P_{\text{сц}}$ и $P_{\text{пр. max}}$ достигает, соответственно, 385 и 480 кг; для автомобилей „Москвич“-407 и 402 с трехступенчатой коробкой, соответственно, 230 и 260 кг. Это передаточное число не позволяет также получать малые скорости, весьма необходимые при движении автомобиля по особенно плохим дорогам.

Небезынтересно отметить, что у некоторых иностранных легковых автомобилей того же класса, что и наши, способность преодолевать максимальное сопротивление дороги $\psi_{\max}$ достигает 0,5—0,6.

Так, например, легковой автомобиль „Мерседес—Бенц“ (ФРГ) модели 1959 г. преодолевает дороги с $\psi_{\max}=0,55$. Объясняется это в основном использованием четырехступенчатой коробки передач.

Трехступенчатые коробки передач отечественных легковых автомобилей и четырехступенчатая коробка передач, устанавливаемая в настоящее время на автомобилях „Москвич“-407, как правило, последнюю передачу имеют прямую.

Известно, что прямая передача в коробку передач вводится в целях увеличения скорости движения автомобиля на хорошей дороге, и, в частности, для обгона грузовых автомобилей. Автомобили с трехступенчатой коробкой для этой цели на прямой передаче обеспечивают довольно большим запасом мощности. Значения коэффициента запаса мощности на наиболее употребляемых скоростях при движении автомобиля на этой передаче, как это видно из табл. 3, достигают трех и выше.

Приведенные в табл. 3 величины коэффициента запаса мощности оправдывают себя только лишь в процессе обгона. Движение же автомобиля на хорошей дороге с наиболее употребляемыми скоростями на прямой передаче становится неэкономичным.

При наличии четырехступенчатой коробки передач в целях обгона используется третья передача, которая позволяет разгонять автомо-

бил до достаточно высоких скоростей. Прямая передача в этом случае не требует наличия большого запаса мощности, а это повышает экономичность автомобиля при движении его на данной передаче.

Таблица 3

Марка автомобиля	Наиболее употребляемые скорости, км/час	Коэф. запаса мощности — K
„Волга“ М - 21В	60 ÷ 80	3,0 ÷ 2,2
ГАЗ - 12	60 ÷ 80	3,2 ÷ 2,5
„Москвич“ - 407	50 ÷ 70	2,8 ÷ 2,0

Проведенные нами теоретические исследования динамических качеств наших легковых автомобилей, а также практика их эксплуатации указывают на целесообразность установки на них четырехступенчатой коробки передач. Последняя, как это подтверждают расчеты, дает возможность легковому автомобилю преодолевать на первой передаче повышенные сопротивления дороги, обеспечивает его достаточно высокой динамикой при разгоне на промежуточных передачах, а также позволяет на третьей передаче производить интенсивный разгон до скорости 75 км/час и выше с целью обгона грузового и более медленно движущегося транспорта.

Таблица 4

Марка автомобиля	Четырехступенчатая коробка передач											
	1-я передача					2-я		3-я		4-я		i_1
	$\psi_{\max}$	$P_{\text{пр. max}}$	$P_{\text{сц}}$	$P_{\text{сц}} - P_{\text{пр. max}}$	$v_{\text{пр.}}$	$\psi_{\max_2}$	$v_{\text{пр.}}$	$\psi_{\max_3}$	$v_{\text{пр.}}$	$\psi_{\max_4}$	$v_{\text{пр.}}$	
„Волга“ М - 21В	0,45	850	1020	170	27,5	0,26	47,4	0,15	80,5	0,10	130	4,25
ГАЗ - 12	0,43	1015	1240	225	25,7	0,25	44,2	0,14	75,2	0,10	120	4,25
„Москвич“ - 407	0,36	470	660	190	29,8	0,22	47,2	0,13	78,5	0,09	115	3,81
„Москвич“ - 407	0,40	520	660	140	27,2	0,24	46,3	0,13	78,5	0,08	115	4,3

Применение четырехступенчатой коробки передач на автомобилях „Волга“ М-21В и ГАЗ-12, как это видно из табл. 4, повышает их динамические качества. Динамический фактор этих автомобилей, а следовательно, и способность их преодолевать сопротивление дороги, возрастают для первой передачи на 11% ÷ 12%, для второй передачи на 7% и для третьей передачи на 4% ÷ 5%. Наличие третьей разгонной передачи значительно улучшает динамику разгона их, позволяя интенсивно повышать скорости движения до 75 ÷ 80 км/час и выше.

Использование третьей передачи с более низким передаточным числом (1,45), по сравнению с передаточным числом второй передачи (1,77) трехступенчатой коробки передач улучшает топливную экономичность этих автомобилей при движении по дорогам с частыми подъемами и в условиях городской езды.

На малолитражных и микролитражных легковых автомобилях, а также на их модификациях целесообразно устанавливать двухвальные четырехступенчатые коробки передач. Эти коробки передач, облада-

рядом достоинств (простота конструкции, дешевизна изготовления, долговечность работы, повышенные КПД на передачах (кроме прямой) и т. д.), а также возможность при этой коробке снижения центра тяжести автомобиля, вполне оправдывают их установку на указанных легковых автомобилях.

Принимая во внимание отмеченные выше возможности улучшения тяговых качеств автомобиля в связи с применением четырехступенчатой коробки передач в двухвальной четырехступенчатой коробке целесообразнее прямую передачу заменить ускоряющей передачей. Конструктивное решение этого вопроса очень простое и не требует, как это имеет место в трехвальной коробке передач, введения в коробку дополнительной пары шестерен.

Четырехступенчатая коробка передач, устанавливаемая в настоящее время на автомобилях „Москвич“-407, безусловно, несколько повышает их динамические качества, по сравнению с этими автомобилями, имеющими трехступенчатую коробку передач. Однако в силу недостаточно правильного выбора передаточных чисел новой коробки передач, автомобиль „Москвич“-407 увеличил динамический фактор для первой передачи всего лишь на 3%, для второй передачи на 6%.

При выборе передаточных чисел четырехступенчатой коробки передач из условий, рассматриваемых в настоящей работе, автомобиль „Москвич“-407, как это видно из данных табл. 4, значительно улучшает свою динамику, благодаря увеличению динамического фактора для первой передачи на 7%, для второй—на 8%.

Помимо этого, применение на автомобиле „Москвич“-407 двухвальной коробки передач с четвертой ускоряющей передачей позволит дополнительно улучшить топливную экономичность автомобиля и повысит долговечность его двигателя. Проведенные расчеты подтверждают также, что использование ускоряющей передачи (вместо прямой) на малолитражных и микролитражных автомобилях дает наиболее эффективные результаты при выборе передаточных чисел, находящихся в пределах 0,85—0,9.

Первая передача, как известно, в основном необходима для преодоления максимального сопротивления дороги. Поэтому, в целях более полного использования тяговых качеств автомобиля на этой передаче передаточное число i_1 в коробках передач, рассматриваемых в работе легковых автомобилей, целесообразно определять из условия преодоления ими сопротивления дороги с коэффициентом $\phi_{\max}$ не ниже 0,4—0,45. Это передаточное число i_1 с достаточным запасом от пробуксовывания (см. табл. 4) обеспечивает передачу максимальной тяговой силы $P_{r\max}$ через ведущие колеса и повышает проходимость автомобиля по особенно плохим дорогам, предельно снижая скорость его движения.

При четырехступенчатой коробке передач назначение третьей передачи, как было сказано выше, заключается главным образом в интенсивном увеличении скорости движения автомобиля на хорошей дороге до 75—80 км/час с целью обгона более медленно движущегося транспорта. Последнее можно обеспечить правильным выбором передаточного числа i_3 этой передачи.

Для этого преобразуем сначала формулу (1) в следующий вид:

$$i_3 = 0,377 \frac{1,1 \cdot n_N r_k}{i_0 \cdot v_{np}} \quad (3)$$

Затем, задаваясь предельной скоростью разгона автомобиля на третьей передаче $v_{np} = 80$ км/час, находим выражение для определения передаточного числа i_3 :

$$i_3 = 0,0052 \frac{n_N r_k}{i_0} \quad (4)$$

Передаточное число i_2 второй передачи следует определять как среднюю геометрическую между i_1 и i_3 , т.е.

$$i_2 = \sqrt{i_1 \cdot i_3} \quad (5)$$

Четырехступенчатые коробки передач, передаточные числа которых найдены на основании изложенных соображений и приведены в табл. 4, значительно улучшают динамику рассматриваемых в работе легковых автомобилей.

Эти автомобили приобретают возможность на отдельных передачах производить более интенсивный разгон, повышают средние скорости движения и преодолевают сопротивление дорог с достаточно высокими коэффициентами ϕ . Их двигатели при этом, работая на наиболее оптимальных режимах, заметно улучшают топливную экономичность автомобиля.

Полученные данные указывают также на целесообразность установки на автомобилях „Волга“ М-21В и „ГАЗ-12“ четырехступенчатой коробки передач одной и той же конструкции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольд Б. В. и Фалькевич Б. С. Теория, конструирование и расчет автомобиля. Машгиз, 1957.
2. Лурье М. И. „Автомобильная промышленность“, 1959, № 7.
3. Чудаков Е. А. Теория автомобиля. Машгиз, 1950.

Ч. Р. Дадашов

Миник автомобиллэри сүр'этлэр гутусунда сүр'эт пиллэлэри сајынын вэ өтүрмэ эдэдлэринин сечилмэси һаггында

ХҮЛАСӘ

Совет миник автомобиллэри вэ онларын модификасијалары һазырда әсасән үчүнчү өтүрмәси бирбаша өтүрмэ олан үчпиллэли сүр'этлэр гутуларына маликдир.

Бу автомобиллэрин истисмары тәчрүбәси онларда үчпиллэли сүр'этлэр гутусунун гәнаәтбәхш кәстәричилэри тәмин етмәдијини кәстәрир. Мүасир миник автомобиллэриндә үчпиллэли сүр'этлэр гутусунун олмасы онларын мүһәрриклэринин максимум күчүндән истифадә етмәјә вэ автомобилин кифајәт гәдәр јүксәк динамики кејфијәтләрә малик олмасына имкан вермир.

Она кәрә дә мәгаләнин һәср едилдији ишдә пиллэли сүр'этлэр гутусунун гурулушларынын тәкмилдәшдирилмәси мәсәләси чох ма-раглы вэ тәчрүби әһәмијјәти олан мәсәләдир.

Ишдә Вәтәнимиздә бурахылан миник автомобиллэринин әсас моделлэринин дартма кејфијәтлэринин нәзәри тәдгиги апарылмыш вэ „Волга М-21В“ вэ „ГАЗ-12“ автомобиллэринин баш өтүрүчүлэринин өтүрмә эдэдлэринин дүзкүн сечилмәсинин анализи верилмишдир.

Бу тэдгигатлара эсасэн орта синиф миник автомобиллэриндэ дөрдүнчү өтүрмэси бирбаша олан дөрдсүр'этли гутуларын, кичик литражлы вэ микролитражлы миник автомобиллэриндэ вэ онларын модификасијаларында исэ дөрдүнчү сүр'этлэри бирбаша өтүрмэ эвэзиндэ, сүр'этлэндиричи өтүрмэ олан икиваллы дөрдсүр'этли гутуларын тэтбиг едилмэсинин мэгсэдәујгун олмасы тә'јин едилир. Бу гутуларда сүр'этлэндиричи өтүрмэнин үстүнлүклэри гејд едилир вэ онун өтүрмэ әдәдлэринин ән фәјдалы гијмәтлэри верилир.

Мүасир миник автомобиллинин јолун мүмкүн гәдәр чох мүгавимәтини дөф етмәк габилијјәтини артырмаг мэгсәди илә онун сүр'әтләр гутусунун биринчи өтүрмәсинин өтүрмә әләдини (i_1) автомобиллини максимал мүгавимәти $\psi_{\max}=0,4-0,45$ мувафиг олан јолун мүгавимәтини дөф едә билмәси шәртинә кәрә тә'јин едилмәси төвсијә едилир.

Даһа сонра ишдә, 4 сүр'әтли гутуларын үчүнчү өтүрмәсинин, даһа кичик сүр'әтлә һәрәкәт едән нәглијјаты өтүб кечмәк гахты, јејинләшдиричи өтүрмә кими истифадә олунмасынын мэгсәдәујгун олмасы кәс-тәрилир.

Она кәрә дә үчүнчү өтүрмәнин өтүрмә әдәдини гијмәтини (i_3), јахшы јол шәраитиндә бу өтүрмәдә сүр'әтин интенсив олараг 80 км/саат-а гәдәр артырыла билмәси шәртинә һесабламаг мәсләһәт кәрүлүр.

Икинчи өтүрмәнин өтүрмә әдәдини (i_2) i_1 вэ i_3 арасында һәндәси орта гијмәтдә кәтүрмәк лазымдыр.

Ишдә верилмиш, алынан нәтичәләрә эсасән „Волга М—21В“ вэ „ГАЗ—12“ автомобиллэриндә ејни гурулушлу дөрдсүр'әтли сүр'әтләр гутусунун гојулмасынын мэгсәдәујгун олмасы тә'јин едилир.

В. И. ЕСЬМАН

ХАРАКТЕРИСТИКА ДЛИТЕЛЬНОСТИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЗАТИШИЙ ВЕТРА В АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

Под энергетическими затишьями подразумевается период, когда фактические скорости ветра становятся меньше некоторой минимальной рабочей скорости ветра $v_{\min}$, при которой ветродвигатель начинает работать. В зависимости от системы ветроколеса и назначения ветродвигателя $v_{\min}$ может быть 3,4 и 5 м/сек. Следовательно, продолжительность энергетического затишья в той или иной местности будет зависеть не только от ее ветрового режима, но также и от конструкции ветродвигателя.

Определить вероятность наблюдать в данной местности энергетическое затишье любой продолжительности можно интегрируя в интервале от 0 до $\frac{v_{\min}}{v}$ уравнение, характеризующее закономерность повторяемости рабочих скоростей ветра [1]:

$$P_b = \alpha \int_0^{\frac{v_{\min}}{v}} \left(\frac{v}{v} \right)^p e^{-k \left(\frac{v}{v} \right)^n} \frac{dv}{v},$$

где α , p , n , k —параметры, которые находятся по статистическим характеристикам эмпирических распределений скорости ветра.

Нами установлено, что для Азербайджана характеристика общей продолжительности простоя ветросиловых агрегатов определяется в промилле для Прикаспийской зоны (зона А) выражением:

$$P_b = 884 \int_0^{\frac{v_{\min}}{v}} \left(\frac{v}{v} \right)^{\frac{1}{5}} e^{-0,53 \left(\frac{v}{v} \right)^{\frac{7}{5}}} \frac{dv}{v},$$

и для Прикуринской (зона Б) выражением:

$$P_b = 752 \int_0^{\frac{v_{\min}}{v}} \left(\frac{v}{v} \right)^{\frac{1}{6}} e^{-0,39 \left(\frac{v}{v} \right)^2} \frac{dv}{v}$$

Аналогично можно определить общую продолжительность возможного действия ветросиловых агрегатов, интегрируя те же уравнения

в интервале от $\frac{v_{\min}}{v}$ до $\frac{v_{\max}}{v}$. Эта характеристика служит важным показателем при оценке целесообразности использования энергии ветра в той или иной местности.

Не менее важно также знать закономерность распределения безветрий по их длительности и соотношению длительности периода t затишья к периоду с ветрами τ (период t следует за периодом τ).

Эти данные помогут судить о предельных длительностях возможных простоев агрегатов и позволяют определить требуемую мощность ветросиловой установки при условии, что она будет работать не только на обеспечение текущего потребления энергии, но и на выработку энергии в запас для обеспечения штилевого периода.

В случае работы ветроустановки с аккумулятором ее выработка должна определяться следующим выражением [3]:

$$A = A_{\text{сут}} + A_{\text{сут}} \frac{t}{\tau},$$

где $A_{\text{сут}}$ — энергия, вырабатываемая на текущее потребление; $A_{\text{сут}} \frac{t}{\tau}$ — энергия для зарядки аккумулятора.

Как видно, мощность электроустановки в значительной степени зависит от величины $\frac{t}{\tau}$, которая может колебаться в очень больших пределах. Задача состоит в том, чтобы выбрать некоторое оптимальное отношение $\frac{t}{\tau}$ применительно к конкретным условиям уста-

новки ветродвигателя, при котором будет обеспечено энергией максимальное число случаев безветрия и минимальные затраты на установку (мощность ветродвигателя и емкость аккумулятора).

Для того, чтобы иметь более ясное представление о закономерности распределения безветрий по их длительности на территории Азербайджана, а также о величине отношения $\frac{t}{\tau}$, нами были обработаны

ежедневные записи наблюдений за скоростью ветра по метеостанциям УГМС Азербайджанской ССР. Так как подобная работа связана с большой затратой времени прежде всего необходимо было выяснить вопрос о периоде наблюдений, достаточном для получения надежных данных. Подсчет длительности безветрий по данным метеостанции Баку за 10 и за 5 лет показал, что расхождение между результатами подсчетов за десятилетие и за пятилетие незначительно — порядка 1,0%. Поэтому дальнейшие расчеты мы вели по пятилетним рядам наблюдений, считая достоверность наших выводов вполне достаточной для практического ветроиспользования.

В табл. 1 приведены данные о длительности затиший ветра в процентах по 15 метеостанциям Азербайджана, выбранных с таким расчетом, чтобы охватить наиболее характерные районы республики.

Следует заметить, что обработке подвергались фактические данные наблюдений без предварительного приведения их к сравнимым условиям затененности и высоте. Это обстоятельство вызвало увеличение общего числа затиший и их продолжительности по отдельным станциям. Однако в силу того, что характер распределения затиший в пределах каждой зоны остается неизменным, мы относим результаты наших подсчетов не к данной выбранной станции, а ко всем тем

Таблица 1

Данные о длительности затиший ветра по метеостанциям Азербайджана (в %)

Сутки Станции															
	<0,5	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	<10		
Актафа	42,33	26,96	16,08	8,93	3,03	1,19	0,87	0,27	0,16	0,12	—	0,05	—	—	—
Астара	28,81	31,0	23,85	10,12	4,07	1,79	0,3	0,18	0,06	—	—	—	—	—	—
Алят	46,6	36,3	13,25	3,5	0,35	0,03	—	0,03	—	—	—	—	—	—	—
Баку	56,76	30,49	10,84	1,69	0,14	—	—	0,08	—	—	—	—	—	—	—
Евлах	60,43	22,71	10,45	3,83	1,22	0,58	0,27	0,27	0,12	0,04	0,04	—	—	—	—
Закаталы	14,28	9,38	10,20	13,06	9,38	3,68	4,9	2,45	6,22	2,01	3,26	3,68	17,5	0,04	—
З. о. Кулук	64,47	30,72	4,04	0,66	0,11	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Карадонлы	39,02	29,58	10,79	10,07	6,42	1,24	1,52	1,05	0,13	0,06	0,06	—	—	—	—
Физули	30,75	20,33	17,89	15,46	7,56	3,22	1,52	1,26	0,93	0,25	0,25	0,17	0,41	—	—
Кировабад	42,01	30,15	17,23	7,66	2,16	0,57	0,11	0,11	—	—	—	—	—	—	—
Маштаги	62,71	30,34	5,85	1,1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Пуга	44,18	41,03	11,64	2,35	0,8	1,93	1,81	0,13	0,39	0,13	—	—	—	—	—
Сабирбад	36,87	21,01	2,84	10,18	3,15	1,22	0,54	0,23	0,13	0,27	0,07	0,13	0,49	—	—
Сальяны	31,12	33,35	19,44	10,66	3,03	0,14	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Сумгаит	41,47	36,5	18,2	3,12	0,57	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Таблица 2

Повторяемость отношений t/τ по данным метеостанций Азербайджана

Станции	0—1	1—2	2—3	3—4	4—5	5—6	6—7	7—8	8—9	9—10	10—11	11—12	12—13	13—14	14—15
Баку	75,20	16,3	3,3	1,62	1,40	0,72	0,46	0,35	—	0,12	—	0,23	0,12	0,35	—
Сумгаит	73,23	16,22	5,21	1,44	1,95	0,51	0,61	0,2	0,11	—	0,31	0,1	—	—	—
З. о. Култук	66,56	22,49	4,93	1,41	1,95	0,51	0,61	0,2	0,1	0,2	0,31	0,1	—	—	0,1
Сальяны	21,58	22,8	15,24	8,41	6,34	4,26	3,29	2,31	2,17	2,87	2,68	0,85	0,24	0,24	0,36
Сабирабад	4,54	14,37	12,29	9,19	8,86	5,75	4,09	4,35	2,8	4,98	4,09	1,87	0,31	0,31	0,78
Кировабад	40,0	20,61	10,57	6,66	3,93	3,82	0,96	2,53	2,11	1,9	3,27	0,32	0,21	0,1	0,1
Физули	1,12	7,2	11,84	8,32	7,84	8,96	3,76	3,32	3,68	5,44	10,76	3,2	0,32	0,16	0,48
Станции	15—16	16—17	17—18	18—19	19—20	20—21	21—22	22—23	23—24	24—25	>25				
Баку	0,12	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Сумгаит	0,1	0,2	0,36	0,6	0,11	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
З. о. Култук	0,48	0,36	0,98	0,46	0,6	0,96	1,2	0,12	—	—	—	—	—	—	—
Сальяны	1,55	0,98	1,24	0,32	0,78	2,49	2,95	0,62	—	—	—	—	—	—	—
Сабирабад	0,21	0,1	0,1	0,32	0,21	0,42	0,21	0,1	0,31	0,15	—	—	—	—	—
Кировабад	0,64	1,28	0,8	0,32	0,96	3,04	4,16	0,64	0,32	0,16	—	—	—	—	—
Физули	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

точкам зоны, среднегодовые приведенные скорости которых равны среднегодовой неприведенной скорости на станции.

Расчеты велись исходя из предположения, что v_{min} для всех случаев равняется 3 м/сек, т. е. условию, которое возможно осуществить включением в систему ветродвигатель—машина специальных регуляторов [2].

Анализируя табл. 1 заметим, что по всем станциям чаще всего наблюдаются затишья продолжительностью 0,5 и менее суток; причем в зонах наиболее интенсивных ветров затишья такой продолжительности составляют до 90% и выше от общего числа наблюдаемых затиший.

Затишья продолжительностью в 1 сутки составляют для Прикаспийской зоны от 4 до 18%; в двое суток—от 1 до 3%; в трое суток—менее 1%, а на метеостанции Маштаги, например, затишья такой продолжительности за 5 лет не наблюдалось ни разу.

В Прикуринской зоне затишья продолжительностью менее суток наблюдаются реже, чем на Апшероне, и наоборот, здесь значительно чаще наблюдаются случаи, когда продолжительность безветрия длится трое, четверо и более суток. Свыше 7 суток затишья здесь очень редки, хотя по наблюдениям отдельных метеостанций, например, Сабирабата, один раз за 5 лет здесь наблюдалось затишье продолжительностью в 26 дней (в табл. 1 затишья продолжительностью более 10 дней, объединены в одной графе).

Горные районы характеризуются более продолжительными затишьями. По данным метеостанции Закаталы на долю затиший, продолжительностью трое и более суток, приходится свыше 52% от общего числа случаев. Вообще, продолжительность затиший в Закаталах достигает рекордного размера. За 5 лет здесь наблюдались затишья продолжительностью: 27 дней (3 случая), 29 дней (1 случай), 30 дней (2 случая), 31 день (2 случая), 33 дня (2 случая) и далее по одному случаю 36, 38, 45, 55, 58 и даже 75 и 82 дня.

В табл. 2 приведены повторяемости отношений по данным 7 метеостанций Азербайджана, представляющим все наиболее характерные зоны республики.

Даже беглый анализ табл. 2 позволяет убедиться в том, что для Апшерона и всей Прикаспийской зоны характерны небольшие величины отношения $\frac{t}{\tau}$. Почти 3/4 всех случаев приходится здесь на долю $\frac{t}{\tau}$ в интервале от 0 до 1, и 1/5 случаев—на долю $\frac{t}{\tau}$ в интервале от 1 до 2 $\frac{t}{\tau}$ в интервале от 2 до 20. Значение $\frac{t}{\tau}$ свыше 20 наблюдалось в этой зоне лишь один раз (по данным метеостанции Баку).

Кривые, характеризующие повторяемость отношений $\frac{t}{\tau}$ по данным метеостанций Баку, Сумгаит и з. о. Култук (рис. 1) мало отличаются друг от друга.

Подходит к ним кривая, построенная по данным метеостанции Кировабад, с той лишь разницей, что спад кривой здесь менее крут.

Кривая, построенная по данным метеостанции Сальяны, характеризуется наиболее пологим спуском слева направо. А для районов неперспективных с точки зрения ветроиспользования (метеостанции Сабирабат и Физули) вершины кривых смещаются вправо, так что

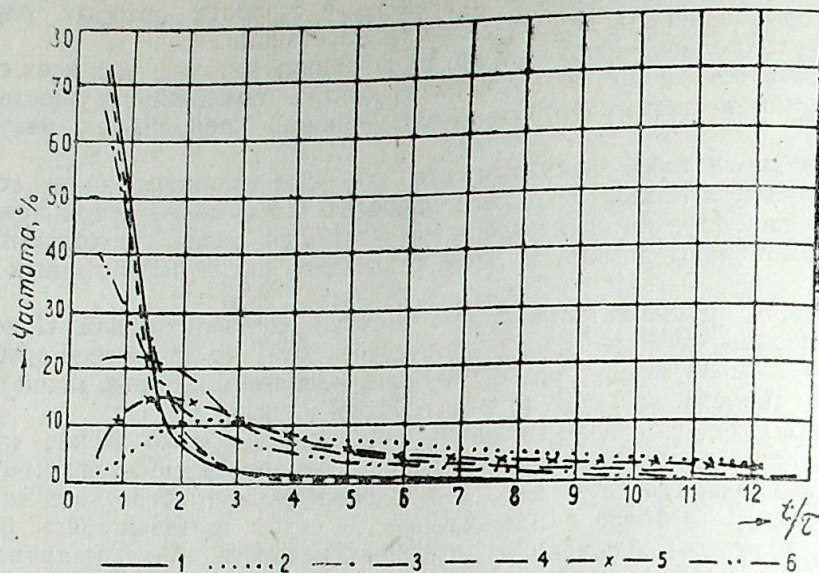


Рис. 1

Кривые повторяемости отношений $\frac{t}{\tau}$ по данным метеостанций:
1—Баку; 2—Сумгаит; 3—з. о. Култук; 4—Сальяны; 5—Сабирабад;
6—Кировабад; 7—Физули.

максимум значений $\frac{t}{\tau}$ приходится на интервале 1—2 и 2—3.

Чтобы установить наиболее выгодное отношение, воспользуемся, как это рекомендует Е. И. Фатеев [3], уравнением вероятности

$$P_i = \frac{(2i - 1) 100}{\alpha \Sigma n} \%,$$

где Σn —суммарное число случаев;

i —порядковый номер случаев.

Решая это уравнение для каждой станции и для каждой группы отношений табл. 2, находим вероятности каждого отношения.

Откладывая их на сетку Турбина, получим кривые, которые показывают сколько процентов штилевых периодов можно обеспечить энергией при заданном отношении для заданного района (рис. 2).

Анализ кривых показывает, что в районах со среднегодовыми скоростями ветра ниже 3 м/сек получить экономически выгодную ветросиловую установку, работающую с аккумуляторами, нельзя. И, наоборот, в районах со среднегодовыми скоростями ветра выше 3 м/сек строительство таких установок вполне экономично, так как в этом случае за счет энергии ветра можно обеспечить свыше 70% штилевых периодов. Например, для района со среднегодовой скоростью ветра 6,4 м/сек при отношении $\frac{t}{\tau} = 1,5$ и $v_{\min} = 3$ м/сек,

можно получить ветросиловую установку, которая обеспечит потребителя энергией за счет ветра до 83% и только 17% штилевых периодов потребует обеспечить за счет резервного неветрового двигателя.

При значениях $v_{\min}$, равных 4 и 5 м/сек, обеспеченность штилевых периодов за счет энергии ветра несколько понижается, в среднем не более чем на 5—10%.

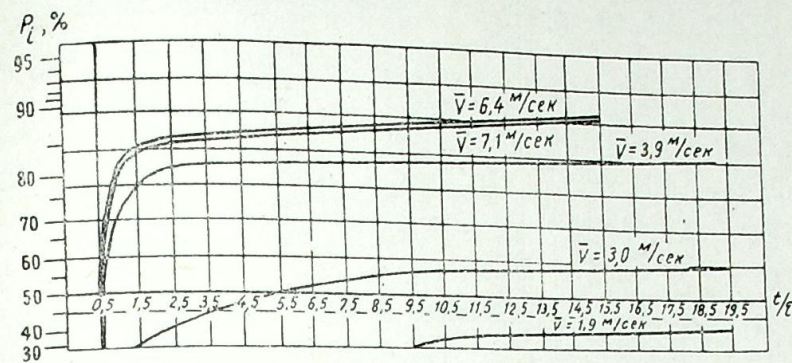


Рис. 2

С помощью кривых вероятности $\frac{t}{\tau}$ можно определить установленную мощность ветродвигателя и емкость аккумуляторных устройств для любой зоны республики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гриневич Г. А. Опыт разработки элементов малого ветроэнергетического кадастра Средней Азии и Казахстана. Изд. АН Узб. ССР. Ташкент, 1952.
2. Есьман В. И. Регулятор подачи насоса НБЗ-3. Труды ЭНИН АН Азерб. ССР, т. XI, 1953.
3. Фатеев Е. М. Методика определения параметров ветроэнергетики, расчетов ветросиловых установок. Изд. АН СССР, 1957.

В. И. Есьман

Азәрбајҹан ССР-дә күләјин енеркетик сакитлијинин давамәтмә мүддәтинин характеристикасы

ХҮЛАСӘ

Енеркетик сакитлик ады алтында фактики күләк сүр'етинин аз олдуғу дөвр нәзәрдә тутулур. Бу сүр'әт күләк мүһәррикини һәрәкәтә кәтирән күләјин минимал ишчи сүр'әтиндән $v_{\min}$ аз олур. Күләк чархынын системиндән вә күләк мүһәррикинин истигамәтиндән асылы олараг $v_{\min}$ 3, 4 вә 5 м/дәг ола биләр.

Гејд едилмәлидир ки, бу вә ја дикәр јердә енеркетик сакитлијин мүддәти нәинки күләк режиминдән, һабелә күләк мүһәррикинин конструксиясындан асылы олачагдыр.

Мәгаләдә метеорологи стансијаларда апарылмыш мүшаһидәләрин нәтичәләриндән бәһс едилир.

Н. Б. КАДИРОВ

К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МОМЕНТА ТРЕНИЯ И НАГРУЗОЧНОЙ СПОСОБНОСТИ ПОДШИПНИКОВ СКОЛЬЖЕНИЯ

В работе [1] дан вывод уравнения (35) распределения давлений в слое масла, протекающего через подшипники скольжения машин (рис. 1)

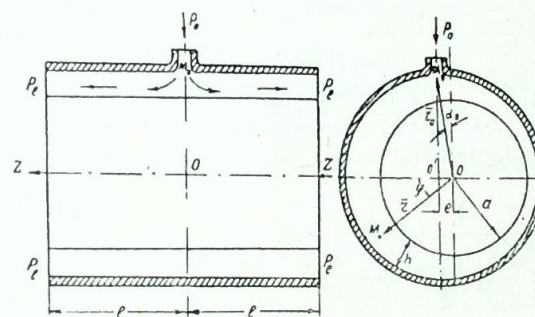


Рис.

Пренебрегая последним членом в первой части указанного уравнения, ввиду его незначительности по сравнению с остальными членами, мы получим практическую формулу для определения распределения давлений:

$$P = P_0 + \frac{P_l - P_0}{l^2} z^2 + \frac{l^2 - z^2}{l^2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left(\frac{\partial p}{\partial \varphi} \right)_{z=0} d\varphi, \quad (1)$$

где P_0 — давление масла при входе в подшипник;
 P_l — давление масла при выходе из подшипника;
 l — длина половины подшипника;
 r, φ и z — цилиндрическая система координат с началом в точке O — геометрическом центре цапфы вала, ось симметрии которого совпадает с осью z ;
 φ_0 — значение угла φ , образуемого радиусом-вектором $\overline{r_0}$ точки M_0 подвода масла к подшипнику с прямой OO' , от которой производится отсчет угла φ в направлении, обратном вращению часовой стрелки,

Н. Б. КАДИРОВ

К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МОМЕНТА ТРЕНИЯ И НАГРУЗОЧНОЙ СПОСОБНОСТИ ПОДШИПНИКОВ СКОЛЬЖЕНИЯ

В работе [1] дан вывод уравнения (35) распределения давлений в слое масла, протекающего через подшипники скольжения машин (рис. 1)

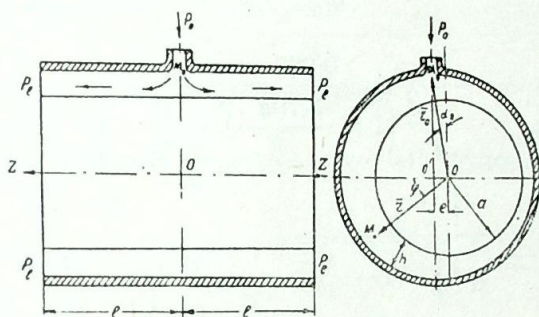


Рис.

Пренебрегая последним членом в первой части указанного уравнения, ввиду его незначительности по сравнению с остальными членами, мы получим практическую формулу для определения распределения давлений:

$$P = P_0 + \frac{P_l - P_0}{l^2} z^2 + \frac{l^2 - z^2}{l^2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left(\frac{\partial p}{\partial \varphi} \right)_{z=0} d\varphi, \quad (1)$$

где P_0 — давление масла при входе в подшипник;

P_l — давление масла при выходе из подшипника;

l — длина половины подшипника;

r, φ и z — цилиндрическая система координат с началом в точке O — геометрическом центре цапфы вала, ось симметрии которого совпадает с осью z ;

φ_0 — значение угла φ , образуемого радиусом-вектором $\overline{r_0}$ точки M_0 подвода масла к подшипнику с прямой OO' , от которой производится отсчет угла φ в направлении, обратном вращению часовой стрелки,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \varphi}\right)_{z=0} = \frac{6au\mu}{h^2} \cdot \frac{1-2h^2}{3a} - \frac{12a\mu Q_\varphi}{h^3} \cdot \frac{1-\frac{h}{2a}+\frac{h^2}{3a^2}}{1-\frac{h}{a}-\frac{h^2}{3a^2}}, \quad (2)$$

где h —радиальное расстояние между цапфой и подшипником, определяемое из выражения $h=\delta+e \cos \varphi$;
 δ —радиальный зазор между цапфой вала и подшипником при совпадении их центров (осей);
 e —смещение центра O цапфы вала от центра O' подшипника при работе машины,

$$Q_\varphi = \frac{au}{2} \cdot 0, \quad (3)$$

где a —радиус цапфы вала;
 u —окружная скорость точек цапфы, равная $a\omega$, а величина

$$\begin{aligned} & \frac{1}{9\sqrt{1-\frac{e^2}{\delta^2}}} + \frac{0,053}{\sqrt{\left(1+\frac{3,79a}{\delta}\right)^2-\frac{e^2}{\delta^2}}} - \frac{0,164}{\sqrt{\left(1-\frac{0,79a}{\delta}\right)^2-\frac{e^2}{\delta^2}}} + \\ & + \frac{1}{3\frac{\delta}{a}\left(1-\frac{e^2}{\delta^2}\right)\sqrt{1-\frac{e^2}{\delta^2}}} \\ \theta = & \dots - \frac{7}{18\sqrt{1-\frac{e^2}{\delta^2}}} - \frac{0,032}{\sqrt{\left(1+\frac{3,79a}{\delta}\right)^2-\frac{e^2}{\delta^2}}} - \frac{0,358}{\sqrt{\left(1-\frac{0,79a}{\delta}\right)^2-\frac{e^2}{\delta^2}}} + \\ & + \frac{1}{6\frac{\delta}{a}\left(1-\frac{e^2}{\delta^2}\right)\sqrt{1-\frac{e^2}{\delta^2}}} + \frac{2+\frac{e^2}{\delta^2}}{6\frac{\delta^2}{a^2}\left(1-\frac{e^2}{\delta^2}\right)^2\sqrt{1-\frac{e^2}{\delta^2}}}. \end{aligned}$$

Масло подводится к подшипнику в средней его точке M_0 и, увлекаясь вращающейся цапфой, одновременно движется в осевом направлении к обоим торцам подшипника, совершая при этом винтовое движение (рис. 1).

В работе [1] дан также вывод уравнения (32) [в третьем приближении] для определения проекции скорости частиц масла на направление касательной к координатной линии φ (к окружности цапфы), которое имеет вид:

$$V_\varphi = F_1(\varphi, r) + F_2(\varphi, r) \frac{\partial p}{\partial \varphi} + F_5(\varphi, r) + F_6(\varphi, r) \frac{l-2z}{2l}, \quad (4)$$

$$\text{где } F_1(\varphi, r) = u \cdot \frac{e^{Amh} \cdot e^{-Bm(r-a)} - e^{-Bmh} \cdot e^{Am(r-a)}}{e^{Amh} - e^{-Bmh}}, \quad (5)$$

$$F_2(\varphi, r) = \frac{a}{\mu} \cdot \frac{(1-e^{-Bmh})e^{Am(r-a)} + (e^{Amh}-1)e^{-Bm(r-a)}}{e^{Amh} - e^{-Bmh}} - \frac{a}{\mu}, \quad (6)$$

$$A = \frac{\sqrt{5-1}}{2}; \quad B = \frac{\sqrt{5+1}}{2};$$

$F_5(\varphi, r)$ и $F_6(\varphi, r)$ —неизвестные функции φ и r .

Пользуясь уравнениями (1) и (4), в данной работе дается вывод формул для определения момента трения и нагрузочной способности подшипников скольжения машин.

Момент трения, действующий на цапфу вала в подшипнике, можно определить из выражения:

$$M = -2 \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} a^2 p_{r\varphi} d\varphi = -2a^2 \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} p_{r\varphi} d\varphi, \quad (7)$$

где $p_{r\varphi}$ —проекция составляющей тензора напряжений поверхностных сил на направление касательной к координатной линии φ , которая определяется из выражения [2].

$$p_{r\varphi} = \mu \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r} \right) \Big|_{r=a},$$

где V_r —проекция скорости на радиальное направление;

μ —коэффициент вязкости смазочного масла.

Так как на поверхности цапфы вала $V_r=0$ и $V_\varphi=u$, то получаем:

$$p_{r\varphi} = \mu \left[\left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial r} \right)_{r=a} - \frac{u}{a} \right]. \quad (8)$$

Дифференцируя выражение (1), получим:

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{l^2-z^2}{l^2} \left(\frac{\partial p}{\partial \varphi} \right)_{z=0}$$

Подставляя это значение $\frac{\partial p}{\partial \varphi}$ в выражение (4), будем иметь:

$$\begin{aligned} V_\varphi = & F_1(\varphi, r) + F_2(\varphi, r) \frac{l^2-z^2}{l^2} \left(\frac{\partial p}{\partial \varphi} \right)_{z=0} + F_5(\varphi, r) + \\ & + F_6(\varphi, r) \frac{l-2z}{2l}. \end{aligned} \quad (10)$$

Для определения неизвестных функций $F_5(\varphi, r)$ и $F_6(\varphi, r)$ воспользуемся следующим дополнительными условиями [1].

$$\text{при } z=0 \quad V_\varphi = (V_\varphi)_{z=0} = F_1(\varphi, r) + F_2(\varphi, r) \left(\frac{\partial p}{\partial \varphi} \right)_{z=0}$$

и

$$\text{при } z=0 \quad \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} = \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right)_{z=0} = 0$$

Первое условие, справедливое для бесконечно длинного подшипника, получается в результате отсутствия течения масла в направлении оси подшипника конечной длины.

Второе условие вытекает из того факта, что функция V_φ должна быть непрерывной и симметричной относительно координатной плоскости $\varphi=0$.

Подставляя указанные выше дополнительные условия в уравнение (10), находим:

$$F_5(\varphi, r) = 0 \text{ и } F_6(\varphi, r) = 0$$

Таким образом, в случае распределения давлений в слое масла, протекающего через подшипник скольжения машин, по закону квадратичной параболы, что вполне допустимо при практических расчетах, получаем следующее уравнение распределения скоростей по направлению касательных к координатной линии φ :

$$V_{\varphi} = F_1(\varphi, r) + F_2(\varphi, r) \frac{l^2 - z^2}{l^2} \left(\frac{\partial p}{\partial \varphi} \right)_{z=0} \quad (11)$$

Из этого уравнения находим:

$$\left(\frac{\partial V_{\varphi}}{\partial r} \right)_{r=a} = \frac{\partial F_1(\varphi, r)}{\partial r} \Big|_{r=a} + \frac{\partial F_2(\varphi, r)}{\partial r} \Big|_{r=a} \cdot \frac{l^2 - z^2}{l^2} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial \varphi} \right)_{z=0}$$

Подставляя в это выражение значения функций $F_1(\varphi, r)$ и $F_2(\varphi, r)$ из соответствующих им выражений (5) и (6) и разложив величины $e^{A\mu a}$ и $e^{-B\mu a}$ в ряд по степеням $(A\mu a)$ и $(-B\mu a)$, после ряда алгебраических преобразований и упрощений будем иметь:

$$\left(\frac{\partial V_{\varphi}}{\partial r} \right)_{r=a} = -u \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{2a} + \frac{5h}{6a^2} \right) - \frac{h}{2a\mu} \cdot \frac{l^2 - z^2}{l^2} \left(\frac{\partial p}{\partial \varphi} \right)_{z=0}$$

Подставляя далее это значение в выражение (8), с учетом (2) получим:

$$p_{r\varphi} = -\mu u \left(\frac{1}{h} + \frac{5h}{6a^2} \right) - \frac{3\mu u}{2a} - \frac{l^2 - z^2}{l^2} \left(\frac{3\mu u}{h} \cdot \frac{1 - \frac{2h}{3a}}{1 - \frac{h}{a} - \frac{h^2}{3a^2}} + \frac{6\mu Q_{\varphi}}{h_2} \cdot \frac{1 - \frac{h}{2a} + \frac{h^2}{3a^2}}{1 - \frac{h}{a} - \frac{h^2}{3a^2}} \right) \dots \quad (12)$$

Подставляя, наконец, это значение $p_{r\varphi}$ в выражение (7), после вычисления интегралов, входящих в его правую часть с учетом выражения (3), будем иметь следующую формулу для определения момента трения в подшипнике скольжения машин:

$$M = 2\pi a l \mu \left[3 + \frac{5}{3} \frac{\delta}{a} + \frac{2(3-\theta)}{a \sqrt{1 - \frac{e^2}{\delta^2}}} - \frac{2,44 - 0,528\theta}{a \sqrt{\left(1 + \frac{3,79a}{\delta}\right)^2 - \frac{e^2}{\delta^2}}} \right] - 2\pi a l \mu \left[\frac{1,56 - 2,532\theta}{a \sqrt{\left(1 - \frac{0,79a}{\delta}\right)^2 - \frac{e^2}{\delta^2}}} - \frac{4\theta}{a^2 \left(1 - \frac{e^2}{\delta^2}\right) \sqrt{1 - \frac{e^2}{\delta^2}}} \right] \quad (13)$$

Перейдем к определению нагрузочной способности подшипника. Найдем сначала проекцию главного вектора сил гидродинамического воздействия на цапфу смазочного масла на направление координатной линии r при $\varphi=0$ (на ось $00'$) из выражения:

$$Pr_{\varphi=0} = 2 \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} a p_{rr} \cos \varphi d\varphi - 2 \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} a p_{r\varphi} \sin \varphi d\varphi, \quad (14)$$

где P_{rr} — проекция составляющей тензора напряжений поверхностных сил на направление координатной линии r , которая определяется из выражения [1]:

$$p_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial V_r}{\partial r} = -p$$

Подставляя это значение p_{rr} , а также значение $p_{r\varphi}$ из выражения (12) в выражение (14), после вычисления интегралов, входящих в его правую часть, получим:

$$Pr_{\varphi=0} = 0$$

Определим теперь проекцию главного вектора сил гидродинамического воздействия смазочного масла на цапфу вала на направление координатной линии r при $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ из выражения:

$$F_{r\varphi=\frac{3\pi}{2}} = 2a \int_0^1 dz \left[- \int_0^{2\pi} p_{rr} \sin \varphi d\varphi - \int_0^{2\pi} p_{r\varphi} \cos \varphi d\varphi \right]. \quad (16)$$

Вычислим сначала значение интеграла, входящего в первый член правой части этого выражения, который можно представить в виде:

$$- \int_0^{2\pi} p_{rr} \sin \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} p \sin \varphi d\varphi = -p \cos \varphi \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \cos \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \cos \varphi d\varphi$$

Подставляя в это выражение значение $\frac{\partial p}{\partial \varphi}$ из выражения (9), после вычисления интеграла с учетом (2) получим:

$$- \int_0^{2\pi} p_{rr} \sin \varphi d\varphi = \frac{l^2 - z^2}{l^2} \left\{ (36a^3\mu Q_{\varphi} C_1 - 18a^3\mu B) \left(\frac{2\pi}{e} - \frac{2\pi\delta}{e\sqrt{\delta^2 - e^2}} \right) + (36a^3\mu Q_{\varphi} D_1 - 18a^3\mu C) \left[\frac{2\pi}{e} - \frac{2\pi(\delta + 3,79a)}{e\sqrt{(\delta + 3,79a)^2 - e^2}} \right] + (36a^3\mu Q_{\varphi} E_1 - 18a^3\mu D) \left[\frac{2\pi}{e} - \frac{2\pi(\delta - 0,79a)}{e\sqrt{(\delta - 0,79a)^2 - e^2}} \right] - (36a^3\mu Q_{\varphi} B_1 - 18a^3\mu A) \frac{2\pi e}{(\delta^2 - e^2)\sqrt{\delta^2 - e^2}} - 36a^3\mu Q_{\varphi} A_1 \frac{3\pi\delta e}{(\delta^2 - e^2)^2\sqrt{\delta^2 - e^2}} \right\}, \quad (17)$$

$$\text{где: } A = -\frac{1}{3a^2}, \quad B = -\frac{1}{9a^2}, \quad C = -\frac{0,0536}{a^3}, \quad D = \frac{0,1646}{a^3},$$

$$A_1 = -\frac{1}{3a^2}, \quad B_1 = -\frac{1}{6a^3}, \quad C_1 = -\frac{7}{18a^4}, \quad D_1 = \frac{0,032}{a^4}; \quad E_1 = \frac{0,358}{a^4}.$$

Аналогичным образом вычислив значение интеграла, входящего в состав второго члена правой части выражения (16), будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} P_{r\varphi} \cos \varphi d\varphi = & -\frac{5\nu u}{6a^2} + \frac{l^2 - z^2}{l^2} \left\{ \left(-\frac{l^2}{l^2 - z^2} \nu u + 9\nu u a^2 A' - \right. \right. \\ & \left. \left. - 18\nu a^2 Q_{\varphi} B_1' \right) \left[\frac{2\pi}{e} - \frac{2\pi\delta}{e\sqrt{\delta^2 - e^2}} \right] + \right. \\ & + (9\nu u a^2 B_1' - 18\nu a^2 Q_{\varphi} C_1') \left[\frac{2\pi}{e} - \frac{2\pi(\delta + 3,79a)}{e\sqrt{(\delta + 3,79a)^2 - e^2}} \right] + \\ & + (9\nu u a^2 C_1' - 18\nu a^2 Q_{\varphi} D_1') \left[\frac{2\pi}{e} - \frac{2\pi(\delta - 0,79a)}{e\sqrt{(\delta - 0,79a)^2 - e^2}} \right] + \\ & \left. + 18\nu a^2 Q_{\varphi} A_1' \frac{2\pi e}{(\delta^2 - e^2)\sqrt{\delta^2 - e^2}} \right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\text{где: } A' = -\frac{1}{3a^2}, \quad B' = \frac{0,203}{a^2}, \quad C' = \frac{0,1303}{a^2},$$

$$A_1' = -\frac{1}{3a^2}, \quad B_1' = -\frac{1}{6a^3}, \quad C_1' = -\frac{0,044}{a^3}, \quad D_1' = \frac{0,21}{a^3}$$

Подставляя эти найденные значения интегралов (17) и (18) в правую часть выражения (16), после его интегрирования по переменной величине z с учетом выражения (3) получим окончательную формулу для определения главного вектора сил гидродинамического воздействия смазочного масла на цапфу вала:

$$\begin{aligned} P = P_r \Big|_{\varphi = \frac{3\pi}{2}} = & \frac{8\pi\nu u}{3 \cdot \frac{e}{\delta} \cdot \frac{\delta}{a}} \left\{ \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{e^2}{\delta^2}}} \right) \left(\frac{13}{2} - \frac{17}{2} \theta \right) + \right. \\ & + \left[1 - \frac{1 + \frac{3,79a}{\delta}}{\sqrt{\left(1 - \frac{0,79a}{\delta} \right)^2 - \frac{e^2}{\delta^2}}} \right] \cdot (0,972\theta - 0,873) + \\ & + \left[1 - \frac{1 - \frac{0,79a}{\delta}}{\sqrt{\left(1 - \frac{0,79a}{\delta} \right)^2 - \frac{e^2}{\delta^2}}} \right] \cdot (8,34\theta - 4,13) - \\ & - \frac{6 \frac{e^2}{\delta^2} (1 - \theta)}{\frac{\delta}{a} \left[1 - \frac{e^2}{\delta^2} \right] \sqrt{1 - \frac{e^2}{\delta^2}}} + \frac{9 \frac{e^2}{\delta^2} \theta}{\frac{\delta^2}{a^2} \cdot \left[1 - \frac{e^2}{\delta^2} \right]^2 \sqrt{1 - \frac{e^2}{\delta^2}}} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{15}{12} \cdot \frac{\delta^2}{a^2} \cdot \frac{e^2}{\delta^2} \Big\}. \quad (19)$$

Выражение (15) показывает, что главный вектор сил гидродинамического воздействия смазочного масла на цапфу вала перпендикулярен к прямой $00'$, совпадающей с осью r при $\varphi = 0$.

Отсюда следует, что при работе машины цапфа ее вала в подшипнике занимает такое положение, при котором прямая $00'$ будет перпендикулярна к направлению равнодействующей Q внешней нагрузки подшипника, так как последняя должна быть уравновешена с главным вектором P гидродинамического воздействия масла на цапфу вала, т. е.

$$Q = P = P_r \Big|_{\varphi = \frac{3\pi}{2}}$$

Если равнодействующая внешних сил, действующих на цапфу вала, направлена перпендикулярно вниз, что обычно имеет место на практике, то прямая $00'$ при работе машины займет горизонтальное положение.

Следует отметить, что если исключить величину e из выражений (13) и (19), то можно получить практическую формулу для определения момента трения в подшипниках скольжения в зависимости от нагрузки этих подшипников.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кадиров Н. Б. „Изв. АН Азерб. ССР“, 1960, № 11.
2. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. I и II. ОГИЗ, Гостехиздат, 1948.
3. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. II. Госиздат, 1951.
4. „Трение и износ в подшипниках“, сб. XIII. Из. АН СССР, 1959.

Н. Б. Гадиров

Сүрүшән јастыгларын сүртүнмә моменти вә јүкләнмә габилијјәтинин тәјјини мәсәләсинә даир

ХУЛАСӘ

Сүрүшән јастыгларын сүртүнмә моменти вә јүкләнмә габилијјәтинин тапылмасы мәсәләси һәм нәзәри вә һәм дә тәчрүби әһәмијјәтә маликдир ки, бу да сүрүшән јастыгларын дүзкүн һесаблинамасы вә онларын оптимал иш режиминин тапылмасы үчүн зәруридир.

Мәгаләдә сүрүшән јастыгларын сүртүнмә моменти вә јүкләнмә габилијјәтинин тапылмасы үчүн конкрет формуллар чыхарылыр.

Сүрүшән јастыглардакы сүртүнмә моменти ашағыдакы фүрмулдан тапыла биләр.

$$\begin{aligned} M = 2\pi a l \nu \Bigg[& 3 + \frac{5}{3} \cdot \frac{\delta}{a} + \frac{\delta}{a} \sqrt{1 - \frac{e^2}{\delta^2}} - \frac{2,44 - 0,528\theta}{\frac{\delta}{a} \sqrt{\left(1 + \frac{3,79a}{\delta} \right)^2 - \frac{e^2}{\delta^2}}} \Bigg] - \\ & - 2\pi a l \nu \Bigg[\frac{1,56 - 2,532\theta}{\frac{\delta}{a} \sqrt{\left(1 - \frac{0,79a}{\delta} \right)^2 - \frac{e^2}{\delta^2}}} - \frac{4\theta}{\frac{\delta^2}{a^2} \left(1 - \frac{e^2}{\delta^2} \right) \sqrt{1 - \frac{e^2}{\delta^2}}} \Bigg] \end{aligned}$$

Бурада:

a —валын сапфасынын радиусу;

l —јастығын узунлугунун жарысы;

u —сапфанын чеврэви сүр'әти;

μ —јастыгдан ахыб кечән јағын динамик өзлүлүү;

δ —валын сапфасы илэ јастыг арасында галан радиал бошлугун өлчүсү;

e —машын ишлэјаркән онун валынын сапфасы мәркәзинин јастығын. мәркәзиндән олан узаглашмасыдыр.

Јухарыдакы формула дахил олан θ кәмијјәти ашағыдакы ифадә-дән тапылыр:

$$\theta = \frac{\frac{1}{9\sqrt{1-\frac{e^2}{\delta^2}}} + \frac{0,053}{\sqrt{\left(1+\frac{3,79a}{\delta}\right)^2 - \frac{e^2}{\delta^2}}} - \frac{0,164}{\sqrt{\left(1-\frac{0,79a}{\delta}\right)^2 - \frac{e^2}{\delta^2}}} + \frac{1}{3\frac{\delta}{a}\left(1-\frac{e^2}{\delta^2}\right)\sqrt{1-\frac{e^2}{\delta^2}}}}{\frac{7}{18\sqrt{1-\frac{e^2}{\delta^2}}} - \frac{0,032}{\sqrt{\left(1+\frac{3,79a}{\delta}\right)^2 - \frac{e^2}{\delta^2}}} - \frac{0,358}{\sqrt{\left(1-\frac{0,79a}{\delta}\right)^2 - \frac{e^2}{\delta^2}}} + \frac{1+\frac{e^2}{\delta^2}}{6\frac{\delta}{a}\left(1-\frac{e^2}{\delta^2}\right)\sqrt{1-\frac{e^2}{\delta^2}}} - \frac{1+\frac{e^2}{\delta^2}}{6\frac{\delta^2}{a^2}\left(1-\frac{e^2}{\delta^2}\right)^2\sqrt{1-\frac{e^2}{\delta^2}}}}$$

Сүрүшән јастығын јүкләнмә габиліјјәти исә ашағыдакы формулдан тапыла биләр:

$$P = \frac{8\pi l \mu u}{3 \cdot \frac{e}{\delta} \cdot \frac{\delta}{a}} \left\{ \left(\frac{13}{2} - \frac{17}{2} \theta \right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{e^2}{\delta^2}}} \right) + (0,9720 - 0,873) \left[1 - \frac{1+\frac{3,79a}{\delta}}{\sqrt{\left(1+\frac{3,79a}{\delta}\right)^2 - \frac{e^2}{\delta^2}}} \right] + (8,340 - 4,13) \left[1 - \frac{1-\frac{0,79a}{\delta}}{\sqrt{\left(1-\frac{0,79a}{\delta}\right)^2 - \frac{e^2}{\delta^2}}} \right] - \frac{6(1-\theta)\frac{e^2}{\delta^2}}{\frac{\delta}{a}\left(1-\frac{e^2}{\delta^2}\right)\sqrt{1-\frac{e^2}{\delta^2}}} + \frac{90\frac{e^2}{\delta^2}}{\frac{\delta^2}{a^2}\left[1-\frac{e^2}{\delta^2}\right]^2\sqrt{1-\frac{e^2}{\delta^2}}} + \frac{15}{12} \cdot \frac{\delta^2}{a^2} \cdot \frac{e^2}{\delta^2} \right\}$$

М. Т. АБАСОВ, А. М. КУЛИЕВ

О РАЗРАБОТКЕ ГАЗОНЕФТЯНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ НА ИСТОЩЕНИЕ

В [1—6] приведены некоторые гидродинамические расчетные формулы разработки газонефтяных месторождений при различных условиях.

В настоящей статье приводятся результаты расчетов по некоторым из указанных формул [2]. Рассматривается разработка газонефтяных месторождений на истощение при отсутствии связи залежи с законтурной водяной областью без учета реальных свойств нефти и газа. Напомним, что при решении этих задач для простоты принималось, что вытеснение одного флюида другим происходит поршневым способом с учетом опережающего проникновения газа из одной области в другую, а начальные нефтенасыщенность нефтяной и газонасыщенность газовой областей залежи равны единице. Указанные задачи решались применением методов материального баланса и последовательной смены стационарных состояний.

Расчеты проводились совместно с сотрудниками Вычислительного центра Академии наук Азербайджанской ССР Ш. Гаджиевым, Ю. Османовым и А. Сафаровым на электронной счетно-вычислительной машине БЭСМ-2 Вычислительного центра Академии наук СССР. Исходные обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка решались методом Рунге-Кутты, обеспечивающим большую точность результатов при решении подобных задач.

Расчеты проводились для следующих условий:

$$\Omega_{г.0} = 75 \cdot 10^6 \text{ м}^3, \quad P_0 = 400 \text{ атм}, \quad \alpha = 0,40, \\ \epsilon = 0,04, \quad \alpha = 0,016, \quad \rho_0 = 1,$$

где $\Omega_{г.0}$ — начальный объем порового пространства газовой части залежи;

P_0 — начальное пластовое давление;

α — объемный коэффициент газа в нефти;

ϵ — отношение вязкостей газа и нефти;

$\alpha = \kappa \epsilon$.

Запасы газа газовой шапки при этих условиях составляют $30 \cdot 10^9 \text{ м}^3$.

Для установления влияния запасов нефти — $\Omega_{н.0}$, темпов отбора газа — q_g и нефти — q_n на основные показатели разработки рассматриваются различные значения указанных величин.

Значения q_n принимались:

- I вариант — 0
- II — $0,365 \cdot 10^6 \text{ м}^3/\text{год}$ ($1000 \text{ м}^3/\text{сутки}$)

III вариант — $1,095 \cdot 10^6 \text{ м}^3/\text{год}$ (3000 $\text{м}^3/\text{сутки}$)
 IV — $2,19 \cdot 10^6$ " (6000 $\text{м}^3/\text{сутки}$)
 V — $3,65 \cdot 10^6$ " (10000 $\text{м}^3/\text{сутки}$)
 VI — здесь отбор нефти устанавливался исходя из условия неподвижности газонефтяного контакта в соответствии с заданным отбором газа.

Значения q_r и $Q_{н.о.}$ соответственно, принимались: 5,0; 2,5 и 1,25 млрд м^3 газа в год и 6; 35 и 60 млн м^3 нефти. В табл. 1 приводятся значения

$$\bar{Q}_1 = \frac{Q_{г.о} P_0}{Q_{н.о} P_{ам}} \text{ и } \bar{Q}_2 = \frac{Q_{г.о} P_0 + \alpha P_0 Q_{н.о}}{Q_{н.о} P_{ам}}$$

для рассмотренных $Q_{н.о.}$

Таблица 1

$Q_{н.о}$ млн м^3	$\bar{Q}_1$	$\bar{Q}_2$
6	5000	5160
35	857,143	1017,143
60	500	660

В табл. 2 приведены значения $\bar{q} = \frac{q_r}{q_n}$ для первых пяти вариан-

Таблица 2

$q_n \backslash q_r$	5,0	2,5	1,25
I	∞	∞	∞
II	13698,63	6849,315	3424,6575
III	4566,21	2283,105	1141,5525
IV	2283,105	1141,5525	570,77625
V	1369,863	684,9315	342,46575

тов по отбору нефти

В табл. 3, 4 даны, соответственно, значения

$$\Pi_1 = \frac{\bar{q}}{\bar{Q}_1} \text{ и } \Pi_2 = \frac{\bar{q}}{\bar{Q}_2}$$

В табл. 4 выделены те случаи, расчеты по которым нам удалось довести до конца в 1961 г. Для наглядности в табл. 5 сведены все рассмотренные в 1961 г. случаи в обозначениях $Q_{н.о.}$, q_r и q_n .

Результаты расчетов по всем рассмотренным в 1961 г. случаям приведены на рис. 1—7. Для удобства рассмотрения результатов расчета случаи, соответствующие одинаковым значениям q_r (при всех значениях $Q_{н.о.}$ и q_n), объединяются в двух рисунках: на первом приведены значения падения пластового давления во времени $P(t)$ и изменение газового фактора во времени $\Gamma(t)$, а на втором — изменения во времени значения нефтенасыщенности $\rho(t)$ и объема нефтяной части пласта $Q_n(t)$.

Так, например, на рис. 1—3 даны значения $P(t)$ и $\Gamma(t)$ при отборах газа, соответственно 5; 2,5; 1, 2,5 млрд $\text{м}^3/\text{год}$, а на рис. 4—6 — $\rho(t)$ и $Q_n(t)$ при тех же отборах газа, но выделяются в отдельности различные значения запасов нефти.

Таблица 3

Q_1	q_n	q_r в млрд $\text{м}^3/\text{год}$		
		5,0	2,5	1,25
5000	I	∞	∞	∞
	II	2,739726	1,369863	0,6849314
	III	0,913242	0,456621	0,2283105
	IV	0,456621	0,2283105	0,11415525
	V	0,2739726	0,1369863	0,06849315
857,143	I	∞	∞	∞
	II	15,981732	7,9908661	3,99543305
	III	5,3272441	2,66362205	1,331811025
	IV	2,663622	1,331811	0,6659055
	V	1,5981732	0,7990866	0,3995433
500	I	∞	∞	∞
	II	27,39726	13,69863	6,849314
	III	9,13242	4,56621	2,283105
	IV	4,56621	2,283105	1,1415525
	V	2,739726	1,3699863	0,6849315

Таблица 4

Q_2	q_n	q_r в млрд $\text{м}^3/\text{год}$		
		5,0	2,5	1,25
5160	I	∞	∞	∞
	II	2,6547732	1,3273866	0,6636933
	III	0,88492441	0,442462205	0,2212311025
	IV	0,4424622	0,2212311	0,11061555
	V	0,26547732	0,13273866	0,06636933
1017,2	I	∞	∞	∞
	II	13,466997	6,7334985	3,36674925
	III	4,4889992	2,2444996	1,1222498
	IV	2,2444996	1,1222498	0,5611249
	V	1,3466997	0,67334985	0,336674925
660	I	∞	∞	∞
	II	20,7555	10,37775	5,188875
	III	6,9185	3,45925	1,729625
	IV	3,45925	1,729625	0,8648125
	V	2,07555	1,037775	0,5188875

При $Q_{н.о.}$ равном $6 \cdot 10^6$ и $35 \cdot 10^6 \text{ м}^3$ нефти, расчеты были приостановлены при суммарном отборе $30 \cdot 10^9 \text{ м}^3$ газа, что соответствует пластовым давлениям в первом случае запасов нефти 22—25 атм, а во втором — 54—63 атм.

Таблица 5

$\Omega_{н.о}$ млн m^3	q_n	q_r млрд m^3 /год
6	I	5 и 2,5
	II	5 и 2,5
	VI	5 и 2,5
35	I	5; 2,5 и 1,25
	II	5; 2,5 и 1,25
	III	5; 2,5 и 1,25
	IV	5
	V	5
	VI	5; 2,5 и 1,25
60	I	5; 2,5 и 1,25
	II	5; 2,5 и 1,25
	III	5; 2,5 и 1,25
	IV	5; 2,5
	V	5
	VI	5; 2,5 и 1,25

Таблица 6

$\Omega_{н.о}$, m^3	Вариант	$q_r = 5 \cdot 10^9$ m^3 /год		$q_r = 2,5 \cdot 10^9$ m^3 /год		$q_r = 1,25 \cdot 10^9$ m^3 /год	
		t , годы	η (t)	t , годы	η (t)	t , годы	η (t)
$6 \cdot 10^6$	I	5,25	0	10,5	0	—	—
	II	5,25	0,32	10,5	0,64	—	—
	VI	5,25	0,31	10,5	0,31	—	—
$35 \cdot 10^6$	I	6,0	0	12	0	24	0
	II	6,0	0,062	12	0,124	24	0,248
	III	6,0	0,186	12,0	0,372	24,0	0,744
	IV	6,0	0,372	—	—	—	—
	V	6,0	0,62	—	—	—	—
	VI	6,0	0,31	12,0	0,31	24,0	0,31
$60 \cdot 10^6$	I	6,7	0	13,4	0	—	—
	II	6,7	0,041	13,4	0,082	—	—
	III	6,7	0,123	13,4	0,246	—	—
	IV	6,7	0,246	13,4	0,492	—	—
	V	6,7	0,41	—	—	—	—
	VI	6,7	0,31	13,4	0,31	—	—

А при $\Omega_{н.о} = 60 \cdot 10^6$ m^3 нефти и отборах газа в $5 \cdot 10^9$ и $2,5 \cdot 10^9$ m^3 /год расчеты были приостановлены при суммарном отборе $35 \cdot 10^9$ m^3 газа, а при $q_r = 1,25 \cdot 10^9$ m^3 /год — $30 \cdot 10^9$ m^3 газа. В первых двух случаях годового отбора газа пластовые давления оказались равными 40—47 атм, а в третьем — 76—95 атм.

В табл. 6 приводятся значения коэффициентов нефтеотдачи всех рассмотренных случаев при пластовом давлении, равном примерно 60 атм, а в табл. 7 — при суммарном отборе в $30 \cdot 10^9$ m^3 газа.

Следует отметить, что начало опережающего проскальзывания газа из одной области в другую соответствует в нашем случае значению

нефтенасыщенности (в пределах объема Ω_n) — 0,853, что и указывается на рис. 1 — 6 маленькими черными кружками.

В пределах рассмотренных условий и вариантов разработки, в дополнение к ранее сделанным нами выводам [1, 3, 4], можно добавить следующее:

1) при $q_n = 0$ падение пластового давления во времени во всех случаях происходит строго по прямой линии, а с увеличением q_n зависимость $P(t)$ начинает несколько отклоняться от прямой. Это отклонение при прочих равных условиях усиливается с уменьшением q_r и увеличением $\Omega_{н.о}$.

Таблица 7

$\Omega_{н.о}$, m^3	Вариант	$q_r = 5,0 \cdot 10^9$ m^3 /год		$q_r = 2,5 \cdot 10^9$ m^3 /год		$q_r = 1,25 \cdot 10^9$ m^3 /год		Конечное пластовое давление P , атм
		t , годы	η	t , годы	η	t , годы	η	
$6 \cdot 10^6$	I	6	0	12	0	24	—	13
	II		0,36		0,72		—	12
	VI		0,37		0,37		—	11
$35 \cdot 10^6$	I	6	0	12	0	24	0	63
	II		0,162		0,124		0,248	62
	III		0,186		0,372		0,744	60
	IV		0,362		—		—	58
	V		0,62		—		—	55
	VI		0,31		0,31		0,31	58
$60 \cdot 10^6$	I	6	0	12	0	24	0	97
	II		0,036		0,072		0,144	96
	III		0,108		0,216		0,432	93
	IV		0,216		0,432		—	90
	V		0,36		—		—	86
	VI		0,28		0,28		0,28	88

2) при одинаковых запасах нефти, независимо от направления перемещения газонефтяного контакта, падение пластового давления во времени в основном определяется отборами газа и сравнительно мало зависит от величины q_n .

Так, например, при $q_r = 1,25 \cdot 10^9$ m^3 /год и $\Omega_{н.о} = 60 \cdot 10^6$ m^3 максимальная разница в значениях пластового давления во времени между крайними вариантами отбора нефти (I—III) не превышает 19 атм, а при $q_r = 5 \cdot 10^9$ m^3 /год и тех же самых условиях эта разница составляет 14 атм.

3) ясно, что при одинаковых $\Omega_{н.о}$ и q_r с повышением отборов нефти темпы падения пластового давления несколько увеличиваются.

4) с уменьшением отборов газа при одинаковых $\Omega_{н.о}$ влияние величины q_n на падение пластового давления увеличивается.

Так, например, при $\Omega_{н.о} = 60 \cdot 10^6$ m^3 нефти максимальная разница в значениях пластового давления во времени между I и III вариантами отборов нефти при $q_r = 5 \cdot 10^9$ m^3 /год газа составляет примерно 6 атм, а при $q_r = 1,25 \cdot 10^9$ m^3 /год газа — 18 атм.

5) совершенно ясно, что с уменьшением запасов нефти будет уменьшаться и влияние q_n на зависимость пластового давления от времени.

6) при одинаковых отборах газа и нефти, с повышением запасов нефти, темпы падения пластового давления уменьшаются.

Так, например, при $q_r = 2,5 \cdot 10^9 \text{ м}^3/\text{год}$ и III варианте отбора нефти разница в пластовых давлениях залежей с запасами нефти в $60 \cdot 10^6$ и $35 \cdot 10^6 \text{ м}^3$ в результате двенадцатилетней разработки составляет примерно 32 атм.

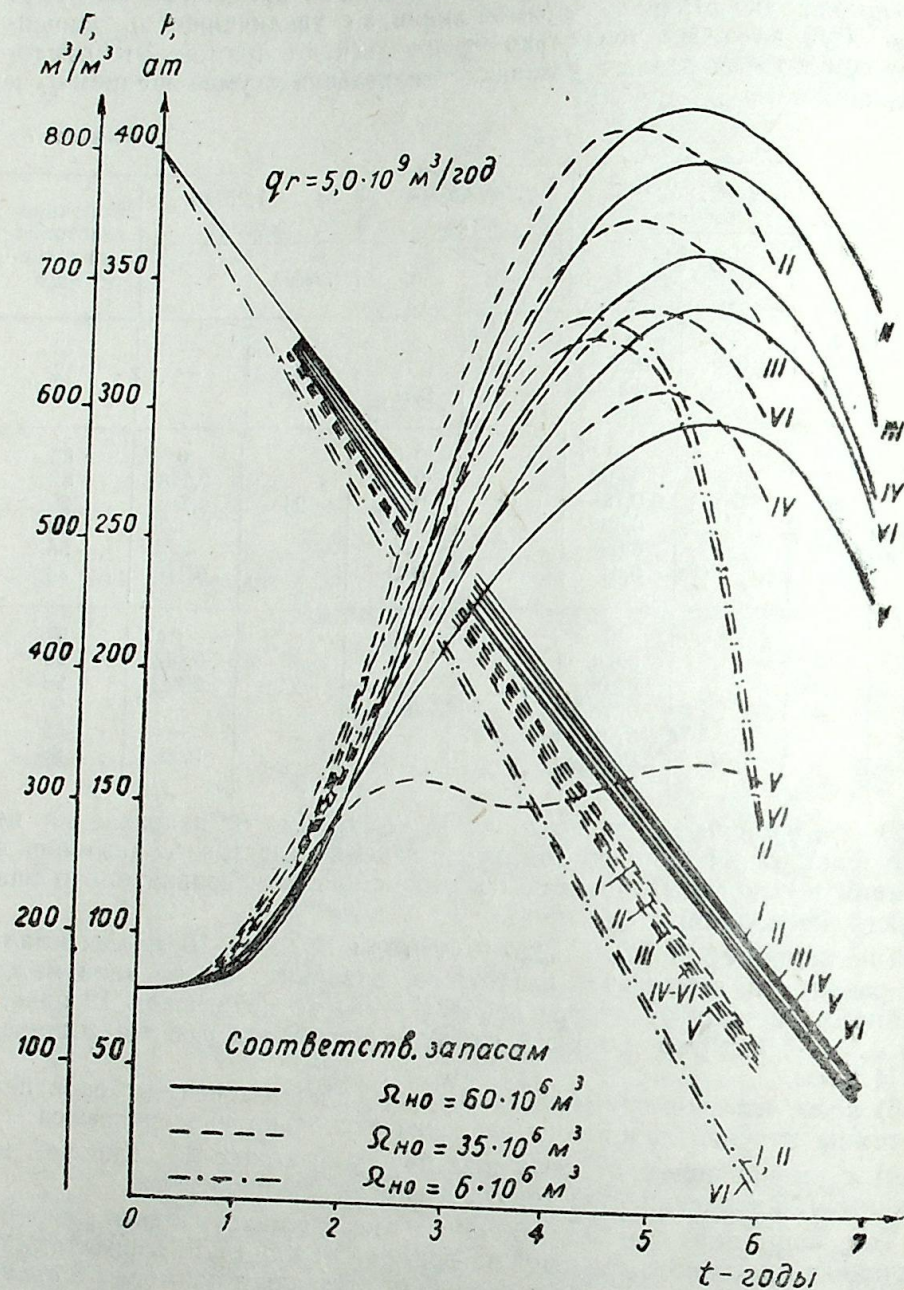


Рис. 1

7) зависимости $\rho(t)$ для всех значений q_r при одинаковых запасах нефти ($\Omega_{\text{н.о}} = 35 \cdot 10^6$ и $60 \cdot 10^6 \text{ м}^3$) и отборах газа пересекаются в одной точке, характерной тем, что до этого момента времени значения нефте-

насыщенности оказываются большими при малых отборах нефти, чем при больших, а в последующем, наоборот, значения нефтенасыщенности оказываются меньшими при малых отборах нефти. Во второй период влияние q_r на значение нефтенасыщенности больше, чем в первый.

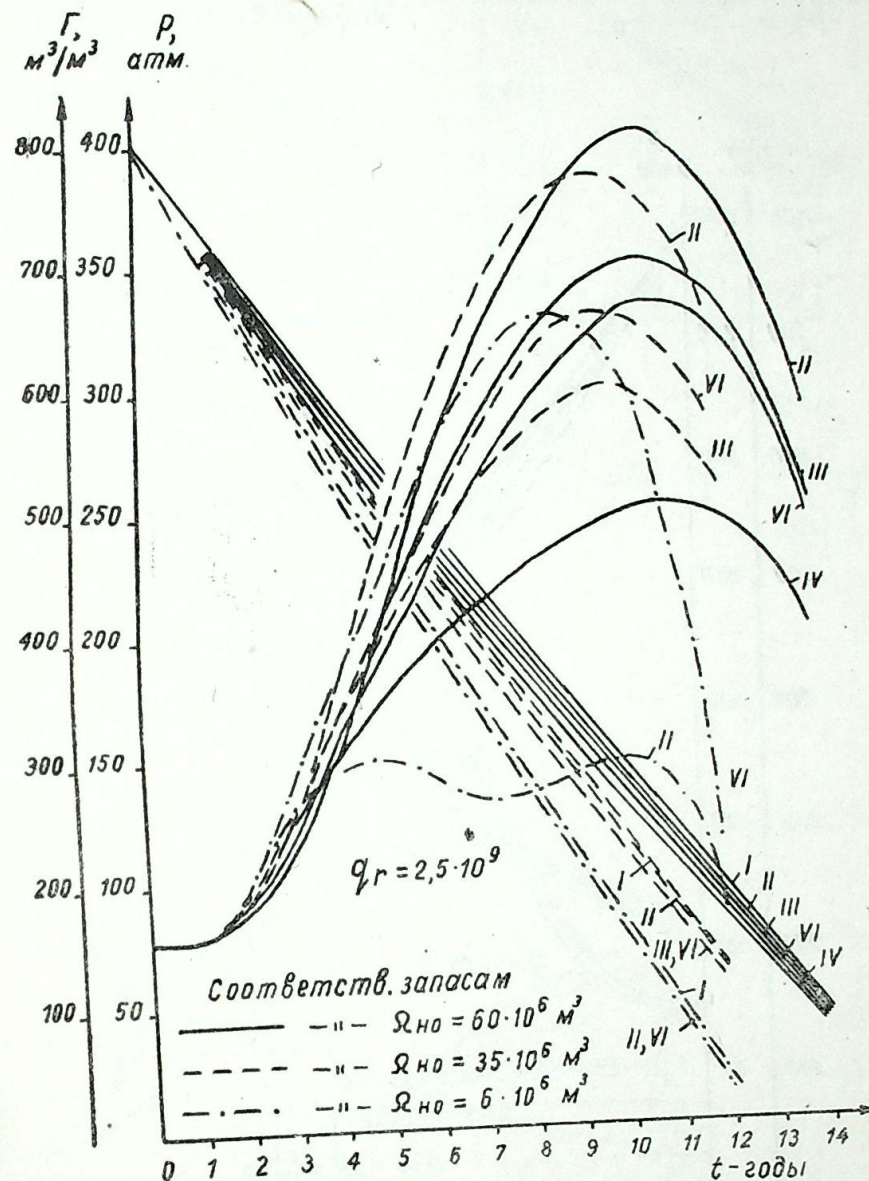


Рис. 2

8) при одинаковых $\Omega_{\text{н.о}}$ и q_r с увеличением отборов нефти значение максимального газового фактора уменьшается. Так, например, при $\Omega_{\text{н.о}} = 60 \cdot 10^6 \text{ м}^3$ нефти и $q_r = 5 \cdot 10^9 \text{ м}^3/\text{год}$ газа увеличение отбора нефти со значения II варианта до IV приводит к уменьшению максимального значения газового фактора, соответственно, с ~ 820 до $\sim 705 \text{ м}^3/\text{м}^3$. В аналогичных условиях, но при $\Omega_{\text{н.о}} = 35 \cdot 10^6 \text{ м}^3/\text{нефти}$ — с ~ 800 до $\sim 600 \text{ м}^3/\text{м}^3$.

Разница в значениях максимального газового фактора в указанных выше условиях при изменении отбора нефти увеличивается с уменьшением запасов нефти и отборов газа. В табл. 8 показана разница в значениях максимального газового фактора между II и III вариантами отбора нефти при запасах ее $60 \cdot 10^6$ и $35 \cdot 10^6 \text{ м}^3$ и отборах газа $5 \cdot 10^9$ и $2,5 \cdot 10^9 \text{ м}^3/\text{год}$.

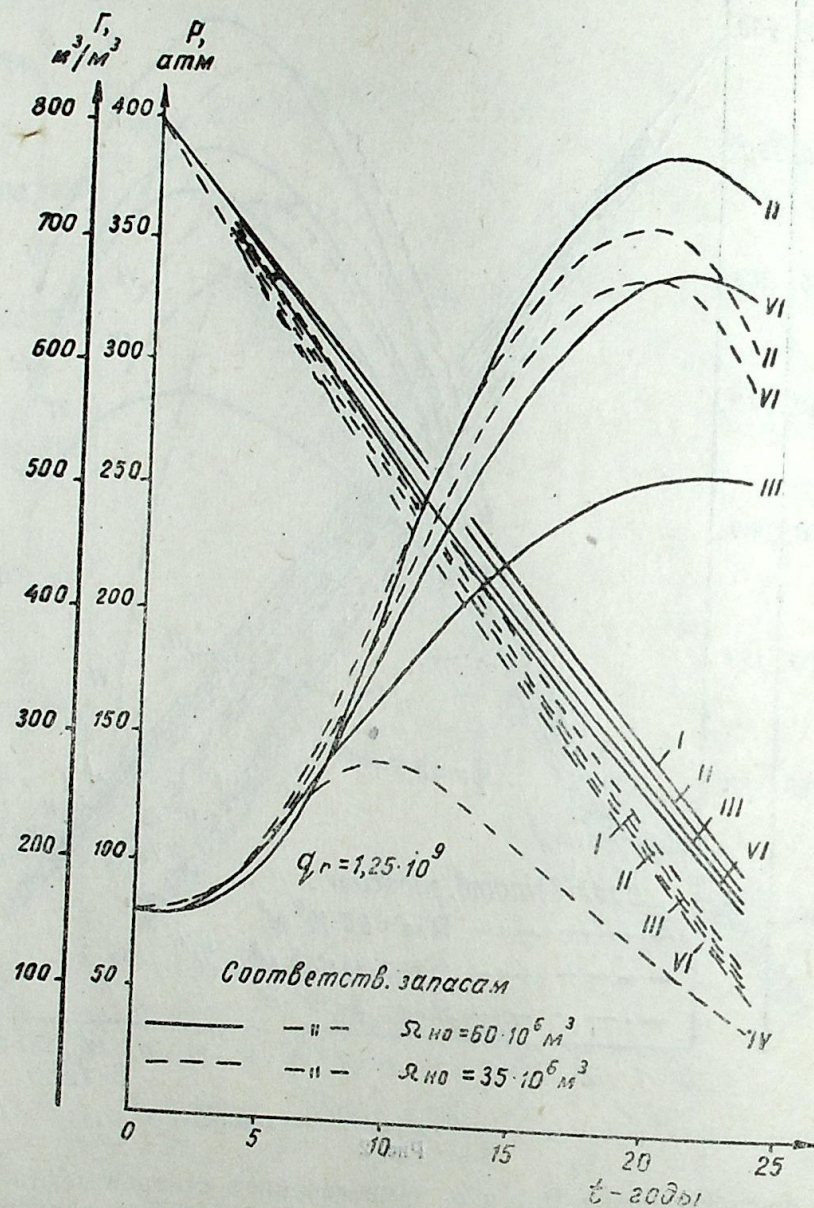


Рис. 3

9) при одинаковых Ω_{HO} и q_H с повышением отборов газа значение максимального газового фактора увеличивается.

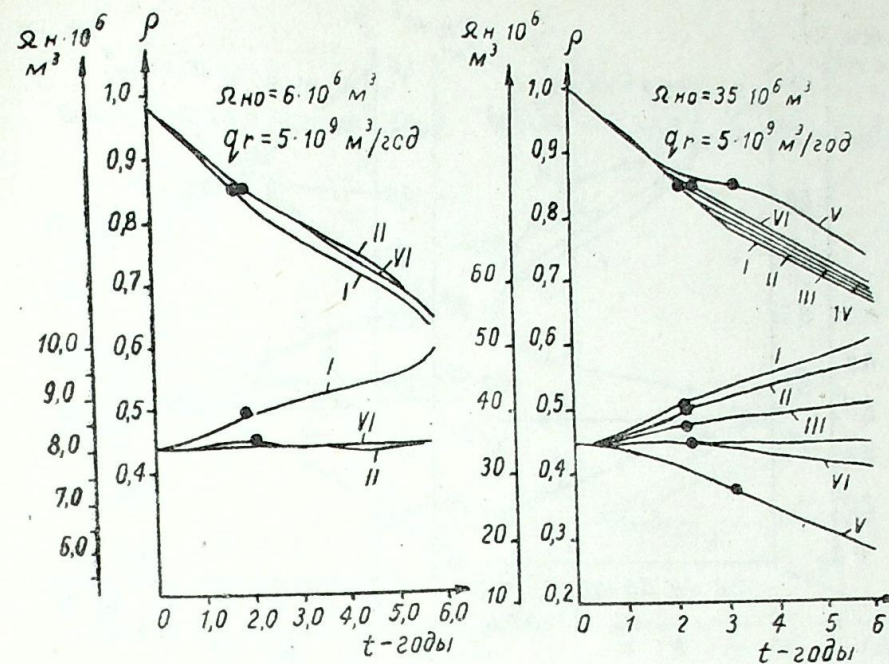


Рис. 4

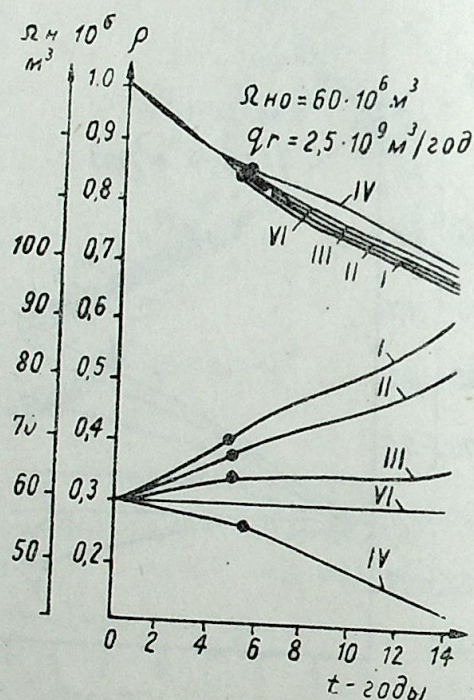
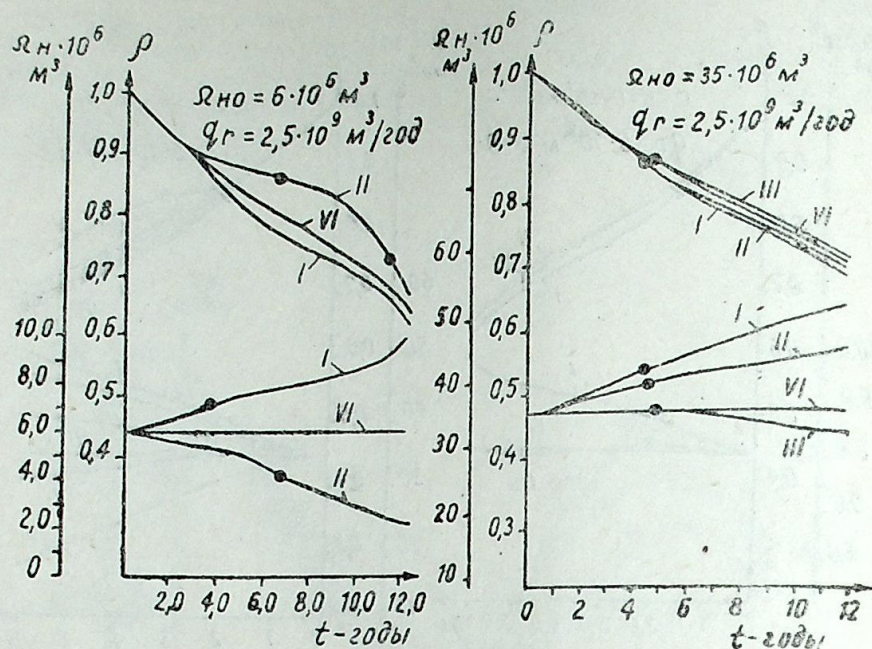


Рис. 5

Так, например, при $Q_{n.0} = 60 \cdot 10^6 \text{ м}^3$ нефти и III варианте отбора ее повышение отбора газа с $1,25 \cdot 10^9$ до $5 \cdot 10^9 \text{ м}^3/\text{год}$ приводит к увеличению максимального значения газового фактора с ~ 510 до $\sim 775 \text{ м}^3/\text{м}^3$,

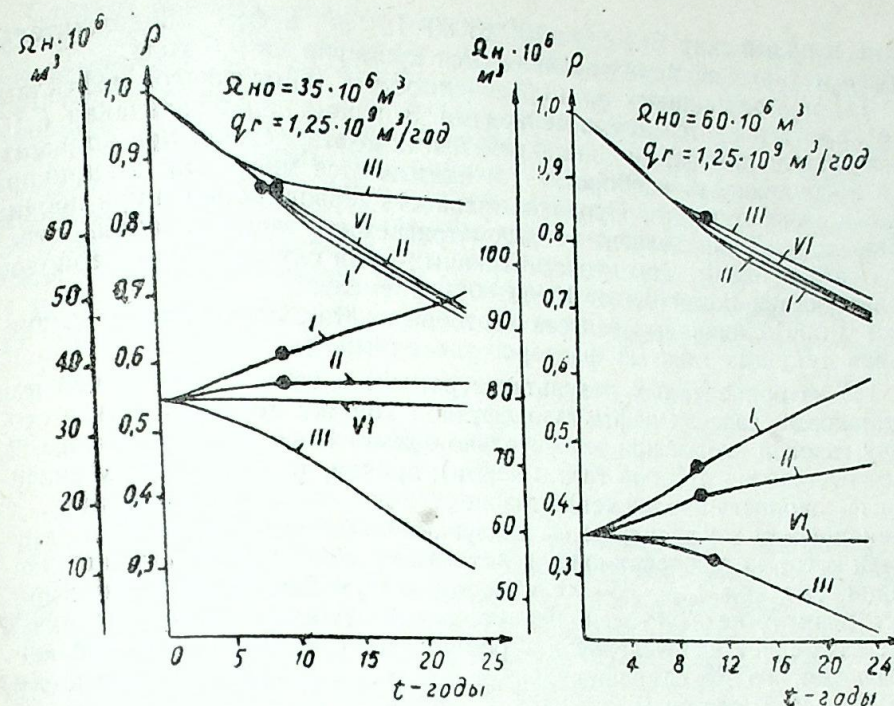


Рис. 6

а при $Q_{n.0} = 35 \cdot 10^6 \text{ м}^3$ нефти и тех же условиях — с ~ 280 до $\sim 730 \text{ м}^3/\text{м}^3$.

Разница в значениях максимального газового фактора в указанных выше условиях при изменении отборов газа увеличивается с повышением отборов нефти и уменьшением $Q_{n.0}$. В табл. 9 приводится разница в значениях максимального газового фактора между случаями отборов газа $5 \cdot 10^9$ и $2,5 \cdot 10^9 \text{ м}^3/\text{год}$ при запасах нефти $60 \cdot 10^6$ и $35 \cdot 10^6 \text{ м}^3$ и отборах нефти по II и III вариантам.

Таблица 8

$Q_{n.0}$ млн м^3	q_r в млрд. $\text{м}^3/\text{год}$	
	2	2,5
60	45	106
35	70	170

Таблица 9

$Q_{n.0}$ млн м^3	q_n	
	II	III
60	10	70
35	30	128

10) при одинаковых отборах газа и нефти с увеличением запасов последней значение максимального газового фактора возрастает.

11) зависимости $\Gamma(t)$ для всех значений q_n при одинаковых запасах нефти и отборах газа в основном пересекаются в одной точке, характерной тем, что до этого времени значения газового фактора окрываются большими при больших отборах нефти, — наоборот. При этом или же равными при всех q_n , а в последующем выше характерного времени — значения $\Gamma(t)$ мало зависят от величины q_n , а в последующем влияние q_n увеличивается (рис. 1). Согласно этому рисунку, при $q_r = 5 \cdot 10^9 \text{ м}^3/\text{год}$

газа и повышении $\Omega_{н.о.}$ с $35 \cdot 10^6$ до $60 \cdot 10^6$ м³ нефти продолжительность первого периода увеличивается примерно на 0,5 года.

12) при одинаковых q_n и q_r зависимость $\Gamma(t)$ от запасов нефти также характеризуется двумя периодами. В первый период значения $\Gamma(t)$ оказываются большими при малых запасах нефти, нежели при больших, а в последующем, наоборот, $\Gamma(t)$ оказываются меньшими именно при малых запасах нефти. Продолжительность первого периода при прочих равных условиях зависит от рассматриваемых запасов нефти, отборов газа и нефти. Так в рассмотренных нами случаях этим периодом охватывается примерно от 15 до 80% времени.

13) при одинаковых запасах и отборе нефти с повышением q_r значения текущих газовых факторов увеличиваются.

14) из приведенных результатов расчета и табл. 4 видно, что при одинаковых запасах нефти газонефтяной контакт перемещается в сторону газовой шапки при относительно больших значениях величины Π_2 (или отношения отборов газа и нефти); причем, с увеличением значения Π_2 скорость продвижения газонефтяного контакта повышается. С уменьшением же величины Π_2 наступают такие его значения, в пределах которых газонефтяной контакт может изменять направление движения. Так, при $\Omega_{н.о.} = 35 \cdot 10^6$ м³ нефти и $\Pi_2 = 2,24$ газонефтяной контакт вначале незначительно перемещается в сторону газовой шапки, а затем изменяет направление и перемещается в сторону нефтяной части залежи. То же самое происходит при $\Omega_{н.о.} = 60 \cdot 10^6$ м³ нефти в случае $\Pi_2 = 2,07$, а при $\Omega_{н.о.} = 6 \cdot 10^6$ м³ нефти и $\Pi_2 = 2,65$ газонефтяной контакт дважды изменяет свое направление и в конечном итоге снова оказывается примерно у своего первоначального положения.

При дальнейшем уменьшении величины Π_2 газонефтяной контакт с самого начала перемещается в сторону нефтяной части залежи; причем, скорость перемещения контакта с уменьшением значения Π_2 будет во всяком случае увеличиваться.

15) при определенных значениях величины Π_2 и запасов нефти в кривых $\Gamma(t)$ образуются два максимума. Второй максимум в $\Gamma(t)$ образуется в случае перемещения газонефтяного контакта в сторону нефтяной части залежи после начала опережающего проникновения газа из газовой области и при продолжающемся уменьшении нефтенасыщенности.

Из рассмотренных нами случаев это произошло при $\Omega_{н.о.} = 35 \cdot 10^6$ и $6 \cdot 10^6$ м³ нефти в случаях, соответственно $\Pi_2 = 1,35$ и $1,33$.

По мере дальнейшего снижения величины Π_2 падение нефтенасыщенности во времени уменьшается и могут быть случаи, когда нефтенасыщенность начнет повышаться. К сожалению, эти случаи в 1961 г. нам не удалось рассчитать. Однако при $\Omega_{н.о.} = 35 \cdot 10^6$ м³ нефти и $\Pi_2 = 1,12$ в течение длительного периода нефтенасыщенность во времени почти не изменялась.

16) зависимость коэффициента нефтеотдачи от текущего пластового давления можно выразить следующим образом:

$$\eta = \frac{1 - \bar{P}}{\Pi_2 + \frac{1 - \alpha}{\Omega_2} \frac{P_0}{P_{ам}} \bar{P}},$$

где

$$\bar{P} = \frac{P}{P_0}.$$

Следует помнить, что эта зависимость пригодна для газонефтяных месторождений и если, например, при каком-нибудь текущем пластовом давлении $P > P_{ам}$ запасы газа газовой шапки оказываются уже полностью отобранными, то ясно, что дальнейшие расчеты по определению основных показателей разработки, в том числе и коэффициента нефтеотдачи, следует проводить по формулам режима растворенного газа. То же самое относится и к случаю, когда возможные запасы нефти отбита нефтеотдачи становится уже известной, а остальные показатели разработки рассчитываются по формулам чисто газового режима.

Если в предыдущую формулу подставить принятые нами в расчетах значения P_0 и α , то получим:

$$\eta = \frac{1 - \bar{P}}{\Pi_2 + \frac{240}{\Omega_2} \bar{P}}.$$

Из этого выражения видно, что при принятых нами значениях Ω_2 и рассмотренных в 1961 г. случаях (имеются в виду значения Π_2) при фиксированных, но малых $\bar{P}$ коэффициент нефтеотдачи становится по существу зависящим от Π_2 . Например, на основании табл. 6 и 4 на рис. 7 представлена зависимость $\eta = \eta(\Pi_2)$ при одинаковом для всех случаев пластовом давлении, равном ~ 60 атм или $\bar{P} = 0,15$.

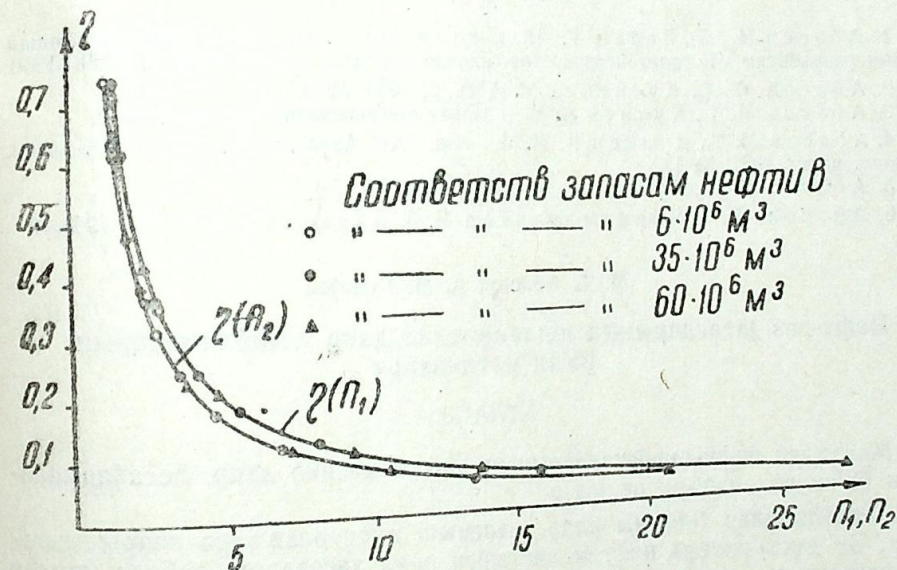


Рис. 7

При относительно больших значениях Π_2 коэффициенты нефтеотдачи оказываются наименьшими, но по мере уменьшения Π_2 они возрастают, причем до значений $\Pi_2 = 7 \div 10$ увеличение η незначительно. Дальнейшее уменьшение Π_2 приводит к более ошутимому увеличению коэффициентов нефтеотдачи, причем с уменьшением значений Π_2 влияние его на этот коэффициент возрастает.

А на основании табл. 7 и 3 на рис. 7 представлена также зависимость коэффициента нефтеотдачи от параметра P_1 при одинаковом суммарном отборе газа для всех рассмотренных в 1961 г. случаев, равном в данном случае $30 \cdot 10^9 \text{ м}^3/\text{м}^3$ газа. В этом случае также при относительно больших значениях P_1 коэффициенты нефтеотдачи оказываются наименьшими, но по мере уменьшения P_1 они возрастают, причем до значений P_1 порядка 10 увеличение η незначительно. Дальнейшее уменьшение P_1 приводит к более резкому увеличению η , причем с уменьшением значений P_1 , влияние его возрастает.

Данные табл. 6, 7 подтверждают ранее известные выводы о целесообразности использования энергии газа газовой шапки газонефтяной залежи для получения сравнительно высоких коэффициентов нефтеотдачи. Максимальный коэффициент нефтеотдачи при этом получится при отсутствии отбора газа из газовой шапки.

17) совершенно ясно, что при отсутствии отбора нефти основные расчетные зависимости $\frac{Q_n}{Q_{н.о.}}$ (P) и ρ (P) для различных q_r и $Q_{н.о.}$ будут одинаковыми, различие будет лишь в масштабе времени.

18) расчеты различных случаев при VI варианте проведены лишь для сравнения получаемых при этом коэффициентов нефтеотдачи с другими вариантами. Что касается общего анализа указанных вариантов, то этот вопрос довольно подробно освещен в литературе и мы его не повторяем.

Литература

1. Абасов М. Т., Бланк Г. И., Джалилов К. Н. и др. Принципиальная схема разработки VII горизонтов месторождения Карадаг. Фонды АЗНИИ, 1959—1960.
2. Абасов М. Т., Кулиев А. М. АНХ, 3, 1960, № 3.
3. Абасов М. Т., Кулиев А. М. Газовая промышленность, 1960, № 4.
4. Абасов М. Т., Кулиев А. М. М. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук, 1961, № 1.
5. Абасов М. Т., Кулиев А. М. АНХ, 1961, № 1, 2.
6. Абасов М. Т., Черномордилов М. З., Азизова Ф. М. АНХ, 1960, № 5.

М. Т. Абасов, А. М. Гулиев

Нефт-газ жатагларынын ишләнмәсинә даир һесаблама- ларының нәтижәләри

ХУЛАСӘ

Мәгаләдә нефт-газ жатагларынын ишләнмәсинә даир һесаблама-
ларының нәтижәләри верилір.

Һесаблама-лар 1960-чы илдә алынмыш дүстурлар үзрә апарылмыш-
дыр. Бу дүстурларда нефтин вә газын реал хассәләри, һабелә контур
архасы сујун тәсири нәзәрә алынмышдыр. Һесабатлар Азәрбајжан ССР
ЕА Һесаблама Мәркәзинин ишчиләри илә бирликдә БЕСМ-2 маркалы
електрон-һесаблајычы машында апарылмышдыр.

Газ-нефт жатагларындан алынган газ вә нефтин, һабелә нефт еһти-
ятынын жатағын ишләнмәсинин әсас көстәричиләринә тәсирини аш-
кара чыхармаг мәгсәди илә онларын мүхтәлиф гијмәтләри көтүрүл-
мүшдүр. Белә ки, нефт һасилатынын тәсирини мүәјјән етмәк үчүн
онун алты гијмәти, газ һасилатынын үч гијмәти вә нефт еһтијатынын
үч гијмәти көтүрүлмүшдүр.

Һесаблама-ларының нәтижәләри — лај тәзјиги, газ фактору, нефтлә дој-
ма вә нефтли һиссәнин һәчми ишләнмә заманындан асылы олараг гра-
фиклар шәклиндә верилмишдир.

Бундан әлавә лај тәзјиги 60 атм олан вә $30 \cdot 10^9 \text{ м}^3$ газ алынган һал-
да нефт-газ жатагларынын ишләнмәси үчүн мүһүм әһәмијјәти олан бир
сыра нәтижәләр чыхарылмышдыр.

Н. А. МАМЕД-ЗАДЕ

ГРАФИЧЕСКИЙ ПРИЕМ СПРЯМЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ПРИРОСТОВ ГЭС В ТОЧКАХ РАЗРЫВА ЕЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Характеристики относительных приростов ГЭС, построенные по соответствующим характеристикам отдельных их агрегатов, при нагрузках, соответствующих изменению числа работающих агрегатов, претерпевает разрыв непрерывности [1,2]. Как

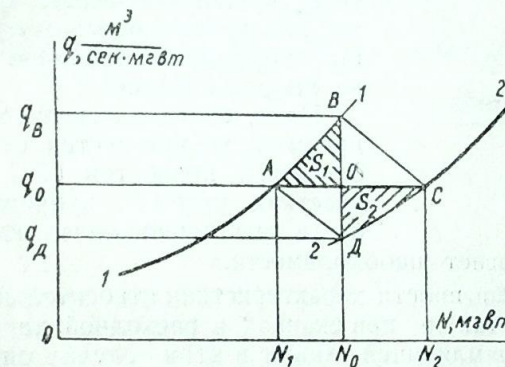


Рис. 1

известно, пользование такими характеристиками относительных приростов становится возможным после того, как они на участке разрыва непрерывности заменяются прямой [1,2], причем ее положение определяется условием $S_1 = S_2$ (рис. 1).

Ниже дается графический прием определения положения этой прямой.

Полагая, что характеристика относительных приростов ГЭС на участке спрямления прямолинейна, составим баланс площадей S_1 и S_2 , представляющих площади прямоугольных треугольников:

$$\frac{1}{2}(N_0 - N_1)(q_B - q_0) = \frac{1}{2}(N_2 - N_0)(q_0 - q_D)$$

или

$$\frac{N_0 - N_1}{q_0 - q_D} = \frac{N_2 - N_0}{q_B - q_0} \quad (1)$$

Пусть AC (рис. 1) есть спрямленный участок характеристики относительных приростов ГЭС, удовлетворяющий выражению (1). Тогда левая часть (1) представляет тангенс угла наклона прямой DA, а правая часть—тангенс угла наклона прямой CB к оси q . Равенство их

Н. А. МАМЕД-ЗАДЕ

ГРАФИЧЕСКИЙ ПРИЕМ СПРЯМЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ПРИРОСТОВ ГЭС В ТОЧКАХ РАЗРЫВА ЕЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Характеристики относительных приростов ГЭС, построенные по соответствующим характеристикам отдельных их агрегатов, при нагрузках, соответствующих изменению числа работающих агрегатов, претерпевает разрыв непрерывности [1,2]. Как известно, пользование такими характеристиками относительных приростов становится возможным после того, как они на участке разрыва непрерывности заменяются прямой [1,2], причем ее положение определяется условием $S_1 = S_2$ (рис. 1).

Ниже дается графический прием определения положения этой прямой. Полагая, что характеристика относительных приростов ГЭС на участке спрямления прямолинейна, составим баланс площадей S_1 и S_2 , представляющих площади прямоугольных треугольников:

$$\frac{1}{2}(N_0 - N_1)(q_v - q_0) = \frac{1}{2}(N_2 - N_0)(q_0 - q_d)$$

или

$$\frac{N_0 - N_1}{q_0 - q_d} = \frac{N_2 - N_0}{q_v - q_0} \quad (1)$$

Пусть AC (рис. 1) есть спрямленный участок характеристики относительных приростов ГЭС, удовлетворяющий выражению (1). Тогда левая часть (1) представляет тангенс угла наклона прямой DA , а правая часть — тангенс угла наклона прямой CB к оси q . Равенство их

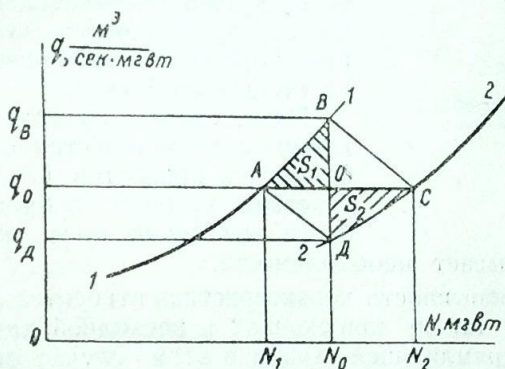


Рис. 1

тангенсов наклона к оси q или, что то же, их параллельность, и выражает формула (1).

Отсюда вытекает следующий простой прием спрямления характеристики относительных приростов ГЭС: из точки D проводим такую прямую DA , чтобы $BC \parallel DA$ пересекла кривую 2 в точке C , лежащей на одной горизонтали с точкой A . Если точка C ляжет на кривой 2 выше точки A , то последнюю следует по кривой 1 сдвинуть вправо, вверх до тех пор, пока не выполнится условие (1). Если же $q_a > q_c$, то точку A следует опустить вниз.

Очевидно, что условие (1) можно заменить равнозначным:

$$\left. \begin{aligned} DA &= CB \\ q_a &= q_c = q_0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

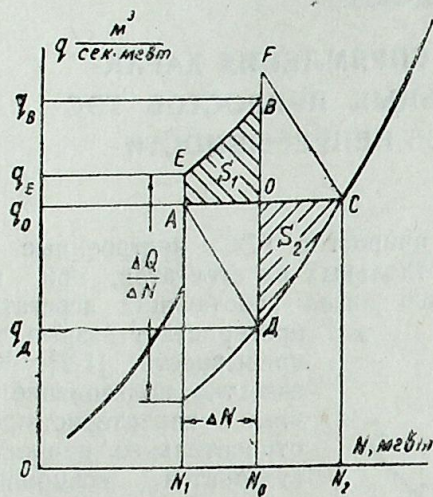


Рис. 2

В том случае, когда кривые в области разрыва непрерывности сильно изгибаются и выпуклы вниз, то, во избежание нежелательных погрешностей от неучета площадей сегментов, заключенных между точками построения на соответствующих кривых, следует найденное значение q несколько уменьшить. Если обе кривые выпуклы вверх, то q_0 нужно увеличить. Если же обе кривые выпуклы в разные стороны, то значение q_0 не корректируется.

Надо, однако, сказать, что кривизна характеристик относительных приростов ГЭС на участках разрыва непрерывности настолько мала, что в

корректировке q_0 часто не бывает необходимости.

Как известно, разрыв непрерывности характеристики относительных приростов может возникнуть также при скачках в расходной характеристике [1]. Положение спрямляющей линии в этом случае определяется балансом площадей S_1 и S_2 (рис. 2):

$$\frac{1}{2}[(q_E - q_0) + (q_B - q_0)](N_0 - N_1) = \frac{1}{2}(q_0 - q_D)(N_2 - N_0)$$

или

$$\frac{N_0 - N_1}{q_0 - q_D} = \frac{N_2 - N_0}{(q_B + q_E) - 2q_0} \quad (3)$$

Поскольку (рис. 2)

$$q_B = q_0 + OB \text{ и } q_E = q_0 + AE,$$

то выражение (3) принимает вид:

$$\frac{N_0 - N_1}{q_0 - q_D} = \frac{N_2 - N_0}{OB + AE} \quad (4)$$

Графическое решение (4) складывается из этапов:

1. Задавшись положением AC , от точки B , откладываем отрезок $BF = AE$.

2. Проводим из C прямую, параллельную AD .

Если эта прямая попадает в точку F , то заданное положение AC правильно. В противном случае построение нужно повторить, пока не выполнится условие (4).

Все оговорки, сделанные для первого случая учета разрыва непрерывности, справедливы и для этого случая.

Описанные выше графические приемы применимы и при спрямлении разрывных характеристик тепловых электростанций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горнштейн В. М. Наивыгоднейшие режимы работы гидростанций в энергетических системах. Госэнергоиздат, 1959.
2. МЭС. Руководящие указания по выбору наивыгоднейшего распределения активной нагрузки между тепловыми электростанциями. Госэнергоиздат, 1958.

Н. Э. Маммэдадэ

СЕС-ин нисби артым характеристикасынын кәсилән нөгтәдә дүз хәтлә эвәз едилмәсинин графикаи үсулу

ХҮЛАСӘ

СЕС-ин нисби артым характеристикасыны ифадә едән әјрисин агрегатларын сајы дәјишән ујғун күчләрдә кәсиләр.

Мәгаләдә һәммин нөгтәдә характеристиканын дүз хәтлә эвәз едилмәси үчүн графикаи үсул кәстәрилир. О, әдәди һесаблама тәләб етмир.

Үсул һәмчинини ИЕС-ин кәсилән характеристикасына да тәтбиғ олуна биләр.

Р. К. НАЗИРОВ, И. П. КУЛИЕВ., А. М. ИБРАГИМОВ,
Л. С. АЛИМАМЕДОВ

ОБРАСТАНИЕ СТАЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ В МОРСКОЙ ВОДЕ И УЧЕТ ЕГО ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ МОРСКИХ НЕФТЕПРОМЫСЛОВЫХ СООРУЖЕНИЙ

При проектировании и строительстве морских нефтепромыслов весьма большое практическое значение имеет вопрос обрастания подводной части свай и других сооружений морскими организмами. Результаты исследований в этой области сделали возможным учесть влияние обрастания на волновое давление и на развитие коррозионных поражений.

С выходом на большие глубины моря указанная проблема приобретает особую актуальность, ибо в этом случае большая часть сооружения находится под водой при исключительно тяжелых гидродинамических условиях.

Вследствие интенсивного обрастания опор, способствующего повышению сопротивления обтекания, усилению местных коррозионных поражений и понижению предела коррозионной усталости металла, сооружение, срок эксплуатационной службы которого определяется несколькими десятками лет, может быть быстро повреждено или разрушено под воздействием штормовых волн.

Находящиеся ниже среднегодового уровня моря части металлических опор эстакад, индивидуальных оснований, продольные и поперечные связи, подводные нефтепроводы, захватные сооружения насосных станций и подводная часть морских судов обрастают в морской воде различными микро- и макроорганизмами.

В зависимости от конструкции сооружений, глубины моря, гидрологического режима и некоторых других факторов, толщина и интенсивность обрастания при данных климатических условиях варьируют в широких пределах.

С целью выявления величины и природы обрастания на эксплуатирующейся части эстакады и индивидуальных оснований специально организованная бригада Института „Гипроморнефть“, при участии водолазов, произвела измерения толщины слоя обрастания в подводной части вертикальных и наклонных свай с различными сроками эксплуатации.

В результате обследования, при определении величины обрастания поверхности свай, выявлено следующее.

1. Элементы подводной части эстакад и индивидуальных оснований на акватории морских промыслов подвержены систематическому

Р. К. НАЗИРОВ, И. П. КУЛИЕВ., А. М. ИБРАГИМОВ,
Л. С. АЛИМАМЕДОВ

ОБРАСТАНИЕ СТАЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ В МОРСКОЙ ВОДЕ И УЧЕТ ЕГО ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ МОРСКИХ НЕФТЕПРОМЫСЛОВЫХ СООРУЖЕНИЙ

При проектировании и строительстве морских нефтепромыслов весьма большое практическое значение имеет вопрос обрастания подводной части свай и других сооружений морскими организмами. Результаты исследований в этой области сделали возможным учесть влияние обрастания на волновое давление и на развитие коррозионных поражений.

С выходом на большие глубины моря указанная проблема приобретает особую актуальность, ибо в этом случае большая часть сооружения находится под водой при исключительно тяжелых гидродинамических условиях.

Вследствие интенсивного обрастания опор, способствующего повышению сопротивления обтекания, усилению местных коррозионных поражений и понижению предела коррозионной усталости металла, сооружение, срок эксплуатационной службы которого определяется несколькими десятками лет, может быть быстро повреждено или разрушено под воздействием штормовых волн.

Находящиеся ниже среднегодового уровня моря части металлических опор эстакад, индивидуальных оснований, продольные и поперечные связи, подводные нефтепроводы, захватные сооружения насосных станций и подводная часть морских судов обрастают в морской воде различными микро- и макроорганизмами.

В зависимости от конструкции сооружений, глубины моря, гидрологического режима и некоторых других факторов, толщина и интенсивность обрастания при данных климатических условиях варьируют в широких пределах.

С целью выявления величины и природы обрастания на эксплуатирующейся части эстакады и индивидуальных оснований специальной организованной бригадой Института "Гипроморнефть", при участии водолазов, произвела измерения толщины слоя обрастания в подводной части вертикальных и наклонных свай с различными сроками эксплуатации.

В результате обследования, при определении величины обрастания поверхности свай, выявлено следующее.

1. Элементы подводной части эстакад и индивидуальных оснований на акватории морских промыслов подвержены систематическому

обрастанию водорослями, баянусами, двухстворчатыми ракушками, которые с поверхности частично покрываются илом.

2. Обрастание главным образом состоит из баянусов и двухстворчатых ракушек, располагающихся на поверхности в нескольких рядах.

Баянусы и двухстворчатые ракушки появились в Каспийском море после окончания строительства Волго-Донского канала.

3. Обрастание поверхности свай имеет место по всей их длине в подводной части и над уровнем моря на 20—25 см.

4. При значительном сроке эксплуатации свай морских сооружений величина обрастания (толщины покрова) увеличивается по диаметру до 10—15 см. (рис. 1).

5. Максимальное увеличение обрастания замечено на глубине 2—3 м. По мере увеличения глубины моря отложения баянуса уменьшаются.

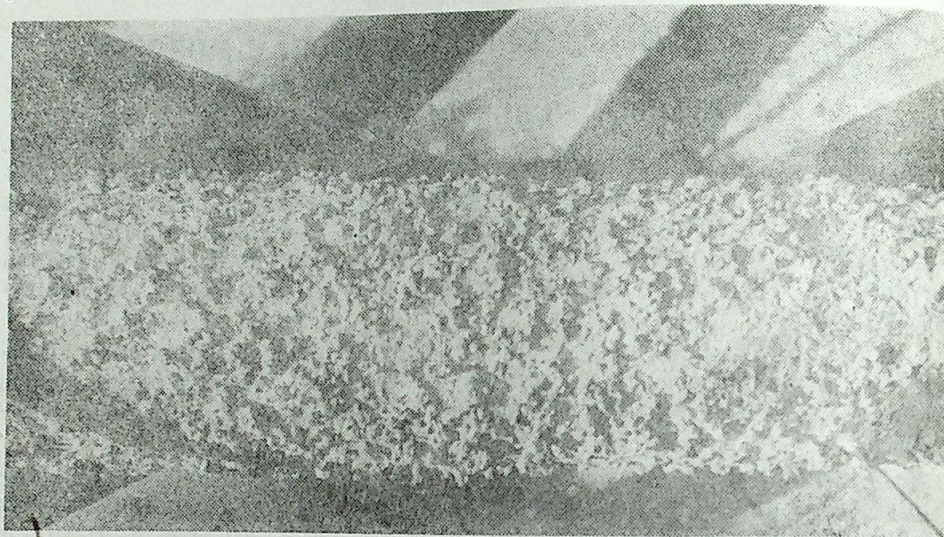


Рис. 1

6. Обрастание баянусами имеет сезонный характер. Сплошное и интенсивное обрастание баянусами наблюдается в июле и августе.

7. Обрастание ускоряет и усиливает явление местной коррозии, а также приводит к механическим разрушениям ранее нанесенных покрытий.

Таковы характерные особенности обрастания на акваториях морских нефтепромыслов, в частности, на акватории Нефтяных Камней и о. Артема. Обрастание, как уже было сказано выше, значительно ускоряет процесс местных коррозионных поражений подводных элементов сооружений и увеличивая сопротивление трения опор обтекающей волн, весьма отрицательно сказывается на общем состоянии сооружений морских нефтепромыслов, способствуя преждевременному выходу их из строя.

В поисках экономичного и надежного способа защиты сооружений от обрастания, в Институте „Гипроморнефть“ проведен ряд исследований. Они, главным образом, были посвящены вопросам разработки методов очистки подводных конструкций от обрастания и учету влияния обрастания на воздействие волн. Здесь следует отметить, что исследования в направлении разработки антиобрастающих красок в Институте не получили своего развития, благодаря специфичности

морских нефтепромысловых сооружений. Эти сооружения стационарно устанавливаются на акватории морского промысла, периодическое восстановление антиобрастающих покрытий, пришедших в негодность вследствие продолжительного воздействия морской воды, практически невозможно.

Опыт проектирования и эксплуатации нефтепромысловых скважинных сооружений показал, что наиболее экономически эффективным является учет влияния обрастания на величину волнового давления, а в некоторых случаях — очистка подводных элементов конструкции от обрастания.

Накопление обрастаний на подводной части сооружений искусственно увеличивает диаметр сечения и приводит к шероховатости поверхности опор и элементов конструкции. Тем самым значительно изменяется обтекаемость опор волновым потоком, что обуславливает увеличение волновой нагрузки на сооружение.

Таким образом, влияние обрастания на волновое давление дифференцируется на давление, связанное с увеличением гидравлического сопротивления опоры и на давление, обусловленное изменением сопротивления трения благодаря наличию шероховатости обрастания. Учет первого производится простым изменением значения диаметра поперечного сечения в подводной части, входящего в расчетные формулы, воздействующего волнового давления на сооружение.

Намного сложнее обстоит дело с учетом влияния шероховатости обрастания на давление волн. Для того, чтобы при расчете сооружения сквозной конструкции на действие волн строго учесть влияние обрастания, необходимо иметь значение коэффициента сопротивления трению при шероховатости. Величина этого коэффициента существенно зависит от структуры потока и числа Рейнольдса:

$$R = \frac{v \cdot D}{\nu},$$

где v — скорость потока, м/сек;

D — диаметр опоры, м;

ν — коэффициент кинематической вязкости, $\frac{м^2}{сек}$.

В настоящее время коэффициент сопротивления трения исследован для цилиндрических тел в плоско-параллельном потоке. Поэтому вопрос определения коэффициента сопротивления трения для волнового потока остается нерешенным. Однако в расчетные выражения суммарного волнового давления вводится так называемый коэффициент обрастания ($k_{обр}$), приближенно оценивающий увеличение давления за счет обрастания.

До проведения наших исследований по определению влияния шероховатости обрастания на волновое давление коэффициент обрастания принимался 1,2 на основании чисто механического переноса результатов измерений коэффициента трения шероховатых цилиндров, испытанных в плоско-параллельном потоке. В дальнейшем, после проведения ряда экспериментальных работ на акватории Нефтяных Камней ГОИИом [2] этот коэффициент в грубом приближении и вне связи с элементами расчетной волны рекомендовался учитывать в виде увеличения суммарного давления на 25—30%.

Это предложение вошло в [1] в виде учета фактора сопротивления шероховатости обтекания увеличением на 40% давления, дейст-

вующего на часть сооружения, расположенного же среднегодового уровня моря.

Известно, что все расчеты, связанные с определением волновых нагрузок на нефтепромысловые гидротехнические сооружения, производятся исходя из одной и той же расчетной волны, высота которой варьирует в широких пределах — 1 м на о. Песчаном, до 12—13 м в районе Банки „Нефтяные Камни“.

Следовательно, необходимо было количественно оценить волновое давление на обросшую сваю, относительно гладкой, в зависимости от элементов волн. В связи с этим, волновой лабораторией „Гипроморнефти“ была произведена экспериментальная работа и впервые установлена, в первом приближении, поправка на волновую нагрузку в связи с морским обрастанием конструкции относительно гладкой поверхности свай с увеличением высоты волны [4].

Экспериментальная установка состояла из двух труб, равных сечений ($\varnothing 480$), консольно закрепленных у верхнего основания эстакадного сооружения и погруженных на 5 м в море. Одна из консолей имела гладкую поверхность обтекания, а другая — сильно обросшую, вследствие 4-летнего пребывания в морской воде. Консоли находились на расстоянии 2,5 м друг от друга и поэтому волны воздействовали одновременно на обе консоли.

Тензометры, наклеенные на разных уровнях в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, задавая синхронно значения изгибающих моментов в точках наклейки, определяли порывы изгибающих моментов консолей и результирующую волнового давления. Указанные величины во время шторма непрерывно регистрировались осциллографом „Геофизика“.

В результате статистического осреднения данных наблюдений была установлена зависимость давления от высоты волны как для гладкой консоли, так и для обросшей.

На основании этих закономерностей была оценена поправка на волновую нагрузку в связи с обрастанием.

Для иллюстрации на рис. 2 приведен поправочный коэффициент ($K_{обр}$) в зависимости от высоты волны.

Анализируя представленную кривую, констатируем, что $K_{обр}$ от значения 1,46 снижалась до первого значения 1,23 при $h=2$ м, затем увеличиваясь до 1,26 при $h=3,5$ м, в диапазоне высот волн $h \geq 4$ м резко падает, стремясь практически к единице.

Это явно выраженная закономерность, очевидно, объяснима с одной стороны тем, что волновой поток для $h \geq 4$ м переходит в не-

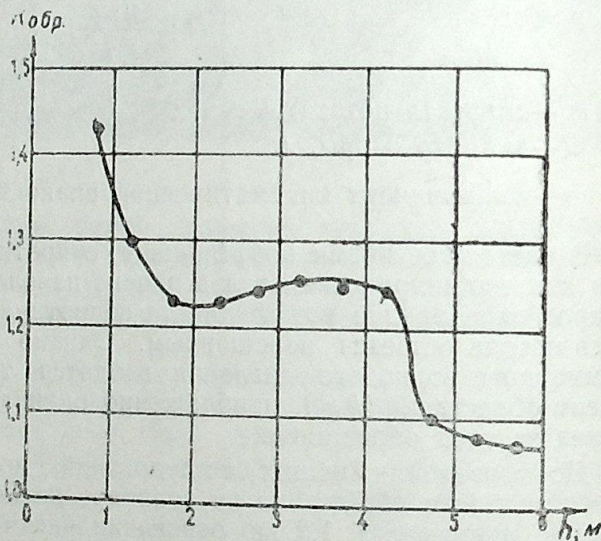


Рис. 2
График зависимости влияния обрастания опоры на величину волнового давления от высоты волны.

устойчивый режим обтекания, при котором коэффициент сопротивления резко уменьшается до единицы, как это имеет место при обтекании цилиндрических тел плоско-параллельным потоком жидкости. С другой стороны, давление, приходящееся на подводную обросшую часть опоры, для больших высот волн составляет незначительную часть от общего волнового давления. Основная масса воздействия приходится на гребень, который оmyвает необросшую поверхность опоры, выше уровня спокойного моря.

В соответствии с результатами вышеуказанного эксперимента нами разработан обобщенный метод учета влияния обрастания опор на величину волнового давления для разных глубин моря. Эта расчетная формула имеет следующий вид [4]:

$$P_2 = \sigma(h) \left(1 + \frac{1}{1 + \cos Mz_0} \right) \operatorname{tg} \frac{Mz_0}{2} (D_2 K_{обр} - D_1) + P_1,$$

где P_2 — давление на обросшую опору, кг;

$P_1 = \sigma(h) D_1 \left(1 + \frac{1}{1 + \cos Mz} \operatorname{tg} \frac{Mz}{2} \right)$ — давление на гладкую, не обросшую опору, кг;

$$\sigma(h) = \frac{50 \cdot C_x H_0 C^2 N^2}{3M}$$

C_x — коэффициент сопротивления формы;

H_0 — глубина моря под ложбиной волны, м;

$C = \sqrt{g(h + H_0)}$ — фазовая скорость, м/сек;

N и M — функции относительной высоты [6];

$z = \frac{z}{H_0}$ — спокойный уровень моря в безразмерной форме;

$z_0 = \frac{z}{H_0}$ — безразмерная вертикальная координата;

D_1 — диаметр необросшей опоры, м;

D_2 — диаметр обросшей опоры, м;

$K_{обр}$ — коэффициент обрастания.

Однако для обеспечения безаварийной службы сооружения в период эксплуатации и в целях экономии металла при проектировании недостаточно учитывать только влияние обрастания на волновое давление, но и необходимо также разработать способ предотвращения накопления обрастания или периодической очистки сооружений от обрастания.

Морское обрастание на сваях распределяется неравномерно. Неравномерное отложение приводит к разному притоку кислорода к отдельным участкам поверхности свай, в результате этого образуются коррозионные пары дифференциальной аэрации. Коррозионное поражение концентрируется на отдельных анодных участках и сопровождается глубокими местными поражениями.

Поселения диатомей, насыщающих пристеночный слой воды кислородом, выделяемым ими в процессе фотосинтеза, могут ускорить коррозионный процесс, интенсифицируя деполяризацию катода, или вызвать местную коррозию, вследствие возникновения пар дифференциальной аэрации при частичных разрушениях слоя обрастания.

Сплошной слой подводного обрастания может устранить образование пар дифференциальной аэрации между участком свай, близким

к поверхности воды (катод) и отдаленным от нее, доступ кислорода к которым затруднен в большой степени (анод).

Однако всякое нарушение слоя обрастания неизбежно приведет к возникновению разности потенциалов на отдельных участках поверхности свай, что вызовет местную коррозию в морской воде, даже вне зависимости от действия продуктов жизнедеятельности обрастаний.

Изучение влияния обрастания на местную коррозию стали в каспийской морской воде показало, что стальные образцы (без обрастания), испытывавшиеся в лаборатории, не подвергаются язвенной местной коррозии, а образцы, испытывавшиеся при том же сроке выдержки в морской воде на морской коррозионной станции, на которых в процессе испытания накапливалось значительное количество обрастаний, подвергаются местной коррозии [5].

Таким образом, накопление обрастания на сваях приводит к появлению местных коррозионных поражений, понижающих прочность свай.

Одним из возможных и практически приемлемых методов очистки свай морских сооружений от обрастания следует считать электрохимический.

Очистку свай можно производить анодно и катодно.

При анодной очистке положительный полюс источника тока соединяется с очищаемой поверхностью, а отрицательный полюс — с дополнительным электродом. Этот метод очистки является опасным, так как очищаемая поверхность свай анодно растворяется, причем при больших плотностях тока возможно образование значительных разрушений на поверхности свай.

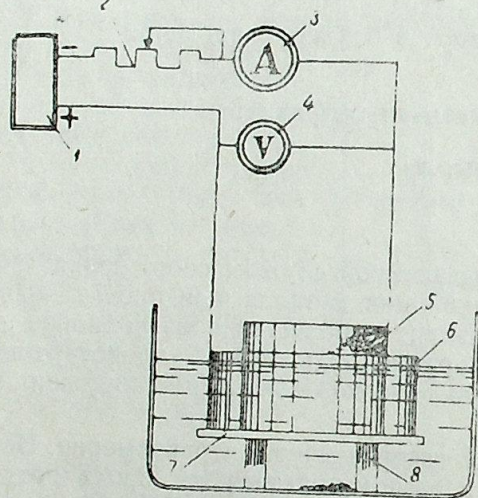


Рис. 3

Принципиальная схема метода электрохимической очистки.

- 1—источник постоянного тока; 2—реостат; 3—амперметр; 4—вольтметр; 5—образец с обрастанием; 6—анод; 7—прикладка (эбонитовая); 8—деревянная подставка.

Катодная очистка производится соединением со свайей отрицательного полюса источника тока, а положительный полюс соединяется со специальным анодом. При такой очистке опасность растворения свай исключается.

Существовало опасение, что при катодной очистке возможно наводороживание стали.

По новым литературным данным, катодная поляризация стали в морской воде при повышенной плотности тока не вызывает заметной водородной хрупкости стали [3].

Принципиальная схема опытной очистки отрезка свай катодным ме-

тодом показана на рис. 3. В процессе очистки металлический чан емкостью 0,5 м³ наполнялся морской водой. На эбонитовой подставке устанавливались отрезки стальных труб диаметром 10 дюймов, длиной 150 мм, вырезанные из свай и имевшие 3-сантиметровый слой обра-

стания баянусами. Отрезки труб подключались к отрицательному полюсу источника тока. В качестве анода применялись куски труб диаметром 12 дюймов.

Проведенные испытания показали, что при увеличении плотности тока сцепления слоя обрастаний с металлом уменьшается.

Таблица 1

Плотность тока, a/m^2	Поверхность образца, m^2	Общая сила тока, a	Толщина обрастания, см	Время очистки, часы	Степень очистки
5—60	-0,066	0,33—3,96	3	8	Поверхность не очищается, но появляется местное ослабление связи обрастания с металлом
80—140	0,066	5,28—9,23	3	7	Тоже
150—350	0,066	9,9—23,1	3	5	Тоже
500	0,066	33,0	3	2	Обрастания удаляются
700	0,066	46,2	3	1	Тоже
1000	0,066	66,0	3	0,5	Тоже

Результаты испытаний при различных плотностях тока показаны в таблице.

Как видно из таблицы, полная очистка образцов от обрастания происходит за 2 ч при плотности тока 500 a/m^2 . При меньших плотностях тока наблюдается ослабление силы сцепления обрастания со сталью или частичная очистка поверхности от обрастания.

Но, учитывая длительность очистки при плотностях тока 500 a/m^2 производились опыты с еще более повышенными плотностями тока.

При плотностях тока 700 a/m^2 полная очистка достигается за 1 ч. Повышение плотности тока до 1000 a/m^2 сокращает срок выдержки образцов под постоянным катодным током до 30 мин. Не трудно заметить, что наиболее эффективной плотностью тока из рассмотренных является плотность тока 1000 a/m^2 .

Таким образом, принципиально электрохимический способ очистки является вполне возможным и практически выполнимым. Для промышленного использования этого метода очистки Институтом разработана конструкция специального анода, общий вид которого представлен на рис. 4. Этот анод позволяет произвести очистку от обрастания свай эстакад непосредственно с настила.

Обобщая выше изложенные результаты исследований, приходим к следующим выводам.

Нефтепромысловые гидротехнические сооружения интенсивно обрастают в подводной части различными микро- и макроорганизмами. Основная масса обрастания состоит из баянусов и двухстворчатых ракушек. Накопление обрастания на элементах металлических конст-

рукций обуславливает увеличение воздействующего давления волн и усиление местных коррозионных поражений, содержащих токсичные вещества, а тем более периодическое восстановление их в условиях стационарных сооружений в открытом море практически невыполнимо.

Эффективной мерой борьбы с обрастанием является электрохимический способ очистки. Однако из-за дороговизны этого способа, обусловленной необходимостью очищать подводные элементы вооружений, по крайней мере ежегодно и значительным количеством потребляемой электроэнергии, электрохимический метод может быть использован в исключительных случаях, когда очистка сооружений крайне необходима.

Наиболее рациональным с точки зрения материальных затрат на проектирование и эксплуатацию является метод учета влияния обрастания на величину волнового давления, заключающийся в создании запаса прочности сооружения путем введения коэффициента обрастания в соответствующие расчетные выражения давления волн на сооружение. В первом приближении коэффициент обрастания может быть принят согласно зависимости $K_{обр}$ от высоты расчетной волны, рассмотренной выше.

Работы по борьбе с морскими обрастаниями нефтепромысловых сооружений на основании результатов изложенных исследований требуют

дальнейшего развития, в частности, в следующих направлениях:

1) в направлении совершенствования электрохимического метода

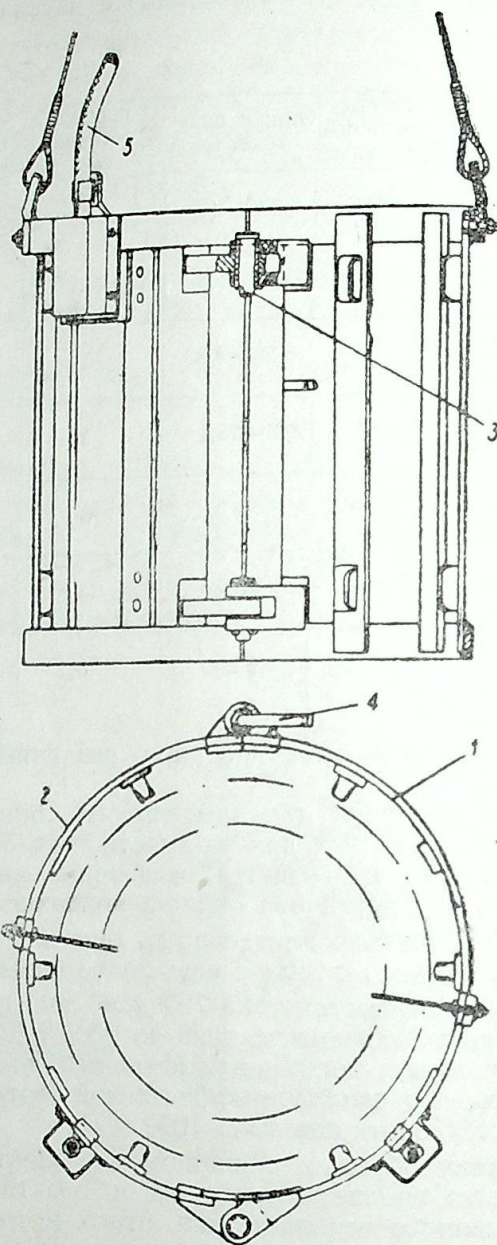


Рис. 4
Конструкция анода для очистки свай
Ф 324 мм

1—правая половина анода; 2—левая половина анода; 3—ось шарнира; 4—штырь затворный; 5—кабель подводящий.

очистки и уточнения экономических электрических параметров очистки продуктов отложений обрастания с поверхностями металлических конструкций;

2) в направлении дальнейшего изучения влияния обрастания на волновое давление с целью разработки метода учета, более высокого порядка приближения, чем это имеет место сейчас;

3) поскольку проведенные эксперименты по учету влияния обрастания на волновое давление базируются на наблюдениях, произведенных на неполных сваях, следует развить эти исследования в направлении оценки влияния обрастания на волновое давление на полной свае.

ЛИТЕРАТУРА

1. Временные указания по определению и учету волновых и ветровых нагрузок действующих на сквозные конструкции морских нефтепромысловых сооружений. Азнефтьнепр, 1958.
2. Глуховский Б. Х., Виленский Я. Г. Вероятные характеристики волнового давления на сваю. Труды ГОИН, вып. 36, 1957.
3. Иванов С. А. О возможности наводороживания металла при катодной защите стальных конструкций в морской воде. Тезисы докладов и сообщений (сб. 1) на Всесоюзном НТ совещании по коррозии и защите металлов в Москве 19—24 мая 1958 г. Профиздат, 1958.
4. Кулиев И. П., Ибрагимов А. М., Алимamedов Л. С. К вопросу о влиянии шероховатости поверхности обтекания сваи на величину волнового давления АНХ, 1960, №7.
5. Негреев В. Ф., Кязимов А. М. Влияние обрастания на местную коррозию стали в каспийской морской воде. Труды Ин-та нефти АН Азерб. ССР, т. 5, 1958.
6. Основы предсказания ветровых волн, зыби и прибоя. ИЛ, М., 1950.

Р. К. Назиров, И. П. Гулиев, А. М. Ибрагимов, Л. С. Элимемедов

Дәниз сујунда полад конструксияларын өртүлмәси вә дәниз
нефт-мәдән гурғуларынын ләјһәләндирилмәсиндә
онун һесаба алынмасы

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә полад конструксияларын мұхтәлиф дәниз организмләри тәрәфиндән өртүлмәсинә даир „Дәниз-нефт гурғуларыны ләјһәләнди- рән елми-тәдғигат институтунун“ апардығы тәдғигатларын нәтичәләри верилир.

Гејд едилир ки, естакадаларын дәнизалты һиссәләри вә дәниз мә- дәнләриндә олан ајры-ајры гурғулар мұнтәзәм сурәтдә су јосунлары бал,ануслар, мәрчангулуларла, бунлар да өз нөвбәсиндә үстдән лиллә өртүлүр.

Дәниз гурғуларынын мұхтәлиф микро- вә макроорганизмләр тәрә- финдән өртүлмәсинин гаршысыны алмағ үчүн еффеқтли тәдбирләрин- дән бири електрoхимјәви тәмизләмә үсулудур.

МҮНДЭРИЧАТ

Ж. И. Домшлак. Гејри-хәтти һәддә васитәси илә һәјәчанландырылмыш гејри-мәһдуд операторлу еволүсион тәнлијин һәлләринин сонсузлугда тәбиәти	3
В. А. Голубева. Сабит әмсаллы хусуси төрәмәли диференциал тәклик-ләрин фундаментал һәлләринин хусусијјәтләри һаггында	15
Г. Ә. Нәчәфов. Бир синиф хәтти олмајан мұхтәлиф параметрли јүклән-миш интеграл тәнликләрин һәллинин тәдгиги	29
С. Ј. Јагубов. Гејри-симметрик нүвәли интеграл вә интегро-диференциал тәнликләр үчүн Гилберт-Шмидт нәзәријјәси	35
С. Н. Һачыјев, К. Ә. Шәрифов. Теллур 4-оксидин әмәләкәлмә ен-талнијасы	47
Н. Г. Һүсейнов. Ромбик антиферромагнит вә зәиф ферромагнит кристал-ларда спин далғалары һагда	55
В. И. Таһиров, Ә. А. Гулијев. Танталын монокристал керманнума диффузијасынын тәдгиги	65
Х. М. Хәлилов. Мајеләрин өзлүлүјүнүн тәдгигинин бәзи јекунлары	69
М. Ә. Бағыров, Г. В. Вечхәјзер, Ч. М. Чуварлы, Е. М. Епш-тејн. Нефтли лаја термики тәсир заманы истиликвермә просеси	77
Р. М. Ваһабов. Мәсамәли бетонун сүзүлмә хассәләринин тәдгиги	89
М. Ј. Ваһабов. Лилләрин һәрәкәтинин бөһран (критик) сүр'әтләринин мүјјән едилмәси	97
Ч. Р. Дадашов. Миник автомобилләри сүр'әтләр гутусунда сүр'әт пил-ләләри сајынын вә өтүрмә әдәдләринин сечилмәси һаггында	107
В. И. Јесман. Азәрбајчан ССР-дә күләјин енеркетик сакитлијинин да-ваметмә мүддәтинин характеристикасы	115
Н. Б. Гәдиров. Сүрүшән јастыгларын сүртүнмә моменти вә јүкләнмә табилијјәтинин тәјини мәсәләсинә даир	123
М. Т. Аббасов, А. М. Гулијев. Нефть-газ јатагларынын ишләнмәсинә даир һесабламаларын бәзи нәтичәләри	131
Н. Ә. Мәммәдзәдә. СЕС-ин нисби артым характеристикасынын кәси-лән нөгтәдә дүз хәтлә әвәз едилмәсинин графиги үсулу	147
Р. К. Нәзирев, И. П. Гулијев, А. М. Ибраһимов, Л. С. Әли-мәммәдов. Дәниз сујунда поләд конструкцијаларын өртүлмәси вә дәниз нефть-мәдән гургуларынын лајинһәландирилмәсиндә онун һесаба алынмасы	151

МҮНДӘРИЧАТ

Җ. И. Домшлак. Җејри-хәтти һәддә васитәси илә һәҗәчанландырылмыш җејри-мәһдуд операторлу еволүсион тәнлијин һәлләринин сонсузлугда тәбиәти	3
В. А. Голубева. Сабит әмсаллы хүсуси төрәмәли диференсиал тәнлик-ләрин фундаментал һәлләринин хүсусијјәтләри һаггында	15
Г. Ә. Нәчәфов. Бир синиф хәтти олмајан мұхтәлиф параметрли јүклән-миш интеграл тәнликләрин һәллинин тәдгиги	29
С. Ј. Јагубов. Җејри-симметрик нүвәли интеграл вә интегро-диференсиал тәнликләр үчүн Һилберт-Шмидт нәзәријјәси	35
С. Н. Нәчәјев, К. Ә. Шәрифов. Теллур 4-оксидин әмәләкәлмә ен-талпијасы	47
Н. Г. Нүсәјнов. Ромбик антиферромагнит вә зәиф ферромагнит кристал-ларда спин далғалары һагда	55
В. И. Таһиров, Ә. А. Гулијев. Танталын монокристал керманиума диффузијасынын тәдгиги	65
Х. М. Хәлилов. Мајеләрин өзлүлүјүнүн тәдгигинин бәзи јекунлары	69
М. Ә. Бағыров, Г. В. Вечхәјзер, Ч. М. Чуварлы, Е. М. Епш-тејн. Нефтли лаја термики тәсир заманы истиликвермә просеси	77
Р. М. Ваһабов. Мәсамәли бетонун сүзүлмә хассәләринин тәдгиги	89
М. Ј. Ваһабов. Лилләрин һәрәкәтинин бөһран (критик) сүр'әтләринин мүәјјән едилмәси	97
Ч. Р. Дадашов. Миник автомобилләри сүр'әтләр гутусунда сүр'әт пил-ләләри сајынын вә өтүрмә әдәдләринин сечилмәси һаггында	107
В. И. Јесман. Азәрбајҗан ССР-дә күләјин енеркетик сакитлијинин да-вамәтмә мүддәтинин характеристикасы	115
Н. Б. Гәдиров. Сүрүшән јастыгларын сүртүнмә моменти вә јүкләнмә табилијјәтинин тәјини мәсәләсинә даир	123
М. Т. Аббасов, А. М. Гулијев. Нефт-газ јатагларынын ишләнмәсинә даир һесабламаларын бәзи нәтичәләри	131
Н. Ә. Мәммәдзәдә. СЕС-ин нисби артым характеристикасынын кәси-лән нөгтәдә дүз хәтлә әвәз едилмәсинин графикаи үсулу	147
Р. К. Нәзирев, И. П. Гулијев, А. М. Ибраһимов, Л. С. Әли-мәммәдов. Дәниз сујунда полад конструксијаларын өртүлмәси вә дәннз нефт-мәдән гурғуларынын лајиһәләндирилмәсиндә онун һесаба алынмасы	151

СОДЕРЖАНИЕ

Ю. И. Домшляк. О поведении на бесконечности решений эволюционно-го уравнения с неограниченным оператором при наличии нелинейного возмущения	3
В. А. Голубева. Особенности фундаментальных решений уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами	15
К. А. Наджафов. Исследование одного класса нелинейных нагруженных интегральных уравнений с различными параметрами	29
С. Я. Якубов. Теория Гильберта-Шмидта для интегральных и интегродифференциальных уравнений с несимметричным ядром	35
С. Н. Гаджиев и К. А. Шарифов. Энтальпия образования двуокиси теллура	47
Н. Г. Гусейнов. Спиновые волны в ромбических антиферромагнетиках и слабых ферромагнетиках	55
В. И. Тагиров и А. А. Кулиев. Диффузия тантала в монокристаллическом германии	65
Х. М. Халилов. Некоторые итоги исследования вязкости жидкостей	69
М. А. Багиров, Г. В. Вечхайзер, Ч. М. Джуварлы, Э. М. Эпштейн. Распределение температуры и некоторые условия устойчивости горения при термическом воздействии на нефтеносный пласт	77
Р. М. Вагабов. Исследование фильтрационных свойств пористого бетона	89
М. Ю. Вагабов. Установление критических скоростей сдвига наносов	97
Д. Р. Дадашев. О выборе числа ступеней и передаточных чисел в коробках передач легковых автомобилей	107
В. И. Есьман. Характеристика длительности энергетических затихий ветра в Азербайджанской ССР	115
Н. Б. Кадиров. К вопросу определения момента трения и нагрузочной способности подшипников скольжения	123
М. Т. Абасов, А. М. Кулиев. О разработке газонефтяных месторождений на истощение	131
Н. А. Мамедзаде. Графический прием спрямления характеристики отнесенных приростов ГЭС в точках разрыва ее непрерывности	147
Р. К. Назиров, И. П. Кулиев, А. М. Ибрагимов, Л. С. Алимедов. Обрастание стальных конструкций в морской воде и учет его при проектировании морских нефтепромысловых сооружений	151

Азәрбајчан ССР Елмләр Академијасынын ашағыдакы журналларына 1962-чи ил үчүн АБУНӘ ГӘБУЛУ ДАВАМ ЕДИР

„АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН МӘ'РУЗӘЛӘРИ“

Илдә 12 нөмрә чыхыр.
Иллик абунә гижмәти 4 манат 80 гәпикдир.
Һәр нөмрәнин гижмәти 40 гәпикдир.

„АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ“

„Азәрбајчан ССР Елмләр Академијасынын Хәбәрләри“ ашағыдакы серијалар үзрә чыхыр:

1. Кеолокија-чографија елмләри вә нефт серијасы (илдә 6 нөмрә).
2. Физика-ријазийат вә техника елмләри серијасы (илдә 6 нөмрә).
3. Биолокија вә тибб елмләри серијасы (илдә 12 нөмрә)
4. Ичтимаи елмләр серијасы (илдә 12 нөмрә).

Һәр нөмрәнин гижмәти 80 гәпикдир.

„АЗӘРБАЈЧАН КИМЈА ЖУРНАЛЫ“

Илдә 6 нөмрә чыхыр.
Иллик абунә гижмәти 4 манат 80 гәпикдир.
Һәр нөмрәнин гижмәти 80 гәпикдир.

Абунә „Сојузпечат“ вә бүтүн почта
шө'бәләри тәрәфиндән гәбул олунур.

АЗӘРБАЈЧАН ССР
ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫ НӘШРИЈАТЫ

Чапа имзаланмыш I/III 1962-чи ил. Қағыз форматы 70×108¹/₁₆. Қағыз вәрәги 5,12.
Чап вәрәги 14,04. Нәс.-нәшријат вәрәги 12,28. ФГ 06838. Сифариш 30. Тиражы 650.
Гижмәти 80 гәп.

Азәрбајчан ССР Елмләр Академијасы Мәтбәәси, Бақы, Фәһлә проспекти, 96.

ПРОДОЛЖАЕТСЯ ПОДПИСКА

на 1962 год

на следующие журналы:

„ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР“

12 номеров в год.

Стоимость годовой подписки 4 руб. 80 коп.

Цена отдельного номера 40 коп.

„ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР“

**Журнал „Известия Академии наук
Азербайджанской ССР“**

выходит по сериям:

1. ГЕОЛОГО-ГЕОГРАФИЧЕСКИХ НАУК И НЕФТИ (6 номеров в год)
2. Физико-математических и технических наук (6 номеров в год)
3. БИОЛОГИЧЕСКИХ И МЕДИЦИНСКИХ НАУК (12 номеров в год).
4. ОБЩЕСТВЕННЫХ НАУК (12 номеров в год).

Цена отдельного номера 80 коп.

„Азербайджанский химический журнал“

6 номеров в год.

Стоимость годовой подписки 4 руб. 80 коп.

Цена каждого номера 80 коп.

Подписка принимается уполномоченными „Союзпечати“ и во всех почтовых отделениях.

**ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК
АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР**