17-169

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

ХӘБӘРЛӘРИ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-РИЈАЗИЈЈАТ ВӘ ТЕХНИКА ЕЛМЛӘРИ СЕРИЈАСЫ

☆

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

2

1961

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕА НӘШРИЈЈАТЫ
ИЗДАТЕЛЬСТВО АН АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
БАКЫ—БАКУ

П 30899
ЦЕНТРАЛЬНАЯ НАУЧНАЯ
БИБЛИОТЕКА
АН Киргизской ССР

РЕДАКСИЈА ҺЕЈ'ӘТИ: З. И. Хәлилов (редактор), Һ. Б. Абдуллајев, С. М. Гулијев (редактор мүавини), С. Ә. Әләскәров, А. Ә. Әфәндизадә, И. И. Ибраһимов, Һ. Ф. Султанов, Ч. М. Чуварлы, Ә. М. Мәммәдов (мәс'ул катиб).

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: З. И. Халилов (редактор), Г. Б. Абдуллаев, С. А. Алескеров, Ч. М. Джуварлы, И. И. Ибрагимов, С. М. Кулиев (зам. редактора), Г. Ф. Султанов, А. А. Эфендизаде, А. М. Мамедов (ответственный секретарь).

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазијјат вә техника елмләри серијасы, 1961, № 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1961, № 2

Г. Н. АГАЕВ

О НАУЧНОЙ И НАУЧНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ АКАДЕМИКА З. И. ХАЛИЛОВА

Недавно отмечалось пятидесятилетие со дня рождения и тридцатилетие научно-педагогической деятельности одного из крупнейших советских математиков, доктора физико-математических наук, профессора, заслуженного деятеля науки, академика Академии наук Азербайджанской ССР Заида Исмайловича Халилова.

Вся научная и научно-педагогическая деятельность З. И. Халилова и вся его сознательная жизнь глубоко связаны с претворением в жизнь величественной программы нашей родной Коммунистической партии по развитию культуры и науки в Советском Азербайджане.

Никогда и ни в каком обществе ученые не участвовали так близко в созидательном труде народа, как в нашей социалистической действительности. И никогда и ни в одном другом строе не выросло так много талантливых ученых, как в нашем социалистическом обществе. В недрах народных масс всегда и во все времена были таланты, но они не проявлялись так широко, как это происходит в эпоху социализма и строительства коммунизма. Одним из таких талантов, вышедших из недр народа, является З. И. Халилов.

З. И. Халилов родился 14 января 1911 г. в гор. Тбилиси. Там же получил среднее образование и окончил в 1929 г. Педагогический техникум. В этом же году он переезжает в Баку и поступает на математическое отделение Азербайджанского государственного университета имени В. И. Ленина.

До революции было всего три азербайджанца с высшим физико-математическим образованием (Рахимбек Меликов, Мамед Рашидович Эфендиев и Бахрам Рустамович Мирзоев). В Азербайджане не было ни одного высшего учебного заведения. Из-за отсутствия необходимых социально-экономических условий не могли развиваться физико-математические науки и подняться до того уровня, которого они достигли в то время в России и в передовых европейских странах.

Лишь ленинская национальная политика создала условия для полного расцвета науки и культуры в Азербайджане. Ярким проявлением этой политики явилось создание в Баку в 1920 г. Азербайджанского государственного университета им. В. И. Ленина (реорганизованного в 1930 г. в Педагогический институт).

С организацией университета начинается резкий подъем подготовки педагогических кадров с физико-математическим образованием для средних и высших учебных заведений республики.

В 30-х годах в связи с расширением сети высших учебных заведений сильно увеличивается потребность в преподавателях вузов и научных работниках в области физико-математических наук.

С восстановлением Азербайджанского государственного университета в 1934 г. и организацией в этом же году сектора физики в Азербайджанском филиале Академии наук СССР зарождаются научно-исследовательские учреждения по физико-математическим наукам.

З. И. Халилов, еще будучи студентом, проявил склонность к научной работе и активно участвовал в научной жизни Института. Личная инициатива и горячее стремление З. И. Халилова к творческой работе в области математики всегда были в центре внимания и поддержки его учителей, одним из которых был основоположник математического образования в Азербайджане, питомец Петербургского университета профессор М. Р. Эфендиев.

З. И. Халилов, еще будучи студентом, с 1930 г. начал свою педагогическую деятельность преподавателем математики на рабфаке Азербайджанского Краснознаменного нефтяного института.

Окончив в 1932 г. математическое отделение Азербайджанского педагогического института им. В. И. Ленина, З. И. Халилов в том же году становится доцентом на кафедре высшей математики и теоретической механики Тбилисского института инженеров железнодорожного транспорта им. В. И. Ленина. Одновременно он читал лекции в Закавказском институте инженеров электросвязи и в Тбилисском государственном университете.

В эти годы им были прочитаны различные курсы. Кроме лекций по математическим дисциплинам он с большим мастерством читал также курсы физики, механики и теоретической электротехники. И в своей дальнейшей научной и педагогической работе З. И. Халилов сохранил интерес к прикладным вопросам науки.

Наряду с педагогической работой З. И. Халилов усердно работал над повышением своего научного уровня, над овладением современными методами математики. Склонность к научной деятельности и одаренность сблизили его с тбилисской математической школой, возглавляемой крупнейшим ученым, академиком Николаем Ивановичем Мусхелишвили.

З. И. Халилов вместе с многочисленными учениками Н. И. Мусхелишвили активно участвовал в научных семинарах по математической теории упругости, по интегральным и дифференциальным уравнениям, теории функций комплексного переменного и т. д.

В 1937 г. З. И. Халилов поступает в аспирантуру Тбилисского математического института. Первое время его научным руководителем был известный немецкий математик Стефан Бергман, эмигрировавший из фашистской Германии в Советский Союз. З. И. Халилов работал под руководством С. Б. Бергмана в области теории функций многих переменных. После отъезда С. Б. Бергмана из Советского Союза научным руководителем З. И. Халилова стал академик Николай Иванович Мусхелишвили.

В апреле 1940 г. З. И. Халилов успешно защищает кандидатскую диссертацию на тему: «Задача Клебша и ее обобщение», посвященную исследованию напряженного состояния толстых пластин при определенных граничных условиях. Этой же теме был посвящен доклад З. И. Халилова на Всесоюзной конференции по теории упругости в 1940 г. в гор. Тбилиси. Указанная работа была высоко оценена присутствующими крупными советскими учеными.

После защиты кандидатской диссертации З. И. Халилов еще с большей энергией посвящает себя научной работе. Он исследует динамическую устойчивость эллиптической плоской упругой пластины, находящейся под действием продольных периодических сил [7].

Свою большую научную деятельность он сочетает с научно-организационной работой, будучи в 1939—1940 гг. заместителем директора Армяно-Азербайджанского учительского Института в Тбилиси.

По приглашению Азербайджанского государственного университета им. С. М. Кирова и Азербайджанского педагогического Института им. В. И. Ленина З. И. Халилов в 1940 г. переезжает на постоянную работу в Баку.

С 1940 по 1959 г. З. И. Халилов работал сначала доцентом, а затем заведующим кафедрой теоретической механики университета. В Баку З. И. Халилов сразу же включается в подготовку высококвалифицированных кадров и в интенсивную научно-исследовательскую работу.

Вопрос подготовки и роста научных кадров и организация научно-исследовательских работ в области математики был в то время первостепенным вопросом, вопросом государственного значения.

В январе 1942 г. начинается деятельность З. И. Халилова в Азербайджанском филиале Академии наук СССР. В то время он был единственным математиком в Секторе физики. В апреле 1942 г. он назначается руководителем секции теоретической физики и математики, в составе которой был проф. В. А. Тартаковский, Р. Г. Гасанов, М. А. Джавадов и др. Эта секция стала тем ядром, из которого впоследствии вырос Институт математики и механики Академии наук Азербайджанской ССР.

В секции проводилась большая научно-исследовательская работа в области теории дифференциальных уравнений, современной алгебры, теоретической физики и дифференциальной геометрии.

Успешная деятельность секции привела к выделению ее в 1944 г. в самостоятельный сектор Азербайджанского филиала Академии наук СССР.

Руководя этим сектором, З. И. Халилов получил возможность сосредоточить в этом первом Азербайджанском научном математическом центре молодых специалистов. В секторе в то время работали также Я. Б. Лопатинский и А. И. Гусейнов. В секторе имелось 10 аспирантов, из них 9 работали под руководством З. И. Халилова.

Задача организации самостоятельного научного центра в Азербайджане была связана с преодолением многих трудностей. Нужно было не только преодолеть вековую отсталость от передовой научно-исследовательской мысли, но и занять достойное место в передовых рядах ученых, математической науки. Надо было творить в современных областях математики, имеющих теоретическую важность и практическую значимость. Вот с какими трудностями боролись наши математики в период образования научных центров в республике.

З. И. Халилов ясно видел и всесторонне осознавал основные пути развития передовой математической науки в Азербайджане. В этот период оформились те основные направления математической науки в Азербайджане, которые в настоящее время получили такое большое развите и признание во всесоюзном масштабе. К числу этих направлений относятся линейный и нелинейный функциональный анализ с приложениями к дифференциальным и интегральным уравнениям, теория функций и неевклидова геометрия.

Характерной чертой научной деятельности З. И. Халилова является сочетание глубоких исследований в абстрактных областях математики с практически важными прикладными задачами.

В синтезе этих двух проблем под руководством З. И. Халилова зародилась ведущая отрасль современной математики в нашей республике — функциональный анализ и его применения.

Поэтому развитие функционального анализа в нашей республике является направляющим для математической мысли наших ученых. Неслучайно, что первый учебник по функциональному анализу в Советском Союзе написан именно в Азербайджане З. И. Халиловым. И это в то время, когда функциональный анализ подвергался различным нападкам. Функциональный анализ обвиняли в «топологической замкнутости, алгебраическом формализме и трансфинитной имаппликабельности». Наряду с Москвой, Ленинградом, Украиной, Баку стал центром успешного развития функционального анализа.

В области классической теории дифференциальных уравнений З. И. Халилов получил научные результаты, заслуживающие большого внимания. Им было проведено качественное исследование решений полигармонических уравнений и их применения в решении различных задач теории упругости и математической физики.

После защиты кандидатской диссертации З. И. Халиловым был получен ряд ценных результатов по теории общих краевых задач для систем линейных полигармонических уравнений [16]. Для таких систем З. И. Халилов получил ряд законченных научных результатов по общему комплексному представлению регулярных вещественных решений при помощи голоморфных функций [14]. Им также рассмотрена общая краевая задача, когда наивысшие порядки производных, входящих в граничные условия, превосходят наивысший порядок производных, входящих в дифференциальные уравнения [24].

З. И. Халилов также исследовал зависимость решения краевых задач от параметра, входящего в коэффициенты уравнений и граничных условий; рассмотрено применение к общей задаче об изгибе опертых упругих пластин [25].

Эти исследования вошли в докторскую диссертацию З. И. Халилова, защищенную им с успехом 3 июня 1946 г. на Ученом Совете Тбилисского государственного университета им. И. В. Сталина. Научные результаты этой диссертации прочно вошли в золотой фонд математической литературы по краевым задачам и являются ценным вкладом в теорию краевых задач.

Основные научные статьи и сообщения по указанным вопросам публиковались в журналах Академии наук СССР и Академии наук Азербайджанской ССР.

З. И. Халилов является первым математиком в нашей республике, получившим степень доктора физико-математических наук. Его круг научных интересов после защиты докторской диссертации намного расширился. Кроме классических задач его заинтересовали абстрактные задачи, охватывающие классические задачи теории интегральных и дифференциальных уравнений.

В 1946 г. З. И. Халиловым было рассмотрено интегральное уравнение Фредгольма с ядром, линейным относительно параметра. В частности, З. И. Халиловым установлены условия, при которых рассматриваемое им интегральное уравнение имеет собственное значение. З. И. Халилов изучал также спектр таких интегральных уравнений [18].

Данное исследование является развитием теории интегрального уравнения Фредгольма и прочно вошло в математическую науку. Например, это отмечено в IV томе «Курса высшей математики» акад. В. И. Смирнова.

В 1943—1950 гг. З. И. Халилов исследовал общую краевую задачу для изотропной, упругой плоской пластинки с опертыми краями. Результаты опубликованы в журналах Академии наук Азербайджанской ССР [8] и, наконец, в самом завершенном виде опубликованы в работе [35]. Эта статья была переведена на английский язык и издана в Нью-Йорке в 1953 г. Американским математическим обществом.

Результаты З. И. Халилова по решению математической задачи изгиба и колебания опертых пластин являются в мировой математической литературе наиболее полными. Они вошли в монографию акад. Н. И. Мусхелишвили «Некоторые математические задачи теории упругости», вышедшую в 1954 г.

Результаты, полученные по исследованию колебания пластины, находящейся под действием продольных сил, вошли в известную монографию В. Б. Болотина «Динамическая устойчивость упругих систем», опубликованную в 1956 г. В этой работе найдены достаточно точно зоны устойчивости пластин.

После слияния Института физики и Сектора математики в 1947 г. З. И. Халилов был назначен руководителем отдела математики Института физики и математики.

В отделе математики под научным руководством и при непосредственном участии З. И. Халилова разрабатывались проблемы теории линейных и нелинейных операторов и их применение к задачам для интегральных, дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений.

В тематику отдела вошли также конкретные задачи физики и техники, как например, распространение волн в жидких средах в связи с изучением реверберационных помех в сейсморазведке на нефть.

В 1950 г. З. И. Халилов назначен директором Института физики и математики Академии наук Азербайджанской ССР и одновременно руководителем отдела математики Института. З. И. Халилов интенсивно работает в деле конкретизации научной тематики Института, пополнения и усиления отделов и лабораторий молодыми, способными научными кадрами, окончившими аспирантуру в Москве, Ленинграде и других научных центрах Советского Союза.

Наряду с большой административной и научно-организационной деятельностью в Институте З. И. Халилов вел также огромную работу по подготовке кадров, причем не только для Института, но и для нужд других научных учреждений и вузов. З. И. Халилов никогда и ни при каких обстоятельствах не отрывался от научной работы и это его самое высокое качество, которое может служить примером для молодых ученых. Он всегда передавал свои знания молодым научным работникам и строго требовал от них держать высоко знамя науки, быть трудолюбивыми.

В 1947—1950 гг. З. И. Халилов разработал абстрактную теорию сингулярных уравнений, которая, как частный случай, содержит теорию одномерных сингулярных интегральных уравнений, получившую большое развитие в исследованиях грузинских математиков. Эта работа после опубликования в «Известиях Академии наук СССР» получила широкий отклик среди математиков как у нас, так и за рубежом [26, 28].

Используя эту работу, математик из Нигерии Ф. В. Аткинсон разработал теорию нормальной разрешимости линейных уравнений в нормированных пространствах.

З. И. Халилов и его ученики развили теорию линейных сингулярных уравнений в нормированных кольцах, которая вошла в его обширную монографию «Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах», изданную в 1949 г. Издательством Академии наук Азербайджанской ССР. Эта монография содержит самые лучшие достижения

мировой литературы по теории уравнений в абстрактных пространствах.

Теория линейных сингулярных уравнений З. И. Халилова была затем развита в разных направлениях и работах советских математиков М. А. Гольдмана, И. Ц. Гохберга, Ю. И. Черского и немецкого математика Х. Шефера.

В 1950—1952 гг. З. И. Халилов исследовал задачу Коши для операторных дифференциальных уравнений относительно функции со значениями из произвольного пространства Банаха [38, 43]. Эта работа явилась одним из первых исследований задачи с начальными данными в наиболее общих рассмотрениях. Правильность такого общего подхода подтвердилась дальнейшим ходом развития функционального анализа и его применений к дифференциальным уравнениям и задачам математической физики. На данном этапе решение операторных уравнений относительно искомой функции со значениями из пространства Банаха в мировой математической литературе является одной из самых актуальных задач. Ею занимаются крупнейшие математики мира.

В связи с изучением элементарных частиц с различными массами, зарядами и спинами З. И. Халилов рассмотрел задачу с начальными данными для бесконечной системы дифференциальных уравнений в частных производных и нашел критерий корректности постановки задачи Коши [41, 42].

Результаты этих исследований были доложены З. И. Халиловым на Всесоюзном совещании по дифференциальным уравнениям в 1952 г. в Москве.

В 1952—1954 гг. З. И. Халилов дал метод решения смешанных задач для гиперболических и параболических уравнений с неразделяющимися переменными [51, 52, 54]. Предложенный метод состоит в том, что решение смешанной задачи ищется в виде разложения по собственным функциям «главной части» оператора при заданных граничных условиях. Указанный метод позволяет использовать редукцию и приближенно решить смешанную задачу.

Метод З. И. Халилова широко применяется различными авторами в их исследованиях. Например, в работах ростовского математика Коробейника, ученика З. И. Халилова Мамедова-Хайями в их кандидатских диссертациях.

В 1953 г. З. И. Халилов решил краевую задачу для уравнения смешанного типа (уравнение Лаврентьева—Бицадзе) методой сеток [47, 48]. Конечно-разностный метод З. И. Халилова для уравнения смешанного типа является мощным орудием ученых, работающих в области прикладной математики; этот метод был далее развит другими исследователями, в частности, профессором Ленинградского университета им. Жданова О. А. Ладыженской и В. Г. Карамановым в его кандидатской диссертации. Полученные результаты приводятся в известной монографии А. В. Бицадзе «Уравнения смешанного типа», 1959.

В 1954 г. З. И. Халиловым рассмотрены несамосопряженные операторы, «близкие» к самосопряженным; изучена структура спектра таких операторов [58]. Результаты З. И. Халилова по спектральной теории несамосопряженных операторов имеют выход как в теорию линейных интегральных уравнений, так и в спектральную теорию дифференциальных уравнений. Результаты этих исследовний были доложены на III Всесоюзном математическом съезде [61].

З. И. Халилов в своих математических иследованиях всегда учитывал их прикладное значение. Им решена общая задача теории фильтрации газов и газированных нефтей. Найдены условия, при которых процесс последовательных приближений решения сходится [53].

Полученные З. И. Халиловым результаты доложены на Всесоюзном совещании по вторичным методам добычи нефти в Баку в мае 1954 г.

Следует отметить, что задача фильтрации газированной нефти приводит к задаче об определении двух функций, связанных двумя уравнениями. Для первой функции даны начальные и граничные условия (смешанная задача), а для второй функции дано только начальное условие (задача Коши). Такого типа задачи, насколько нам известно, ранее в литературе не рассматривались [64].

Позднее, в 1955 г. З. И. Халиловым была предложена конечно-разностная схема для решения задачи фильтрации газированной нефти. По этой схеме впоследствии были проведены вычисления на машине «Урал—1».

В 1955—1959 гг. З. И. Халилов исследовал обобщенное решение смешанной задачи для гиперболических уравнений, а также установил условия, при которых обобщение решение задачи становится классическим, он изучал также слабые решения этих уравнений. Эти результаты З. И. Халиловым доложены в 1958 г. на Всесоюзном совещании по дифференциальным уравнениям в Ереване.

В 1959 г. З. И. Халилов возвращается к исследованию операторных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах и получает весьма интересные результаты в эволюционном уравнении относительно ограниченности и устойчивости решений таких уравнений. Эти результаты были в 1959 г. доложены З. И. Халиловым на V Всесоюзной конференции по функциональному анализу и его применению [73].

З. И. Халилов по представлению крупнейших советских ученых — академиков В. И. Смирнова, Н. И. Мусхелишвили, С. Л. Соболева, И. Н. Векуа и многих других видных математиков, а также ряда научных и общественных организаций был избран в 1955 г. действительным членом Академии наук Азербайджанской ССР. В 1957 г. академик З. И. Халилов избирается вице-президентом Академии наук Азербайджанской ССР.

Будучи вице-президентом, З. И. Халилов много сделал для организации исследований в области физико-математических и технических наук в Азербайджане.

В связи с реорганизацией структуры Академии наук республики З. И. Халилов в 1959 г. избирается академиком-секретарем Отделения физико-математических и технических наук. На этом посту З. И. Халилов работает и в настоящее время.

З. И. Халилов является крупным специалистом и организатором математических наук не только в нашей республике, но и за ее пределами. Он был членом оргкомитета Третьего Всесоюзного математического съезда в 1956 г. в Москве, а также является членом оргкомитета предстоящего Четвертого Всесоюзного математического съезда, который состоится в Ленинграде летом 1961 г.

З. И. Халилов является членом Национального комитета СССР по теоретической и прикладной механике.

З. И. Халилов активно участвует во всех важнейших событиях математической жизни СССР. Принимает участие в координации научно-исследовательской работы по математике по линии Президиума Академии наук СССР, являясь одновременно председателем физико-математической секции Координационного Совета при Академии наук республики.

З. И. Халилов держит тесный научный контакт с виднейшими учеными научно-исследовательских учреждений и вузов в части планирования и развития исследований в области математики.

Даже в условиях этой огромной научной и научно-организационной загруженности З. И. Халилов не отрывается от педагогической работы. Он вел и ведет в Азербайджанском государственном университете различные теоретические и прикладные курсы по математике и механике.

З. И. Халилов недавно завершил капитальный труд — «Аналитические и функциональные методы решения краевых задач». Им опубликовано более 70 статей в периодических изданиях.

З. И. Халилов вложил огромный труд и энергию в дело подготовки высококвалифицированных специалистов. Им подготовлено 22 кандидата физико-математических наук, которые успешно работают в научных учреждениях и вузах, республики, а также Москвы, Ленинграда, Ашхабада, Севастополя.

Под научным руководством и непосредственном участии З. И. Халилова в трех отделах Института математики и механики Академии наук Азербайджанской ССР в течение ряда лет разрабатывается проблема — «Теория линейных и нелинейных операторов и их применения». Под руководством З. И. Халилова в Институте функционирует постоянно-действующий научный семинар.

За выдающиеся заслуги в деле развития науки и культуры в Азербайджане Президиумом Верховного Совета Азербайджанской ССР З. И. Халилову присвоено звание Заслуженного деятеля науки Азербайджанской ССР.

За безупречный труд З. И. Халилов награжден орденом «Трудового Красного Знамени», орденом «Знак Почета» и тремя медалями.

З. И. Халилов активно участвует в общественной жизни республики, является депутатом Бакинского Городского Совета. Он вложил также много труда и энергии в дело распространения научных знаний в массах.

Велики достижения в области точных наук у нас, в Советском Союзе. Трудами ученых-математиков сделан огромный вклад в технический прогресс, в освоение космоса.

На настоящем этапе развития науки математические методы глубоко проникают в самые различные проблемы техники, биологии, химии, экономики, медицины, лингвистики и изучения законов мышления.

Советская математика занимает передовые позиции в мире.

Научное творчество З. И. Халилова является неотъемлемой частью той большой научно-исследовательской работы, которая ведется в Советском Союзе.

Развитие математических наук в Азербайджане является гарантией технического прогресса в нашей республике.

З. И. Халилов в настоящее время находится в расцвете своих сил и знаний. В заключение хочется пожелать Заиду Исмайловичу Халилову долгих лет жизни, больших творческих успехов на благо нашей социалистической Родины.

Список

научных трудов З. И. Халилова

1. Аналитическая геометрия (учебное пособие для втузов (на азербайджанском языке). Изд. ЗИИПС, 1933.

2. О решении уравнения колебания сжатой пластинки методом комплексного представления. Труды сектора физики АзФАН СССР, вып. II, 1942.

3. Новый метод решения уравнения колебаний упругих систем. «Изв. АзФАН СССР», 1942, № 4.

4. Решение уравнения колебания сжатой пластинки. «Изв. АзФАН СССР», 1942, № 4.

5. Решение бесконечной системы интегральных уравнений Вольтерра, «Изв. АзФАН СССР, 1942, № 7.

6. Об одной оценке функций комплексных переменных в области с исключительной поверхностью. Труды АГУ им. С. М. Кирова, 1942.

7. Динамическая устойчивость эллиптической пластинки под действием продольных периодических сил. Труды АГУ имени С. М. Кирова, 1942.

8 Решение общей задачи изгиба опертой упругой пластинки, «Изв. АзФАН СССР», 1943, № 1.

9. Об одном методе определения собственных функций и собственных значений. «Изв. АзФАН СССР», 1943, № 5.

10. О некоторых вопросах теории краевых задач для линейного эллиптического дифференциального уравнения второго порядка. «Изв. АзФАН СССР», 1945, № 5.

11. Общее комплексное представление решений системы полигармонических уравнений. «Изв. АН Азерб. ССР», 1945, № 10.

12. Об одном методе решения граничных задач для эллиптического дифференциального уравнения. «Изв. АзФАН СССР», 1945, № 1.

13. Об одном общем методе решения задачи о собственных значениях теории, колебания двухмерной упругой системы. Труды Сектора математики АН Азерб. ССР, т. 1, 1945.

14. Краевые задачи для обобщенных полигармонических уравнений. «Изв. АН Азерб. ССР», 1945, № 9.

15. Об интегральном уравнении Фредгольма с ядром, линейным относительно параметра. Труды Сектора математики АН Азерб. ССР, т. II, 1946.

16. Общая краевая задача для системы обобщенных полигармонических уравнений. «ДАН СССР», 1946, т. 51, № 3.

17. Об одном общем методе решения задач о собственных значениях теории колебания двумерной упругой системы. Труды Ин-та физики и математики АН Азерб ССР, 1947.

18. Об интегральном уравнении Фредгольма с ядром, линейным относительно параметра. «ДАН СССР», 1946, т. 54, № 7.

19. Линейные сингулярные уравнения в нормированных кольцах. «ДАН Азерб. ССР», 1947, № 8.

20. Развитие математических наук в СССР за 30 лет. «Изв. АН Азерб. ССР», 1947, № 10.

21. Линейные сингулярные уравнения в нормированных кольцах. «ДАН СССР», 1947, № 8.

22. Об основах теории функций комплексного переменного со значениями, принадлежащими унитарному кольцу. «ДАН Азерб. ССР», 1947, т. XI, № 11.

23. Линейные сингулярные уравнения в унитарном кольце, «ДАН Азерб. ССР», 1947, т. III, № 5.

24. Краевые задачи для эллиптических уравнений. «Изв. АН СССР», 1947, № 11.

25. Краевые задачи для эллиптических уравнений. «Изв. АН Азерб. ССР», 1947, № 8.

26. Линейные уравнения в нормированном кольце. «ДАН СССР», 1948, т. 60, № 7.

27. Линейные сингулярные уравнения в унитарном кольце. Труды Ин-та физики и математики, АН Азерб. ССР, т. III, 1948.

28. Линейные сингулярные уравнения в нормированном кольце. «Изв. АН СССР, серия математическая», 1949, № 13.

29. Основы функционального анализа. Изд. АГУ им. С. М. Кирова, 1949.

30. Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах Изд. АН Азерб. ССР, 1949.

31. Краевые задачи для эллиптических уравнений. «Изв. АН Азерб. ССР», 1947, № 8.

32. Об одном напряженном состоянии упругих тел. «Изв. АН Азерб. ССР», 1949, № 4.

33. О краевых задачах для линейного эллиптического дифференциального уравнения второго порядка. Труды Ин-та физики и математики АН Азерб. ССР, 1949.

34. Линейные сингулярные уравнения в унитарном кольце. «Матем. сб», 1949, . 25. (67), № 2.

35. Решение общей задачи изгиба опертой упругой пластинки. Прикладная математика и механика, т. 14, вып. 4. Изд. АН Азерб. ССР, 1950.

36. Развитие математических наук в Азербайджане за 30 лет. «Изв. АН Азерб. ССР», № 7, 1950.

37. Тезисы докладов на сессии, посвящается 750-летию со дня рождения известного азербайджанского ученого Магоммеда Насирэддина Туси. (Под ред. З. И. Халилова). Изд. АН Азерб. ССР, 1951.
38. Задача Коши для операторного уравнения с частными производными. «ДАН Азерб. ССР», 1952, т. 8, № 6.
39. Решение задачи колебания конечной струны в среде с переменным коэффициентом сопротивления. «ДАН Азерб. ССР», 1952, № 7.
40. Об одном методе решения смешанных задач. «ДАН СССР», 1952, т. 83, № 5.
41. Задача Коши для бесконечной системы дифференциальных уравнений в частных производных. «ДАН СССР», 1952, т. 84, № 2.
42. Решение задачи Коши для бесконечной системы дифференциальных уравнений. Труды Ин-та физики и математики АН Азерб. ССР, т. 4—5, 1952.
43. Задача Коши для операторного уравнения с частными производными. «ДАН СССР», 1952, т. 85, № 5.
44. Задача Коши для операторного уравнения с частными производными. «ДАН Азерб. ССР», 1952, № 5.
45. Основы теоретической механики (динамики точки), (на азерб. яз.). Изд. АГУ им. С. М. Кирова. 1955.
46. Приближение решений краевых задач для общих эллиптических систем. Труды Ин-та физики и математики АН Азерб. ССР, 1953.
47. Решение задачи для уравнения смешанного типа методом сеток. «ДАН Азерб. ССР», 1953, т. IX, № 4.
48. Решение задачи для уравнения смешанного типа методом сеток. Труды Ин-та физики и математики АН Азерб. ССР, т. VI, 1951.
49. К теории одного метода решения смешанных задач. «ДАН Азерб. ССР», 1953, т. IX, № 8.
50. К теории одного метода решения смешанных задач. «Изв. АН Азерб. ССР», 1953, № 7.
51. К методу разложения по собственным функциям главной части уравнения в решении смешанных задач. «ДАН Азерб. ССР», 1954, № 3.
52. К методу разложения по собственным функциям главной части уравнения в решении смешанных задач. «ДАН Азерб. ССР», 1954, № 4.
53. Решение общих задач о неустановившихся фильтрациях газа и газированной жидкости. «ДАН Азерб. ССР», 1954, № 8.
54. К теории метода разложения по собственным функциям главной части уравнения. Труды АГУ им. С. М. Кирова, т. IV, серия физико-математическая, 1954.
55. Квадратура круга. Изд АН Азерб. ССР, 1954.
56. Расцвет науки и культуры Украины. Труды АГУ, вып. 3, 1954.
57. Как люди дошли до настоящей математики. Детюниздат, Баку, 1955.
58. Исследование спектра и теорема разложения для некоторого класса несамосопряженных операторов. «Уч. зап. АГУ им. С. М. Кирова», вып. 1, 1955.
59. Решение смешанной задачи для параболической системы, Труды Ин-та физики и математики АН Азерб. ССР, т. 7, 1955.
60. Основы теоретической механики, ч. I. Изд-во АГУ, 1955.
61. О дискретности невещественной части спектра несамосопряженного оператора. Труды Третьего Всесоюзного математического съезда, т. I, М., 1956.
62. Об исследовании асимптотической устойчивости решений граничных задач для уравнения с частными производными. «ДАН Азерб. ССР», 1956, т. XII, № 6.
63. Решение задач фильтрации газированной нефти методом сеток. «ДАН Азерб. ССР», т. XII, № 4.
64. Решение основной математической задачи фультрации газированной нефти. Труды Третьего Всесоюзного математического съезда, т. I, 1956.
65. Об исследовании асимптотической устойчивости решений граничных задач для уравнений с частными производными. «ДАН Азерб. ССР», 1956, т. XII, № 6.
66. О математических трудах Насирэддина Туси. Изд. АГУ, 1956.
67. Об одном применении теории операторного уравнения с частными производными. «ДАН Азерб. ССР», 1957, т. XIII, № 5.
68. О состоянии и перспективах разработки координируемых в республике проблем в области физико-математических наук. Труды I научной сессии Совета Координации АН Азерб. ССР, 1957.
69. Развитие физико-математических наук в Советском Азербайджане. «Изв. АН Азерб. ССР», 1957, № 10.
70. Словарь математических терминов. Изд. АН Азерб. ССР, 1958.
71. О разложении по собственным функциям. Труды Ин-та физики и математики АН Азерб. ССР, т. 8, 1959.
72. Об устойчивости решений эволюционного уравнения с неограниченным оператором. «ДАН Азерб. ССР», т. 17, вып. 2, 1961.
73. Об устойчивости решений уравнения в банаховом пространстве «ДАН СССР», 1961, т. 137, № 4.

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазијјат вә техника елмләри серијасы, 1961, № 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1961, № 2

А. М. ГУСЕЙНБЕКОВА

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ И СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ САМОСОПРЯЖЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕПРЕРЫВНО-БОЛЬШИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В статье дано асимптотическое разложение собственных функций и собственных значений обыкновенного самосопряженного дифференциального оператора второго порядка, причем коэффициент при самой функции на узком отрезке, быстро изменяясь, становится большим в подинтервале, точнее содержит малый параметр ε в отрицательной степени.

Для простоты изложения рассматриваем оператор на интервале $[-1, +\infty)$.

Наша задача состоит в нахождении асимптотического разложения по параметру ε собственных функций и собственных значений оператора

$$L_\varepsilon y_\varepsilon \equiv -\frac{d^2 y_\varepsilon}{dx^2} + c_\varepsilon(x) y_\varepsilon, \tag{1}$$

где

$$c_\varepsilon(x) = \begin{cases} c^-(x) & -1<x<0 \quad bD^{-*} \\ \dfrac{c(x,\varepsilon)}{\varepsilon^2} & 0<x<\varepsilon \quad bD_\varepsilon \\ \dfrac{c^+(x)}{\varepsilon^2} & \varepsilon<x<+\infty \quad bD^* \end{cases} \tag{2}$$

$$c(x,\varepsilon) = c_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon c_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \cdots \tag{3}$$

$$c^-(x) \geqslant 0, \qquad c^+(x) \geqslant p_0 > 0, \qquad c_0 \not\equiv 0, \tag{4}$$

---

* Интервалы $(-1, 0)$, $(0, \varepsilon)$, (ε, ∞) в дальнейшем обозначаются соответственно D^-, D_ε, D^+.

при условиях „склейки“

$$y_\varepsilon|_{x=-0}=y_\varepsilon|_{x=+0},\qquad \left.\frac{dy_\varepsilon}{dx}\right|_{x=-0}=\left.\frac{dy_\varepsilon}{dx}\right|_{x=+0}; \tag{5}$$

$$y_\varepsilon|_{x=\varepsilon-0}=y_\varepsilon|_{x=\varepsilon+0},\qquad \left.\frac{dy_\varepsilon}{dx}\right|_{x=\varepsilon-0}=\left.\frac{dy_\varepsilon}{dx}\right|_{x=\varepsilon+0} \tag{6}$$

и при граничных условиях

$$y_\varepsilon|_{x=-1}=0,\qquad y_\varepsilon|_{x=+\infty}=0. \tag{7}$$

Выражаясь языком квантово механики, мы будем рассматривать только такие уровни энергии λ_ε, для которых механическая частица может находиться лишь в конечной области пространства, а именно в интервале $(-1,0)$.

Отсюда следует, что волновые функции, описывающие состояние частицы, принадлежат к дискретному спектру оператора L_ε.

Разлагая коэффициенты $c^+(x)$ по формуле Тейлора по степеням $x_1=x-\varepsilon$ и заменяя $\frac{x_1}{\varepsilon}=t$, найдем второе расщепление оператора L_ε в окрестности точки $x=\varepsilon$ со стороны D^+ в виде

$$L_\varepsilon v\equiv\varepsilon^{-2}\left\{-\frac{d^2v}{dt^2}+c^+(0)v+\varepsilon[c^{+\prime}(0)+c^{+\prime}(0)t]v+\cdots\right\}, \tag{8}$$

$$L_\varepsilon v\equiv\varepsilon^{-2}(M_0+\varepsilon M_1+\cdots)v,\quad bD^+ \tag{9}$$

где

$$M_0 v\equiv-\frac{d^2v}{dt^2}+c^+(0)\,v. \tag{10}$$

Функция v зависит от t, т. е. $v=v(t)$.

Далее, заменяя $\frac{x}{\varepsilon}=t_1$ и учитывая разложение (3) для $c(x,\varepsilon)$, найдем аналог второго расщепления оператора L_ε в D_ε в виде

$$L_\varepsilon W\equiv\varepsilon^{-2}\left[-\frac{d^2W}{dt_1^2}+c_0(t_1)W+\varepsilon c_1(t_1)W+\cdots\right]\quad bD_\varepsilon \tag{11}$$

Функция W зависит от t_1, т. е. $W=W(t_1)$.

В силу условия (4) $c^+(0)>0$, $c_0(t_1)>0$.

Асимптотическое разложение i-го собственного значения $\lambda_{i\varepsilon}$ оператора L_ε будем искать в виде,

$$\lambda_{i\varepsilon}=\mu_0+\varepsilon\mu_1+\cdots, \tag{12}$$

а разложение соответствующей собственной функции $y_{i\varepsilon}$ оператора L_ε в виде

$$y_{i\varepsilon}=\omega_0+\varepsilon\omega^2+\cdots+\varepsilon^m\omega_m+\cdots\quad bD^-, \tag{13}$$

$$y_{i\varepsilon}=W_0+\varepsilon W_1+\cdots+\varepsilon^m W_m+\cdots\quad bD_\varepsilon, \tag{14}$$

$$y_{i\varepsilon}=v_0+\varepsilon v_1+\cdots+\varepsilon^m v_m+\cdots\quad bD^+. \tag{15}$$

Для нахождения неизвестных μ_0, $\mu_1,\ldots$ в формуле (12) ω_0, $\omega_1,\ldots,\omega_n,\ldots$, W_0, $W_2,\ldots,W_n,\ldots$, v_0, $v_1,\ldots,v_n,\ldots$ в формулах (13),

(14), (15) подставляем эти разложения в уравнения для собственной функции

$$0\equiv(L_\varepsilon-\lambda_{i\varepsilon}I)y_{i\varepsilon}=\left[-\frac{d^2}{dx^2}+c^-(x)-(\mu_0+\varepsilon\mu_1+\cdots)I\right](\omega_0+\varepsilon\omega_1+\cdots)bD^-, \tag{16}$$

$$0\equiv(L_\varepsilon-\lambda_{i\varepsilon}I)y_{i\varepsilon}=\left[\varepsilon^{-2}\left(-\frac{d^2}{dt_1^2}+c_0(t_1)+\varepsilon c_1(t_1)+\cdots\right)-\right.$$
$$\left.-(\mu_0+\varepsilon\mu_1+\cdots)I\right](W_0+\varepsilon W_1+\cdots)\quad bD_\varepsilon \tag{17}$$

$$0=(L_\varepsilon-\lambda_{i\varepsilon}I)y_{i\varepsilon}=[\varepsilon^{-2}(M_0+\varepsilon M_1+\cdots)-$$
$$-(\mu_0+\varepsilon\mu_1+\cdots)I](v_0+\varepsilon v_1+\cdots)\quad bD^+ \tag{18}$$

и в условиях „склейки“

$$\omega_0+\varepsilon\omega_1+\cdots+\varepsilon^m\omega_m+\cdots|_{x=-0}=W_0+\varepsilon W_1+\cdots+\varepsilon^m W_m+\cdots|_{x=+0}=$$
$$=W_0+\varepsilon W_1+\cdots+\varepsilon^m W_m+\cdots|_{t_1=+0} \tag{19}$$

$$\frac{d\omega_0}{dx}+\varepsilon\frac{d\omega_1}{dx}+\cdots+\varepsilon^m\frac{d\omega_m}{dx}+\cdots\Big|_{x=-0}=\frac{dW_0}{dx}+\cdots+\varepsilon^m\frac{dW_m}{dx}+\cdots\Big|_{x=+0}=$$
$$=\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{dW_0}{dt_1}+\cdots+\varepsilon^{m-1}\frac{dW_m}{dt_1}\right|_{t_1=0} \tag{20}$$

$$W_0+\varepsilon W_1+\cdots+\varepsilon^m W_m+\cdots|_{t_1=1}=W_0+\varepsilon W_1+\cdots+\varepsilon_m W_m+\cdots|_{x=\varepsilon-0}=$$
$$=v_0+\varepsilon v_1+\cdots+|_{t=+0} \tag{21}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{dW_0}{dt_1}+\frac{dW_1}{dt_1}+\cdots+\varepsilon^{m-1}\frac{dW_m}{dt_1}+\cdots\Big|_{t_1=1}=$$
$$=\frac{dw_0}{dx}+\varepsilon^m\left.\frac{dw_m}{dx}\right|_{x=\varepsilon-0}$$
$$=\frac{dv_0}{dx}+\cdots+\left[\varepsilon^m\frac{dv_m}{dx}+\cdots\right|_{x=\varepsilon+0}=\frac{1}{\varepsilon}\frac{dv_0}{dt}+\cdots\Big|_{t=0} \tag{22}$$

а также в граничные условия

$$\omega_0+\varepsilon\omega_1+\cdots+\varepsilon^m\omega_m+\cdots|_{x=-1}=0, \tag{23}$$

$$v_0+\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon^m v_m+\cdots|_{t=+\infty}=0. \tag{24}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε в выражениях (16), (17), (18), (19), (20), (21), (22), (23), (24), получаем систему уравнений и граничных условий для неизвестных ω_0, w_0, $v_0,\ldots,\omega_m$, w_m, $v_m,\ldots$

$$-\frac{d^2\omega_0}{dx^2}+c^-(x)\omega_0-\mu_0\omega_0=0, \tag{25}$$

$$\omega_0|_{x=-1}=0,\qquad \omega_0|_{x=-0}=W_0|_{t_1=+0}, \tag{26}$$

$$-\frac{d^2\omega_1}{dx^2}+c^-(x)\omega_1-\mu_0\omega_1=\mu_1\omega_0, \tag{27}$$

$$\omega_1|_{x=-1}=0,\qquad \omega_1|_{x=-0}=W_1|_{t_1=+0}. \tag{28}$$

$$-\frac{d^2\omega_k}{dx^2}+c^-(x)\omega_k-\mu_0\omega_k=\mu_1\omega_{k-1}+\cdots+\mu_k\omega_0. \tag{29}$$

$$\omega_к|_{x=-1}=0, \quad \omega_к|_{x=-0}=W_к|_{t_1=+0}, \tag{30}$$

$$-\frac{d^2W_0}{dt_1^2}+c_0(t_1)W_0=0, \tag{31}$$

$$-\frac{d^2W_1}{dt_1^2}+c_0(t_1)W_1=-c_1(t_1)W_0 \tag{32}$$

$$-\frac{d^2W_к}{dt_1^2}+c_0(t_1)W_к=-c_1(t_1)W_{к-1}-\cdots-c_к(t_1)W_0+$$

$$+\mu_0W_{к-2}+\cdots+\mu_{к-2}W_0, \tag{34}$$

$$M_0v_0=0, \tag{35}$$

$$M_0v_1=-M_1v_0, \tag{36}$$

$$M_0v_к=-M_1v_{к-1}-\cdots-M_кv_0+\mu_0v_{к-2}+\cdots+\mu_{к-2}v_0 \tag{37}$$

$$\left.\frac{dW_0}{dt_1}\right|_{t_1=0}=0, \quad \left.\frac{dW_1}{dt_1}\right|_{t_1=0}=\left.\frac{d\omega_0}{dx}\right|_{x=0}, \ldots, \left.\frac{dW_к}{dt_1}\right|_{t_1=0}=\left.\frac{d\omega_{к-1}}{dx}\right|_{x=0} \tag{38}$$

$$W_0|_{t_1=1}=v_0|_{t=+0}, \quad W_1|_{t_1=1}=v_1|_{t=+0}, \quad W_к|_{t_1=1}=v_к|_{t=+0} \tag{39}$$

$$\left.\frac{dW_0}{dt_1}\right|_{t_1=1}=\left.\frac{dv_0}{dt}\right|_{t=0}, \ldots, \left.\frac{dW_к}{dt_1}\right|_{t_1=1}=\left.\frac{dv_к}{dt}\right|_{t=+0} \tag{40}$$

$$\omega_0|_{x=-1}=0, \ldots, \omega_к|_{x=-1}=0 \tag{41}$$

$$v_0|_{t=+\infty}=0, \qquad v_к|_{t=+\infty}=0 \tag{42}$$

Из этих условий мы должны определить неизвестные

$$\mu_0, \ldots, \mu_к, \ldots, \ \omega_0, \ W_0, \ v_0, \ldots, \omega_к, \ W_к, \ v_к$$

Начнем с решения задачи

$$-\frac{d^2v_0}{dt^2}+c^+(0)v_0=0, \tag{43}$$

$$v_0|_{t=+\infty}=0.$$

Решая ее, находим

$$v_0=ce^{-\sqrt{c^+(0)}\,t} \tag{45}$$

откуда получаем

$$\left.\frac{dv_0}{dt}\right|_{t=0}+\sqrt{c^+(0)}\,v_0|_{t=0}=0. \tag{46}$$

Учитывая первые условия (39), (40), из (46) получаем граничное условие для W_0 в виде

$$\left.\frac{dW_0}{dt_1}\right|_{t_1=1}+\sqrt{c^+(0)}\,W_0|_{t_1=1}=0. \tag{47}$$

Решая уравнение (31), т. е. уравнение

$$-\frac{d^2W_0}{dt_1^2}+c_0(t_1)W_0=0, \tag{48}$$

при условиях

$$\left.\frac{dW_0}{dt_1}\right|_{t_1=0}=0, \qquad \left.\frac{dW_0}{dt_1}\right|_{t_1=1}+\sqrt{c^+(0)}\,W_0|_{t_1=1}=0. \tag{49}$$

находим

$$W_0\equiv 0. \tag{50}$$

Зная $W_0\equiv 0$, в силу (21), из (45) находим v_0, т. е.

$$v_0\equiv 0 \tag{51}$$

После того как найдено $W_0=0$, нам становится известно граничное условие для ω_0 в виде

$$\omega_0|_{x=-0}=W|_{t_1=+0}\equiv 0, \tag{52}$$

т. е. ω_0 получается как решение следующей задачи

$$-\frac{d^2w_0}{dx^2}+c^-(x)\omega_0-\mu_0\omega_0=0, \tag{53}$$

$$\omega_0|_{x=-1}=0, \qquad \omega_0|_{x=-0}=0. \tag{54}$$

Известно, что оператор

$$L_0y\equiv-\frac{d^2y}{dx^2}+c^-(x)\,y, \tag{55}$$

при краевых условиях

$$y|_{x=-1}=0, \qquad y|_{x=0}=0 \tag{56}$$

имеет дискретный спектр.

Под L_0 мы понимаем оператор, заданный формулой (55) и действующий на функции, заданные лишь на отрезке $[-1,0]$ и обращающиеся в нуль на обоих его концах.

Пусть $\lambda_{10}<\lambda_{20}<\ldots\lambda_{i0}<\ldots$—упорядоченные в порядке возрастания собственные значения задачи (55) (56) и $\{U_{i0}\}$—полная ортонормированная (в смысле L_2) система собственных элементов этой задачи, причем мы для простоты изложения предполагаем, что эти собственные значения λ_{i0} $(i=1, 2\ldots)$ простые.

Следовательно, согласно (53), (54), μ_0 совпадает с собственным значением оператора (55) при условиях (56) (допустим с i-м), т. е. $\mu_0=\lambda_{i0}$, а ω_0 совпадает с соответствующей собственной функцией, т. е. $\omega_0=U_{i0}$. Следующее приближение к $y_{i\varepsilon}$ найдем таким образом: Решая уравнение

$$-\frac{d^2v_1}{dt^2}+c^+(0)v_1=0, \tag{57}$$

при условии

$$v_1|_{t=+\infty}=0 \tag{58}$$

находим

$$v_1=c_1e^{-\sqrt{c^+(0)}t}. \tag{59}$$

Из (59) имеем

$$\left.\frac{dv_1}{dt}\right|_{t=0}+\sqrt{c^+(0)}\,v_1|_{t=0}=0, \tag{60}$$

откуда, в силу (39), (40) получаем граничное условие для W_1 в виде

$$\left.\frac{dW_1}{dt_1}\right|_{t_1=1}+\sqrt{c^+(0)}\,W_1|_{t_1=1}=0. \tag{61}$$

П 30899
ЦЕНТРАЛЬНАЯ НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА

Решая уравнение

$$-\frac{d^2W_1}{dt_1^2}+c_0(t_1)W_1=-c_2(t_1)W_0=0 \tag{62}$$

при условиях

$$-\left.\frac{dW_1}{dt_1}\right|_{t_1=0}=\left.\frac{d\omega_0}{dx}\right|_{x=-0},\qquad \left.\frac{dW_1}{dt_1}\right|_{t_1=1}+\sqrt{c^+(0)}\,W_1|_{t_1=1}=0. \tag{63}$$

находим W_1.

Разрешимость этой задачи вытекает из того, что мы „не находимся на спектре".

После того как найдено W_1, мы можем найти $c_1=v_1|_{t=0}=W_1|_{t_1=1}$ [см (59)] и тем самым найдем v_1;

$$v_1=W_1|_{t_1=1}\,e^{-\sqrt{c^+(0)}t}. \tag{64}$$

После нахождения W_2, в силу (28), нам становятся известными граничные условия для ω_1 в виде

$$\omega_1|_{x=0}=W_1|_{t_1=0},\qquad \omega_1|_{x=-1}=0.$$

Следовательно, для неизвестных μ_1 и ω_1 получается следующая задача:

$$L_1\omega_1\equiv-\frac{d^2\omega_1}{dx^2}+c^-(x)\omega_1-\mu_0\omega_1=\mu_1\omega_0, \tag{65}$$

$$\omega_1|_{x=-1},\qquad \omega_1|_{x=0}=W_1|_{t_1=0}. \tag{66}$$

Так как однородная задача, соответствующая задаче (65), (66) имеет не нулевое решение, то задача (65), (66) „находится на спектре".

Выберем μ_1 так, чтобы задача (65), (66) была разрешима. Для того, чтобы неоднородная краевая задача (65), (66) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mu_1=-W_1|_{t_1=0}\cdot\left.\frac{d\omega_0}{dx}\right|_{x=0}. \tag{67}$$

Это условие получается из формулы Грина

$$(L_1\omega_1,z_0)-(\omega_1,L_1^*z_0)=\omega_1\left.\frac{dz_0}{dx}\right|_{x=-1}^{x=0}-\left.\frac{d\omega_1}{dx}\cdot z_0\right|_{x=-1}^{x=0}, \tag{68}$$

примененной к искомому решению ω_1 и к решению z_0 сопряженной однородной задачи

$$L_1^*z_0=0,\qquad z_0|_{x=0}=z_0|_{x=-1}=0. \tag{69}$$

Так как оператор L_1 самосопряженный, то можно взять $z_0=\omega_0$.

После такого выбора μ_1 задача (65), (66) стала разрешимой. Находим ее общее решение в виде

$$\omega_1=\tilde{\omega}_1+c_1\omega_0. \tag{70}$$

Выберем теперь c_1 так, чтобы ω_1 была ортогональна к ω_0, т. е. должны быть

$$(\omega_1,\omega_0)=0. \tag{71}$$

Отсюда находим

$$c_1=-(\tilde{\omega}_1,\omega_0). \tag{72}$$

После такого выбора c_1 ω_1 определяется однозначно.

Допустим, что мы уже нашли $\omega_0,\ \omega_1,\ldots,\omega_{k-1},\ \mu_0,\ldots,\mu_{k-1}$ $W_0,\ W_1,\ldots,W_{k-1}$. $v_0,\ v_1,\ldots v_{k-1}$, причем $v_i(i=1,2,\ldots)$ функции типа пограничного слоя вида

$$v_i(t)=p_i(t)e^{-\nu t},\qquad t=\frac{x}{\varepsilon}, \tag{73}$$

где $p_i(t)$—многочлены по t.

После того, как найдено ω_{k-1}. мы можем определить W_k, v_k.

Действительно, решая уравнение

$$-\frac{d^2v_k}{dt^2}+c^+(0)v_k=-M_1v_{k-1}-\cdots-M_{k-1}v_k+\mu_0v_{k-2}+\cdots+\mu_{k-3}v_1=$$
$$=p_{k-1}\,e^{-\sqrt{c^+(0)}t}, \tag{74}$$

при условии

$$v_k|_{t=+\infty}=0, \tag{75}$$

находим

$$v_k=tp_{k-1}(t)e^{-\sqrt{c^+(0)}t}+c_ke^{-\sqrt{c^+(0)}t}, \tag{76}$$

где $tp_{k-1}(t)e^{-\sqrt{c^+(0)}t}$ —частное решение неоднородного уравнения. Из (76) имеем

$$\left.\frac{dv_k}{dt}\right|_{t=0}+\sqrt{c^+(0)}v_k|_{t=0}=p_{k-1}(0). \tag{77}$$

Отсюда, в силу (39) и (40), получаем граничное условие для W_k в виде

$$\left.\frac{dW_k}{dt_1}\right|_{t_1=1}+\sqrt{c^+(0)}W_k|_{t_1=1}=p_{k-1}(0). \tag{79}$$

Решая уравнение

$$-\frac{d^2W_k}{dt_1^2}+c_0(t_1)W_k=-c_1(t_1)W_{k-1}-\cdots-c_k(t_1)W_0+$$
$$+\mu_0W_{k-2}+\cdots+\mu_{k-3}W_1 \tag{80}$$

при условиях

$$\left.\frac{dW_k}{dt_1}\right|_{t_1=0}=\left.\frac{d\omega_{k-1}}{dx}\right|_{x=0},\qquad \left.\frac{dW_k}{dt_1}\right|_{t_1=1}+\sqrt{c^+(0)}\,W_k|_{t_1=1}=p_{k-1}(0) \tag{81}$$

находим W_k.

Зная W_k, исходя из условия (76), находим

$$W_k|_{t_1=1}=v_k|_{t=+0}=c_k \tag{82}$$

и тем самым определена v_k:

$$v_k=\bar{t}p_{k-1}(t)\,e^{-\sqrt{c^+(0)}t}+W_k|_{t_1=1}\cdot e^{-\sqrt{c^+(0)}t}=p_k(t)e^{-\sqrt{c^+(0)}t}, \tag{83}$$

где $p_k(t)$—многочлен по t.

После того, как определена W_k, учитывая формулу (30), находим граничные условия.

$$\omega_k|_{x=-1}=0,\qquad \omega_k|_{x=0}=W_k|_{t_1=0}. \tag{84}$$

Решая уравнение (29), т. е.

$$-\frac{d^2\omega_k}{dx^2}+c^-(x)\omega_k-\mu_0\omega_k=\mu_1\omega_{k-1}+\cdots+\mu_k\omega_0 \tag{85}$$

при условиях

$$\omega_к|_{x=-1}=0, \qquad \omega_к|_{x=0}=W_к|_{t_1=0} \tag{86}$$

находим неизвестные $\mu_к$ и $\omega_к$.

Для разрешимости этой задачи должно выполняться некоторое дополнительное условие, а именно, условие

$$\mu_к=-W_к|_{t_1=0}\cdot\frac{d\omega_0}{dx}\Big|_{x=-0}, \tag{87}$$

которое мы получаем из формулы Грина, используя уравнение (85) и граничные условия (86).

После такого выбора $\mu_к$ задача (85), (86) становится разрешимой. Решая ее находим общее решение в виде

$$\omega_к=\tilde{\omega}_к+c_к\omega_0, \tag{88}$$

где $\tilde{\omega}_к$—частное решение задачи (85), (86).

Теперь выберем $c_к$ так, чтобы $\omega_к$ была ортогональна к ω_0, т. е. должно быть

$$(\omega_к, \omega_0)=0. \tag{89}$$

Отсюда находим

$$c_к=-(\tilde{\omega}_к, \omega_0), \tag{90}$$

После выбора $c_к$, $\omega_к$ определяется однозначно.

Итак, индукция проходит, итерационный процесс можно продолжать неограниченно, если выполнены соответствующие условия гладкости данных задачи.

Обозначим

$$\lambda_{i\varepsilon,m}=\mu_0+\varepsilon\mu_1+\cdots+\varepsilon^m\mu_m, \tag{91}$$

$$y_{i\varepsilon,m}=\omega_0+\varepsilon\omega_1+\cdots+\varepsilon^m\omega_m+\varepsilon^{m+1}\alpha \quad bD^- \tag{92}$$

$$y_{i\varepsilon,m}=\varepsilon W_1+\cdots+\varepsilon^m W_m+\varepsilon^{m+1}W_{m+1}+\varepsilon^{m+2}W_{m+2} \quad bD_\varepsilon \tag{93}$$

$$y^i{}_{\varepsilon,m}=\varepsilon v_1+\cdots+\varepsilon^m v_m+\varepsilon^{m+1}v_{m+1}+\varepsilon^{m+2}v_{m+2} \quad bD^+, \tag{94}$$

где ω_0, W_1, v_1,..., ω_m, W_{m+1}, v_{m+1} найдены указанным выше способом а v_{m+2} и W_{m+2} определяются как решения следующих задач:

$$-\frac{d^2v_{m+2}}{dt^2}+c^+(0)v_{m+2}=-M_1v_{m+1}-\cdots-M_{m+1}v_1+$$
$$+\mu_0v_m+\cdots+\mu_{m-1}v_1, \tag{95}$$

$$\frac{dv_{m+2}}{dt}\Big|_{t=0}=0, \qquad v_{m+2}|_{t=+\infty}=0, \tag{96}$$

$$-\frac{d^2W_{m+2}}{dt_1^2}+c_0(t_1)W_{m+2}=-c_1(t_1)W_{m+1}-\cdots-c_{m+1}(t_1)W_1+$$
$$+\mu_0W_m+\cdots+\mu_{m-1}W_1, \tag{97}$$

$$\frac{dW_{m+2}}{dt_1}\Big|_{t_1=0}=0, \qquad W_{m+2}|_{t_1=0}=v_{m+2}|_{t=0}. \tag{98}$$

Функция

$$\Phi=\begin{cases}\omega_0+\varepsilon\omega_1+\cdots+\varepsilon^m\omega_m & bD^-\\ \varepsilon W_1+\cdots+\varepsilon^m W_m+\varepsilon^{m+1}W_{m+1}+\varepsilon^{m+2}W_{m+2} & bD_\varepsilon\\ \varepsilon v_1+\cdots+\varepsilon^m v^m+\varepsilon^{m+1}v_{m+1}+\varepsilon^{m+2}v_{m+2} & bD^+\end{cases}$$

непрерывна в точке $x=\varepsilon$, если ее доопределить в этой точке, и имеет непрерывную производную в точках $x=0$, $x=\varepsilon$, если производную доопределить в точках $x=0$, $x=\varepsilon$, но сама фуркция Ф терпит разрыв в точке $x=0$ порядка $O(\varepsilon^{m+1})$.

Этот разрыв равен $\varepsilon^{m+1}W_{m+1}+\varepsilon^{m+2}W_{m+2}|_{t_1=0}$. Поэтому в (92) мы добавили еще слагаемое $\varepsilon^{m+1}\alpha$, определенное лишь в D^- и удовлетворяющее в точке $x=0$ условию:

$$\varepsilon^{m+1}\alpha|_{x=0}=\varepsilon^{m+1}(W_{m+1}+\varepsilon W_{m+2})|_{t_1=0}, \quad \frac{d\alpha}{dx}\Big|_{x=0}=0. \tag{99}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1.

Если $\lim\limits_{x=+\infty}\dfrac{c^+(x)}{\varepsilon^2}=\dfrac{c_0}{\varepsilon^2}$, *то на полуоси* $\lambda<\dfrac{c_0}{\varepsilon^2}$ *спектр оператора* L_ε *может быть только дискретным, причем все его собственные значений близки к соответствующим собственным значениям оператора* L_0, *точнее, для любого фиксированного* i *имеет место оценка*

$$|\lambda_{i\varepsilon}-\lambda_{i0}|\leqslant b_i\varepsilon^{1/2}. \tag{100}$$

Доказательство. Справедливость первой части теоремы хорошо известна [см. например, (1), (6)].

Перейдем к доказательству второй части теоремы.

Предварительно докажем, что имеет место следующее неравенство:

$$\lambda_{1\varepsilon}\leqslant\lambda_{10}, \tag{101}$$

где $\lambda_{1\varepsilon}$—первое собственное значение оператора L_ε,
а λ_{10}—первое собственное значение оператора L_0.

Действительно

$$\lambda_{1\varepsilon}=\min_{y_\varepsilon}\frac{(L_\varepsilon y_\varepsilon, y_\varepsilon)}{(y_\varepsilon, y_\varepsilon)}=\min_{y_\varepsilon}\frac{B_\varepsilon(y_\varepsilon, y_\varepsilon)}{(y_\varepsilon, y_\varepsilon)}, \tag{102}$$

$$\lambda_{10}=\min_{y_0}\frac{(L_0y_0, y_0)}{(y_0, y_0)}=\min_{y_0}\frac{B_0(y_0, y_0)}{(y_0, y_0)}, \tag{103}$$

где B_ε—квадратичная форма, определенная для функций, заданных

---

* Несмотря на то, что операторов L_ε имеет дискретный и непрерывный спектр, в силу того, что дискретный спектр лежит слева от непрерывного спектра имеет место (102), если $\lambda_{1\varepsilon}$ есть наименьшая точка дискретного спектра.

Действительно, в силу первой части теоремы

$$L_\varepsilon y_\varepsilon=\int_{\frac{c_0}{\varepsilon^2}}^{\infty}\lambda dE_\lambda y_\varepsilon+\sum_{\lambda_{i\varepsilon}<\frac{c_0}{\varepsilon^2}}\lambda_{i\varepsilon}(y_\varepsilon, y_{i\varepsilon})y_\varepsilon, \quad (y_\varepsilon, y_\varepsilon)=1,$$

$$(L_\varepsilon y_\varepsilon, y_\varepsilon)=\int_{\frac{c_0}{\varepsilon^2}}^{\infty}\lambda d(E_\lambda y_\varepsilon, y_\varepsilon)+\sum_{\lambda_{i\varepsilon}<\frac{c_0}{\varepsilon^2}}\lambda_{i\varepsilon}(y_\varepsilon, y_{i\varepsilon})^2.$$

Отсюда и видно, что

$$\lambda_{1\varepsilon}=\min(L_\varepsilon y_\varepsilon, y_\varepsilon).$$
$$(y_\varepsilon, y_\varepsilon)=1$$

на интервале $[-1, +\infty)$, для которых первая производная может иметь разрыв в точке $x=0$, а B_0—квадратичная форма, определенная для функций, заданных лишь в D^- и обращающихся в нуль на обоих концах интервала. Поэтому в качестве допустимой функции сравнения для определения $\lambda_{1\varepsilon}$ можно брать все допустимые функции сравнения, используемые для определения λ_{10}, продолжая их нулем в D^+.

Следовательно, класс допустимых функций сравнения для определения $\lambda_{1\varepsilon}$ шире, чем класс функций сравнения для определения λ_{10}.

Кроме того, в классе допустимых функций сравнения для определения λ_{10} выражения B_ε, B_0 принимают одинаковые значения. Отсюда и вытекает, что

$$\lambda_{1\varepsilon} \leqslant \lambda_{10}. \tag{104}$$

Далее, неравенство (104) можно записать так:

$$\lambda_{1\varepsilon} = (L_\varepsilon \tilde{y}_{1\varepsilon}, y_{1\varepsilon}) = \int_{-1}^{0} \left[\left(\frac{d\tilde{y}_{1\varepsilon}}{dx} \right)^2 + c^-(x) \tilde{y}_{1\varepsilon}^2 \right] dx +$$

$$+ \int_0^{\varepsilon} \left[\left(\frac{d\tilde{y}_{1\varepsilon}}{dx} \right)^2 + \frac{c(x,\varepsilon)}{\varepsilon^2} \tilde{y}_{1\varepsilon}^2 \right] dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \left[\left(\frac{d\tilde{y}_{1\varepsilon}}{dx} \right)^2 + \frac{c^+(x)}{\varepsilon^2} \tilde{y}_{1\varepsilon}^2 \right] dx \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_{10}. \tag{105}$$

Из (104) вытекает, что

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{c^+(x)}{\varepsilon^2} \tilde{y}_{1\varepsilon}^2 dx \leqslant \lambda_{10} \quad \text{или} \quad \|\tilde{y}_{1\varepsilon}'\|_{D^+} = O(\varepsilon), \tag{106}$$

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \left(\frac{d\tilde{y}_{1\varepsilon}}{dx} \right)^2 dx \leqslant \lambda_{10} \quad \text{или} \quad \|\tilde{y}_{1\varepsilon}'\|_{D^+} = O(1), \tag{107}$$

$$\int_0^{\varepsilon} \left(\frac{d\tilde{y}_{1\varepsilon}}{dx} \right)^2 dx \leqslant \lambda_{10} \quad \text{или} \quad \|\tilde{y}_{1\varepsilon}'\|_{D_\varepsilon} = O(1). \tag{108}$$

Напишем то, уравнение, из которого определяется первая собственная функция оператора L_ε

$$\frac{d^2\tilde{y}_{1\varepsilon}^-}{dx^2} + c^-(x)\tilde{y}_{1\varepsilon}^- = \lambda_{1\varepsilon}\tilde{y}_{1\varepsilon}^- \qquad \text{b}D^-, \tag{109}$$

$$-\frac{d^2\tilde{y}_{1\varepsilon}^*}{dx^2} + \frac{c(x,\varepsilon)}{\varepsilon^2}\tilde{y}_{1\varepsilon}^* = \lambda_{1\varepsilon}\tilde{y}_{1\varepsilon}^* \quad \text{b}D_\varepsilon, \tag{110}$$

$$\frac{d^2\tilde{y}_{1\varepsilon}^+}{dx^2} + \frac{c^+(x)}{\varepsilon^2}\tilde{y}_{1\varepsilon}^+ = \lambda_{1\varepsilon}\tilde{y}_{1\varepsilon}^+, \tag{111}$$

где через $\tilde{y}_{1\varepsilon}^-$ мы обозначили функцию $\tilde{y}_{1\varepsilon}$ в D^-, через $\tilde{y}_{1\varepsilon}^*$ функцию $y_{1\varepsilon}$ в D_ε, а через $\tilde{y}_{1\varepsilon}^+$ функцию $\tilde{y}_{1\varepsilon}$ в D^+,

Пусть

$$\tilde{y}_{1\varepsilon}|_{x=\varepsilon} = A_\varepsilon. \tag{112}$$

Как и в работе [5], можем оценить $\tilde{y}_{1\varepsilon}$ в точке $x=\varepsilon$ со стороны D^+ в виде

$$\tilde{y}_{1\varepsilon}|_{x=\varepsilon+0} = O(\varepsilon^{1/2}) \tag{113}$$

После того, как найдено, что $A_\varepsilon = O(\varepsilon^{1/2})$, мы из условий „склейки“ находим, что

$$\tilde{y}_{1\varepsilon}|_{x=\varepsilon-0} = O(\varepsilon^{1/2}). \tag{114}$$

Зная $\tilde{y}_{1\varepsilon}|_{x=\varepsilon-0} = O(\varepsilon^{1/2})$, можно определить $\tilde{y}_{1\varepsilon}$ в точке $x=0$ со стороны D_ε.

Действительно,

$$\tilde{y}_{1\varepsilon}^*(x) = \tilde{y}_{1\varepsilon}^*(\varepsilon) + \int_{\varepsilon}^{x} \frac{d\tilde{y}_{1\varepsilon}^*}{dx} dx, \qquad 0 < x < \varepsilon,$$

$$[\tilde{y}_{1\varepsilon}^*(x) - \tilde{y}_{1\varepsilon}^*(\varepsilon)]^2 = \left[\int_{\varepsilon}^{x} \frac{d\tilde{y}_{1\varepsilon}^*}{dx} dx \right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant |x-\varepsilon| \int_{\varepsilon}^{x} \left(\frac{d\tilde{y}_{1\varepsilon}^*}{dx} \right)^2 dx. \tag{115}$$

Так как $\int_{\varepsilon}^{x} \left(\frac{d\tilde{y}_{1\varepsilon}^-}{dx} \right)^2 dx = O(1)$, где $0 < x < \varepsilon$—[см. (106)] и $|x-\varepsilon| = O(\varepsilon)$,

учитывая (114), из (115) имеем

$$\tilde{y}_{1\varepsilon}^*(x) = O(\varepsilon^{1/2}), \quad \text{при } 0 < x < \varepsilon. \tag{116}$$

После того, как найдено $\tilde{y}_{1\varepsilon}|_{x=+0} = O(\varepsilon^{1/2})$, в силу условия „склейки“ находим граничное условие для уравнения (109) в виде

$$\tilde{y}_{1\varepsilon}^-|_{x=-0} = O(\varepsilon^2), \tag{117}$$

т. е. для $\tilde{y}_{1\varepsilon}^-$ получаем следующую задачу:

$$-\frac{d^2\tilde{y}_{1\varepsilon}^-}{dx^2} + c^-(x)\tilde{y}_{1\varepsilon}^- = \lambda_{1\varepsilon}\tilde{y}_{1\varepsilon}^-, \tag{118}$$

$$\tilde{y}_{1\varepsilon}^-|_{x=-1} = 0, \qquad \tilde{y}_{1\varepsilon}^-|_{x=0} = O(\varepsilon^{1/2}). \tag{119}$$

Повторяя буквально выкладки, проведенные в [5], из (118), (119) можно получить, что

$$|\lambda_{1\varepsilon} - \lambda_{10}| = O(\varepsilon^{1/2}), \tag{120}$$

$$\|\tilde{y}_{1\varepsilon} - \tilde{y}_{10}\| = O(\varepsilon^{1/2}). \tag{121}$$

Рассуждая таким образом, можно показать, что

$$(\lambda_{i\varepsilon} - \lambda_{i0}) = O(\varepsilon^{1/2}), \tag{122}$$

$$\|\tilde{y}_{i\varepsilon} - \tilde{y}_{i0}\| = O(\varepsilon^{1/2}). \tag{123}$$

Тем самым доказана теорема 1.

Теорема 2. *Пусть на интервале* $[-1, +\infty)$ *дан обыкновенный самосопряженный оператор второго порядка*

$$L_\varepsilon y_\varepsilon \equiv -\frac{d^2 y_\varepsilon}{dx^2} + c_\varepsilon(x) y_\varepsilon, \tag{124}$$

где

$$c_\varepsilon(x) = \begin{cases} c^-(x) & -1<x<0 \quad c^-(x)\geqslant 0 \\ \dfrac{c(x,\varepsilon)}{\varepsilon^2} & 0<x<\varepsilon \\ \dfrac{c^+(x)}{\varepsilon^2} & \varepsilon<x<+\infty \quad c^+(x)\geqslant p_0>0. \end{cases}$$

$$c(x,\varepsilon) = c_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon c_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \cdots \tag{125}$$

при условии „склейки“

$$y_\varepsilon|_{x=-0} = y_\varepsilon|_{x=+0}, \qquad \left.\frac{dy_\varepsilon}{dx}\right|_{x=-0} = \left.\frac{dy_\varepsilon}{dx}\right|_{x=+0}, \tag{126}$$

$$y_\varepsilon|_{x=\varepsilon-0} = y_\varepsilon|_{x=\varepsilon+0}, \qquad \left.\frac{dy_\varepsilon}{dx}\right|_{x=\varepsilon-0} = \left.\frac{dy_\varepsilon}{dx}\right|_{x=\varepsilon+0} \tag{127}$$

и при граничных условиях

$$y_\varepsilon|_{x=-1} = 0, \qquad y_\varepsilon|_{x=+\infty} = 0. \tag{128}$$

Тогда для i-го собственного значения $\lambda_{i\varepsilon}$ оператора L_ε и для соответствующей i-ой собственной функции $y_{i\varepsilon}$ этого оператора имеют место следующие асимптотические представления:

$$\lambda_{i\varepsilon} = \sum_{i=0}^{m} \varepsilon^i \mu_i + \varepsilon^{m+1}\delta_{m+1}, \qquad \mu_0 = \lambda_{i0}, \quad \delta_{m+1} = O(1), \tag{129}$$

$$y_{i\varepsilon} = y_{i\varepsilon,m} + \varepsilon^{m+1} z_{m+1}, \qquad \|z_{m+1}\| = O(1), \tag{130}$$

причем

$$y_{i\varepsilon,m} = \begin{cases} \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \cdots + \varepsilon^m \omega_m + \varepsilon^{m+1}\alpha \\ \varepsilon W_1 + \cdots + \varepsilon^m W_m + \varepsilon^{m+1} W_{m+1} + \varepsilon_{m+2} W_{m+2} \\ \varepsilon v_1 + \cdots + \varepsilon^m v_m + \varepsilon^{m+1} v_{m+1} + \varepsilon^{m+2} v_{m+2} \end{cases}$$

Здесь $\mu_0 = \lambda_{i0}$ — i-ое простое собственное значение оператора (55) при условиях (56), $\omega_0 = v_{i0}$ — соответствующая i-я собственная функция того же оператора при тех же условиях.

ω_j при $j \geqslant 1$ определяется из уравнений (85) при условиях (86). W_j при $j \geqslant 1$ определяется из уравнений (80) при условиях (81).

v_s — функции типа погранслоя погашающая невязки в выполнении условий „склейки“ в точке $x=\varepsilon$. Остаточный член имеет порядок $O(\varepsilon^{m+1})$, т. е.

$$z_m = y_{i\varepsilon} - y_{i\varepsilon,m} = \varepsilon^{m+1} z_m, \qquad \|z_m\| = O(1).$$

Доказательство теоремы проводится так же, как доказательство теоремы 2 в работе [5].

Пользуясь случаем выражаю глубокую благодарность своему руководителю М. И. Вишику за предложенную задачу и повседневное руководство.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блохинцев Д. И. Основы квантовой механики. ГТТН, 1949.
2. Вишик М. И. и Люстерник Л. А. Регулярчое вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. УМН, т. XII. выч. 5 (1957), 3—122.
3. Вишик М. И. и Люстерник Л. А. Асимптотическое поведение решений дифференциальных уравнений с большими и быстро изменяющимися коэффициентами. ДАН СССР 125, 1959, № 2, 247—250.
4. Вишик М. И. и Люстерник Л. А. Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений с большими или быстро меняющимися коэффициентами и граничными условиями, УМН. т. XV, вып. 4 (94), 1960.
5. Гусейнбекова А. М. Асимптотическое разложение собственных функций и собственных значений в задачах с потенциальной ямой. „Изв. АН Азерб. ССР“, 1960. № 6.
6. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы, ГТТН, 1954.
7. Олейник О. А. Решение основных краевых задач для уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами. ДАН СССР, 124, 1959 № 6.

А. М. Һүсејнбәјова

Кәсилмәз бөјүк әмсаллы икинчи тәртиб өз-өзүнә гошма ади диференсиал операторун мәхсуси гијмәт вә мәхсуси функсијаларынын асимптотик тәфриги

ХҮЛАСӘ

Бизим әввәлки мәгаләдә [5] $C^-(x)$ функсијасынын $\dfrac{C^+(x)}{\varepsilon^2}$ функсијасына сычрајышла кечдији һала бахылырды. Бу мәгаләдә исә бу кечидин кәсилмәз олдуғу һала бахылыр. Алынан нәтичә ашағыдакы теоремләрлә ифадә олунур.

Теорем 1. *Әкәр* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{C^+(x)}{\varepsilon^2} = \dfrac{C_0}{\varepsilon^2}$, *онда* $\lambda < \dfrac{C_0}{\varepsilon^2}$ *јарымохунда (1) операторунун спектри јалныз дискрет ола биләр, белә ки, онун бүтүн мәхсуси гијмәтләри (55) операторунун үјғун мәхсуси гијмәтләринә јахындыр, даһа доғрусу, истәнилән фиксә едилмиш і үчүн ашағыдакы гијмәт хоғрудур:*

$$|\lambda_{i\varepsilon} - \lambda_{i0}| \leqslant b_i \varepsilon^{1/2}$$

Бурада b_i ε параметриндән асылы дејилдир.

Теорем 2. (124), (126), (127) вә (128) мәсәләсинин i-чи мәхсуси гијмәти $\lambda_{i\varepsilon}$ вә үјғун мәхсуси функсијасы $y_{i\varepsilon}$ үчүн ашағыдакы асимптотик тәфриг доғрудур:

$$\lambda_{i\varepsilon} = \sum_{i=0}^{m} \varepsilon^i \mu_i + \varepsilon^{m+1}\delta_{m+1}, \quad \mu_0 = \lambda_{i0}, \quad \delta_{m+1} = O(1)$$

$$y_{i\varepsilon} = y_{i\varepsilon,m} + \varepsilon^{m+1} z_{m+1}, \quad \|z_{m+1}\| = O(1)$$

бурада

$$y_{i\varepsilon,m} = \begin{cases} \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \cdots + \varepsilon^m \omega_m + \varepsilon^{m+1}\alpha \\ \varepsilon w_1 + \cdots + \varepsilon^w w_m + \varepsilon^{m+1} w_{m+1} + \varepsilon^{m+2} w_{m+2} \\ \varepsilon v_1 + \cdots + \varepsilon^m v_m + \varepsilon^{m+1} v_{m+1} + \varepsilon^{m+2} v_{m+2} \end{cases}$$

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-рјазијјат вә техника елмләри серијасы, 1961, № 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1961, № 2

Р. Г. МАМЕДОВ

О ПОРЯДКЕ И ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ЗНАЧЕНИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫМИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

§ 1. Пусть $\{\varphi_k(r)\}_1^\infty$—последовательность функций, определенных на некотором множестве $E=\{r\}$, а r_0— предельная точка этого множества. Предположим, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(r)$ сходится абсолютно на E и

$$U_r(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(r)\cos kt\geqslant 0 \quad (r\in E \text{ и } -\pi\leqslant t\leqslant\pi).$$

Положим

$$Z_r(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t+x)U_r(t)\,dt \tag{1}$$

для каждой 2π—периодической функции $f(x)$. Известно [1], что если $\lim\limits_{r\to r_0}\varphi_1(r)=1$, то

$$\lim_{r\to r_0}Z_r(f;x)=f(x)$$

в каждой точке $t=x$ непрерывности функции $f(x)$. При этом необходимо

$$\lim_{r\to r_0}\varphi_k(r)=1 \qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Следовательно,

$$\alpha(r)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\varphi_{2k}(r)}{4k^2-1} \quad \text{и} \quad \beta(r)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\varphi_{2k+1}(r)}{(2k+1)^2} \tag{2}$$

есть бесконечно малые величины при $r\to r_0$. Из теоремы П. П. Коровкина [4] следует, что одно из условий

$$\lim_{r\to r_0}\frac{1-\varphi_1(r)}{\alpha(r)}=0 \text{ и } \lim_{r\to r_0}\frac{1-\varphi_1(r)}{\beta(r)}=0 \tag{3}$$

влечет другое.

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазијјат вә техника елмләри серијасы, 1961, № 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1961, № 2

Р. Г. МАМЕДОВ

О ПОРЯДКЕ И ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ЗНАЧЕНИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫМИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

§ 1. Пусть $\{\varphi_k(r)\}_1^\infty$ —последовательность функций, определенных на некотором множестве $E=\{r\}$, а r_0— предельная точка этого множества. Предположим, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(r)$ сходится абсолютно на E и

$$U_r(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(r)\cos kt\geqslant 0 \quad (r\in E \text{ и } -\pi\leqslant t\leqslant\pi).$$

Положим

$$Z_r(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t+x)U_r(t)\,dt \tag{1}$$

для каждой 2π—периодической функции $f(x)$. Известно [1], что если $\lim_{r\to r_0}\varphi_1(r)=1$, то

$$\lim_{r\to r_0}Z_r(f;x)=f(x)$$

в каждой точке $t=x$ непрерывности функции $f(x)$. При этом необходимо

$$\lim_{r\to r_0}\varphi_k(r)=1 \qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Следовательно,

$$\alpha(r)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\varphi_{2k}(r)}{4k^2-1} \quad \text{и} \quad \beta(r)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\varphi_{2k+1}(r)}{(2k+1)^2} \tag{2}$$

есть бесконечно малые величины при $r\to r_0$. Из теоремы П. П. Коровкина [4] следует, что одно из условий

$$\lim_{r\to r_0}\frac{1-\varphi_1(r)}{\alpha(r)}=0 \quad \text{и} \quad \lim_{r\to r_0}\frac{1-\varphi_1(r)}{\beta(r)}=0 \tag{3}$$

влечет другое.

В самом деле, для функции $\mu(t)=|\sin t|$ имеем

$$Z_r(|\sin t|;0)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t\,U_r(t)\,dt=$$

$$=\frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_{2k}(r)}{4k^2-1}\right]=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\varphi_{2k}(r)}{4k^2-1}=\frac{4}{\pi}\alpha(r). \quad (4)$$

Кроме того,

$$\alpha_r(\delta)=\frac{1}{\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}U_r(t)\,dt\leqslant\frac{1}{\pi(1-\cos\delta)}\int_{\delta<|t|<\pi}(1-\cos t)U_r(t)dt=\frac{1-\varphi_1(r)}{1-\cos\delta} \quad (5)$$

для любого $\delta>0$, так как $\frac{1-\cos t}{1-\cos\delta}\geqslant 1$ при $\delta\leqslant|t|\leqslant\pi$.

Пусть теперь удовлетворяется первое из условий (3). Тогда, из (4) и (5) получаем, что

$$\lim_{r\to r_0}\frac{\alpha_r(\delta)}{Z_r(|\sin t|;0)}=0.$$

Отсюда, в силу теоремы П. П. Коровкина [2] (или см. [4], стр. 111), имеем

$$\lim_{r\to r_0}\frac{Z_r(|t|;0)-0}{Z_r(|\sin t|;0)}=\lim_{t\to 0}\frac{|t|}{|\sin t|}=1. \quad (6)$$

Учитывая, что

$$Z_r(|t|;0)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}tU_r(t)dt=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi_{2k+1}(r)}{(2k+1)^2}=$$

$$=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-\varphi_{2k+1}(r)}{(2k+1)^2}=\frac{4}{\pi}\beta(r),$$

так как $\frac{\pi^2}{8}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$, то на основании (4) и (6) находим, что

$$\lim_{r\to r_0}\frac{\beta(r)}{\alpha(r)}=1. \quad (7)$$

Следовательно, удовлетворяется также и второе из условий (3)

$$\lim_{r\to r_0}\frac{1-\varphi_1(r)}{\beta(r)}=\lim_{r\to r_0}\frac{1-\varphi_1(r)}{\alpha(r)}\cdot\frac{\alpha(r)}{\beta(r)}=0.$$

Обратное доказывается аналогично.

Если

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

—ряд Фурье функции $f(x)$, то линейный оператор (1) может быть представлен в следующем виде:

$$Z_r(f;x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(r)(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

Это показывает, что приближение функций линейными операторами (1) можно рассматривать как положительный метод суммирования рядов Фурье. Нетрудно заметить [4], что многие методы суммирования рядов Фурье являются частными случаями этого метода суммирования.

В данной статье изучаются порядки и асимптотические значения приближения функций положительными операторами (1).

В этом направлении следует отметить работу П. П. Коровкина [5], где он устанавливает порядки приближения классов функций операторами, являющимися частными случаями оператора (1). В данной работе мы существенно опираемся на идеи и результаты этого автора.

§ 2. П. П. Коровкин [3] для линейного положительного оператора

$$K_n(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t+x)\,W_n(t)\,dt, \quad (8)$$

где

$$W_n(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\rho_k^{(n)}\cos kx\geqslant 0\ \ (-\pi\leqslant t\leqslant\pi),$$

доказал следующую теорему. Для того, чтобы имело место равенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{K_n(f;x)-f(x)}{K_n(\psi;x)-\psi(x)}=\frac{D_2f(x)}{D_2\psi(x)} \quad (9)$$

необходимо и достаточно, чтобы было верно равенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\rho_2^{(n)}}{1-\rho_1^{(n)}}=4, \quad (10)$$

где $D_2f(x)$—вторая обобщенная производная функции $f(x)$ в точке x,

$$D_2f(x)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)-2f(x)+f(x-t)}{t^2}$$

Нетрудно заметить, что эта теорема П. П. Коровкина справедлива и для более общего линейного положительного оператора (1).

Теорема 1. *Для того, чтобы имело место равенство*

$$\lim_{r\to r_0}\frac{Z_r(f;x)-f(x)}{Z_r(\psi;x)-\psi(x)}=\frac{D_2f(x)}{D_2\psi(x)} \quad (11)$$

необходимо и достаточно, чтобы было верно равенство

$$\lim_{r\to r_0}\frac{1-\varphi_2(r)}{1-\varphi_1(r)}=4 \quad (12)$$

(доказательство Коровкина повторяется для этого случая).

Из этой теоремы при условии (12) следует асимптотическое равенство

$$Z_r(f;x)-f(x)=[1-\varphi_1(r)]\,D_2f(x)+o[1-\varphi_1(r)]$$

для каждой функции $f(x)$, имеющей в точке $t=x$ вторую обобщенную производную $D_2f(x)$.

Если полагать, что

$$\varphi_k(r_n)=\begin{cases}\rho_k^{(n)}, & k\leqslant n,\\ 0, & k>n,\end{cases} \tag{13}$$

то линейный оператор (1) превращается в (8) и теорема П. П. Коровкина для оператора (8) следует из теоремы 1.

Заметим, что если функция $f(x)$ не имеет второй производной в точке x, то теорема 1 неприменима.

Теорема 2. *Пусть в точке x существуют правая и левая производные $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$ функции $f(x)\in L(-\pi,\pi)$. Если*

$$\lim_{r\to r_0}\frac{1-\varphi_1(r)}{\alpha(r)}=0, \tag{14}$$

то справедливо равенство

$$\lim_{r\to r_0}\frac{Z_r(f;x)-f(x)}{\alpha(r)}=\frac{2}{\pi}\left[f'_+(x)-f'_-(x)\right], \tag{15}$$

т. е. при $r\to r_0$ справедливо асимптотическое равенство

$$Z_r(f;x)-f(x)=\frac{2}{\pi}\left[f'_+(x)-f'_-(x)\right]\alpha(r)+o(\alpha(r)).$$

Доказательство. Положим

$$\gamma_1(t)=\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-f(x)\quad\text{и}\quad\gamma_2(t)=\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2}.$$

Функция $\gamma_1(t)$—четная, а $\gamma_2(t)$—нечетная. Очевидно, что

$$f(x+t)-f(x)=\gamma_1(t)+\gamma_2(t)$$

и поэтому

$$Z_r(f;x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\gamma_1(t)\,U_r(t)\,dt=Z_r[\gamma_1(t);0].$$

Пусть $\mu(t)=|\sin t|$, тогда

$$\lim_{t\to0}\frac{\gamma_1(t)}{\mu(t)}=\lim_{t\to0}\frac{1}{2}\left\{\frac{f(x+t)-f(x)}{|t|}+\frac{f(x-t)-f(x)}{|t|}\right\}=\frac{f'_+(x)-f'_-(x)}{2} \tag{16}$$

и на основании (4)

$$Z_r(\mu;0)=Z_r[|\sin t|;0]=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\varphi_{2k}(r)}{4k^2-1}=\frac{4}{\pi}\alpha(r). \tag{17}$$

Положим

$$\lambda_\delta(t)=\begin{cases}0, & |t|<\delta\\ 1, & |t|\geqslant\delta\end{cases}$$

для любого $\delta>0$. Теперь оценим $\alpha_r(\delta)=Z_r(\lambda_\delta)$. Очевидно,

$$\alpha_r(\delta)\leqslant\frac{1}{\pi(1-\cos\delta)}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}(1-\cos t)\,U_r(t)\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi(1-\cos\delta)}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos t)\,U_r(t)\,dt=\frac{1-\varphi_1(r)}{1-\cos\delta} \tag{18}$$

Из (17) и (18) по условию (14) следует, что

$$\lim_{r\to r_0}\frac{\alpha_r(\delta)}{Z_r(\mu;0)}=0$$

для любого $\delta>0$. Тогда по теореме П. П. Коровкина [2] (или [4]) имеем

$$\lim_{r\to r_0}\frac{Z_r(f;x)-f(x)}{Z_r(\mu;0)}=\lim_{r\to r_0}\frac{Z_r(\gamma_1;0)}{Z_r(\mu;0)}=\lim_{t\to0}\frac{\gamma_1(t)}{\mu(t)}$$

Следовательно, в силу (16) имеет место равенство

$$\lim_{r\to r_0}\frac{Z_r(f;x)-f(x)}{Z_r(\eta;0)}=\frac{f'_+(x)-f'_-(x)}{2}.$$

что и требовалось доказать.

Отметим некоторые следствия из этой теоремы.

Имея в виду равенство (13) для линейного положительного оператора (8), имеем

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\varphi_{2k}(r)}{4k^2-1}=2\sum_{k=1}^{m}\frac{1-\rho_{2k}^{(n)}}{4k^2-1}+2\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}=$$

$$=\frac{1}{2m+1}+2\sum_{k=1}^{m}\frac{1-\rho_{2k}^{(n)}}{4k^2-1}=\frac{1}{q(n)}, \tag{19}$$

где $m=\left[\frac{n}{2}\right]$. Тогда условие (14) принимает вид

$$\lim_{n\to\infty}q(n)\,[1-\rho_1^{(n)}]=0. \tag{20}$$

Отсюда получаем

Следствие 1. Если функция $f(x)$ имеет конечные правую и левую производные $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$ в точке x и удовлетворяется условие (20), то при $n\to\infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$K_n(f;x)-f(x)=\frac{f'_+(x)-f'_-(x)}{\pi}\cdot\frac{1}{q(n)}+o\left(\frac{1}{q(n)}\right) \tag{21}$$

Теорема 3. *Если функция $f(x)$ имеет конечные правую и левую производную $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$ в точке x и удовлетворяется условие (10), то справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} P(n)\,[K_n(f;x)-f(x)]=\frac{f'_+(x)-f'_-(x)}{\pi}, \tag{22}$$

где

$$\frac{1}{P(n)}=\frac{1}{2m+1}+(2m+1)(1-\rho_1^{(n)}).$$

Доказательство. П. П. Коровкин [3] доказал, что если удовлетворяется условие (10), то имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\rho_\kappa^{(n)}}{1-\rho_1^{(n)}}=\kappa^2$$

для любого $\kappa\leqslant n$. Отсюда следует, что

$$1-\rho_{2\kappa}^{(n)}=4\kappa^2\cdot(1-\rho_1^{(n)})+o\,(1-\rho_1^{(n)})$$

и поэтому

$$2\sum_{\kappa=1}^{m}\frac{1-\rho_{2\kappa}^{(n)}}{4\kappa^2-1}=(2m+1)\,(1-\rho_1^{(n)})+O\,(1-\rho_1^{(n)}).$$

Следовательно, из равенства (19) находим

$$\frac{1}{q(n)}=\frac{1}{2m+1}+(2m+1)\,(1-\rho_1^{(n)})+O(1-\rho_1^{(n)})=$$

$$=\frac{1}{P(n)}+O(1-\rho_1^{(n)})\approx\frac{1}{P(n)}.$$

Очевидно, что условие (20) удовлетворяется, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} P(n)\,[1-\rho_1^{(n)}]=0.$$

Теперь остается применить равенство (21)

Пусть

$$\Phi_r(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\,\Pi_r(t)\,dt \tag{23}$$

—оператор Пуассона, где $\Pi_r(t)=\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}$.

Теорема 4. *Если функция $f(x)\in L(-\pi,\pi)$ имеет конечные правую и левую производную $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$ в точке $t=x$, то при $r\to1$ для оператора Пуассона справедливо асимптотическое равенство*

$$\Phi_r(f;x)-f(x)=\frac{f'_+(x)-f'_-(x)}{2}\cdot\frac{1-r^2}{\pi r}\ln\frac{1+r}{1-r}+o\left[(1-r)\ln\frac{1+r}{1-r}\right]$$

или

$$\lim_{r\to1}\frac{\Phi_r(f;x)-f(x)}{(1-r)\ln\dfrac{1+r}{1-r}}=\frac{f'_+(x)-f'_-(x)}{\pi} \tag{24}$$

В самом деле, в этом случае

$$\Pi_r(t)=\frac{1}{2}+\sum_{\kappa=1}^{\infty} r^\kappa\cos\kappa t,\quad E=(0,1),\quad r_0=1,$$

и поэтому

$$\varphi_\kappa(r)=r^\kappa,\quad \alpha(r)=\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{1-r^{2\kappa}}{4\kappa^2-1}$$

С другой стороны, на основании равенства (4) находим

$$\alpha(r)=\frac{\pi}{4}\Phi_r(|\sin t|;0)=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\sin t\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}\,dt=$$

$$=\frac{1-r^2}{4r}\ln\frac{1+r}{1-r}. \tag{25}$$

Теперь нетрудно показать, что удовлетворяется условие (14):

$$\lim_{r\to1}\frac{1-r}{\alpha(r)}=\lim_{r\to1}\frac{4r(1-r)}{(1-r^2)\ln\dfrac{1+r}{1-r}}=2\lim_{r\to1}\frac{1}{\ln\dfrac{1+r}{1-r}}=0.$$

Итак, применяя теорему 2 к оператору (23), получаем равенство (24).

Известно [8], что если

$$\lim_{\rho\to1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|F(\rho e^{i\varphi})|\,d\varphi=H(f)<\infty$$

то говорят, что функция $F(z)$, аналитическая в единичном круге $|z|<1$, принадлежит классу H_1.

Г. М. Фихтенгольцем ([8], стр. 97) доказано, что если функция $F(z)$ аналитическая внутри единичного круга $|z|<1$ и $F(z)\in H_1$, то внутри этого круга она представима интегралом Пуассона:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(e^{i\varphi})\,\frac{(1-r^2)\,d\varphi}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\theta)},$$

где $F(e^{i\varphi})$—граничное значение функции $F(z)$.

Теорема 4 дает возможность установить соответствующее асимптотическое равенство для аналитических функций.

Теорема 5. *Пусть $F(z)$—аналитическая функция класса H_1 в $|z|<1$ и $F(e^{i\varphi})=\lambda(\varphi)+i\nu(\varphi)$—ее граничное значение. Если $\lambda(\varphi)$ и $\nu(\varphi)$ имеют конечные левые и правые производные $\lambda'_\pm(\varphi_0)$ и $\nu'_\pm(\varphi_0)$ в точке $\varphi=\varphi_0(z_0=e^{i\varphi_0})$, то справедливо равенство*

$$\lim_{r\to1}\frac{F(z)-F(z_0)}{(1-r)\ln\dfrac{1+r}{1-r}}=\frac{F'_+(z_0)-F'_-(z_0)}{\pi} \tag{26}$$

где $F'_+(z_0)=\lambda'_+(\varphi_0)+i\nu'_+(\varphi_0)$, $F'_-(z_0)=\lambda'_-(\varphi_0)+i\nu'_-(\varphi_0)$ и $z=re^{i\varphi_0}(0<r<1)$.

Для доказательства (26) достаточно заметить, что любая функция $F(z)\in H_1$ представима внутри единичного круга интегралом Пуассона:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\lambda(\varphi)+i\nu(\varphi)]\frac{(1-r^2)d\varphi}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\varphi_0)}$$

Применяя к реальной и мнимой части последнего интеграла теорему 4, получим равенство (26).

§ 3. Отметим некоторые применения вышедоказанных теорем.

Пусть для линейного положительного оператора (1)

$$\tau(r)\equiv\sup_{f(x)\in Z_1^*}\max_{-\pi\leqslant x\leqslant\pi}|Z_r(f;x)-f(x)|,$$

где Z_1^*—класс 2π-периодических функций $f(x)$, для которых

$$|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|\leqslant 2|t|. \tag{27}$$

Теорема 6. *Если удовлетворяется условие (14), то для линейного положительного оператора (1) справедливо равенство*

$$\lim_{r\to r_0}\frac{\tau(r)}{\alpha(r)}=\frac{4}{\pi} \tag{28}$$

Доказательство. Так как

$$Z_1(f;x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{2}U_r(t)dt$$

и $f(x)\in Z_{*1}^*$, то в силу (27) имеем

$$\tau(r)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|U_r(t)dt. \tag{29}$$

С другой стороны, для 2π-периодической функции $b(x)$, совпадающей с $|x|$ на $[-\pi,\pi]$ и входящей в Z^*_1, имеем

$$\tau(r)\geqslant\max_{(x)}|Z_r(b;x)-b(x)|\geqslant Z_r(b;0)-b(0)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|U_r(t)dt. \tag{30}$$

Следовательно, из неравенств (29) и (30) получаем

$$\tau(r)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|U_r(t)\,dt.$$

и по теореме 1 имеет место равенство:

$$\lim_{r\to r_0}\frac{\tau(r)}{\alpha(r)}=\lim_{r\to r_0}\frac{Z_r(b;r)-b(0)}{\alpha(r)}=\frac{2}{\pi}\left[b'_+(0)-b'_-(0)\right]=\frac{4}{\pi}$$

Следствие 1. Для оператора (23) Пуассона при $r\to1$ справедливо асимптотическое равенство

$$\tau(r)=\frac{2}{\pi}(1-r)\ln\frac{1+r}{1-r}+o\left[(1-r)\ln\frac{1+r}{1-r}\right]. \tag{31}$$

В самом деле, для оператора Пуассона удовлетворяется условие (14) и поэтому, на основании (25) и (28), находим

$$\lim_{r\to1}\frac{\tau(r)}{\frac{1-r}{2}\ln\frac{1+r}{1-r}}=\frac{4}{\pi}$$

Асимптотическое равенство (31) доказано И. П. Натансоном [7].

Пусть

$$A_r(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\,V_r(t)\,dt \tag{32}$$

—оператор П. П. Коровкина (см. [5]), где

$$V_r(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}r^{k^2}\cos kt.$$

Для этого оператора

$$\alpha(r)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-r^{(2k)^2}}{4k^2-1}\quad\text{и}\quad\beta(r)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-r^{(2k+1)^2}}{(2k+1)^2}.$$

П. П. Коровкин [5] показал, что

$$\beta(r)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-r}+o(1-r).$$

Отсюда следует, что удовлетворяется условие

$$\lim_{r\to1}\frac{1-r}{\beta(r)}=0.$$

Но, как нами было доказано выше, последнее условие влечет за собой

$$\lim_{r\to1}\frac{1-r}{\alpha(r)}=0,$$

т. е. удовлетворяется условие (14). Тогда по теореме 6, имеем:

$$\lim_{r\to1}\frac{\tau(r)}{\alpha(r)}=\lim_{r\to1}\frac{\tau(r)}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-r}}=\frac{4}{\pi}$$

Таким образом установлено следующее

Следствие 2. Для оператора (32) справедливо равенство

$$\lim_{r\to1}\frac{\tau(r)}{\sqrt{1-r}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}} \tag{33}$$

Равенство (33) доказано П. П. Коровкиным [5].

§ 4. Пусть $L^p(-\pi, \pi)$ есть пространство 2π-периодических функций $f(x)$, для которых

$$\|f(x)\|_p = \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Теорема 7. *Для любой функции* $f(x) \in L^p(-\pi, \pi)$ *и для линейного оператора* (*I*) *справедливо неравенство*

$$\|Z_r(f; x) - f(x)\|_p \leqslant \left[1 + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \right] \omega_p(f; \sqrt{1-\varphi_1(r)}), \quad (p \geqslant 1) \qquad (34)$$

где $\omega_p(f; \delta)$*—интегральный модуль непрерывности функции* $f(x)$ *в* $L^p(-\pi, \pi)$:

$$\omega_p(f; \delta) = \sup_{|t| \leqslant \delta} \|f(x+t) - f(x)\|_p.$$

Доказательство. Так как

$$Z_r(f; x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x)] U_r(t) \, dt,$$

то, применяя обобщенное неравенство Минковского, имеем

$$\|Z_r(f; x) - f(x)\|_p \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \omega_p(f; |t|) U_r(t) \, dt.$$

Следовательно,

$$\|Z_r(f; x) - f(x)\|_p \leqslant \omega_p(f; \sqrt{1-\varphi_1(r)}) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + \frac{|t|}{\sqrt{1-\varphi_1(r)}} \right) U_r(t) \, dt.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| U_r(t) dt \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \sin \left| \frac{t}{2} \right| U_r(t) \, dt \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{t}{2} U_r(t) \, dt \cdot \int_{-\pi}^{\pi} U_r(t) \, dt} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{1-\varphi_1(r)}, \qquad (35)$$

получаем неравенство (34).

Теорема 7 следует также из теоремы 3 заметки [6].

Теорема 8. *Если* $f(x)$ *дифференцируема на* $[-\pi, \pi]$ *и* $f'(x) \in L^p(-\pi, \pi)$ $(p \geqslant 1)$, *то для линейного оператора* (*I*) *справедливо неравенство*

$$\|Z_r(f; x) - f(x)\|_p \leqslant \left[\frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{1-\varphi_1(r)} \right] \omega_p[f'; (1-\varphi_1(r)]. \qquad (36)$$

Доказательство. Так как

$$f(x+t) - f(x) = f'(x)t + [f'(x+\theta t) - f'(x)]t \qquad (0 < \theta < 1),$$

то имеем

$$Z_r(f; x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f'(x+\theta t) - f'(x)] t U_r(t) \, dt.$$

Отсюда

$$\|Z_r(f; x) - f(x)\|_p \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \omega_p(f'; |t|) U_r(t) \, dt \leqslant$$

$$\leqslant \omega_p[f', (1-\varphi_1(r))] \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{|t|}{1-\varphi_1(r)} + 1 \right] |t| U_r(t) dt.$$

Очевидно, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t|^2 U_r(t) dt \leqslant \pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{t}{2} U_r(t) dt = \frac{\pi^3}{2} [1-\varphi_1(r)]. \qquad (37)$$

Из последнего неравенства и из (35) следует неравенство (36).

Теорема 9. *Если на* $[-\pi, \pi]$ *существует* $f'(x)$ *и* $f''(x) \in L_p$ $(-\pi, \pi)$ $(p \geqslant 1)$, *то для линейного оператора* (*I*) *справедливо неравенство*

$$\|Z_p(f; x) - f(x)\|_p \leqslant \frac{\pi^2 \|f''(x)\|_p}{4} [1-\varphi_1(r)] +$$

$$+ \frac{\pi^2}{4} \left[(1-\varphi_1(r)) + \frac{\pi}{2} \sqrt{4 - \frac{1-\varphi_2(r)}{1-\varphi_1(r)}} \right] \omega_p[f''; (1-\varphi_1(r)]. \qquad (38)$$

Доказательство. По условию теоремы имеем

$$f(x+t) - f(x) = f'(x)t + \frac{f''(x)}{2} t^2 + [f''(x+\theta t) - f''(x)] \frac{t^2}{2},$$

где $0 < \theta < 1$. Отсюда

$$\|Z_r(f; x) - f(x)\|_p \leqslant \frac{\|f''(x)\|_p}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 U_r(t) \, dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \omega_p(f''; |t|) t^2 U_r(t) dt \leqslant \frac{\pi \|f''(x)\|_p}{4} \int_{-\pi}^{\pi} (1-\cos t) U_r(t) dt +$$

$$+ \omega_p[f''; 1-\varphi_1(r)] \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{|t|^3}{1-\varphi_1(r)} + |t|^2 \right) U_r(t) \, dt.$$

Следовательно, имея в виду (37), находим

$$\|Z_r(f; x) - f(x)\|_p \leqslant \frac{\pi^2 \|f''(x)\|_p}{4}]1-\varphi_1(r)] +$$

$$+ \omega_p[f''; (1-\varphi_1(r)] \left\{ \frac{\pi^3 [1-\varphi_1(r)]}{4\pi} + \frac{1}{2\pi[1-\varphi_1(r)]} \int_{-\pi}^{\pi} |t|^3 U_r(t) dt \right\} \qquad (39)$$

Кроме того

$$\int_{-\pi}^{\pi}|t|^3 U_r(t)\,dt \leqslant \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}t^2 U_r(t)\,dt\cdot\int_{-\pi}^{\pi}t^4 U_r(t)\,di} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\pi^2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\left|\frac{t}{2}\right|U_r(t)dt\cdot\pi^4\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4\left|\frac{t}{2}\right|U_r(t)\,dt} =$$

$$=\pi^3\sqrt{\frac{\pi[1-\varphi_1(r)]}{2}\cdot\frac{\pi}{8}[3-4\varphi_1(r)+\varphi_2(r)]},$$

т. е. справедливо неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi}|t|^3 U_r(t)dt \leqslant \frac{\pi^4}{4}[1-\varphi_1(r)]\sqrt{4-\frac{1-\varphi_2(r)}{1-\varphi_1(r)}}. \qquad (40)$$

На основании (39) и (40) получается требуемое неравенство (38) Из неравенства (38) следует, что условие (12), т. е. условие

$$\lim_{r\to r_0}\frac{1-\varphi_2(r)}{1-\varphi_1(r)}=4$$

влияет на скорость приближения дважды дифференцируемой функции линейными положительными операторами (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Коровкин П. П. О сходимости линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций. ДАН СССР 90, № 6 (1953), 961—964.
2. Коровкин П. П. О порядке приближения функций линейными положительными операторами. ДАН СССР, 114, № 9 (1957), 1158—1161.
3. Коровкин П. П. Об одном асимптотическом свойстве положительных методов суммирования рядов Фурье и о наилучшем приближении функций класса z_2 линейными положительными полиномиальными операторами. УМН, т. XIII, вып. 6 (1958), 99—103.
4. Коровкин П. П. Линейные операторы и теория приближений. М., 1959.
5. Коровкин П. П. О наилучшем приближении функций класса z_2 некоторыми линейными операторами. ДАН СССР, 129, № 3 (1959), 513—515.
6. Мамедов Р. Г. О порядке приближения функций линейными положительными операторами. ДАН СССР, 128, № 4 (1959), 674—676.
7. Натансон И. П. О порядке приближения непрерывной 2π-периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона. ДАН СССР, 72, № 1 (1950), 11—14.
8. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М.-Л., 1950.

Р. Һ. Мәммәдов

Функсијаларын хәтти мүсбәт операторларла јахынлашмасынын тәртиби вә асимптотик гијмәти һаггында

ХҮЛАСӘ

Фәрз едәк ки, $E=\{r\}$ һәр һансы чохлуг вә r_0 онун лимит нөгтәсидир. $\{\varphi_k(r)\}_1^\infty$, E чохлуғу үзәриндә тә'јин олунмуш функсијалар ардычыллығы олсун. Тутаг ки, $\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(r)$ сырасы E чохлуғу үзәриндә мүтләг јығыландыр вә

$$U_r(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(r)\cos kt\geqslant 0\ (r\in E \text{ вә } -\pi\leqslant t\leqslant\pi).$$

Бу мәгаләдә 2π — периодлу функсијаларын хәтти мүсбәт(1) оператору илә јахынлашмасынын тәртиби вә асимптотик гијмәти өјрәнилир. Алынан нәтичәләр ашағыдакылардыр.

Теорем 1. (11) *бәрабәрлијинин доғру олмасы үчүн* (12) *мүнасибәтинин өдәнилмәси зәрури вә кафи шәртдир.*

Теорем 2. Тутаг ки, $f(x)\in L$ $(-\pi,\pi)$ функсијасынын x нөгтәсиндә сонлу саг вә сол $f'_+(x)$ вә $f'_-(x)$ төрәмәләри вар. Бу һалда (14) шәрти өдәниләрсә, онда (15) бәрабәрлији доғрудур.

Сонра хәтти мүсбәт (1) оператору үчүн (21) вә (22) асимптотик бәрабәрликләри исбат олунур (1-чи нәтичә вә 3-чү теорем).

Теорем 4. $f(x)\in L(-\pi,\pi)$ функсијасынын $t=x$ *нөгтәсиндә сонлу саг вә сол* $f'_+(x)$ *вә* $f'_-(x)$ *төрәмәләри варса, онда* $r\to 1$*-дә Пуассонун* (23) *оператору үчүн* (24) *бәрабәрлији доғрудур.*

4-чү теоремин көмәји илә H_1 синфинә дахил олан аналитик $F(z)$ функсијалары үчүн (26) асимптотик бәрабәрлији исбат олунур (теорем 5).

Теорем 6. (14) *шәрти өдәнилдикдә* (1) *оператору үчүн*

$$\lim_{r\to r_0}\frac{\tau(r)}{\alpha(r)}=\frac{4}{\pi}$$

бәрабәрлији доғрудур, бурада

$$\tau(r)=\operatorname{Sup}_{f(x)\in Z_1}\max_{-\pi\leqslant x\leqslant\pi}\left|Z_r(f;x)-f(x)\right|.$$

6-чы теоремдән И. П. Натансонун [7] вә П. П. Коровкинин [5] үјғун нәтичәләри хүсуси һал кими алыныр.

Нәһајәт, мәгаләдә $L^p(-\pi,\pi)$ синфинә дахил олан функсијаларын (1) оператору васитәси илә јахынлашма тәртибини мүәјјән едән (34), (36) вә (38) бәрабәрсизликләри исбат олунмушдур.

Теорем 7. *Һәр бир* $f(x)\in L^p(-\pi,\pi)$ $(P\geqslant 1)$ *функсијасы үчүн* (34) *бәрабәрсизлији доғрудур, бурада* $\omega_p(f;\delta)$ $f(x)$ *функсијасынын* $L^p(-\pi,\pi)$*-дә кәсилмәзлик модулудур.*

Теорем 8. $f(x)$ *функсијасы* $[-\pi,\pi[$ *парчасында дифференсиалланандырса вә* $f'(x)\in L^p(-\pi,\pi)$ $(P\geqslant 1)$ *оларса, онда* (36) *бәрабәрсизлији доғрудур.*

Теорем 9. $f(x)$ *функсијасынын* $[-\pi,\pi]$ *парчасында икинчи тәртиб* $f''(x)$ *төрәмәси варса вә бу төрәмә* $Z^p(-\pi,\pi)$ $(P\geqslant 1)$ *фәзасына дахилдирсә, онда* (38) *бәрабәрсизлији доғрудур.*

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазијјат вә техника елмләри серијасы, 1961, № 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1961, № 2

Г. Н. АГАЕВ

О НОРМАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В КЛАССЕ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ

В работе [3] С. Л. Соболев и М. И. Вишик предложили общий метод решения краевых задач, заключающийся в следующем: краевая задача сводится к нахождению функционала над определенным многообразием достаточно гладких функций.

В указанной работе авторы в основном наметили схему доказательства существования и единственности решения краевых задач.

В теории этих задач большое значение имеет также их нормальная разрешимость (альтернативная разрешимость), исследованию которой посвящена настоящая статья.

Мы изучаем нормальную разрешимость уравнений в классе слабых решений и полученные результаты применяем к краевым задачам для сильно эллиптических систем.

§ 1. Пусть Ω—ограниченная область вещественного эвклидова n-мерного пространства E_n.

Совокупность r-вектор-функций, определенных в Ω и непрерывных вместе со всеми частными производными порядка $\leqslant j$ в $\overline{\Omega}$, обозначим через $C^{j,r}(\overline{\Omega})$.

Множество линейных функционалов, определенных над $C^{j,r}(\overline{\Omega})$, обозначим через $(C^{j,r}(\overline{\Omega}))^*$.

Пусть $\overline{K}$ линейный замкнутый оператор, действующий из $C^{l,r}(\overline{\Omega})$ в $C^{\kappa,r}(\overline{\Omega})$ с областью определения $D_{\overline{\kappa}}$, плотной в $C^{l,r}(\overline{\Omega})$.

Расмотрим задачу A. Дан $\rho \in (C^{l,r}(\overline{\Omega}))^*$, найти $U \in (C^{\kappa,r}(\overline{\Omega}))^*$, удовлетворяюшее уравнению:

$$< U, \overline{K}\varphi > = < \rho, \varphi > \qquad (1)$$

для всех $\varphi \in D_{\overline{\kappa}}$.

В дальнейшем через $< \rho, \varphi >$ будем обозначать значение функционала ρ в точке φ.

Совокупность функционалов типа функции, входящих в $(C^{j,r}(\overline{\Omega}))^*$, обозначим через $(C^{j,r}(\overline{\Omega}))^*_{\Phi}$. Введем линейный оператор K, действующий из $(C^{\kappa,r}(\Omega)_{\Phi}$ в $(C^{l,r}(\overline{\Omega})_{\Phi}$ с областью определения D_{κ}:

$$< K\varkappa, \varphi > = < \varkappa, \overline{K}\varphi > \qquad (2)$$

для всех $\varphi \in D_{\kappa}$, $\varkappa \in D_{\kappa}$.

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-рижазиҹҹат вә техника елмләри серијасы, 1961, № 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1961, № 2

Г. Н. АГАЕВ

О НОРМАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В КЛАССЕ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ

В работе [3] С. Л. Соболев и М. И. Вишик предложили общий метод решения краевых задач, заключающийся в следующем: краевая задача сводится к нахождению функционала над определенным многообразием достаточно гладких функций.

В указанной работе авторы в основном наметили схему доказательства существования и единственности решения краевых задач.

В теории этих задач большое значение имеет также их нормальная разрешимость (альтернативная разрешимость), исследованию которой посвящена настоящая статья.

Мы изучаем нормальную разрешимость уравнений в классе слабых решений и полученные результаты применяем к краевым задачам для сильно эллиптических систем.

§ 1. Пусть Ω—ограниченная область вещественного эвклидова n-мерного пространства E_n.

Совокупность r-вектор-функций, определенных в Ω и непрерывных вместе со всеми частными производными порядка $\leqslant j$ в $\overline{\Omega}$, обозначим через $C^{j,r}(\overline{\Omega})$.

Множество линейных функционалов, определенных над $C^{j,r}(\overline{\Omega})$, обозначим через $(C^{j,r}(\overline{\Omega}))^*$.

Пусть $\overline{K}$ линейный замкнутый оператор, действующий из $C^{l,r}(\overline{\Omega})$ в $C^{\kappa,r}(\overline{\Omega})$ с областью определения $D_{\overline{\kappa}}$, плотной в $C^{l,r}(\overline{\Omega})$.

Рассмотрим задачу A. Дан $\rho \in (C^{l,r}(\overline{\Omega}))^*$, найти $U \in (C^{\kappa,r}(\overline{\Omega}))^*$, удовлетворяющее уравнению:

$$< U, \overline{K}\varphi > = < \rho, \varphi > \qquad (1)$$

для всех $\varphi \in D_{\overline{\kappa}}$.

В дальнейшем через $< \rho, \varphi >$ будем обозначать значение функционала ρ в точке φ.

Совокупность функционалов типа функции, входящих в $(C^{j,r}(\overline{\Omega}))^*$, обозначим через $(C^{j,r}(\overline{\Omega}))^*_{\Phi}$. Введем линейный оператор K, действующий из $(C^{\kappa,r}(\overline{\Omega})_{\Phi}$ в $(C^{l,r}(\overline{\Omega})_{\Phi}$ с областью определения D_{κ}:

$$< K\varkappa, \varphi > = < \varkappa, \overline{K}\varphi > \qquad (2)$$

для всех $\varphi \in D_{\kappa}$, $\varkappa \in D_{\kappa}$.

Теорема 1. *Для существования решения U задачи A необходимо, чтобы ρ был ортогональным ко всем решениям ω однородного уравнения:*

$$\overline{K}\omega = 0.$$

Доказательство. Пусть U—решение задачи A:

$$< U,\overline{K}\varphi > = < \rho,\varphi > \tag{3}$$

для всех $\varphi \in D_{\overline{K}}$.

В равенстве (3) вместе φ вставим ω, тогда

$$< \rho,\omega > = < U,\overline{K}\omega > = < \varphi ,0 > = 0.$$

Задача A называется нормально разрешимой, если для любого функционала $\rho \in (C^{1,r}(\overline{\Omega}))^*$, ортогонального ко всем решениям однородного уравнения

$$\overline{K}\omega = 0,$$

существует решение задачи A.

Оператор K называется нормально разрешимым [1], если $Kf=g$ имеет решение для любого $g \in (C^{1,r}(\overline{\Omega}))_\Phi$ тогда и только тогда, когда g ортогонален ко всем решениям однородного уравнения

$$\overline{K}\omega = 0: \; < g,\omega > = 0.$$

Теорема 2. *Если оператор K нормально разрешим и подпространство решений $\overline{K}\omega = 0$ конечномерно, то нормально разрешима и задача A.*

Доказательство. Пусть $< \rho,\omega > = 0$ для всех ω, являющихся решением однородного уравнения

$$\overline{K}\omega = 0. \tag{4}$$

Предположим, что система

$$\omega_1, \; \omega_2, \ldots \omega_N \tag{5}$$

является полной системой линейно-независимых решений уравнения (4).

Пусть система $f_1, f_2, \ldots f_N$ есть система функционалов из $(^{1,r}(\overline{\Omega}))^*$, биортогональная с системой (5), тогда

$$< f_j,\omega_i > = \delta_{ij}.$$

Известно, что к любому функционалу f из $(C^{1,r}(\overline{\Omega}))^*_\Phi$ можно приблизиться функционалами из $(C^{1,r}(\Omega))^*_\Phi$ в слабом смысле [4], точнее существует такая последовательность функций

$$\varkappa_j, j = 1, 2, \ldots, \; \varkappa_j \in C^{1,r}(\overline{\Omega}),$$

для которых имеет место соотношение

$$< \varkappa_j,\varphi > \to < f,\varphi >$$

для всех $\varphi \in C^{1,r}(\overline{\Omega})$.

Пусть $\rho_\nu(x) \to \rho$,

$$f_{\nu j}(x) \to f_j, j = 1, \ldots, N$$

при $\nu \to \infty$ слабо.

Составим новые функции:

$$\psi_\nu(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_{\nu j} f_{\nu j}(x) = \rho_\nu(x), \tag{6}$$

$$\nu = 1, 2, \ldots,$$

где $\alpha_{\nu j}$ — числа. Подберем последние числа такие, чтобы удовлетворялись условия:

$$< \psi_\nu(x),\omega_i > = 0,$$

$$i = 1, \ldots, N; \; \nu = 1, 2, \ldots.$$

Для этого числа $\alpha_{\nu j}$ достаточно определить следующими формулами:

$$\alpha_{\nu j} = \frac{\begin{vmatrix} < f_{\nu 1}, \omega_1 > \ldots < \rho_\nu, \omega_1 > \ldots < f_{\nu N}, \omega_1 > \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ < f_{\nu 1}, \omega_N > \ldots < \rho_\nu \omega_N > \ldots < f_{\nu N}, \omega_N > \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} < f_{\nu 1}, \omega_1 > \ldots < f_{\nu N}, \omega_1 > \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ < f_{\nu 1}, \omega_N > \ldots < f_{\nu N}, \omega_N > \end{vmatrix}}$$

где определители

$$\det \| < f_{\nu k}, \; \omega_i > \| \; k,i = 1, \ldots, N, \; \nu = 1, 2, \ldots,$$

начиная с определенного номера ν, отличны от нуля, так как

$$\det \| < f_k, \; \omega_i > \| = 1.$$

Нетрудно видеть, что

$$\lim_{\nu \to \infty} \alpha_{\nu k} = 0, \; k = 1, \ldots, N,$$

так как

$$\lim_{\nu \to \infty} < \rho_\nu, \; \omega_i > = 0, \; i = 1, \ldots, N.$$

Следовательно,

$$\psi_\nu(x) \to \rho$$

слабо и

$$< \psi_\nu(x), \; \omega_i > = 0, \; i = 1, \ldots, N \tag{7}$$

$$\nu = 1, 2, \ldots.$$

Расмотрим теперь при фиксированном ν краевую задачу

$$K\varphi_\nu = \psi_\nu. \tag{8}$$

В силу условий (7) и нормальной разрешимости оператора K уравнение (8) имеет решенне при любом ν. Обозначим его через φ_ν

Из (8) имеем

$$< K\varphi_\nu,\varphi > = < \psi_\nu, \varphi > \tag{9}$$

для всех $\varphi \in C^{1,r}(\overline{\Omega})$.

Из (9), в силу (2), имеем:

$$< \varphi_\nu, \overline{K}\varphi > = < \psi_\nu, \; \varphi > \tag{10}$$

для всех $\varphi \in D_{\overline{K}}$.

В силу нормальной разрешимости K, множество $R_{\overline{K}} = \{\overline{K}\varphi\}, \varphi \in D_{\overline{K}}$ есть замкнутое множество [1], т.е. $\{\overline{K}\varphi, \varphi \in D_{\overline{K}}\}$ — подпространство пространства $C^{K,r}(\overline{\Omega})$.

Перейдем теперь в (10) к пределу при $\nu \to \infty$.
По условию

$$<\psi_\nu, \varphi> \to <\rho, \varphi>$$

для любой функции из $C^{l,r}(\bar{\Omega})$, в частности для $\varphi \in D_{\bar{K}}$.

Тогда последовательность $\varphi_\nu, \nu = 1, 2, \ldots$ имеет слабый предел $\tilde{U}$, являющийся функционалом над $R_{\bar{K}}$.

На основании теоремы Хана-Банаха возьмем одно из расширений функционала $\tilde{U}$ на все пространство $C^{\kappa,r}(\bar{\Omega})$ и обозначим его через U.

Так как U удовлетворяет уравнению

$$<U, K\varphi> = <\rho, \bar{\varphi}>$$

для всех $\varphi \in D_{\bar{K}}$, то построенный таким образом функционал U является решением задачи A, что и требовалось доказать.

Изложенные результаты допускают следующее обобщение.

Пусть K—линейный замкнутый оператор, действующий из пространства Фреше E в пространство Фреше F с областью определения $D_{\bar{K}}$, плотной в E, и областью значений $R_{\bar{K}}$.

Рассмотрим задачу A. Дано $\rho \in E^*$, найти $U \in F^*$, удовлетворяющую уравнению

$$<U, \bar{K}\varphi> = <\rho, \varphi> \qquad (11)$$

для всех $\varphi \in D_{\bar{K}}$.

Имеют место следующие теоремы:

Теорема 3. *Если задача A имеет решение, то ρ ортогонален ко всем решениям уравнения*

$$\bar{K}\omega = 0.$$

Теорема 4. *Если оператор K нормально разрешим и $R_{\bar{K}}$ конечномерно, то нормально разрешима и задача A.*

Отметим, что в отличие от цитированной работы Ф. Браудера в настоящей работе мы рассматриваем задачу A, которая относится к слабому решению уравнения

$$KU = \rho. \qquad (12)$$

Следовательно, наши результаты, сформулированные в виде теорем 3 и 4, относятся к нормальной разрешимости (2) в смысле слабого решения.

§ 2. Рассмотрим теперь один из весьма важных частных случаев.

Предположим, что оператор $\bar{K}$ порожден сильно эллиптическим дифференциальным выражением:

$$\bar{K}\varphi \equiv \{\bar{K}_1(\varphi), \ldots, \bar{K}_r(\varphi)\}, \qquad (13)$$

где

$$K_i(\varphi) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{\kappa_1, \ldots, \kappa_s = 1}^{n} (-1)^s \frac{\partial^s}{\partial x_{\kappa_1} \ldots \partial x_{\kappa_s}} [a_{\kappa 1 \ldots \kappa_s, i, j}(x) U i]$$

$$0 \leqslant s \leqslant 2m$$

$$j = 1, \ldots, r,$$

$$a_{\kappa_j, \ldots \kappa_s, j, i}(x) \in C_s(\Omega) \cap C^{\sigma(s)}(\bar{\Omega}),$$

$$\sigma(s) = \max\{0, s - m\},$$

$$\sum_{i,j=1}^{r} \sum_{\kappa_1, \ldots, \kappa_{2m}} a_{\kappa_1, \ldots, \kappa_{2m}, i, j}(x) \cdot \xi_{\kappa_1} \ldots \xi_{\kappa\, 2m} \eta_i \cdot \bar{\eta}_j \geqslant$$

$$\geqslant \delta \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_1^2 \right)^m \left(\sum_{j=1}^{r} \eta_j^2 \right),$$

где δ—некоторая положительная величина для каждого вещественного n-вектора ξ и r-вектора с граничным условием

$$\varphi \in H_{m,r}, \qquad (14)$$

где $H_{m,r}$ есть совокупность r-вектор-функций, определенных в Ω, входящих в $L_{2,r}(\Omega)$ и имеющих все частные обобщенные производные $\frac{\partial^s}{\partial x_{\kappa_1} \ldots \partial x_{\kappa_s}}$, $s \leqslant m$, для которых существует последовательность $\{\varphi_t\} \in C_c^{\infty,r}(\Omega)$, стремящаяся к φ в смысле $L_{2,r}(\Omega)$, где все последовательности

$$\left\{ \frac{\partial^s \varphi, t}{\partial x_{\kappa_1} \ldots \partial x_{\kappa_s}} \right\}$$

фундаментальны.

Пусть $k = M = \left[\frac{n+1}{2}\right]$, $l = m$.

Оператором K будет служить оператор, порожденный дифференциальным выражением, являющимся сопряженным в смысле Лагранжа по отношению к (13), и граничным условием (14).

Имеет место теорема Браудера. Решение уравнения

$$KU = \gamma, \qquad \gamma \in C^{M,r}(\bar{\Omega}) \qquad (15)$$

существует тогда и только тогда, когда γ ортогональна ко всем решениям однородного уравнения $\bar{K}\theta = 0$, т. е.

$$(\gamma \cdot \omega) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{r} \gamma_i(x) \omega_i(x)\, dx = 0.$$

Размерность нуль пространства оператора $\bar{K}$ конечна.

Нетрудно проверить, что множество

$$\{\bar{K}\varphi\}, \qquad \varphi \in D_{\bar{K}}$$

замкнуто.

Таким образом, все условия теоремы 2 имеют место для нашего частного случая. Следовательно, имеет место:

Теорема 5. *При условиях, указанных в теореме Браудера, задача A:*

$$<U, \bar{K}\varphi> = <\rho, \varphi>,$$

$$\varphi \in D_{\bar{K}}$$

нормально разрешима.

Настоящая теорема устанавливает нормальную разрешимость слабого решения уравнения (15).

§ 3. Рассмотрим в Ω различные свойства, вообще говоря, комплекснозначных функций.

Множество финитных функций, определенных в E_n и имеющих непрерывные производные в E_n порядка $\leqslant j$, обозначим через $F^j(E_n)$ (финитные функции порядка j).

Совокупность r-векторных функций $\varphi=(\varphi^1,\ldots,\varphi_r)$, все компоненты которых принадлежат F^j, обозначим через $F^{j,r}(E_n)$.

Обозначим через $C^j(\Omega)$ совокупность определенных в Ω непрерывных функций, имеющих непрерывные частные производные порядка $\leqslant j$. Множество же $C^j(\overline{\Omega})$—совокупность функций, определенных в Ω, причем сами функции и их частные производные порядка $\leqslant j$ равномерно непрерывны в Ω.

$C^{j,r}(\Omega)$ и $C^{j,r}(\overline{\Omega})$ суть совокупности r-векторов-функций, компоненты которых принадлежат $C^j(\Omega)$ и $C^j(\overline{\Omega})$, соответственно.

Множество обобщенных функций, определенных над $F^j(E_n)$ и равных нулю вне области $\overline{\Omega}$, обозначим через $Y_j(\overline{\Omega})$; множество r-векторов-обобщенных функций, каждый компонент которых принадлежит $Y_j(\overline{\Omega})$, обозначим через $Y_{j,r}(\overline{\Omega})$.

Введем оператор $W_{j,r}$ изоморфизма пространств $Y_{j,r}(\overline{\Omega})$ и $(C^{j,t}(\overline{\Omega}))$ для достаточно гладкой границы S с помощью формулы $\langle\rho,\varphi\rangle=\langle\rho,\varphi\rangle$, где

$$\varphi=\varphi \text{ на } \overline{\Omega}=\Omega+S, \qquad \widetilde{\varphi}\in C^{j,r}(\overline{\Omega}),$$
$$\varphi\in C^{j,r}(E_n).$$

Тогда равенство (2) эквивалентно равенству

$$\langle\widetilde{U},\overline{K}\widetilde{\varphi}\rangle=\langle\widetilde{\rho},\widetilde{\varphi}\rangle,$$

где

$$\widetilde{U}=W_{l,r}U,\quad \widetilde{\overline{K}\overline{U}}=\overline{K}\widetilde{U},\quad \widetilde{\rho}=W_{\kappa,r}\rho,$$
$$\varphi\widetilde{\in}C^{\kappa,r}(\overline{\Omega}).$$

Рассмотрим теперь краевую задачу Дирихле:

$$KU=\gamma, \tag{16}$$
$$U-g\in H_m, \tag{17}$$

где K—сильно эллиптическое дифференциальное выражение (13) в классе обобщенных функций конечного порядка.

Пусть (16), (17) имеет обычное (сильное) решение. Умножим обе части (16) на функцию $\varphi\in F^{2m,r}(E_n)$, входящую в H_{mr}, и проинтегрируем по всей области Ω:

$$\int_\Omega KU\,\varphi\,dx=\int_\Omega\gamma\,\varphi\,dx. \tag{18}$$

Имеет место формула Грина:

$$\int_\Omega KU\,\varphi\,dx=\int_\Omega U\,\overline{K}\varphi dx+\int_S B(U,\varphi)\,ds, \tag{19}$$

где

$$B(U,\varphi)=\sum_{\substack{p\leqslant 2m-1\\ q\leqslant 2m-1}} A_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p,\beta_1,\ldots,\beta_q}(x_s)\frac{\partial^p U}{\partial x_{\alpha_1}\ldots\partial x_{\alpha_p}}\times\frac{\partial^q\varphi}{\partial x_{\beta_1}\ldots\partial x_{\beta_q}}.$$

Пусть

$$\left.\frac{\partial^p U}{\partial x_{\alpha_1}\ldots\partial x_{\alpha_p}}\right|_s=g_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p},\qquad p\leqslant m-1.$$

Тогда

$$\int_S B(U,\varphi)\,ds=\int_S\sum_{\alpha,\beta}A_{\alpha\beta}(x_s)\frac{\partial^p U}{\partial x_{\alpha_1}\ldots\partial x_{\alpha_p}}\frac{\partial^q\varphi}{\partial x_{\beta_1}\ldots\partial x_{\beta_q}}ds$$
$$0\leqslant p\leqslant m-1,\qquad m\leqslant q\leqslant 2m-1$$

и на основании (19) имеем:

$$\int_\Omega U\,\overline{K}\varphi\,dx=\int_\Omega\gamma\varphi\,dx-\int_S\sum_{\substack{\alpha,\beta\\ 0\leqslant p\leqslant m-2\\ m\leqslant q\leqslant 2m-1}}A_{\alpha\beta}(x_s)\,g_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}(x_s)\frac{\overline{\partial^q\varphi}}{\partial x_{\beta_1}\ldots\partial x_{\beta_q}}ds. \tag{20}$$

Примем обозначения

$$\overline{U}=\begin{cases}U, & x\in\overline{\Omega},\\ 0, & x\bar{\in}\,\overline{\Omega},\end{cases}$$

$$\overline{\gamma}=\begin{cases}\gamma, & x\in\overline{\Omega},\\ 0, & x\bar{\in}\,\overline{\Omega}.\end{cases}$$

Третий интеграл, входящий в (20), напишем через функцию Дирака*, сосредоточенную на поверхности S с плотностью единицы:

$$\int_S\sum_{\alpha,\beta}A_{\alpha\beta}(x_s)\,g_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}(x_s)\frac{\overline{\partial^q\varphi}}{\partial x_{\beta_1}\ldots\partial x_{\beta_q}}ds=$$
$$=\int_{E_n}\sum_{\alpha,\beta}(A_{\alpha\beta}(x_s)\,g_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}(x_s)\delta_s)\frac{\overline{\partial^q\varphi}}{\partial x_{\beta_1}\ldots\partial x_{\beta_q}}dx=$$
$$=\int_{E_n}\sum_{\alpha,\beta}(-1)^q\frac{\partial^q}{\partial x_{\beta_1}\ldots\partial x_{\beta_q}}(A_{\alpha\beta}(x_s)g_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}(x_s)\delta_s)\times\overline{\varphi}dx,$$

Тогда из (20) имеем

$$\langle\overline{U},\overline{K}\varphi\rangle=\langle\overline{\rho},\varphi\rangle, \tag{21}$$

где

$$\overline{\rho}=\overline{\gamma}+\sum_{\alpha,\beta}(-1)^q\frac{\partial^q}{\partial x_{\beta_1}\ldots\partial x_{\beta_q}}(A_{\alpha\beta}(x_s)\times g_{\alpha_1,\ldots,\alpha_q}(x_s)\delta_s),\qquad m\leqslant q\leqslant m-1.$$

Таким образом, мы приходим к краевой задаче для обобщенной функции конечного порядка: дана обобщенная функция ρ, равная нулю вне $\overline{\Omega}$; нужно найти обобщенную функцию, равную вне $\overline{\Omega}$ и удовлетворяющую равенству (21) для всех

$$\varphi\in F^{2m,r}(E_n)\cap M\{\varphi\in H_m\}.$$

Пользуясь изоморфизмом, изложенным в начале § 3, задачу (21) сводим к задаче типа A (см. § 1).

Очевидно, решение (21) есть слабое решение первой краевой задачи для сильно эллиптической системы.

Если указанное слабое решение достаточно гладкое, то оно одновременно будет и сильным решением первой краевой задачи.

* Непосредственной проверкой можно убедиться, что упомянутый интеграл есть линейный функционал над $F^{2m,r}(E_n)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Браудер Ф. Функциональный анализ и уравнения в частных производных. „Математика" (Сб. переводов) 4, 3, И. Л, 1960.
2. Гординг Л. Некоторые направления и проблемы теории линейных дифференциальных уравнений в частных производных. УМН, т. XV, вып. 1(91), 1960
3. Соловьев С. Л. и Вишик М. И. Общая постановка некоторых краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных. ДАН СССР, т. 111, 1956. № 3.
4. Browder F. E. Strongly elliptic systems of differential equations, Contribution to the theory of partial differential equations, 1959.

h. H. Ağajev

Sərhəd məsələsinin zəif həlllər sinfində normal həll edilməsinə dair

XÜLASƏ

Məqalədə sonlu tərtibli ümumiləşmiş funksiyalar sinfində

$$<U, \overline{K}\varphi>=<\rho, \varphi> \qquad (1)$$

sərhəd məsələsinin həll olunabilinməsi tədqiq edilir. Həmin sərhəd məsələsini A məsələsi deyə adlandıraq. Burada (1) tənliyinə daxil olan mə'lum və məchullara aşağıdakı mə'na verilir.

Tutaq ki, Ω—n ölçülü E_n həqiqi Evklid fəzasında məhdud oblastdır. Hər bir komponenti Ω-da tə'yin edilən özü və j tərkibə kimi törəmələri həmin oblastda kəsilməyən r-vektor funksiyalar çoxluğunu $C^{j,r}(\overline{\Omega})$ ilə işarə edək. ρ isə $C^{j\ r}(\overline{\Omega})$-da tə'yin edilən mə'lum xətti funksionaldır.

$\overline{K}$, tə'yin oblastı $(D_{\overline{K}})$ $C^{(l,r)}(\overline{\Omega})$-də hər yerdə sıx olan və həmçinin $C^{l,r}(\overline{\Omega})$-dan $C^{k,r}(\overline{\Omega})$-ya tə'sir edən qapalı xətti operatordur.

$<\rho, \varphi>$ ilə ρ funksionalının $\varphi \in D_{\overline{K}}$ nöqtəsindəki qiymətı işarə edilir.

(1) bərabərliyinin bütün $\varphi \in D_{\overline{K}}$-da ödənilməyi nəzərdə tutulur.

(1) tənliyini ödəyən və $C^{k,r}(\overline{\Omega})$-da tə'yin edilən hər bir xətti kəsilməz U funksionalı A məsələnin zəif həlli adlanır.

Məqalədə $\overline{K}$ operatoru ilə əlaqələndirilən dikər bir K operatoru da tədqiq edilir.

$C^{j,r}(\overline{\Omega})$-də tə'yin edilən funksiya tipli funksionalları $\left(C^{j,r}(\overline{\Omega})\right)_{\phi}$ ilə işarə edək. $\left(C^{k,r}(\overline{\Omega})\right)_{\phi}$-dən $\left(C^{l,r}(\overline{\Omega})\right)_{\phi}$-ə tə'sir edən, varlıq oblastı (D_K) bütün $\varphi \in D_{\overline{K}}$ üçün

$$<K\gamma, \varphi>=<\gamma, \overline{K}\varphi> \qquad (2)$$

bərabərliyi ilə tə'yin edilən operatoru K ilə işarə edək. Əgər

$$Kf = g \qquad (3)$$

tənliyinin ixtiyarı $g \in \left(C^{l,r}(\overline{\Omega})\right)_{\phi}$ — kəsilməz həll olunabilməsi üçün g-nin

$$\overline{K}\omega = 0 \qquad (4)$$

tənliyinin hər bir həllinə ortoqonallığı həm zəruri və həm də kafi olarsa, onda (3) tənliyi normal həll olunandır.

Məqalədə aşağıdakı teoremlər isbat edilmişdir.

Teorem 1. *A məsələsinin həll olunabilməsi üçün ρ-nun birçinsli (3) tənliyinin ixtiyarı ω həllinə ortoqonallığı zəruridir.*

Teorem 2. *Əgər K operatoru normal həll olunandırsa və əlavə (3) tənliyinin həllər alt fəzası sonlu ölçülüdürsə, onda A məsələsi də normal həll ediləndir.*

Bunlardan başqa məqalədə bir Freşe fəzasından dikər Freşe fəzasına tə'sir edən operatorlar üçün analoqi teoremlər göstərilmişdir.

§ 2-də Braudernin [4] əsərində göstərilən küçlü elliptik sistemə aid birinçi sərhəd məsələsinin hamar, adi funksiyalar sinfində normal həll olunabilməsi nəticəsinə istinad edilərək qoşma məsələsinin zəif həlllər sinfində normal həll olunabilməsi göstərilmişdir.

Qeyd etmək lazımdır ki, ümumi A məsələsinə kətirilə bilən bir çox sərhəd məsələləri məvcuddur.

Nümunə üçün § 3-də sonlu tərtibli ümumiləşmiş funksiyalar sinfində küçlü elliptik sistemə aid Direxle məsələsi həllinin A məsələsinə neçə kətirildiyi nümayiş etdirilmişdir.

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-рија зијјат вә техника елмләри серијасы, 1961, № 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1961, № 2

Л. М. ИМАНОВ, Ч. О. КАДЖАР

ИЗУЧЕНИЕ МИКРОВОЛНОВОГО СПЕКТРА МОЛЕКУЛЫ C_2H_5OH

В настоящее время большое внимание уделяется изучению вращательных спектров молекул типа асимметричного волчка, усложненных внутренним вращением. Создана теория внутреннего заторможенного вращения в асимметричных молекулах для случая, если одна из вращающихся частей является симметричным волчком, а другая—асимметричным. Наиболеее полно исследована простейшая из таких молекул—молекула метилового спирта [3, 5, 6]. Из анализа микроволнового спектра поглощения CH_3OH определена полная структура молекулы, вычислены значения частоты крутильного колебания и высоты потенциального барьера.

Нами для исследования выбрана молекула этилового спирта, относящаяся к молекулам вышеуказанного типа и представляющая большой интерес как для изучения явления внутреннего заторможенного вращения, так и для определения изменений структурных параметров в ряду спиртов. Однако следует отметить, что спектр этой молекулы будет очевидно сильно усложен, так как кроме внутреннего заторможенного вращения будут происходить крутильные колебания группы OH относительно CH_2.

Указание на наличие внутреннего заторможенного вращения в молекуле этанола сделано из анализа экспериментальных термодинамических данных [4].

Микроволновый спектр молекулы C_2H_5OH до сих пор фактически не изучался, если не считать сообщения [2], где приведены частоты нескольких линий.

В приближении жесткого асимметричного волчка рассчитан вращательный спектр для трансконфигурации молекулы C_2H_5OH. Частоты многих линий из разрешенных переходов для $\tau \leqslant 6$ попадают в диапазон $10 \div 35$ *кмгц*.

В принятой нами модели плоскость C—O—H связей является плоскостью симметрии молекулы. Поэтому $\mu_c = 0$, а $\mu_a = 0{,}40$ и $\mu_в = 1{,}64$ *дебай*. Следовательно, можно ожидать, что интенсивность линий соответствующих μ_a составляющей дипольного момента будет на один порядок меньше чем линий $\mu_в$ составляющей. Расчетная интенсивность последних лежит в интервале от 10^{-5} до $10^{-7} см^{-1}$. Наиболее интенсивной является группа линий, принадлежая к Q ветви с $K_{-1} = +1$ и $K_{+1} = -1$.

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазијјат вә техника елмләри серијасы, 1961, № 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1961, № 2

Л. М. ИМАНОВ, Ч. О. КАДЖАР

ИЗУЧЕНИЕ МИКРОВОЛНОВОГО СПЕКТРА МОЛЕКУЛЫ C_2H_5OH

В настоящее время большое внимание уделяется изучению вращательных спектров молекул типа асимметричного волчка, усложненных внутренним вращением. Создана теория внутреннего заторможенного вращения в асимметричных молекулах для случая, если одна из вращающихся частей является симметричным волчком, а другая—асимметричным. Наиболеее полно исследована простейшая из таких молекул—молекула метилового спирта [3, 5, 6]. Из анализа микроволнового спектра поглощения CH_3OH определена полная структура молекулы, вычислены значения частоты крутильного колебания и высоты потенциального барьера.

Нами для исследования выбрана молекула этилового спирта, относящаяся к молекулам вышеуказанного типа и представляющая большой интерес как для изучения явления внутреннего заторможенного вращения, так и для определения изменений структурных параметров в ряду спиртов. Однако следует отметить, что спектр этой молекулы будет очевидно сильно усложен, так как кроме внутреннего заторможенного вращения будут происходить крутильные колебания группы OH относительно CH_2.

Указание на наличие внутреннего заторможенного вращения в молекуле этанола сделано из анализа экспериментальных термодинамических данных [4].

Микроволновый спектр молекулы C_2H_5OH до сих пор фактически не изучался, если не считать сообщения [2], где приведены частоты нескольких линий.

В приближении жесткого асимметричного волчка рассчитан вращательный спектр для трансконфигурации молекулы C_2H_5OH. Частоты многих линий из разрешенных переходов для $\tau \leqslant 6$ попадают в диапазон $10 \div 35$ *кмгц*.

В принятой нами модели плоскость C—O—H связей является плоскостью симметрии молекулы. Поэтому $\mu_c = 0$, а $\mu_a = 0{,}40$ и $\mu_в = 1{,}64$ *дебай*. Следовательно, можно ожидать, что интенсивность линий соответствующих μ_a составляющей дипольного момента будет на один порядок меньше чем линий $\mu_в$ составляющей. Расчетная интенсивность последних лежит в интервале от 10^{-5} до $10^{-7} см^{-1}$. Наиболее интенсивной является группа линий, принадлежая к Q ветви с $K_{-1} = +1$ и $K_{+1} = -1$.

Экспериментальное изучение микроволнового спектра C_2H_5OH проводилось при помощи описанной нами в работе [1] установки радиоспектрометра с электрической молекулярной модуляцией, блок-схема которой дана на рис. 1.

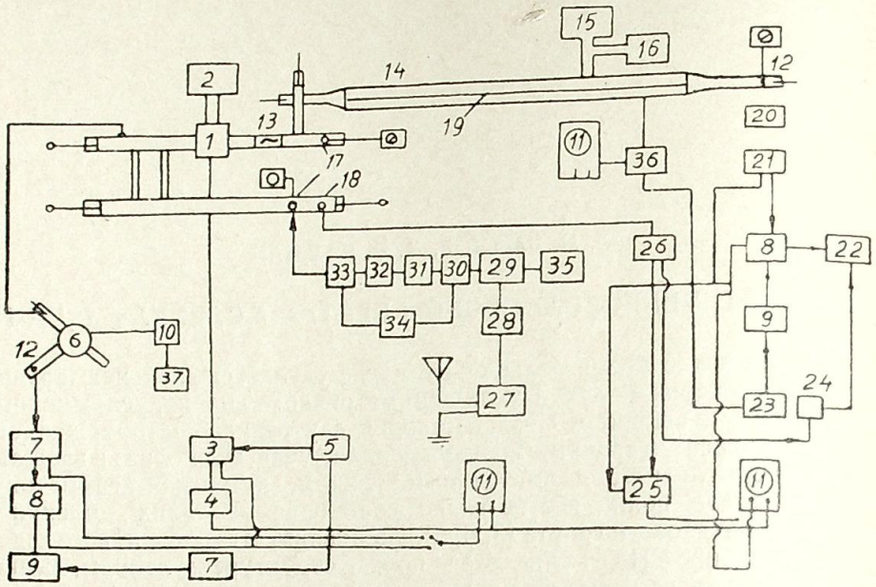


Рис. 1. Общая блок-схема радиоспектрометра.

1—клистрон; *2*—система термостатирования клистрона; *3*—питание клистрона; *4*—генератор напряжения пилообразной формы; *5*—генератор 100 *кгц*; *6*—волномер; 7—усилитель 100 *кгц*; *8*—синхронный детектор; *9*—фазовращатель; *10* мотор; *11*—электронный осциллограф; *12*—приемный кристал; *13*—аттенюатор; *14*—волноводная поглощающая ячейка; *15*—вакуумная система; *16*—система впуска образца; *17*—умножительный кристалл; *18*—смесительный кристалл; *19*—модуляционный электрод; *20*—предварительный усилитель 75 *кгц*; *21*—усилитель 75 *кгц*; *22*—самописец; *23*—усилитель опорного напряжения; *24*—импульсное реле; *25*—смеситель; *26*—калиброванный приемник; *27*—приемник 100 *кгц*; *28*—блок сравнения частот; *29*—кварцевый генератор 10 *мгц*; *31, 32, 33*—умножители 30 *Мгц*, 90 *Мгц*, 270 *Мгц*; *30, 34*—усилители 10 *Мгц*; *35*—система термостатирования кварца; *36*—генератор напряжения прямоугольной формы 75 *кгц*; *37*—генератор низкой частоты.

Частота клистрона стабилизирована резонатором, с помощью которого производится измерение частоты линий. Проверка градуировки прецизионных волномеров осуществлялась по известным линиям аммиака и метилового спирта. Измерение проводились при двух температурах: комнатной и —30°С.

При охлаждении до —30° С интенсивность линий повышается примерно в 2—5 раз. Давление газа в ячейке было в пределах 10^{-1} —10^{-2} *мм* рт. ст.

Частоты измеренных линий были следующими (в *мгц*):

25.068	27.438	27.760	28.190
26.858	27.474	27.788	29.229
27.088	27.508	28.006	29.240
27.142	27.644	28.062	29.380
27.262	27.670	28.096	30.485
27.356	27.684	28.122	13.484
			13.525

Из всех линий самой сильной является линия на частоте 28.006*мгц*. При температуре —30° С и токе на приемном кристалле около 3*мкА* ее можно наблюдать на осциллоскопе с отношением сигнала к шуму больше, чем 5 (рис. 2).

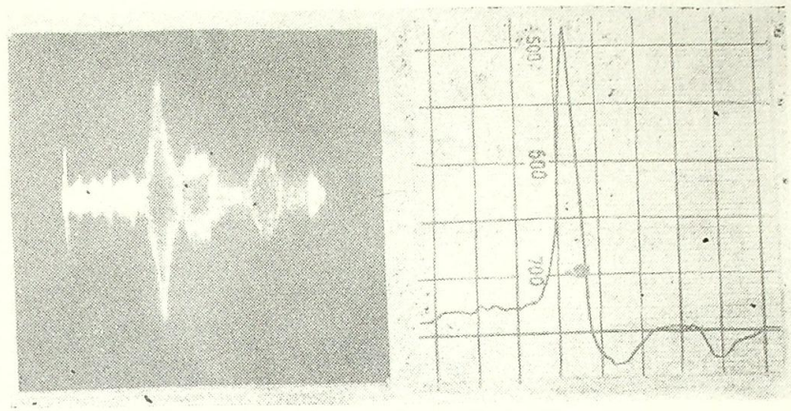


Рис. 2. Осциллограмма и запись на ЭПП—09 линии 28.096 *кгц*, при штарковом напряжении $1{,}4 \cdot 10^3$ *в/см*.

Некоторые линии дублетные. Расщепление линий может быть объяснено, по-видимому, влиянием внутреннего вращения асимметричной части молекулы в трехминимумном потенциальном поле метиловой группы и крутильным колебанием.

Более подробнее изучение микроволнового спектра C_2H_5OH продолжается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иманов Л. М., Каджар Ч. О. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физико-матем. и техн. наук", 1959, № 4.
2. Bak B., Kundsen E. S., Madsen E. Phys. Rev., 75, 10. 1622 (1949).
3. Burkhard D. and Dennison D. M. Phys. Rev., 84 second series, 408 (1959).
4. Halford J. O. Chem. Phys., 17, 111 (1949).
5. Jvash E. V. Deunison D. M. Chem. Phys., 21, 1804 (1953).
6. Vankatesvarlu P., Edwards H. D. and Gordy W. Chem. Phys., 23, 1195—1202 (1955).

Л .М. Иманов, Ч. О. Гачар

C_2H_5OH молекулунун микродалғадакы спектринин өјрәнилмәси

ХҮЛАСӘ

Етил спирти молекулу сәрт фырфыра јахынлашмасында фырланма спектри һесабланмыш вә мүәјјән едилмишдир ки, чохлу мигдарда кечидин тезлији 10÷35 *кмгһс* диапазонуна дүшүр.

Мүәллифләр һазырладыглары електрик молекулјар модулјасија принсипи илә ишләјән радиоспектрометр гурғусунда һәмин молекулун 25 хәттинин тезлијини өлчмүшләр.

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-рижазиҹҹат вә техника елмләри серијасы, 1961, № 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1961, № 2

Н. Ә. ӘЛИЈЕВ, Ф. Г. МӘҺӘРРӘМОВА, М. М. МУСАЗАДӘ

ДӘЛИКАЧАН СТАН БАШЛЫГЛАРЫНЫН БӘРКЛИЈИНИН ТӘ'ЈИНИ

Мә'лумдур ки, сәнаједә мүәјјән мәгсәдләрлә истифадә олунан мүхтәлиф метал нөвләри мүхтәлиф үсулларла сынагдан кечирилир. Бу үсуллардан бири механики сынаг үсулудур. Бу үсул металын бәрклиҹи, мөһкәмлиҹи, пластиклиҹи вә с. механики хассәләри һаггында мүһакимә јүрүтмәјә имкан верир.

Механики сынаг үсулунун мүхтәлиф нөвләри ичәрисиндә ән әлверишлиси вә даһа кениш јајылмыш нөвү бәрклиҹин тә'јинидир. Бәрклиҹин тә'јини механики сынаг үсулунун башга нөвләринә нисбәтән бир сыра үстүнлүкләрә маликдир.

Бу үсулдан истифадә едәрәк металын бәрклиҹи илә онун башга механики хассәләри арасындакы әлагәни мүәјјән етмәк олур. Бу исә һәм нәзәри, һәм дә тәчрүби нөгтеји-нәзәрдән бөјүк әһәмиҹҹәтә маликдир. Совет алимләриндән Н. Н. Давиденков [1] металын бәрклиҹи илә онун ахма һүдуду арасындакы мүнасибәти И. А. Одинг, Н. В. Гевелинг [2] вә башгалары исә бәркликлә мөһкәмлик һүдуду арасындакы мүнасибәти мүәјјән етмишләр.

Бәрклиҹи тә'јин етмәјин бу вә бир сыра башга үстүнлүкләри онун бөјүк тәчрүби әһәмиҹҹәтини мүәјјәнләшдирир.

Тәчрүбәдә бәрклиҹи тә'јин етмәк үчүн склерометрик, статик, динамик, рәггас үсулу вә бир сыра башга үсуллар вардыр [3].

Техникада ән кениш јајылмыш вә даһа чох әһәмиҹҹәти олан үсул статик үсулдур.

Статик үсул учлуғун тә'сир етмә характериндән асылы олараг батырылма, чызма вә зәрбә үсулларына ајрылыр. Н. Н. Давиденковун көстәрдиҹи кими, чызма үсулу илә тә'јин едилән бәрклик металын дағылмаға олан мүгавимәтини, батырылма үсулу илә тә'јин едилән бәрклик металын пластик деформасијаја мүгавимәтини, зәрбә үсулу илә тә'јин едилән бәрклик исә онун еластики хассәләрини ашкара чыхарыр. Демәли, бәрклик механики хассәләри мүстәгил характеризә едән кәмиҹҹәт олмајыб, әсас механики хассәләрлә үзви сурәтдә бағлыдыр.

Батырылма үсулу илә бәрклиҹи тә'јин етмәк үчүн Бринел, Роквелл вә Виккерс үсулларындан истифадә олунур. Роквелл үсулунда алмаз конус вә јахуд диаметри 1,6 *мм* олан полад күрәчик мүәјјән јүкүн тә'сири илә металын сәтһинә батырылыр вә бәрклик сәтһдә јаранмыш чухурун дәринлиҹинә көрә һесабланылыр. Виккерс үсулунда исә дөрдбучаглы алмаз пирамида металын сәтһинә батырылыр вә бәрклик јаранан изин сәтһинә көрә һесабланылыр.

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазијјат вә техника елмләри сериjасы, 1961, № 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1961, № 2

Н. Ә. ӘЛИЈЕВ, Ф. Г. МӘһӘРРӘМОВА, М. М. МУСАЗАДӘ

ДӘЛИКАЧАН СТАН БАШЛЫГЛАРЫНЫН БӘРКЛИЈИНИН ТӘ'ЈИНИ

Мә'лумдур ки, сәнаједә мүәjjән мәгсәдләрлә истифадә олунан мүхтәлиф метал нөвләри мүхтәлиф үсулларла сынагдан кечирилир. Бу үсуллардан бири механики сынаг үсулудур. Бу үсул металын бәрклиjи, мөһкәмлиjи, пластиклиjи вә с. механики хассәләри һаггында мүһакимә jүрүтмәjә имкан верир.

Механики сынаг үсулунун мүхтәлиф нөвләри ичәрисиндә ән әлверишлиси вә даһа кениш jајылмыш нөвү бәрклиjин тә'jинидир. Бәрклиjин тә'jини механики сынаг үсулунун башга нөвләринә нисбәтән бир сыра үстүнлүкләрә маликдир.

Бу үсулдан истифадә едәрәк металын бәрклиjи илә онун башга механики хассәләри арасындакы әлагәни мүәjjән етмәк олур. Бу исә һәм нәзәри, һәм дә тәчрүби нөгтеји-нәзәрдән бөjүк әһәмиjjәтә маликдир. Совет алимләриндән Н. Н. Давиденков [1] металын бәрклиjи илә онун ахма һүдуду арасындакы мүнасибәти И. А. Одинг, Н. В. Гевелинг [2] вә башгалары исә бәркликлә мөһкәмлик һүдуду арасындакы мүнасибәти мүәjjән етмишләр.

Бәрклиjи тә'jин етмәjин бу вә бир сыра башга үстүнлүкләри онун бөjүк тәчрүби әһәмиjjәтини мүәjjәнләшдирир.

Тәчрүбәдә бәрклиjи тә'jин етмәк үчүн склерометрик, статик, динамик, рәггас үсулу вә бир сыра башга үсуллар вардыр [3].

Техникада ән кениш jајылмыш вә даһа чох әһәмиjjәти олан үсул статик үсулдур.

Статик үсул үчлуғун тә'сир етмә характериндән асылы олараг батырылма, чызма вә зәрбә үсулларына ајрылыр. Н. Н. Давиденковун көстәрдиjи кими, чызма үсулу илә тә'jин едилән бәрклик металын дағылмаға олан мүгавимәтини, батырылма үсулу илә тә'jин едилән бәрклик металын пластик деформасијаја мүгавимәтини, зәрбә үсулу илә тә'jин едилән бәрклик исә онун еластики хассәләрини ашкара чыхарыр. Демәли, бәрклик механики хассәләри мүстәгил характеризә едән кәмиjjәт олмајыб, әсас механики хассәләрлә үзви сурәтдә бағлыдыр.

Батырылма үсулу илә бәрклиjи тә'jин етмәк үчүн Бринел, Роквелл вә Виккерс үсулларындан истифадә олунур. Роквелл үсулунда алмаз конус вә jахуд диаметри 1,6 *мм* олан полад күрәчик мүәjjән jүкүн тә'сири илә металын сәтһинә батырылыр вә бәрклик сәтһдә jаранмыш чухурун дәринлиjинә көрә һесабланылыр. Виккерс үсулунда исә дөрдбучаглы алмаз пирамида металын сәтһинә батырылыр вә бәрклик jаранан изин сәтһинә көрә һесабланылыр.

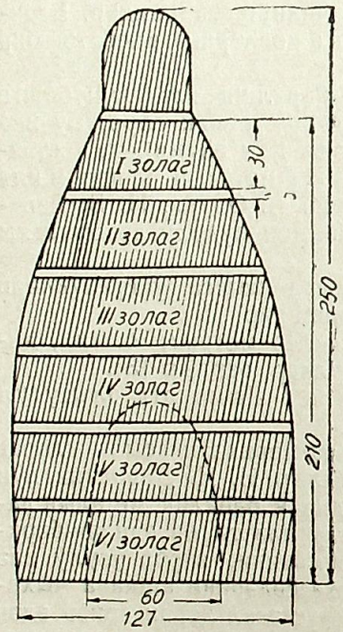
Бәрклији тә'јин етмәк үчүн завод вә лабораторијаларда ән кениш тәтбиг едилән үсул Бринел үсулудур. Бу үсул нәзәри вә тәчрүби чәһәтдән даһа јахшы өјрәнилмишдир. Одур ки, мүәјјән үсулла тә'јин едилмиш бәрклијин гијмәтини һәмишә Бринел әдәдләри илә мүгаjисә етмәјә чалышырлар. Бу, бир тәрәфдән Бринел үсулунун дәгиг олмасы вә алынан нәтичәләрин јахшы тәкрар олунмасы илә әлагәдардыр, дикәр тәрәфдән исә мүхтәлиф материалларын мөһкәмлик һүдуду илә бәрклији арасындакы асылылыг мәһз бу үсулла өјрәнилмишдир. Белә ликлә, бәрклији тә'јин етмәјин Бринел үсулу бүтүн башга үсуллар, хүсусән статик үсуллар ичәрисиндә әсас јер тутур.

Бринел үсулу илә бәрклији тә'јин етдикдә, нүмунәнин галынлығындан асылы олараг, диаметри 2,5 *мм* вә ја 5 *мм*, јахуд да 10 *мм* олан стандарт полад күрәчик мүәјјән јүкүн тә'сири илә тәдгиг олунан маддәнин сәтһинә батырылыр. Сонра јүк чыхарылыр вә полад күрәчијин сәтһдә јаратдығы чухурун диаметри өлчүлүр. Бринелә көрә бәрклик H_B

$$H_B = \frac{P}{S} = \frac{2P}{\pi D(D-\sqrt{D^2-d^2})} \text{ кг/мм}^2$$

мүнасибәтиндән һесабланылыр. Бурада P—күрәчијә тә'сир едән јүк, D—күрәчијин диаметри, d—чухурун диаметридир.

Белә ликлә, Бринелә көрә бәрклик полад күрәчијин јаратдығы чухурун саһәсинин һәр ваһидинә дүшән јүкә бәрабәрдир.



1-чи шәкил

Бәрклији Бринел үсулу илә тә'јин етмәк үчүн јүкү кифајәт гәдәр мүнтәзәм артырмаға вә тәзјиги дәгиг өлчмәјә имкан верән истәнилән пресдән истифадә етмәк олар.

Лакин һазырда бу мәгсәдлә өлчмә просесини асанлашдыран вә дәгигләшдирән хүсуси һазырланмыш преслә рдән истифадә олунур. Бунлардан даһа кениш тәтбиг олунанлары мүхтәлиф һидравлик преслә рдир. Һидравлик преслә рин ән мүкәммәли чәки принсипинә әсасланан вә бөјүк нүмунәләрдә өлчү апармаға имкан верән автоматик пресдир. Бу прес елә һазырланмышдыр ки, полад күрәчијә 62,5 *кг*-дан 3000 *кг*-а гәдәр бир сыра стандарт јүклә тә'сир етмәјә имкан верир.

Бу ишдә „Д" маркалы чохкарбонлу поладлардан бору һазырланмасында истифадә олунан вә 12ХН-3А маркалы поладдан һазырланмыш дәликачан стан башлыгларынын 2, 13, 14 вә 82 кечиддән сонра сәтһ бојунча бәрклик ләри һәмин автоматик прес васитәси илә Бринел үсулу илә тә'јин едилмишдир.

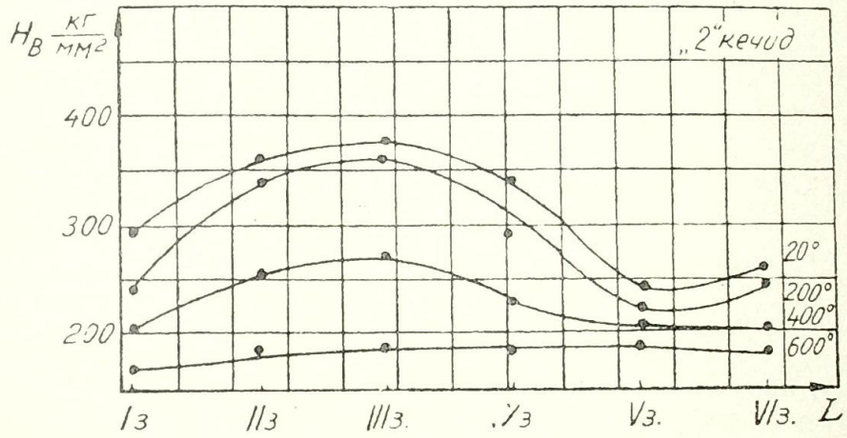
Тәдгиг олунан башлыгларын бәрклијини тә'јин етмәк үчүн онларын һәр бири, баш һиссә ајрылдыгдан сонра, ени 25 *см* олан 6 бәрабәр золаға бөлүнмүш вә бу золаглардан 25×25 өлчүлү нүмунәләр һазырланмышдыр.

Башлығын бөлүнмә схеми 1-чи шәкилдә верилмишдир.

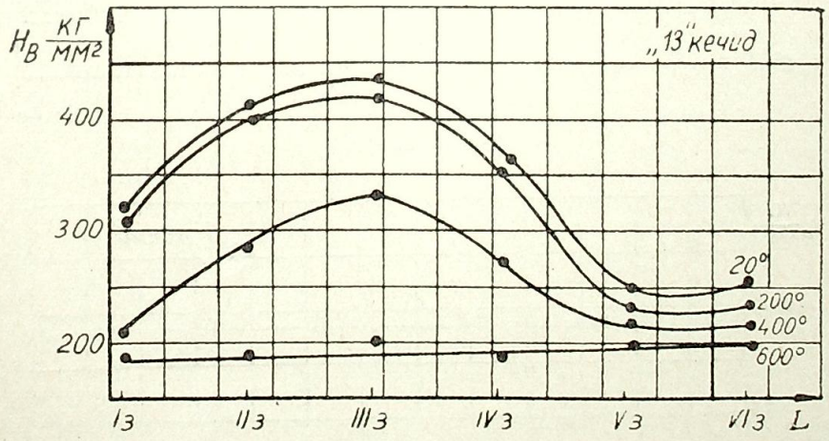
Тәдгиг олунан нүмунәләрин бәрклијини тә'јин етмәздән әввәл онларын сәтһи механики јолла пардахланмыш вә чилаланмышдыр.

Нүмунәләрин галынлығы 6 *мм*-дән чох олдуғундан диаметри 10 *мм* олан полад күрәчикдән вә 3000 *кг*-лыг јүкдән истифадә едилмишдир. Чухурун диаметри МПБ-2 микроскопу илә, 0,05 *мм* дәгигликлә өлчүлмүш вә диаметрин гијмәтиндән бәрклијин гијмәтинә кечмәк үчүн һазыр чәдвәлдән истифадә едилмишдир. Температурун бәрклијә тә'сирини мүәјјән етмәк үчүн тәдгиг олунан бүтүн нүмунәләр вакуумда силит собасында, 2 саат мүддәтиндә 200, 400 вә 600°С температурларда сахланылмыш вә соба илә бирликдә тәдричән отаг температуруна гәдәр сојудулдугдан сонра бәрклик ләри тә'јин едилмишдир.

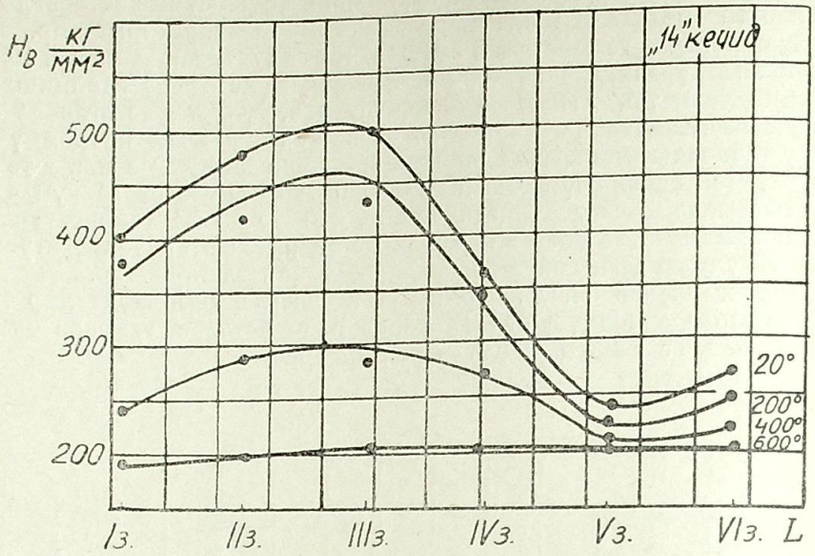
Тәдгиг олунан башлыгларын бүтүн золагларынын мүхтәлиф температурларда өлчүлмүш бәрклик ләринин гијмәтләри графики олараг 2-чи а, б, в вә г шәкилләрдә верилмишдир.



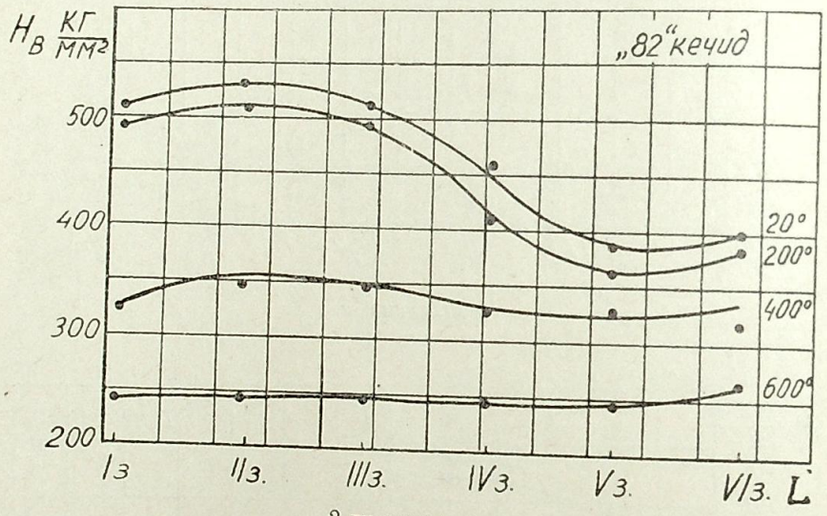
2-чи шәкил, *а*.



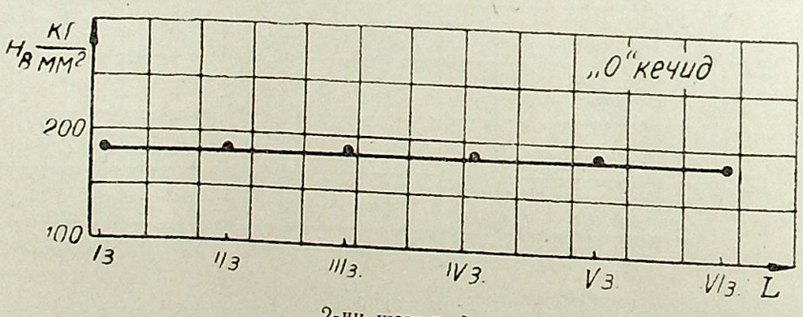
2-чи шәкил, *б*.



2-чи шәкил, *в*.



2-чи шәкил, *г*.



2-чи шәкил, *д*.

2-чи *д* шәклиндә ишләнилмәмиш башлығын бүтүн золагларының бәркликләринин тә'јининдән алынан нәтичәләр графики верилмишдир. Мүхтәлиф башлыгларын бәркликләри үчүн алынмыш әјриләрин ишлә-нилмәмиш башлыға ујғун әјри илә мүгајисәси көстәрир ки, дәликачан стан башлыгларының бору прокатында истифадә олунмасының сајы артдыгча, онларын бәрклији дә артыр. Бу артым башлыгларын II вә III золаға тәфавүг едән hиссәләриндә даһа бөјүк гиjмәт алыр. Бу, бору прокаты просесиндә башлыгларын hәмин hиссәләринә даһа бөјүк сүр-түнмә гүввәсинин тә'сир етдијини көстәрир.

Әјриләрин мүгајисәсиндән hәмчинин көрүнүр ки, термик ишләнмә температуру артдыгча мүхтәлиф золагларын бәркликләринин гиjмәти тәдричән азалараг, ишләнмәмиш башлығын бәрклијинин гиjмәтинә јахынлашыр.

ӘДӘБИЈЈАТ

1. Давиденков Н. Н. Некоторые проблемы механика материалов, Лениздат, 1943 г.
2. Одинг И. А. Прочность металлов, ОНТИ, 1935.
3. Гогоберидзе Д. Б. Твердость и методы ее измерения. Машгиз, 1952.

Н. А. Алиев, Ф. Г. Магеррамова, М. М. Мусазаде

Определение твердости оправ прошивного стана

РЕЗЮМЕ

Одним из видов испытаний, которым подвергаются различные сорта стали являются механические. Эти испытания позволяют судить о таких свойствах металла, как твердость, прочность, пластичность и т. д.

Среди различных видов механических испытаний самым выгодным и широко распространенным является измерение твердости. Пользуясь этим методом можно установить связь между твердостью и другими механическими свойствами. А это имеет большое значение как с теоретической, так и практической точки зрения.

Для измерения твердости на практике пользуются различными методами. Среди них метод Бринеля занимает особое место. Он широко распространен на заводах и лабораториях.

В предлагаемой работе методом Бринеля определены твердости справок прошивного стана, изготовленных из стали марки 12ХН-3А после 2, 13, 14 и 82 проходов.

Для определения влияния температуры на твердость все исследуемые образцы отжигались в течение пяти часов при температурах 200, 400 и 600° С.

На основании всех полученных значений построены кривые распределения твердости на поверхности оправок вдоль их осей. Построена также кривая для оправки, неучаствовавшей в прокатке.

Сравнение кривых показывает, что с увеличением числа проходов оправок твердость их также увеличивается. Максимальное значение твердости соответствует II и III полосам. Это указывает на то, что во время прокатки труб указанные части оправок испытывают большую силу трения.

Из кривых также видно, что с увеличением температуры отжига данные твердости различных полос постепенно уменьшаются и достигают значения твердости оправки, неучаствовавшей в прокатке.

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазијјат вә техника елмләри серијасы, 1961, № 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1961, № 2

И. И. ГУСЕЙНОВ

К ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ КУЛОНОВСКИМ ПОЛЕМ ЯДРА

Как известно, в нерелятивистской классической механике решение задачи рассеяния электронов в кулоновском поле ядра приводит к формуле Резерфорда для эффективного сечения рассеяния [2]. В настоящей статье эта задача рассматривается с учетом релятивистских эффектов.

Мы будем исходить из следующего уравнения релятивистской классической механики:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{r}) = \frac{ze^2}{r^3}\vec{r},$$

где $\vec{r}$ —радиус-вектор рассеиваемого электрона в системе координат, связанной с ядром (ze),

$m = \frac{p}{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)}}$ масса движущегося электрона;

φ—полярный угол.

Для составляющих радиус-вектора из (1) имеем два уравнения:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = -\frac{ze^2}{r^3}x \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{y}) = -\frac{ze^2}{r^3}y \tag{3}$$

Умножая уравнение (3) на i и складывая с уравнением (2) найдем:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{R}) = -\frac{ze^2}{r^3}R, \tag{4}$$

где

$$R = x + iy = re^{i\varphi} \tag{5}$$

Из (5) имеем:

$$\dot{R} = (\dot{r} + ir\dot{\varphi})\, e^{i\varphi} \tag{5а}$$

$$\ddot{R} = (\ddot{r} + 2i\dot{r}\dot{\varphi} - r\dot{\varphi}^2 + ir\ddot{\varphi})\, e^{i\varphi} \tag{5б}$$

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазијјат вә техника елмләри серијасы, 1961, № 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1961, № 2

И. И. ГУСЕЙНОВ

К ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ КУЛОНОВСКИМ ПОЛЕМ ЯДРА

Как известно, в нерелятивистской классической механике решение задачи рассеяния электронов в кулоновском поле ядра приводит к формуле Резерфорда для эффективного сечения рассеяния [2]. В настоящей статье эта задача рассматривается с учетом релятивистских эффектов.

Мы будем исходить из следующего уравнения релятивистской классической механики:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{r}) = \frac{ze^2}{r^3}\vec{r},$$

где $\vec{r}$ —радиус-вектор рассеиваемого электрона в системе координат, связанной с ядром (ze),

$m = \frac{p}{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)}}$ масса движущегося электрона;

φ—полярный угол.

Для составляющих радиус-вектора из (1) имеем два уравнения:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = -\frac{ze^2}{r^3}x \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{y}) = -\frac{ze^2}{r^3}y \tag{3}$$

Умножая уравнение (3) на i и складывая с уравнением (2) найдем:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{R}) = -\frac{ze^2}{r^3}R, \tag{4}$$

где

$$R = x + iy = re^{i\varphi} \tag{5}$$

Из (5) имеем:

$$\dot{R} = (\dot{r} + ir\dot{\varphi})\, e^{i\varphi} \tag{5а}$$

$$\ddot{R} = (\ddot{r} + 2i\dot{r}\dot{\varphi} - r\dot{\varphi}^2 + ir\ddot{\varphi})\, e^{i\varphi} \tag{5б}$$

Подставляя выражения (5), (5а) и (5б) в (4) и отделяя вещественную часть от мнимой, получаем следующие два уравнения:

$$m\ddot{r} + m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -\frac{ze^2}{r^2} \tag{6}$$

$$mr\ddot{\varphi} + m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\dot{\varphi}) = 0 \tag{7}$$

Легко проверить, что (6) и (7) эквивалентны следующим уравнениям:

$$\frac{d}{dt}\left(mc^2 - \frac{ze^2}{r}\right) = 0 \tag{8}$$

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\varphi}\right) = 0 \tag{9}$$

Последние уравнения приводят к законам сохранения энергии и момента количества движения, которые в нашем случае имеют вид

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)}} - \frac{ze^2}{r} = E \tag{10}$$

$$\frac{r^2\dot{\varphi}}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)}} = \frac{vb}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \tag{11}$$

где v—скорость электрона при $r = \infty$;

b—прицельное расстояние;

$$\beta = \frac{v}{c}.$$

Вводя обозначение $U = \frac{1}{r}$ и учитывая соотношения

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi} = -\frac{U'}{U^2}\dot{\varphi}$$

$$\frac{1}{c^2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = \frac{1}{c^2}\left(\frac{U'^2}{U^4} + \frac{1}{U^2}\right)\dot{\varphi}^2,$$

из уравнения (11) имеем:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{\frac{v^2b^2}{1-\beta^2}U^4}{1 + \frac{v^2b^2}{c^2(1-\beta^2)}(U'^2 + U^2)} \tag{12}$$

С учетом последних соотношений, из (10) и (11) получаем:

$$U'' + a^2U = d^2, \tag{13}$$

где

$$a^2 = 1 - \frac{z^2e^4}{p^2c^2b^2} \tag{14}$$

$$d^2 = \frac{ze^2E}{p^2c^2b^2} \tag{15}$$

Точным решением последнего уравнения будет:

$$U = \frac{1}{r} = A\cos a\varphi + B\sin a\varphi + \frac{d^2}{a^2}. \tag{16}$$

Коэффициенты A и B могут быть найдены из следующих условий:

$$\lim_{\varphi\to\pi} r = \lim_{\varphi\to\pi}\frac{1}{U} = \infty$$

$$\lim_{\varphi\to\pi} r\sin\varphi = b.$$

Последнее условие следует из того, что ордината любой точки траектории связана с r и φ соотношением $y = r\sin\varphi$ [1], или

$$\frac{1}{y} = \frac{U}{\sin\varphi} = \frac{A\cos a\varphi + B\sin a\varphi + \frac{d^2}{a^2}}{\sin\varphi}$$

При $\varphi = \pi$ ордината равна прицельному расстоянию $y = b$, поэтому:

$$\frac{1}{b}\lim_{\varphi\to\pi}\frac{1}{y} = a(A\sin a\pi - B\cos a\pi).$$

Тогда для определения коэффициентов A и B мы имеем два уравнения

$$A\cos a\pi + B\sin a\pi + \frac{d^2}{a^2} = 0$$

$$A\sin a\pi - B\cos a\pi = \frac{1}{ab}.$$

Отсюда получаем:

$$A = \frac{1}{ab}\sin a\pi - \frac{d^2}{a^2}\cos a\pi \tag{17}$$

$$B = -\frac{1}{ab}\cos a\pi - \frac{d^2}{a^2}\sin a\pi \tag{18}$$

Угол рассеяния равняется 0 такому значению угла $\theta\varphi(\varphi \neq \pi)$, при котором радиус обращается в бесконечность ($u = \frac{1}{r} = 0$).

Поэтому при $\varphi = 0$ (16) принимает вид:

$$A\cos a0 + B\sin a0 + \frac{d^2}{a^2} = 0 \tag{19}$$

Подставляя значения коэффициентов A и B из (17) и (18) в (19), имеем:

$$\operatorname{tg}\frac{a(\pi - 0)}{2} = -\frac{a}{bd^2}. \tag{20}$$

Нам удалось найти решение последнего уравнения в виде ряда по степеням параметра $\beta = \frac{v}{c}$. Если ограничиться вторым членом разложения, то для прицельного расстояния находим следующее выражение:

$$b^2 = \frac{z^2e^2E^2}{p^4c^4}\operatorname{ctg}^2\frac{\theta}{2}\left\{1+\frac{v^2}{c^2}\left(\frac{1}{\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}}-\frac{\frac{\pi-\theta}{2}}{\operatorname{ctg}^3\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)\right\} \quad (21)$$

Как известно, дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma$ связано с прицельным расстоянием формулой:

$$a\sigma = \pi \mid db^2 \mid \nu \quad (22)$$

Подставляя b^2 из (21) в (22) имеем:

$$d\sigma = d\sigma_0\left\{1-\frac{v^2}{2c^2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\left[\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+\frac{\pi-\theta}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)\right]\right\}, \quad (23)$$

где

$$d\sigma_0 = \left(\frac{ze^2E}{p^2c^2}\right)^2\frac{d\Omega}{4\sin^4\frac{\theta}{2}} \quad (24)$$

дифференциальное сечение рассеяния без учета релятивистских эффектов (формула Резерфорда).

В нерелятивистком случае ($\beta=0$) последнее выражение для эффективного сечения, как и следовало ожидать, переходит в формулу Резерфорда ($a\sigma = d\sigma_0$). Для электронов с ультрарелятивистскими энергиями $\left(\frac{v^2}{c^2}\approx 1\right)$ наша формула не применима, так как при ее получении мы пользовались разложением в ряд по параметру β. Поэтому соотношение (23) может быть применимо к рассеянию электронов, энергия которых удовлетворяла бы условию $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусейнов И. И. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук", 1959, № 6.
2. Шпольский Э. В. Атомная физика, т. 1, М., 1951.

И. И. Ḥүсејнов

Кулон саһәси нүвәсинин релјатив һиссәчикләринин сәпәләнмәси нәзәриjjәсинә даир

ХҮЛАСӘ

Ишдә сыралара ајрылма шәклиндә Кулон саһәси нүвәсинин релјатив һиссәчикләринин сәпәләнмә мәсәләсинин һәлли тапылмышдыр.

Көстәрилир ки, $\beta \to 0$ олдуғу сон һәддә сәпәләнмәнин ефективдоғранмасы Резерфорд формулуна кечир.

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-риjазиjjат вә техника елмләри серијасы, 1961, № 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1961, № 2

Ч. М. ДЖУВАРЛЫ, М. М. ДЖАФАРОВА

К ВОПРОСУ О ДВИЖЕНИИ ПЫЛЕВЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ ИЗОЛЯТОРА

Загрязнение изоляторов ЛЭП, работающих при переменном напряжении, протекает несколько иначе, чем в условиях постоянного напряжения.

При постоянном напряжении на пылевую частицу в электрическом поле, кроме сил тяжести, гидростатической подъемной силы и силы сопротивления среды движущейся частице, общих для движения в постоянном и переменном электрическом поле, действуют следующие электрические силы:

на заряженную частицу $F_1 = qE$

и на нейтральную частицу $F_2 = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}r^3E\operatorname{grad}E.$

Пылевые частицы в электрическом поле изоляторов не остаются нейтральными, поэтому основной, воздействующей на частицу силой, является сила F_1 при постоянной напряженности поля являющаяся также постоянной.

Для случая, когда электрическое поле отсутствует, уравнение движения пылевой частицы выражается*:

$$m\frac{dv}{dt} = \frac{4}{3}\pi r^3(\rho-\rho_0)g - 6\pi\eta rv, \quad (1)$$

где m—масса частицы;
v—скорость ее;
ρ и ρ_0—плотности пылевой частицы и среды, в которой движется частица;
r—радиус частицы;
η—вязкость среды;
g—ускорение силы тяжести.

При $\rho_0=0$ решение уравнения (1) будет следующим:

$$v = \frac{mg}{6\pi\eta r}\left(1-e^{-\frac{6\pi\eta r}{m}t}\right). \quad (2)$$

* Н. А. Фукс. Механика аэрозолей, М., 1955.

Путь, пройденный частицей выражается уравнением:

$$S=\frac{mg}{6\pi\eta r}t+\frac{m^2g}{36\pi^2\eta^2r^2}e^{-\frac{6\pi\eta r}{m}t}-\frac{m^2g}{36\pi^2\eta^2r^2} \tag{3}$$

а ускорение

$$\frac{dv}{dt}=ge^{-\frac{6\pi\eta r}{m}t}. \tag{4}$$

Для случая, когда частица движется в поле постоянного напряжения, среда неподвижна, уравнения движения пылевой частицы будет иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv_x}{dt}&=qE_x-6\pi\eta r v_x\\ m\frac{dv_y}{dt}&=qE_y-6\pi\eta r v_y+\frac{4}{3}\pi r^3(\rho-\rho_0)g\end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

где E_x и E_y—составляющие напряженности электрического поля по осям координат.

Решение этих уравнений следующее:

$$\left.\begin{aligned} v_x&=\frac{qE_x}{6\pi\eta r}\left(1-e^{-\frac{6\pi\eta r}{m}t}\right)\\ v_y&=\frac{qE_y+mg}{6\pi\eta r}\left(1-e^{-\frac{6\pi\eta r}{m}t}\right)\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Путь частицы определяются координатами x и y

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{qE_x}{6\pi\eta r}\left(t+\frac{m}{6\pi\eta r}e^{-\frac{6\pi\eta r}{m}t}-\frac{m}{6\pi\eta r}\right)\\ y&=\frac{qE_y+mg}{6\pi\eta r}\left(t+\frac{m}{6\pi\eta r}e^{-\frac{6\pi\eta r}{m}t}-\frac{qE_y+mg}{6\pi\eta r}m\right)\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Ускорение частицы

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt}&=\frac{qE_x}{m}e^{-\frac{6\pi\eta r}{m}t}\\ \frac{dv_y}{dt}&=\left(g+\frac{qE_y}{m}\right)e^{-\frac{6\pi\eta r}{m}t}\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Для случая движения пылевой частицы в поле переменного синусоидального напряжения имеем

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv_x}{dt}&=qE_{m_x}\sin\omega t-6\pi\eta r v_x\\ m\frac{dv_y}{dt}&=qE_{m_x}\sin\omega t+\frac{4}{3}\pi r^3(\rho-\rho_0)g-6\pi\eta r v_y\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Решение этих уравнений дает:

$$v_x=\frac{qE_{m_x}\sin(\omega t-\varphi)}{6\pi\eta r\sqrt{1+\left(\frac{\omega m}{6\pi\eta r}\right)^2}}+\frac{qE_{m_x}\sin\varphi}{6\pi\eta r\sqrt{1+\left(\frac{\omega m}{6\pi\eta r}\right)^2}}e^{-\frac{6\pi\eta r}{m}t} \tag{10}$$

$$v_y=\frac{qE_{m_y}\sin(\omega t-\varphi)}{6\pi\eta r\sqrt{1+\left(\frac{\omega m}{6\pi\eta r}\right)^2}}-\left[\frac{qE_{m_y}\sin\varphi}{6\pi\eta r\sqrt{1+\left(\frac{\omega m}{6\pi\eta r}\right)^2}}+\frac{mg}{6\pi\eta r}\right]e^{-\frac{6\pi\eta r}{m}t}+\frac{mg}{6\pi\eta r} \tag{11}$$

Здесь $\operatorname{tg}\varphi=\frac{m\omega}{6\pi\eta r}$

В этих уравнениях составляющие с множителем $e^{-\frac{6\pi\eta r}{m}t}$ характеризуют нестационарный затухающий процесс движения. При возрастании t они быстро убывают и при рассмотрении установившегося движения могут быть опущены. При этом установившиеся движение пылевой частицы выражается уравнениями:

$$v_x=\frac{qE_{m_x}}{m}\frac{\sin(\omega t-\varphi)}{\sqrt{\omega^2+\frac{36\pi^2\eta^2r^2}{m^2}}} \tag{12}$$

$$v_y=\frac{qE_{m_y}}{m}\frac{\sin(\omega t-\varphi)}{\sqrt{\omega^2+\frac{36\pi^2\eta^2r^2}{m^2}}}+\frac{mg}{6\pi\eta r} \tag{13}$$

Координаты движущейся пылевой частицы определяются уравнениями:

$$x=\frac{qE_{m_x}}{m}\frac{\cos(\omega t-\varphi)}{\sqrt{\frac{36\pi^2\eta^2r^2}{m^2}+\omega^2}}-\frac{qE_{m_x}}{m}\cdot\frac{\cos\varphi}{\omega\sqrt{\frac{36\pi^2\eta^2r^2}{m^2}+\omega^2}} \tag{14}$$

$$y=\frac{qE_{m_y}}{m}\cdot\frac{\cos(\omega t-\varphi)}{\omega\sqrt{\frac{36\pi^2\eta^2r^2}{m^2}+\omega^2}}-\frac{qE_{m_y}}{m}\cdot\frac{\cos\varphi}{\omega\sqrt{\frac{36\pi^2\eta^2r^2}{m^2}+\omega^2}}+\frac{mg}{6\pi\eta r} \tag{15}$$

т. е. движение пылевых частиц в синусоидальном электрическом поле носит колебательный характер.

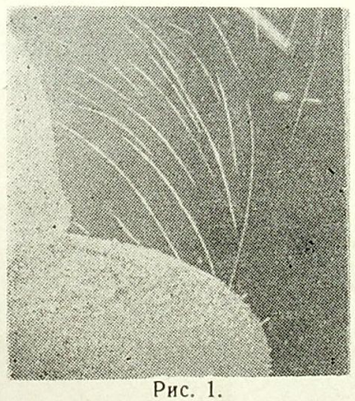


Рис. 1.

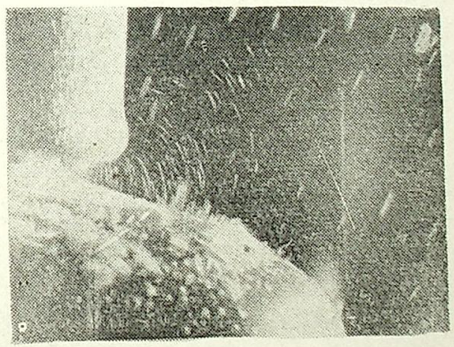


Рис. 2.

При постоянном напряжении пылевая частица прочерчивает сплошную траекторию (рис. 1).

При переменном напряжении, когда на пылевую частицу действует вынуждающая периодическая сила, движение частицы становится колебательным, и траектория ее представляется отрезком линии, вдоль которой она колеблется и которая является ее удвоенной амплитудой. Сказанное наглядно иллюстрируется рис. 2, где светлые черточки—удвоенные амплитуды колеблющихся частиц в силовом поле изолятора.

Интересно отметить, что у края тарелки изолятора траектория движущейся частицы имеет развернутый вид.

Подобное колебательное движение замедляет осаждение пылевых частиц на поверхность изолятора и затрудняет условия их загрязнения.

Ч. М. Чуварлы, М. М. Чәфәрова

Тоз һиссәчикләринин електрик саһәсиндәки изољатор әтрафында һәрәкәтинә даир

ХҮЛАСӘ

Дәјишән кәркинликдә ишләјән електрик хәтләриндә изољаторларын чирклөнмәси сабит кәркинлик шәраитиндәкиндән бир гәдәр фәргли олур.

Сабит кәркинликли електрик саһәсиндә тоз һиссәчијинә сабит вә дәјишән кәркинлик саһәсиндәки һәрәкәт үчүн үмуми олан ағырлыг гүввәсиндән, һидростатик галдырычы гүввәдән вә мүһитин һәрәкәт едән һиссәчијә олан мүгавимәт гүввәсиндән башга ашағыдакы електрик гүввәләри дә тә'сир едир:

Саһәнин електрик јүклү һиссәчијә олан тә'сир гүввәси

$$F_1 = qE,$$

јүкләнмиш һиссәчијә олан тә'сир гүввәси — $F_2 = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} r^2 E \operatorname{grad} E.$

Әсас гүввәт F_1-дир. Бу гүввәт синусоидал олдугда, јә'ни тоз һиссәчији синусоидал дәјишән кәркинлик саһәсиндә һәрәкәт етдикдә, тоз һиссәчијинин һәрәкәти рәгси характердә олур.

Сабит кәркинликли чәрәјан саһәсиндә тоз һиссәчији гүввәт хәтләри бојунча ардычыл трајекторија чызмагла һәрәкәт едир. Дәјишән кәркинлик саһәсиндә тоз һиссәчијинә периодик гүввәт тә'сир етдикдә, һиссәчијин һәрәкәти рәгси олур вә онун трајекторијасы узунлуг амплитудунун икигат гијмәтинә бәрабәр дүз хәтт парчасы илә тәмсил олунур.

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазијјат вә техника елмләри серијасы, 1961, № 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1961, № 2

А. А. ЭФЕНДИЗАДЕ, А. А. ПАРШИНА

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛУПРОМЫШЛЕННОЙ УСТАНОВКИ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ДЛИНЫ ТРУБ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФОТОСОПРОТИВЛЕНИЙ

Принципиальная схема измерения длины прокатного изделия, разработанная Энергетическим институтом и использующая фотосопротивления типа ФСК-М, изображена на рис. 1. Параллельно включенные фотосопротивления (*1*) расположены в ряд, вдоль рабочей зоны измерительного устройства. На некотором расстоянии от фотосопротивлений параллельно их поверхности установлена люминесцентная

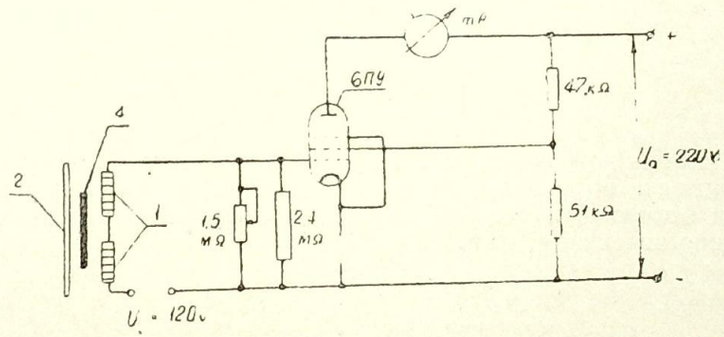


Рис. 1.

лампа *2*. Измеряемое изделие *4* помещается между лампой и фотосопротивлениями. В зависимости от длины измеряемого изделия большая или меньшая часть светового потока прикрывается изделием и не попадает на фотосопротивления. В результате эквивалентная проводимость цепи изменяется и при приложенном неизменном напряжении изменяется величина фототока, протекающего в контуре. Миллиамперметр *3* измеряет усиленный фототок, по которому определяется длина контролируемого изделия

Пусть длина различных измеряемых труб изменяется от L_0 до $L_m = L_0 + l$; тогда рабочую зону измерительного устройства можно взять длиной l, и по фототоку, соответствующему отрезку рабочего участ-

(или измеряемой длине) можно определить общую длину контролируемого изделия. В этом случае один конец изделия должен быть зафиксирован в определенной точке измерительного устройства. Это положение показано на рис. 2. Здесь кривая I дает зависимость $i=f(x)$; на участке А—В кривая заменяется прямой*. Отметка с фиксированной начальной точкой расположена слева от точки n_0 на расстоянии L_0.

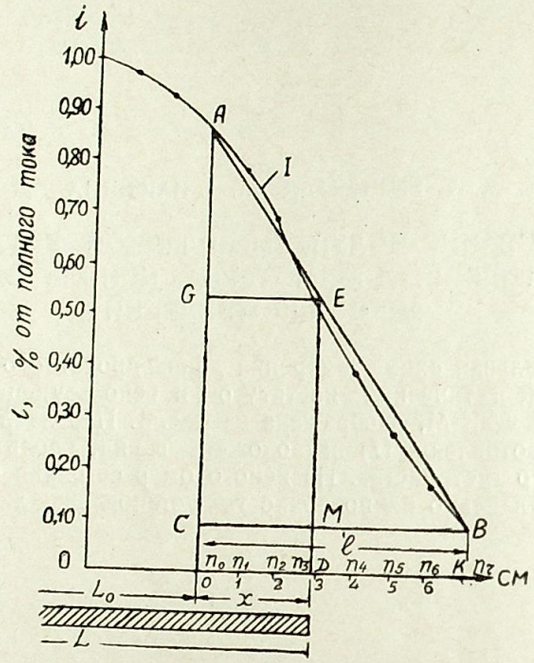


Рис. 2.

Общая длина измеряемого изделия определяется формулой, где длина изделия выражается функцией геометрических размеров установки и фототока, протекающего в цепи с параллельно включенными фотосопротивлениями, т. е.

$$L=L_0+l\frac{i_н-i}{i_н-i_к}, \qquad (1)$$

где: L—длина контролируемого изделия;

L_0—длина неизменной фиксированной части измерительного устройства;

l—длина рабочего участка с фотосопротивлениями, в пределах которого может быть осуществлен контроль размеров изделия;

$i=\frac{I}{I_{пол}}$—фототок, соответствующий длине измеряемого изделия в относительных единицах ; здесь I—текущий ток, $I_{пол}$—полный ток при освещении всех фотосопротивлений;

* Отчет Института энергетики АН Азерб. ССР за 1960 г. по теме; „Исследование и разработка бесконтактных методов измерения геометрических размеров изделий". Фонды Института.

$i_н$, $i_к$—токи, соответствующие начальной и конечной точкам рабочего участка.

Для данного измерительного устройства с заданными величинами L_0 и l и измеренными фототоками, соответствующими начальным и конечным точкам измерительного участка $i_н$ и $i_к$, можно определить длину контролируемого изделия по току, измеряемому миллиамперметром включенным в цепь.

На лабораторной установке проводилось подробное экспериментальное исследование. Результаты некоторых опытов приведены в табл. 1.

Таблица 1

Длина изделия, *см*	Опытные данные		Погрешности измерений		Опытные данные		Погрешности измерений	
	фототок, *ма*	длина, *см*	абсолют., *см*	относит., %	фототок, *ма*	длина, *см*	абсолют., *см*	относит., %
63,0	10,00	63,0	0	0	7,80	63,0	0	0
64,0	9,05	64,0	0	0	7,00	64,0	0	0
65,0	8,09	65,0	0	0	6,00	65,0	0	0
66,0	7,13	65,9	—0,1	—0,15	5,00	66,0	0	0
67,0	6,19	66,8	—0,2	—0,30	4 15	66,9	—0,1	—0,15
68,0	5,23	67,7	—0,3	—0,44	3,25	67,7	—0,3	—0,44
69,0	4,28	68,6	—0,4	—0,58	2,30	68,7	—0,3	—0,43
70,0	3,33	69,5	—0,5	—0,71	1,50	69,6	—0,4	—0,57
71,0	2,38	70,4	—0,6	—0,84	0,50	71,0	0	0
72,0	1,43	71,3	—0,7	—0,97	—	—	—	—
73,0	0,50	73,0	0	0	—	—	—	—

Опытная проверка, выполненная на лабораторной установке, показывает, что погрешность при измерения длины не превышает по абсолютной величине 0,5—1,0 *см*, а относительная погрешность колеблется в пределах ±1,0%. Однако, если иметь в виду, что измерительная установка рассчитана для контроля изделий—труб длиной от 7 до 14 *м*, а абсолютная погрешность измерения при данной конструкции измерительного устройства сохраняет свою величину для любого размера изделия, то легко убедиться, что ошибки при измерении реальных размеров прокатного изделия будут незначительны.

В условиях производства, после выполненных предварительных опытов на полупромышленной установке, созданной на заводе по типу лабораторной установки, выявилось неудобство измерения при одном фиксированном конце изделия, без специальных дополнительных устройств. С учетом этого обстоятельства была создана новая конструкция полупромышленной установки, позволяющая произвести измерение размеров изделия при условии контроля обоих концов его. При этом оказалось необходимым вывести новые связи и соотношения применительно к этим условиям.

Пусть контролируемое изделие расположено так, что оба его конца находятся в рабочих измерительных зонах, установленных с обоих концов (как показано на рис. 3) соответствующей конструкции, изображенной на рис. 4.

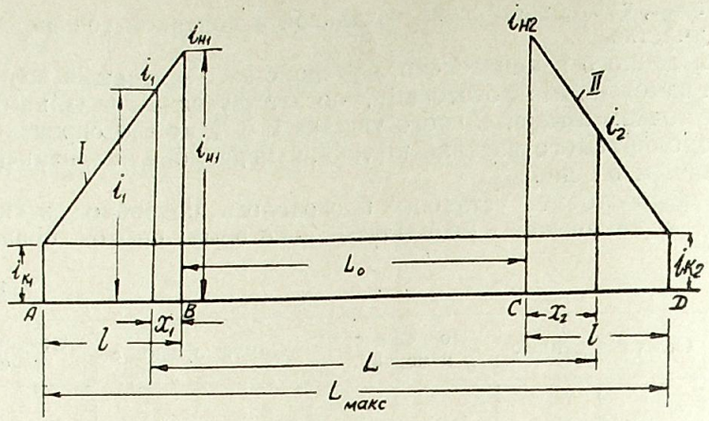


Рис. 3.

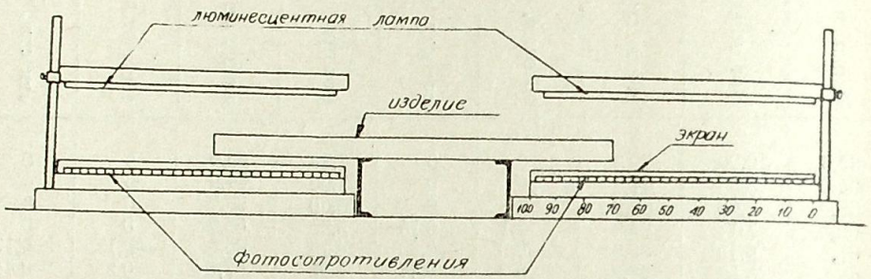


Рис. 4.

Измерительное устройство состоит из двух частей: рабочего участка $A—B$ и $C—D$. Минимальная величина измеряемого изделия равна L_o, т. е. равна длине участка B—C, а максимальная $L_{мак}=L_o+L_и$. Прямые I и II изображают зависимости тока от длины на соответсвующих участках. Исходя из рисунка, можно написать:

$$L=L_o+(x_1+x_2)=L_o+l\left(\frac{i_{н1}-i_1}{i_{н1}-i_{к1}}+\frac{i_{н2}-i_2}{i_{н2}-i_{к2}}\right) \qquad (2)$$

или, имея ввиду идентичность обоих частей измерительного устройства, напишем:

$$i_{н1}=i_{н2}=\frac{i_н}{2}; \qquad i_{к1}=i_{к2}=\frac{i_к}{2} \qquad \text{и } i=i_1+i_2.$$

Подставляя последние выражения в уравнения (2), получим:

$$L=L_o+L_и\frac{i_н-i}{i_н-i_к}; \qquad (3$$

здесь обозначения те же, что и для уравнения (1), а индексы 1 и 2 относятся к первому и второму участкам измерительной зоны; $L_и=2l$.

Из рассмотрения (3) и сравнения его с (1) видна полная их аналогия. Разница заключается лишь в том, что токи $i_н$, $i_к$ и i равны суммам соответствующих токов для обоих рабочих зон измерительного устройства, а длина рабочей зоны равна удвоенному значению рабочего участка одной части.

Таким образом, рис. 4, изображающий схему измерения длины в случае контроля с двух сторон, можно привести к случаю измерения длины изделия при одном фиксированном конце.

Опыты на полупромышленной установке

На заводской полупромышленной установке проводились три серии опытов.

1. Опыты, аналогичные лабораторным экспериментам, но сравнительно бо́льших длин и значительно увеличенных габаритов измерительного устройства. Контроль длины производился с одного конца изделия при фиксированном другом.

2. Эксперименты для небольших длин измеряемого изделия производились в одной непрерывной рабочей зоне измерительного устройства, позволяющей произвести измерение длины с охватом обоих концов труб.

3. Опыты, выполненные на измерительной установке, позволяющей произвести контроль с обоих концов труб для различных длин до 2 *м*.

Дополнительно были произведены опыты по установлению влияния освещенности окружающей среды на точность измерений и эффекта применения защитного экрана.

Ниже приведены результаты лишь некоторых опытов из большого количества экспериментов, выполненных на двух опытных установках, смонтированных на Азербайджанском трубопрокатном заводе.

Опыт I. Измерения производились на трубах диаметром 55 — 60 *мм*, длиной от 130 до 210 *см*, всего для 9 размеров. Контроль размеров труб производился с одной стороны; другой конец труб упирался в точку с фиксированной координатой.

Результаты измерений были следующими:

длина труб, *см*	130	140	150	160	170	170	190	200	210
фототок, *ма*	13,3	12,7	11,7	10,7	9,5	8,1	6,8	4,5	1,5

Пользуясь калибровочной кривой, построенной по данным опыта, можно градуировать прибор непосредственно шкалой, указывающей длину изделия.

Опыт II. Измерительная установка с рабочим участком около 1 *м*, позволяет произвести замер длины коротких труб, располагая их в различных участках зоны измерения. Такая возможность дает экспериментальной материал, на основе которого можно судить о точности и необходимости повторяемости измерений. Отдельные положения, занимаемые изделием, отмечаются координатой одного из концов изделия вдоль измерительной зоны устройства (см. рис. 4).

Измерению подвергались трубы диаметром 55 *мм*, длиной: 20; 30; 40; и 50 *см*. Результаты этих измерений приведены в табл. 2 (фототоки в *ма*).

На рис. 5 приведена зависимость фототока от длины измерения изделия. Здесь кривая I показывает среднее значение тока, отвечающего сответствующей длине трубы. Кривые, обозначенные пунктиром (II) показывают возможные пределы отклонения показаний прибора. По этим кривым, можно определить как средние значения величин измеряемой трубы, так и возможные погрешности измерений.

Пример: Пусть при измерении длины трубы прибор показывает 11,6 *ма;* по среднему значению (по кривой I) длина будет 36 *см*. Этот же ток по пунктирным кривым дает и два крайних значения для длины: 34,0 и 37,5 *см*. Таким образом, при измерении, принимая среднюю точ

ку по кривой I, мы допускаем погрешность от + 2 *см* до — 1,5 *см*. Такая абсолютная погрешность свойственна измерительному устройству и не связана с длиной измеряемой трубы. Следовательно, значительная относительная погрешность в процентах при измерении таких малых длин не является характерной.

Таблица 2

Отметка положения конца изделия, *см*	Длина изделия, *см*			
	20,0	30,0	40,0	50,0
10,0	12,60	12,00	11,40	10,40
15,0	12,60	12,10	11,40	10,30
20,0	12,80	12,20	11,30	10,10
25,0	13,00	12,30	11,40	10,00
30,0	13,15	12,30	11,30	10,10
35,0	13,20	12,30	11,10	10,00
40,0	12,93	11,90	—	—
45,0	12,80	—	—	—
Среднее значение тока	12,90	12,15	11,25	10,15

Опыт III. Схема измерительной установки приведена на рис .4. Эта установка позволяет произвести измерение длины труб любого диаметра, выпускаемого заводом (приблизительно от 120 до 200 *см*). Контроль размеров труб осуществляется с двух концов изделий. На обоих измерительных зонах установлены защитные экраны, практически не пропускающие паразитных лучей, искажающих показания прибора и отражающихся на точности измерений. На рис. 4 показано положение трубы, когда она занимает правым концом отметку 70.

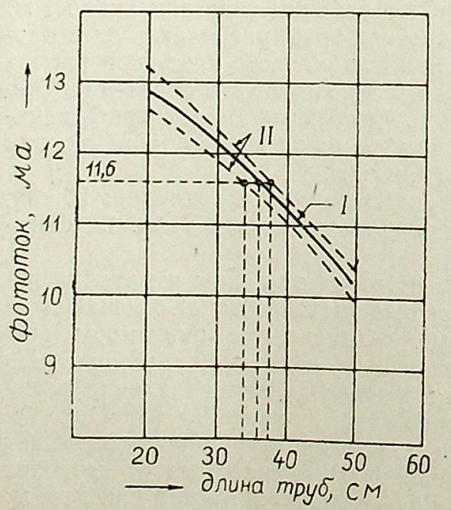


Рис. 5.

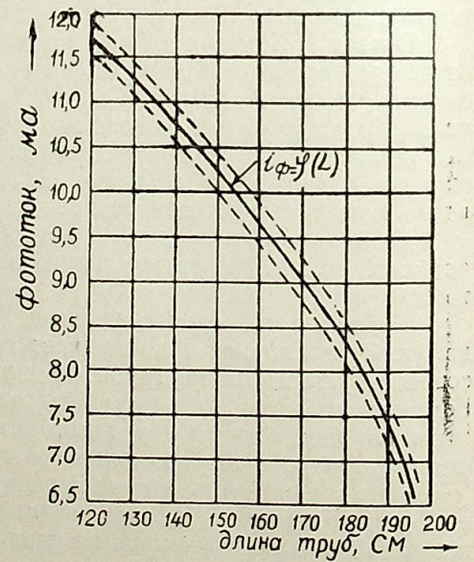


Рис. 6.

Опыты проводились с трубами диаметром 60 *мм*, длиной: 121, 142, 162, 182 и 196 *см*. При производстве опытов трубы перемещали в рабочей зоне в пределах отметок от 20,0 до 90,0 *см*. (см. рис. 4). Обе половины измерительной установки приблизительно одинаковые. Подбором и расположением фотосопротивлений и регулированием расстояния между фотосопротивлениями и люминесцентной лампой, установка была отрегулирована так, что при полном освещении фототоки обеих частей были равны.

Результаты испытаний приведены в табл. 3.

Таблица 3

Длина измеряемых труб, *см*	Отметки правого конца изделия								Среднее значение фототока *ма*
	20	30	40	50	60	70	80	90	
121	11,40	11,40	11,60	11,90	12,05	11,80	—	—	11,65
142	—	10,50	10,70	10,85	10,85	10,70	10,80	—	10,65
162	—	—	9,40	9,85	10,00	9,50	9,30	—	9,50
182	—	—	—	8,40	8,50	8,30	8,20	—	8,25
196	—	—	—		—	6,60	6,50	6,80	6,60

На рис. 6 изображены кривые зависимости фототока от длины измеряемых труб. Здесь сплошная кривая является зависимостью среднего значения токов от длины, а пунктирные показывают возможные предельные значения. Сплошная линия может служить калибровочной кривой, по которой может быть градуирована шкала измерительного прибора.

Многочисленные опыты показали, что абсолютная погрешность измерений при контроле труб с обоих концов не превышает 2—3 *см*.

Для установления явления освещенности внешней среды были проведены сравнительные опыты для двух случаев: измерение без защитного крана и с применением защитного крана, установленного над фотосопротивлениями и пропускающего световые лучи, исходящие от люминесцентной лампы. В хорошо освещенном помещении влияние постороннего света оказывается существенным в процессе измерения, если отсутствует защитный экран.

На полупромышленной установке были произведены опыты для оценки влияния постороннего освещения на точность измерения. В результате установлена необходимость применения защитного экрана для повышения точности измерительного устройства.

ВЫВОДЫ

1. Разработанная схема измерительного устройства для контроля и измерения длин прокатного изделия с использованием фотоэлементов с внутренним фотоэффектом—фотосопротивлений, отличается простотой конструкции, обладает точностью, достаточной для практики, и, как показали опыты на полупромышленной установке, имеет существенные преимущества для применения на производстве.

2. Возможность контроля изделия с обоих концов в процессе производства измерения длин создает большое удобство для практического использования схемы.

3. Анализ схемы измерения показал, что найденные связи и соотношения, установленные для измерения, с контролем, осуществляемым с одного конца при фиксированном другом конце, справедливы также и для случая контроля изделия с двух концов.

4. Защитный экран существенно улучшает точность измерений и является необходимым элементом устройства для измерения больших длин.

5. Замена кривой зависимости фототока от длины измеряемого изделия прямой существенно упрощает расчет схемы и в то же время не сопровождается заметным повышением погрешностей измерений.

А. Ə. Əfəndizadə, А. А. Паршина

Фотомүгавимәтләр васитәси илә боруларын узунлуғуну өлчән јарымсәнаје типли гурғунун тәдгиги

ХҮЛАСӘ

Азәрбајчан ССР ЕА Енеркетика Институтунда ФСК-М типли фотомүгавимәтләрдән истифадә едиләрәк, јајма боруларынын узунлуғуну өлчән гурғу һазырланмыш вә этрафлы тәдгиг едилмишдир.

Бу гурғунун схеми 1-чи шәкилдә көстәрилмишдир. Сыра илә јерләшдирилмиш фотомүгавимәтләр, онларын сәһинә паралел вәзијјәтдә вә мүәјјән мәсафәдә гурулмуш луминессент лампанын шуарлары илә ишыгландырылыр. Әкәр лампа илә фотомүгавимәтләр арасында бору јерләшдириләрсә, о һалда онун узунлуғундан асылы олараг ишыг шүаларынын бир һиссәси фотомүгавимәтләрин үзәринә дүшмүр. Бундан асылы олараг параллел гошулмуш фотомүгавимәтләр дөврәсиндә баш верән фоточәрәјанын гијмәти дә дәјишир.

Фоточәрәјанын узунлугдан асылы олараг дәјишмәси 2-чи шәкилдә верилмиш I әјриси кими алыныр. Бу әјринин мүәјјән һиссәсини дүзхәтлә әвәз етмәк олар. Бундан истифадә едәрәк узунлугла чәрәјан арасындакы асылылығы ријази шәкилдә верилмиш (1), (2) вә (3) тәнликләри илә ифадә етмәк олар. Лабораторија шәраитиндә апарылан тәчрүбәләр нәзәри мүлаһизәләрин әсаслы вә дүрүст олдуғуну көстәрмишдир.

Азәрбајчан бору прокаты заводунда гурашдырылмыш јарымсәнаје типли гурғунун әсас хүсусијјәти одур ки, бу өлчү гурғусунда боруларын узунлуғу өлчүлүркән, онлар һәр ики учдан контрол едилир. Бу үсулла узунлуғун өлчүлмәси истеһсалат үчүн чох әлверишлидир.

Истәр лабораторија шәраитиндә вә истәрсә дә јарымсәнаје гурғусунда апарылан тәчрүбәләр јахшы нәтичә вермишдир. Өлчү апарылан заман алынан мүтләг хәта 2—3 *см*-дән артыг олмур. Белә ки, заводун бурахдығы мә'мулатын узунлуғу 7 *м*-дән 14 *м*-ә гәдәр олдуғу үчүн фаиз е'тибары илә алынан хәта чох чүзи олур.

Тәчрүбәләрин нәтичәләри чәдвәлләрдә топланмышдыр вә 3, 6, 7, 9 вә 10-чу шәкилләрдәки әјриләрлә әкс олунмушдур.

Апарылан нәзәри вә тәчрүби тәдгигат нәтичәсиндә гејд етмәк олар ки, фотомүгавимәтләр васитәси илә узунлуг өлчән гурғу һәм садәлик вә һәм дә вердији нәтичәләрин дәгиглији е'тибары илә сәнаједә тәтбиг едилә биләр. Борулары һәр ики башдан контрол едәрәк, онларын узунлуғуну өлчмәк имканы истеһсалат үчүн чох әлверишлидир.

Фотомүгавимәтләри кәнар ишыгдан мүһафизә етмәк мәгсәди илә онларын үзәриндә хүсуси екран гурмаг лазымдыр. Белә екран гурулдугда өлчү нәтичәләри әһәмијјәтли дәрәчәдә дәгигләшир.

Өлчү схеминин арашдырылмасы вә тәчрүбәләр ријази мүнасибәтләрин вә нәзәри мүлаһизәләрин дүзкүн олдуғуну көстәрмишдир.

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазијјат вә техника елмләри сериjасы, 1961, № 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1961, № 2

А. Г. АБИЛОВ

РАСЧЕТ ОПТИМАЛЬНОЙ НАСТРОЙКИ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ТРУБЧАТОЙ ПЕЧИ АТМОСФЕРНОЙ ТРУБЧАТОЙ УСТАНОВКИ

При проектировании системы автоматического регулирования в промышленности одной из важнейших задач является правильный выбор контура регулирования, т. е. соответствующих регуляторов и расчет оптимальных настроек, обеспечивающих необходимое протекание процессов регулирования.

Ввиду большого количества переменных факторов, влияющих на ход технологического процесса, настройка выбранного регулятора опытным путем обычно занимает много времени и часто не дает удовлетворительного результата. При изменении условий работы регулируемой системы приборы настраиваются заново. Неправильная настройка снижает производительность аппаратуры, ухудшает качество продукции и ускоряет износ кинематических звеньев.

Для решения задачи о выборе регулятора и настройки системы можно использовать один из трех общеизвестных методов исследования, детально разработанных применительно к линейным физическим системам: метод линейных дифференциальных уравнений, метод переходных функций и метод частотных характеристик.

Нами используется метод частотных характеристик.

Исследование трубчатой печи атмосферной трубчатой установки как объекта автоматического регулирования

Головным процессом на каждом нефтеперерабатывающем заводе, если не считать подготовки нефти, является первичная переработка, происходившая в атмосферной трубчатой установке. Одним из главных и ответственных аппаратов атмосферной установки является трубчатая печь, от режима которой во многом зависит качество получаемых светлых нефтепродуктов. В трубчатой печи сырья нагревается до определенной температуры и подвергается однократному испарению.

Рассматриваемая нами трубчатая печь атмосферной трубчатой установки (рис. 1) является двухпоточной однокамерной печью, радиантно-конвекционного типа с горизонтальным движением дымовых газов, т. е. с горизонтальными перевальными стенами [2]. Основным регулируемым параметром трубчатой печи является температура сырья на выходах

из нее. Температура сырья на каждом потоке в отдельности регулируется вручную оператором.

Создание систем автоматического регулирования невозможно без изучения динамики данных систем. Чтобы иметь представление о поведении системы при тех или иных условиях, необходимо располагать динамическими характеристиками отдельных ее элементов, в частности, характеристиками основного элемента-объекта регулирования.

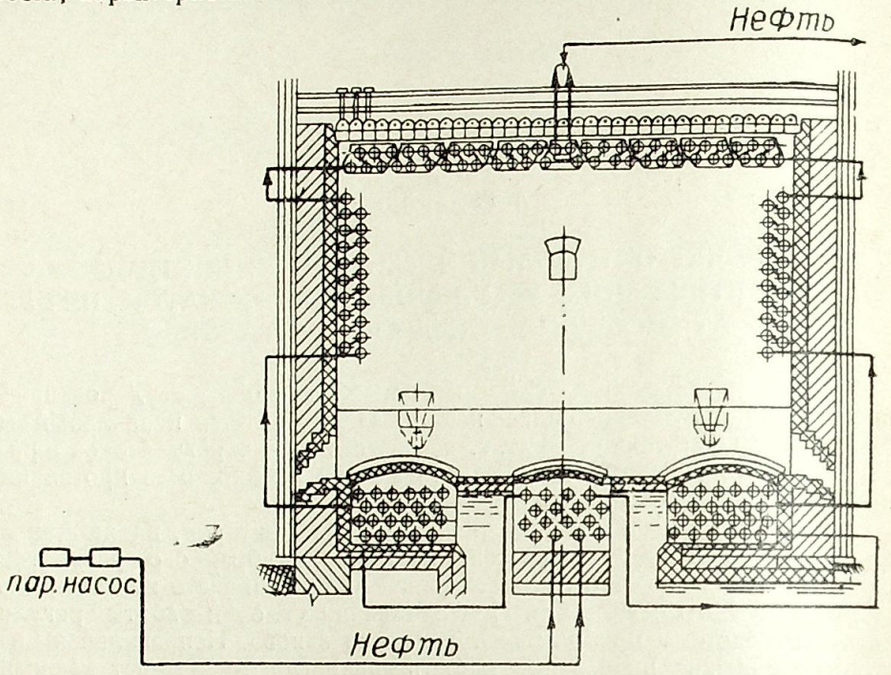


Рис. 1. Однокамерная печь, имеющая горизонтальную стену между конвекционными и радиационными камерами.

Динамические свойства объекта автоматического регулирования могут быть определены как аналитическим, так и экспериментальным путем. Аналитический путь исследования динамических свойств объекта регулирования заключается в составлении дифференциальных уравнений, связывающих различные параметры объекта и позволяющих выяснить влияние разных факторов на поведение объекта в установившихся и переходных режимах. В настоящее время, вследствие недостаточной разработки этого вопроса, аналитические методы для исследования объектов не могут быть использованы эффективно. Поэтому такого рода исследования пока ведут, в основном, экспериментальными методами.

Как известно, существующие в настоящее время методы экспериментального определения динамических характеристик объектов с линейными характеристиками сводятся либо к снятию установившихся вынужденных колебаний при известной форме и частота периодических входных возмущений, либо к снятию переходных функций при апериодической форме входных возмущений. После изучения технологической схемы трубчатой печи атмосферной трубчатой установки пришли к выводу, что наиболее существенными являются следующие каналы (рис. 2).

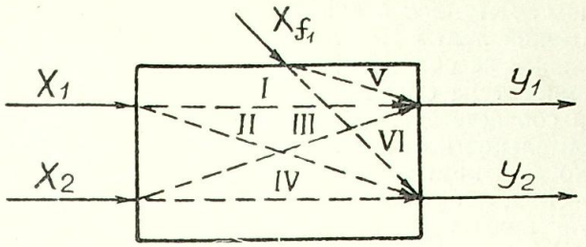


Рис. 2. Структурная схема объекта регулирования.

I – канал регулирования. Вход—расход газа в южной стороне (x_1). Выход—температура сырья на выходе из печи по южной стороне (y_1)

II—канал возмущения. Вход—расход газа в южной стороне (x_1). Выход—температура сырья на выходе из печи по северной стороне (y_2)

III—канал возмущения. Вход—расход газа в северной стороне (x_2). Выход—температура сырья на выходе из печи на южной стороне (y_1).

IV—канал регулирования. Вход—расход газа в северной стороне (x_2).
Выход—температура сырья на выходе из печи по северной стороне (y_2),

V—канал возмущения. Вход—расход сырья на входе в печь (x_{f1}). Выход—температура сырья на выходе из печи по южной стороне (y_1).

VI—канал возмущения. Вход—расход сырья на входе в печь (x_{f1}) Выход—температура сырья на выходе из печи по северной стороне (y_2).

Трубчатая печь как со стороны сырья, так и со стороны топлива является чистосимметричным.

канал—аналогичен с IV каналом; II канал аналогичен с III каналом; V канал—аналогичен с VI каналом.

Экспериментальные динамические характеристики объектов определяются несколькими методами. Для определения динамических характеристик трубчатой печи нами были сняты по вышеуказанным каналам кривые разгона на БНЗ им. Сталина. При этом использовались контрольно-измерительные приборы и регуляторы, имеющиеся на щите установки.

Кривые разгона объекта по I и II каналам снимаются следующим образом. Через 20—25 *мин* после установления равновесия, производим единичное скачкообразное возмущение быстрой перестановкой форсуночного вентиля подачи газа. Амплитуду возмущения принимаем 0,06% от максимального расхода газа. На диаграммной ленте отмечается положение пера в момент нанесения возмущения для отсчета времени начального запаздывания до начала ответного изменения температуры. Опыт ведется до тех пор, пока не установится новое значение регулируемой величины.

Для того, чтобы кривая разгона уложилась в зоне максимально допустимых отклонений регулируемой величины, последняя стабилизируется перед опытом на верхнем пределе; после этого наносится скачкообразное возмущение в сторону уменьшения температуры. Величина возмущения записывалась расходомером-дифманометром типа ДП—610. Выходные величины регистрировались электронным потен-

циометром типа ЭПП—09 с градуированной шкалой О—600°С, при скорости диаграммной ленты 120 *мм/час*.

Все остальные источники возмущений—давление газа перед форсунками и температура сырья на входе в печь—во время опыта стабилизируются соответствующими приборами.

Производительность печи, т. е. расход сырья поддерживается регулятором расхода, в комплект которого входят датчик-попловковый дифманометр ПЭС, вторичный регулирующий прибор типа Э—610.

Для снятия кривых разгона по V—VI каналам возмущения наносятся задатчиком регулятора постоянство расхода сырья и поддерживаются регулятором. Величина возмущения принимается 15 % от максимального расхода сырья. Опыты проводятся как в сторону увеличения температуры, так и уменьшения ее.

Каждый опыт проводится в одних и тех же условиях и повторяется не менее двух раз. Совпадение кривых разгона двух одинаковых опытов является необходимым и практически достаточным доказательством достоверности их результатов. Структурная схема объекта регулирования и его экспериментальные и динамические характеристики показывают, что в объекте имеются внутренние перекрестные связи с обратными знаками. Физически это объясняется следующим образом. При повышении температуры в одном потоке, за счет гидравлических сопротивлений, образующихся в трубчатой печи, соответственно снижается температура в другом потоке и наоборот. Вследствие наличия перекрестной связи между x_1 и y_2 и x_2 и y_1 следовало бы применять связанное регулирование, т. е. осуществлять компенсацию воздействия x_1 на y_2 и x_2 на y_1.

После теоретического анализа пришли к выводу что, нет необходимости создать взаимосвязанное регулирование на промышленной установке. Как известно, для создания взаимосвязанного регулирования нодбходимо ввести в систему регулирования дополнительную связь для поддержания нормального технологического режима, так как наличие подобной связи значительно усложняет настройку и эксплуатацию систем автоматического регулирования.

На Бакинском нефтеперерабатывающем заводе им. Сталина в сентябре 1959 г. лабораторией автоматики Энергетического института Академии наук Азербайджанской ССР при непосредственном участии автора была смонтирована и включена система автоматического регулирования трубчатой печи атмосферной трубчатой установки с применением блоков и приборов пневматической агрегатной унифицированной системы (АУС). Для получения оптимального процесса регулирования процесса следует рассчитывать оптимальную настройку системы автоматического регулирования с учетом внутренней перекрестной связи.

Ниже рассчитывается одноконтурная система регулирования без учета внутренней перекрестной связи. Расчет системы автоматического регулирования ведется по I основному регулируемому каналу, т. е. „расход газа в южной стороне—температура сырья на выходе из печи.“ На рис. 3 показана кривая разгона, полученная по этому каналу. Кривые разгона остальных каналов не представлены, так как характер этих кривых почти один и тот же. Представлены только полученные выражения передаточных функций по указанным каналам. Из кривого разгона следует, что система описывается дифференциальными уравнениями высокого порядка, что подтверждается формой начального участка кривой. Порядок дифференциальных уравнений можно понизить, полагая, что объект по каждому каналу состоит из

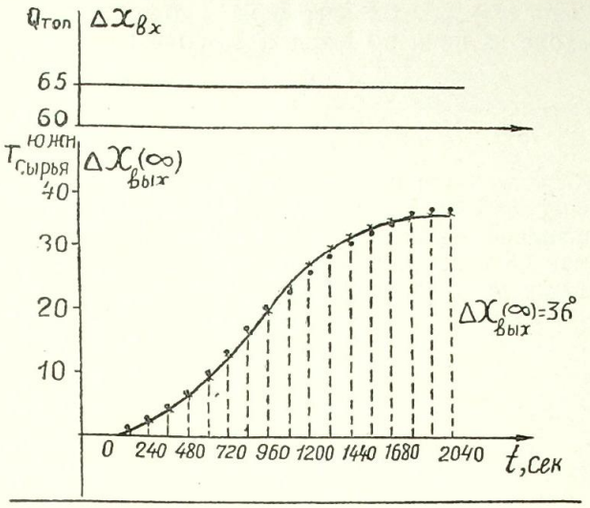


Рис. 3. Экспериментальная и аппроксимирующая кривые разгона при возмущении расходом газа

двух звеньев; звено „чистого“ запаздывания с передаточной функцией $l^{-p\tau}$ (где τ – величина „чистого“ запаздывания) и звено, переходная функция которого описывается участком кривой разгона с момента изменения температуры.

Определение коэффициентов передаточных функций регулируемого объекта по его экспериментальным кривым разгона

По построенным кривым разгона находим аналитические выражения передаточных функций, аппроксимирующей, с желаемой степенью точности передаточную функцию регулируемую объекта, по методу, изложенному в литературе [4].

На экспериментальной кривой переходного процесса отделяем „чистое“ запаздывание τ и аппроксимируем кривую разгона без τ. Влияния чистого запаздывания учитываем введением в передаточную функцию множителя $l^{-p\tau}$. Такой прием позволяет аппроксимировать экспериментальную кривую с той же точностью передаточной функцией более низкого порядка. Нет смысла описывать методику вычислений, так как она подробно изложена в работе [4].

Ниже даются полученные выражения коэффициентов передаточных функций по всем трем каналам без учета „чистого“ запаздывания.

По I каналу, т. е. „расход газа в южной стороне—температура сырья на выходе из печи по южной стороне“:

$$w(p)=\frac{6\cdot 10^{-2}}{4{,}53\cdot 10^{7}p^{3}+3{,}1\cdot 10^{5}p^{2}+8{,}92\cdot 10^{2}p+1} \qquad (1)$$

По II каналу „расход газа в южной стороне—температура сырья на выходе из печи по северной стороне“:

$$w(p)=\frac{4\cdot 10^{-2}}{5{,}68\cdot 10^{7}p^{3}+3{,}08\cdot 10^{5}p^{2}+9{,}21\cdot 10^{2}p+1} \qquad (2)$$

По V каналу — „расход сырья на входе в печь—температура сырья на выходе из печи по южной стороне“:

$$w(p)=\frac{1{,}67\cdot 10^{-2}}{4{,}21\cdot 10^{7}p^{3}+2{,}91\cdot 10^{5}p^{2}+7{,}31\cdot 10^{2}p+1} \qquad (3)$$

Чтобы убедиться в правильности этих трех найденных аппроксимированных передаточных функций, необходимо решить дифференциальное уравнение и полученное решение сравнить с экспериментальной кривой разгона. Как видно из передаточных функций, полученные приближенные уравнения трубчатой печи по рассматриваемым каналам регулирования и возмущений являются уравнения третьего порядка. Ниже для примера дается решение характеристического уравнения объекта по I каналу регулирования:

$$4{,}53\cdot 10^{7}p^{3}+3{,}1\cdot 10^{5}p^{2}+8{,}92\cdot 10^{2}p+1=0 \qquad (4)$$

По формуле Кардана находим корни этого характеристического уравнения:

$$p_1=-2{,}5\cdot 10^{-3}$$

$$p_{2,3}=-2{,}17\cdot 10^{-3}\pm i\,2{,}03\cdot 10^{-3}.$$

Выявлено, что характеристические уравнения третьей степени имеют один вещественный и два комплексных корня. Последнее подтверждает, что во внутреннем контуре трубчатой печи происходят собственные колебания. Для построения аппроксимированной кривой разгона используем графический метод Башкирова [3], основанный на известном методе построения экспоненциальных функций. Построенная аппроксимированная кривая разгона показана на рис. 2 точками, а экспериментальная кривая—крестиками. Совпадение аппроксимирующей и экспериментальной кривых является достаточно хорошим.

Расчет амплитудно-фазовых характеристик трубчатой печи по каналу „расход газа—температура выхода из печи“

Передаточная функция по каналу „расход газа—температура сырья на выходе из печи“, аппроксимированная эквивалентной системой третьего порядка с учетом чистого запаздывания равна:

$$w(p)=\frac{6\cdot 10^{-2}}{4{,}53\cdot 10^{7}p^{3}+3{,}1\cdot 10^{5}p^{2}+8{,}92\cdot 10^{2}p+1}\cdot l^{-180p} \qquad (5)$$

Имея аналитические выражения передаточных функций, находим соответствующие им выражения амплитудно-фазовых характеристик. Как известно, амплитудно-фазовые характеристики есть частное значение передаточной функции $w(p)$ для $p=i\omega$.

Амплитудно-фазовая характеристика по каналу „расход газа—температура сырья на выходе из печи“ равна:

$$w(i\omega)=\frac{6\cdot 10^{-2}}{4{,}53\cdot 10^{7}(i\omega)^{3}+3{,}1\cdot 10^{5}(i\omega)^{2}+8{,}92\cdot 10^{2}i\omega+1}\cdot l^{-i180\omega} \qquad (6)$$

Амплитудно-фазовую характеристику системы можно представить и в показательной форме:

$$w(i\omega)=M(\omega)\,e^{-i[f(\omega)]}=$$

$$=\frac{6\cdot 10^{-2}}{\sqrt{(1-3{,}1\cdot 10^{5}\omega^{2})^{2}+(8{,}92\cdot 10^{2}\omega-4{,}53\cdot 10^{7}\omega^{3})^{2}}}\times$$

$$\times\, l^{-i\left(\operatorname{arctg}\frac{8{,}92\,.\,10^{2}\omega-4{,}53\,.\,10^{7}\omega^{3}}{1-3{,}1\,.\,10^{5}\omega^{2}}+180\,\omega\right)}. \qquad (7)$$

Отсюда нами получены выражения для амплитудно-частной характеристики:

$$M(\omega)=\frac{6\cdot 10^{-2}}{\sqrt{(1-3{,}1\cdot 10^{5}\omega^{2})^{2}+(8{,}92\cdot 10^{2}\omega-4{,}53\cdot 10^{7}\omega^{3})^{2}}} \qquad (8)$$

и фазо-частотной характеристики:

$$f(\omega)=\operatorname{arctg}\frac{8{,}92\cdot 10^{2}\omega-4{,}53\cdot 10^{7}\omega^{3}}{1-3{,}1\cdot 10^{5}\omega^{2}}+180\,\omega \qquad (9)$$

Результаты этих вычислений при различных значениях ω приведены в табл. 1.

Таблица 1

ω, *сек*$^{-1}$	$f(\omega)$, *рад*	$M(\omega)$
0,00	0,00	0,060
0,000367	0,405	0,0595
0,0011	1,473	0,0539
0,00183	2,176	0,0443
0,00257	2,636	0,0324
0,0043	2,928	0,022
0,00404	3,72	0,0146
0,00477	4,08	0,0098
0,0055	4,435	0,0088
0,00624	4,720	0,0048
0,00697	4,970	0,00358
0,00771	5,200	0,0027
0,00844	5,390	0,0020

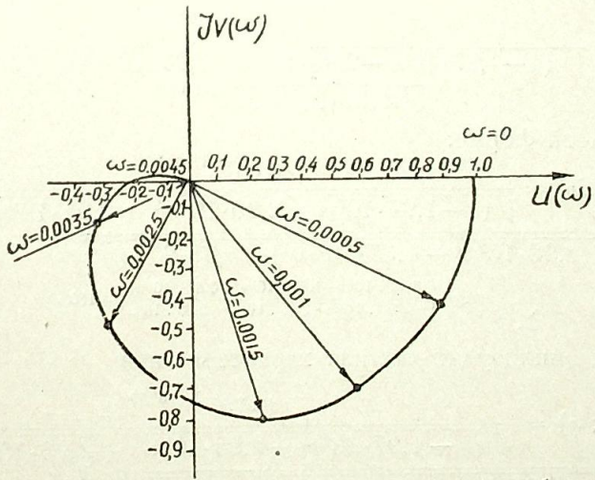


Рис. 4. Амплитудно-фазовая характеристика трубчатой печи по каналу „расход газа—температура сырья на выходе из печи“

По полученным данным построен годограф амплитудно-фазовых характеристик для рассматриваемого канала регулирования (рис. 4).

Расчет оптимальной надстройки системы регулирования и проверка качества процесса регулирования

Учитывая, что рассматриваемые каналы регулирования описываются достаточно сложными передаточными функциями при наличии „чистого" запаздывания, проведено исследование процессов регулирования регуляторами двух типов (серийно выпускаемых промышленностью)—астатическими с двумя и тремя параметрами настройки. Расчет оптимальных настроек этих регуляторов производим по методике, предложенной Е. Г. Дудниковым [1].

Степень затухания процесса, как это принято в большинстве случаев при регулировании тепловых процессов, взята равной $\psi=0{,}75$. Степенью затухания ψ называют отношение разности двух соседних направленных в одну сторону амплитуд к первой (большей) из них. Степени затухания $\psi=0{,}75$ соответствует степень колебательности $m=0{,}221$. Связь между ψ и m выражается формулой.

$$\psi = 1 - l^{-2\pi m}.$$

Для определения оптимальной настройки регулятора необходимо прежде всего рассчитать расширенную амплитудно-фазовую характеристику регулируемого объекта. Расширенная амплитудно-фазовая характеристика выражает зависимость от частоты отношения амплитуд и фазового сдвига выходных и входных затухающих колебаний. Для вычисления расширенных амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристик печи по этому каналу в выражении передаточной функции заменяем p на $z=-m\omega+i\omega=\omega(i-m)$.
Тогда искомая характеристика:

$$w(iz) = w(m; i\omega) = \frac{1}{\varphi(z)} l^{-if(z)} = \frac{1}{\theta(m;\omega)} l^{iF(m;\omega)}, \qquad (10)$$

где $\theta(m;\omega)$ и $F(m;\omega)$—вещественные функции ω и m,

$$w(m;\omega) = \frac{6\cdot 10^{-2}\cdot l^{39{,}78\omega}}{(1-1{,}97\cdot 10^2\omega - 2{,}95\cdot 10^5\omega^2 + 2{,}95\cdot 10^7\omega^3) + (8{,}92\cdot 10^2\omega - 3{,}87\cdot 10^7\omega^3)i}\, l^{-180i\omega} \qquad (11)$$

в показательной форме:

$$w(m; i\omega) = \frac{6\cdot 10^{-2}\, l^{39{,}78\omega}}{\sqrt{(1-1{,}97\cdot 10^2\omega - 2{,}95\cdot 10^5\omega^2 + 2{,}95\cdot 10^7\omega^3)^2 + (8{,}92\cdot 10^2\omega - 1{,}37\cdot 10^5\cdot\omega^2 - 3{,}87\cdot 20^7\omega^3)^2}} \times i^{\operatorname{arctg}\frac{8{,}92\cdot 10^2\omega - 1{,}37\cdot 10^5\omega^2 - 3{,}87\cdot 10^7\omega^3}{1-1{,}97\cdot 10^2\omega - 2{,}95\cdot 10^5\omega^2 + 2{,}95\cdot 10^7\omega^3} + 180\omega} \qquad (12)$$

Расширенная амплитудно-частная характеристика:

$$\theta(m;\omega) = \frac{6\cdot 10^{-2}\cdot l^{39{,}78\omega}}{\sqrt{(1-1{,}97\cdot 10^2\omega - 2{,}95\cdot 10^5\omega^2 + 2{,}95\cdot 10^7\omega^3)^2 + (8{,}92\cdot 10^2\omega - 1{,}37\cdot 10^5\omega^2 - 3{,}87\cdot 10^7\omega^3)^2}} \qquad (13)$$

Расширенная фазо-частотная характеристика:

$$F(m;\omega) = \operatorname{arctg}\frac{8{,}92\cdot 10^2\omega - 1{,}37\cdot 10^5\omega^2 - 3{,}87\cdot 10^7\omega^3}{1-1{,}97\cdot 10^2\omega - 2{,}95\cdot 10^5\omega^2 + 2{,}95\cdot 10^7\omega^3} + 180\omega \qquad (14)$$

Таблица 2

ω, *сек*$^{-1}$	0,0015	0,002	0,0021	0,0022	0,0023	0,0024	0,0025	0,0027
$\theta(m;\omega)$	14,29	25,23	15,62	15,96	16,30	16,98	17,16	19,28
$F(m;\omega)$	1,99	2,27	2,39	2,46	2,64	2,75	2,88	3,10
S_1	8,69	12,37	13,76	14,60	16,00	17,00	17,64	19,30
S_0	0,02	0,24	0,0236	0,023	0,19	0,16	0,012	0,0023

Результаты вычислений при различных ω приведены в табл. 2, где m—степень колебательности процесса принята равной 0,221.

Вычисление оптимальных параметров настройки астатического регулятора с двумя параметрами настройки, регулирующего по каналу „расход газа—температура сырья на выходе из печи".

Для астатического регулятора с двумя параметрами настройки определение значений параметров настройки, обеспечивающих заданное значение степени колебательности процесса ($m=0{,}221$) регулирования, выполнено по следующему выражению [1].

$$S_0 = \omega(1+m^2)\,\theta(m;\omega)\sin F(m;\omega) \qquad (15)$$

$$S_1 = \theta(m;\omega)\,[m\sin F(m;\omega) - \cos F(m;\omega)] \qquad (16)$$

Расчеты параметров настройки S_0 и S_1 приведены также в табл. 2.

График $S_0=f(S_1)$ изображен на рис 5.

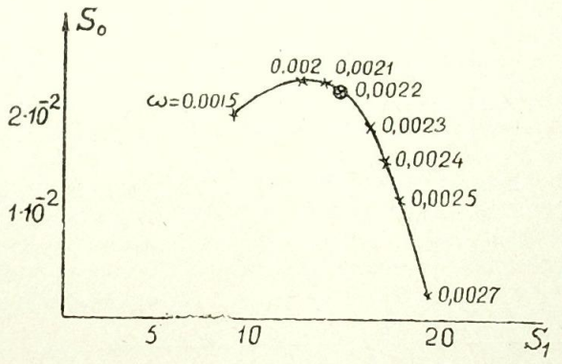


Рис. 5. Разбиение плоскости параметров настройки автоматического регулятора для $m=0{,}221$.

В качестве оптимальных параметров настройки принимаем следующие:

$S_1 = 14{,}6$ °C/% от макс. расхода

$S_0 = 0{,}023$ °C$_1$/% *сек*.

$\omega_p = 0{,}0022$ *рад/сек*.

Построение графика процесса регулирования

Для окончательного решения вопроса о пригодности выбранного типа регулятора и параметров его настройки для объекта строим график переходного процесса, возникающего в замкнутой системе регулирования после нанесения максимально возможного в эксплуатации возмущения.

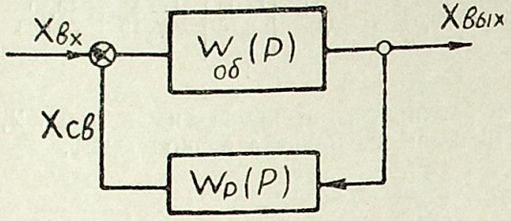


Рис. 6. Схематическое изображение замкнутой системы автоматического регулирования.

Считаем, что возмущение это нанесено в месте установки регулирующего органа. Как по величине, так и по форме принимаем его таким же, каким было возмущение при снятии кривой разгона. Для построения переходного процесса находим прежде всего частотные характеристики системы регулирования в замкнутом состоянии по имеющимся частотным характеристикам объекта и регулятора при указанной выше оптимальной настройке.

Зная амплитудно-фазовую характеристику объекта $w_{об}(i\omega)$ и регулятора $w_р(i\omega)$, находим амплитудно-фазовую характеристику замкнутой системы регулирования $K(i\omega)$ по формуле (рис. 6):

$$K(i\omega) = \frac{W_{об}(i\omega)}{1 - w_{об}(i\omega)\cdot w_р(i\omega)} \qquad (17)$$

Это уравнение для облегчения вычислений преобразуем к виду:

$$K(i\omega) = \frac{M_{об}(\omega)}{\sqrt{\{1 - M_{об}(\omega) M_р(\omega)\cos[f_р(\omega) - f_{об})]\}^2 + \{M_{об}(\omega) M_р(\omega)\sin[f_р(\omega) - f_{об}(\omega)]\}^2}} \times l^{-i\left(\operatorname{arctg}\frac{M_{об}(\omega)\cdot M_р(\omega)\sin[f_р(\omega)-f_{об}(\omega)]}{1-M_{об}(\omega)M_р(\omega)\cos[f_р(\omega)-f_{об}(\omega)]}+f_{об}(\omega)\right)} \qquad (18)$$

$$K(i\omega) = M(\omega) l^{(if\omega)}$$

ω, сек$^{-1}$	$\omega=\omega_0$ 0,000367	$\omega=3\omega_0$ 0,00110	$\omega=5\omega_0$ 0,00183	$\omega=7\omega$ 0,00257	$\omega=9\omega_0$ 0,00330
$M_{об}(\omega)$	0,0595	0,0539	0,0443	0,0324	0,0220
$f_{об}(\omega)$	0,405	1,473	2,176	2,636	2,928
$M_р(\omega)$	60,94	25,56	19,24	17,12	16,20
$f_р(\omega)$	1,80	2,18	2,43	2,59	2,70
$M(\omega)$	0,0165	0,0602	0,160	0,020	0,0163
$f(\omega)$	0,876	0,05	− 2,050	−2,16	−2,868

Вычисления ведем для частот в предположении использования метода Акульшина [1]:

$$\omega_р = \frac{\omega_р}{6} = \frac{0{,}0022}{6} = 0{,}000367\ сек^{-1}.$$

Вычисление производим для частоты ω_0; $3\omega_0$; $5\omega_0$; $8\omega_0$; $9\omega_0$;..

Для этих частот находим $M_{об}(\omega)$ и $f_{об}(\omega)$, они приведены в табл. 3.

Определяем частотные характеристики регулятора для вышеуказанных частот по формуле:

$$w_р(i\omega) = M_р(\omega)\, l^{if_р(\omega)} = \frac{S_0}{\omega}\sqrt{\left(\frac{S_1}{S_0}\omega\right)^2 + 1}\cdot l^{i\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{S\omega}{S_0}\right)} \qquad (19)$$

Результат вычислений приведены в табл. 3.

Исследуемый переходный процесс представляется в виде элемента некоторой периодической функции. Тогда входная величина в случае скачкообразного возмущающего воздействия может быть представлена рядом Фурье:

$$x_{вх}(t) \equiv \frac{2}{\pi} A\left[\sin\omega_0 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5}\sin 5\omega_0 t + \cdots\right] \qquad (20)$$

Так как рассматриваемая система принимается линейной, то выходная величина может быть представлена также в виде аналогичного ряда Фурье:

$$x_{вых}(t) = \frac{2}{\pi} A\left\{M(\omega_0)\sin[\omega_0 t + f(f(\omega)] + \frac{1}{3} M(3\omega_0)\times \times\sin(3\omega_0) t + f(3\omega_0)] + \frac{1}{5} M(5\omega_0)\sin[5\omega_0 t + f(5\omega_0)] + \cdots\right\}, \qquad (21)$$

где A—величина возмущения.

Кривые переходного процесса не построены, так как получено несколько основных точек, которые указывают на удовлетворительность переходного процесса, но в реальном промышленном объекте не будет оптимальным процессом, так как причиной явилось то, что не были учтены внутренние перекрестные связи. Для получения оптимального процесса регулирования следует рассчитывать системы регулирования с учетом внутренней перекрестной связи. Расчет системы регулирования с учетом внутренней связи будет изложен в следующей статье.

Таблица 3

$\omega=11\omega_0$ 0,00404	$\omega=13\omega_0$ 0,00477	$15\omega_0$ 0,00550	$17\omega_0$ 0,00624	$19\omega_0$ 0,00697	$21\omega_0$ 0,00771	$23\omega_0$ 0,00844
0,0146	0,0098	0,0088	0,00486	0,00358	0,0027	0,0020
3,72	4,080	4,436	4,720	4,970	5,200	5,390
15,69	15,37	15,15	15,06	14,97	14,90	14,86
2,77	2,82	2,86	2,89	2,92	2,94	2,96
0,0127	0,0093	0,0053	0,0049	0,0036	0,00276	0,0020
−3,56	−3,845	−4,49	−4,65	−4,92	−5,17	−5,192

ВЫВОДЫ

В результате проведенных экспериментальных исследований и теоретического анализа можно сделать следующие выводы.

1. Трубчатая печь в качестве объекта автоматического регулирования рассматривается как система с многими, взамосвязанными выходными величинами, она является и объектом регулирования с ярко выраженными распределенными параметрами.

2. Анализ полученных дифференциальных уравнений показывает, что их характеристические уравнения имеют комплексные корни. Последнее подтверждает, что во внутреннем контуре трубчатой печи при известных условия и соотношениях возникают собственные колебания. Это является следствием распределенности параметров трубчатой печи.

3. Анализ структурной схемы системы автоматического регулирования показывает, что качества процесса регулирования при схеме несвязанного регулирования будет укладываться во все допуски технологического режима, если будут учтены внутренние связи, и поэтому не следовало бы вводить в систему регулирования дополнительной внешней связи для поддержания нормального режима, так как наличие подобной связи значительно усложнит настройку и эксплуатацию системы автоматического регулирования. В заключение, пользуясь случаем, хочу выразить благодарность Е. Г. Дудникову за ряд ценных советов, данных при выполнении настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дудников Е. Г. Основы автоматического регулирования тепловых процессов. Госэнергоиздат, 1956.
2. Исмайлов Р, Г.. Гусейнов Д. А. Технология нефти. Азнефтнешр, Баку, 1957 (на азерб. яз.).
3. Попов Е, П. Динамика системы автоматического регулирования. ГИТТЛ 1954.
4. Симою М. П. Определение коэффициента передаточных функций линеаризованных звеньев и систем авторегулирования. „Автоматика и телемеханика", 1957, № (.

Ə. Һ. Əбилов

Атмосфер гурғусундакы борулу собанын автоматик тənзим системинин оптимал сазланмасынын һесабланмасы

ХҮЛАСƏ

Сənаjедə автоматик тənзим системинин лаjиһə едилмəсинин башлыча чəһəтлəриндəн бири тənзимлəjичинин дүзкүн сечилмəси вə онун оптимал сазланмасынын һесабланмасыдыр. Лакин истеһсалатда техноложи просесин кедишинə бир чох дəjишən амилляри тə'сири нəтичəсиндə сечилмиш тənзимлəjичинин, тəчрүби jолла сазланмасы адəтən вахт алыр вə бир чох һалларда лазыми нəтичəни вермир. Одур ки, тənзимлəjичини jенидəн сазламаг лазым кəлир.

Тənзимлəjичинин дүзкүн сазланмамасы гурғунун мəһсулдарлығыны азалдыр, алынан мəһсулун кеjфиjjəтини пислəшдирир вə кинематик звеноларын сырадан чыхмасыны сүр'əтлəндирир.

Тənзимлəjичинин сечилмəси вə онун оптимал сазланмасынын һесабланмасы дүзхəтли системлəр үчүн һазырланмыш үч мə'лум үсулдан бири илə һəлл олуна биляр. Бунлардан бири дүзхəтли диференсиал тənликлəр үсулу, икинчиси кечид функсиjалары үсулу вə үчүнчүсү тезлик характеристикалары үсулудур.

Jухарыда дедиjимиз мəсəлəлəрин һəлли үчүн тезлик характеристикалары үсулундан истифадə едирик.

Тənзим олунан борулу соба ики ахымлы вə бир тутумлу атмосфер гурғусуна аиддир. Бу борулу собада əсас тənзим олунан параметр собанын чыхышында хам малын температурудур.

Мə'лумдур ки, објектин динамикасыны билмəдəн автоматик тənзим системи jаратмаг мүмкүн дejилдир. Классик автоматик тənзим нəзəриjjəсиндəн мə'лумдур ки, објектин динамик характеристикалары һəм аналитик, һəм дə тəчрүби jолла чыхарылыр.

Аналитик jолла објектин динамики хассəляринин тəдгиги онун мүхтəлиф параметрлəрини əлагəлəндирəн, гəрарлашмыш вə кечид режимляриндə онун кедишинə мүхтəлиф амилляри тə'сирини ajдынлашдырмаға имкан верəн диференсиал тənликлəрин гурулмасындан ибарəтдир.

Гejд етмəк лазымдыр ки, борулу соба кими мүрəккəб хүсусиjjəтли објектлəр үчүн аналитик jолла диференсиал тənликлəрин гурулмасы лазыми дəрəчədə һазырланмадығындан бу jолла објектин тəдгиги ефектив нəтичə верə билмəз. Одур ки, бу нөв тəдгигатлар һəлəлик тəчрүби үсулла апарылыр.

Һазырда дүзхəтли характеристикаjа малик олан објектлəрин динамики характеристикаларыны тə'jин етмəк үчүн мөвчуд олан тəчрүби үсул jа објектин киришинə апериодик формада тəкан верəрəк онун кечид функсиjаларыны тə'jин етмəк, jа да објектин киришинə һармоник рəгсляр верəрəк онун тезлик характеристикаларыны чыхармагдан ибарəтдир.

Атмосфер гурғусунун борулу собасынын техноложи схемини өjрəнəркəн белə нəтичəjə кəлмишик ки, објектдə ашағыдакы тənзим вə тəкан каналлары мөвчуддур.

I—тənзим каналы. Кириш—чəнуб һиссəдəки газын сəрфи; чыхыш—собанын чəнуб һиссəсиндəки хаммалын температуру.

II—тəкан каналы. Кириш—чəнуб һиссəдəки газын сəрфи; чыхыш—собанын шимал һиссəсиндəки хаммалын температуру.

III—тəкан каналы. Кириш—шимал һиссəдəки газын сəрфи; чыхыш—собанын чəнуб һиссəсиндəки хаммалын температуру.

IV—тənзим каналы. Кириш—шимал һиссəдəки газын сəрфи; чыхыш—собанын шимал һиссəсиндəки хаммалын температуру.

V—тəкан каналы. Кириш—собанын киришиндə хаммалын сəрфи; чыхыш—собанын чəнуб һиссəсиндəки хаммалын температуру.

VI—тəкан каналы. Кириш—собанын киришиндə хаммалын сəрфи; чыхыш—собанын шимал һиссəсиндəки хаммалын температуру.

I канал IV каналын, II канал III каналын, V канал исə VI каналын ejнидир.

Структур схемдəн көрүнүр ки, објектдə дахили чарпаз əлагəлəр вардыр.

Собанын бир ахымында температур артырса, дикəр ахымда һидравлик мүгавимəт нəтичəсиндə она мүтənасиб олараг температур азалыр. Бурадан белə нəтичə чыхыр ки, собада əлагəли тənзимлəjичи систем jаратмаг лазымдыр.

Нəзəри тəһлилдən сонра бу фикрə кəлдик ки, сənаjе гурғусунда əлагəли тənзим системи jаратмаға еһтиjач jохдур, чүнки белə бир системин jарадылмасы автоматик тənзим системинин истисмарыны вə сазланмасыны бир гəдəр чətинлəшдирир.

Оптимал тәнзим просеси алмаг үчүн дахили чарпаз әлагәни нәзәрә алараг, бир контурлу автоматик тәнзим системинин оптимал сазланмасыны һесабламаг лазымдыр. Лакин биз биринчи нөвбәдә бир контурлу тәнзим системини дахили чарпаз әлагәни нәзәрә алмадан һесабладыг.

Атмосфер гурсуғундакы борулу собанын динамикасыны өјрәнмәк мәгсәди илә Сталин адына нефтаҹырма заводунда борулу собанын кечид характеристикалары тәчрүби јолла чыхарылмышдыр. Чыхарылмыш тәчрүби кечид характеристикалары әјрисиндән М. П. Симоју тәрәфиндән верилмиш үсулла [2] објектин јухарыда гејд етдијимиз тәнзим вә тәкан каналлары үчүн өтүрмә функсијаларыны тә'јин етдик.

Алынан диференсиал тәнликләри анализ етдикдә көрүнүр ки, онларын характеристик тәнликләриниң комплекс көкләри вардыр. Бу, ону көстәрир ки, собанын дахили контурунда хүсуси рәгсләр јараныр, бу да објектин пајланмыш параметрли олмасындан ирәли кәлир.

Објекти тәнзим етмәк үчүн ики сазланма параметри олан изодром тәнзимләјичи сечдик. Сечдијимиз тәнзимләјичинин јарарлы олмасыны вә онун оптимал сазланмасыны проф. Ј. Г. Дудников тәрәфиндән тәклиф едилмиш үсулла һесабладыг [4].

Бу мәгсәдлә, биз, бүтүн истилик просесләри үчүн гәбул олунмуш сөнмә дәрәчәсини $\Psi=0{,}75$ гәбул едирик. Бу сөнмә дәрәчәсинә мүвафиг рәгс дәрәчәси $m=0{,}221$ олур.

Сечдијимиз тәнзимләјичи үчүн һесаблама нәтичәсиндә алдығымыз оптимал сазланма параметрләринә көрә гурулан тәнзим просеси кифајәтләндиричидир. Лакин реал сәнаје објектиндә исә кифајәтләндиричи олмур. Буна да сәбәб чарпаз әлагәнин нәзәрә алынмамасыдыр. Одур ки, оптимал тәнзим просеси алмаг үчүн системин һесабланмасында мүтләг дахили чарпаз әлагәни нәзәрә алмаг лазымдыр. Бу мүнасибәтлә исә ајрыча мәгалә дәрч етдирәчәјик.

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-риjазиjjат вә техника елмләри серијасы, 1961, № 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1961, № 2

Н. Н. МӘММӘДОВ

ЗИРӘ САһӘСИНДӘ СӘМӘРӘЛИ ГАЗЫМА ТЕХНОЛОКИЈАСЫ

Совет Иттифагында нефт вә газ гујуларынын газылмасы әсасән балтанын гују дибиндә фырладылмасы принсипинә әсасланыр. Лакин бу әмәлиjjат балтанын ја газыма борулары илә бирликдә гују ағзындан ротор васитәси илә, јахуд да гујудиби мүһәррикләринин көмәји илә һәјата кечирилир.

Сонунчулара газыма турбинләри вә електрик газыјычылары аиддир.

Мә'лумдур ки, Авропада ән дәрин гујулар Совет Иттифагында вә хүсусән Азәрбајчанын мүхтәлиф рајонларында газылмышдыр. Бу саһәдә Зирә, Һөвсан, Гум адасы, Гарадағ, Падар вә дикәр рајонларда газылан гујулар һәм дәринликләри вә һәм дә кеоложи чәһәтдән мүхтәлифлији илә хүсуси әһәмиjjәт кәсб едир.

Дәрин гујулар газаркән, газыма сүр'әтинин јүксәк вә еләчә дә маја дәјәринин кичик олмасыны тә'мин етмәк үчүн, дикәр амилләрлә јанашы газыма үсулунун вә газыма балталары типинин дүзкүн сечилмәсинин дә чох бөјүк әһәмиjjәти вардыр.

Тәчрүбә көстәрир ки, газыма апарылан рајонларын әксәриjjәтиндә, кечилән сүхурларын хүсусиjjәтиндән вә дәринликләриндән асылы олараг һансы газыма үсулунун нисбәтән даһа чох сәмәрәли олдуғуну мүәjjән едән лазымынча әсас олмадан бу вә ја дикәр газыма үсулуна даһа чох мејл көстәрилир. Бу исә нәтичә е'тибары илә газыманын техники вә игтисади көстәричиләринин хејли писләшмәсинә сәбәб олур.

Зирә јатағынын гуру вә дәниз саһәләриндә ротор вә турбин газыма үсулларынын көмәји илә дәринлиji 4700—4900 *м* вә даһа чох олан бир сыра истисмар вә кәшфиjjат гујулары газылмышдыр. Һәмин саһәдә газыма үсулларынын сәмәрәлилијини тәгдим етмәк үчүн 20-дән артыг истисмар вә кәшфиjjат гујуларынын фактики материаллары илә таныш олдугдан сонра 13 гујунун иши тәһлил едилмишдир. Тәһлил заманы каротаж диаграмы әсасында статиографик һоризонтлар, балталарын вә газыма турбинләринин типи, өлчүләри нәзәрә алынмагла газыманын орта механики сүр'әти, һәр дәлмә үзрә газыма метрләринин орта гијмәти, орта рејс сүр'әти вә коммерсија сүр'әтләри тә'јин едилмишдир.

Газыманын маја дәјәрини һоризонтлар үзрә һесабламаг чәтинлик төрәтдиjиндән бу гиjмәт анчаг ајры-ајры гујулар үзрә һесабланмышдыр.

Илк дәфә һәр гују үчүн һоризонтлар үзрә балталарын газыма метрләринин вә механики газыма вахтынын һесабат үчүн әсас көтүрү-

ләчәк орта гиҗмәтини мүәҗҗән етмәздән әввәл, ријази статистиканын[1] көмәји илә јарарсыз дәлмәләр һесабатдан атылыр.

Зирә саһәсиндә газылан бүтүн гујуларын үмуми тәчрүбәси көстәрир ки, јухары һоризонтларын газылмасында үчпәрли балталарын тәтбиги мүһүм үстүнлүкләрә маликдир. Лакин газылмыш гујуларда үчпәрли балталардан мүхтәлиф дәринликләрә (1637—3083 *м*) гәдәр истифадә едилмишдир.

Јухары һоризонтлары үчпәрли балталарла газымағын нә дәрәчәдә сәмәрәли олдуғуну мүәјјән етмәк үчүн, Сабунчу лај дәстәсинин дабанына гәдәр олан (3160—3240 *м*) дәринлијәдәк 10 гујунун техники көстәричиләри вә коммерсија сүр'әтләри 1-чи чәдвәлдә верилмишдир.

1-чи чәдвәл

Сыра №-си	Гујуларын №-си	Гујуларын Сабунчу лај дәстәсинин дабанына гәдәр дәринлији, *м*	Үчпәрли балталарла газма дәринлији, *м*-лә	Дәлмәләрин сајы: үмуми	үчпәрли балталарла	үчшарошкалы балталарла	Газманын орта механики сүр'әти, *м/саат*	Бир балта илә орта газма, *м*-лә	Газманын орта рејс сүр'әти, *м/саат*	Коммерсија сүр'әти, *м/дәз. ај*	Гејд
1	18	3160	1924	40	6	34	6,75	79	3,86	810*	
2	14	3190	2409	33	11	22	5,65	96,5	3,7	1360	
3	22	3260	2434	42	8	34	8,2	77,5	4,1	850*	
4	11	3169	2437	42	9	33	7,65	75,5	4,0	980*	
5	15	3240	2449	44	11	33	8,0	73,5	4,05	1450*	
6	9	3165	2724	27	12	15	5,9	117	4,2	1640	
7	16	3235	2845	34	16	18	6,8	95	4,17	1060*	
8	45	3164	2929	25	15	10	6,6	126	4,55	2020	
9	13	3180	2975	34	28	6	7,25	93,5	4,5	1640	
10	23	3194	3083	29	27	2	7,45	110	4,9	1880	

*—Гујуда аварија олдуғуна ишарәдир

1-чи чәдвәлдән көрүндүјү кими, Сабунчу лај дәстәсинин дабанынадәк гујуларын дәринликләри арасындакы фәрг о гәдәр дә бөјүк дејилдир. Лакин үчпәрли балталарла газыма дәринликләри чох бөјүк өлчүдә дәјишир вә нәтичә е'тибары илә газыманын әсас көстәричиләринә чидди тә'сир көстәрир. Мәсәлән, ротор үсулу илә үчпәрли балталарла газыма дәринлији 1925 *м*-дән 3083 *м*-ә гәдәр дәјишдикдә, дәлмәләрин сајы 40—44-дән 27—25-ә гәдәр азалмыш, газыманын рејс сүр'әти 15—20%, коммерсија сүр'әти исә 30—40% артмышдыр, (бурадан белә нәтичә чыхыр ки, үчпәрли балталарла баш сабунчу лај дәстәсинин дабанына, —3100—3200 *м* дәринлијәдәк роторла газымаг мәгсәдәујғундур).

Зирә саһәсиндә гујулар мүхтәлиф дәринликләрә, 1600—3150 *м*-ә гәдәр роторла газылдыгдан сонра, бә'зи һаллар мүстәсна олмагла, лајиһә дәринликләриндәк серијалы вә әсасән сексијалы турбинләрлә газылырлар. Тәкчә 16 №-ли гују 2812—3780 *м* интерваллы турбинлә газылдыгдан сонра, јенидән 3780 *м*-дән 4855 *м*-ә гәдәр 10 №-ли үч шарошкалы балталарла ротор үсулу илә газылмышдыр. Бу һагда материал кифајәт гәдәр олмаса да, ротор вә турбин газыма үсулларынын мүгајисәси үчүн үмуми тәсәввүр јаратмаға имкан верир.

[1] Ријази статистиканын көмәји илә һесабат үчүн јарарсыз дәлмәләрин тә'јини журнал мәгаләси һәчминдән кениш олдуғу үчүн бурада верилмир.

Ајры-ајры гујулар үзрә апарылмыш тәһлил кениш јер тутдуғу үчүн бурада верилмир вә јалныз һәмин гујуларын үмумиләшдирилмиш нәтичәләри 2-чи чәдвәлдә верилмишдир.

2-чи чәдвәлин һоризонтлар үзрә гыса тәһлили ашағыда верилир:

1. Сураханы лај дәстәсиндә роторла үчпәрли балталарла газылдыгда, турбин үсулуна нисбәтән вә үчшарошкалы балталарла ишләдикдә һәр ики үсула нисбәтән газыманын бүтүн көстәричиләри тәхминән 2—3 дәфә јүксәкдир. 11 №-ли үчшарошкалы балталарла газыманын механики сүр'әти һәр ики үсулда ејни олуб, дикәр көстәричиләри—дәлмә үзрә орта газыма, рејс вә коммерсија сүр'әтләри исә ротор үсулунда 1,5—2 дәфәјә јахын артыг олмушдур.

2. Сабунчу лај дәстәсиндә ротор үсулу илә 11 №-ли үчпәрли балталарла газыма јүксәк көстәричиләрә маликдир. Үчшарошкалы 10 вә 11 №-ли балталарла 8″ вә 9″ сексијалы турбобурларла газыманын көстәричиләри исә роторда олдуғундан (дәлмә үзрә орта газыма мүстәсна олмагла) бир гәдәр јүксәк алынмышдыр. Даһа доғрусу, турбин үсулунда роторда олдуғундан дәлмә үзрә орта газыма метрләри 10—17% аз олса да, газыманын механики сүр'әти 1,57 дәфә, рејс сүр'әти 1,1—1,15 вә коммерсија сүр'әти 1,47—1,7 дәфә чох алынмышдыр.

Ротор үсулу илә үчпәрли балталарла газыманын 8″ вә 9″ сексијалы турбобурларла үчшарошкалы балталарла газымаја нисбәтән механики сүр'әти 1,2—1,27 дәфә кичик, һәр дәлмәјә дүшән орта газыма метрләри 2,2—2,3 дәфә, рејс сүр'әти 1,35—1,45 вә коммерсија сүр'әти 1; 5—1,75 дәфә чох олмушдур.

3. Балаханы лај дәстәсиндә 8″ вә 9″ газыма турбинләри илә газыманын бүтүн көстәричиләри роторда (үчшарошкалы 10 №-ли балталарла газымада) олдуғундан јүксәкдир. Апарылан тәдгигата әсасән газыманын орта механики сүр'әти биринчиләрдә 1,9—2,7 дәфә, һәр балтаја дүшән орта газыма 1—1,2, рејс сүр'әти 1,4—1,6 дәфә вә коммерсија сүр'әти 1,55—1,76 дәфә чох алынмышдыр.

4. Фасилә лај дәстәсиндә ротор үсулу илә газыманын орта рејс сүр'әти турбин газымасынын рејс сүр'әтинә бир гәдәр јахынлашыр. Бу, әсасән ротор үсулунда һәр дәлмәјә дүшән орта газыманын турбин үсулунда олдуғундан 35% чох олмасы нәтичәсидир. Лакин турбин үсулунда механики сүр'әтин 2,6—2,75 дәфә јүксәк олмасы һесабына рејс сүр'әти дә 1,14—1,16 дәфә чох алынмышдыр. Коммерсија сүр'әтләри исә һәр ики үсулда тәхминән ејнидир.

5. КУК-КУГ лај дәстәләриндә ротор вә 8″ бөлмәли турбобурларла газыманын рејс сүр'әтләри тәхминән ејни алынмышдыр. Лакин 9″ сексијалы турбобурларда рејс сүр'әтинин гијмәти биринчиләрдә олдуғундан 1,2 дәфә чохдур.

Ротор үсулунда һәр балтаја дүшән орта газыма 9″ вә 8″ сексијалы турбобурларда олдуғундан 1,2—1,5 дәфә чох, газыманын механики сүр'әти исә 2 дәфәјә јахын јүксәк алынмышдыр. Нәтичә е'тибары илә ротор үсулунда коммерсија сүр'әти 8″ сексијалы турбобурларда олдуғундан 7% чох, 9″ сексијалы турбобурлардакындан исә 10% аз олмушдур.

6. Кирмәки лај дәстәсиндә газыманын орта рејс вә коммерсија сүр'әтләри ротор үсулунда бир гәдәр чох алынмышдыр. Бу, башлыча олараг һәр дәлмә үзрә орта газыма метрләринин турбобурдакына нисбәтән ротор үсулунда 1,6 дәфә чох алынмасы һесабына олмушдур. Газыманын орта механики сүр'әти турбин газымасында роторда олдуғундан 1,53 дәфә чох, рејс сүр'әти 1,15 вә коммерсија сүр'әти исә 1,75 дәфә аз алынмышдыр.

2-чи чәдвәл

Лај дәстәләри	Лај дәстәләринин дабанына-дәк орта дәринлик, *м*-лә	Балталарын нөвү вә өлчүсү	Дәлмәләрин сајы	Умуми газыма метрләри	Механики газыма вахты, *саатла*	Рејс сүр'әтинә дахил олан вахтларын чәми, *саатла*	Орта механики сүр'әт *м/саат*	Бир балтаја дүшән орта газыма, *м*-лә	Орта рејс сүр'әти, *м/саат*	Коммерсија сүр'әти *м/дәз. ај*	Газыма үсулу вә газыма турбинләринин типи	Газыма режими		
												$P_{охт}$, *т*	*Q*, *л/сан*	n_1 *дөв/дәг*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Сураханы	2750	№ 16 үчпәрли	57	4846	1099	1535	4,4	85	3,16	1470	Ротор	5—8	42—56	130—240
		№ 16 үчшарошкалы	2	111	32	47	3,47	55,5	2,36	—	„	8—12	48	180
		№ 14 үчпәрли	30	2946	512	740	5,76	98,5	4,0	2100	„	8—10	42—48	130—180
		„	3	134	34	58	3,95	44,7	2,3	—	ТС5-9″	7—10	40	—
		№ 14 , үчшарошкалы	7	170	69	123	2,46	24,3	1,38	570	Ротор	10—12	45	130
		№ 12 , үчпәрли	16	1684	253	375	6,65	105	4,5	2020	„	8—12	42—45	130—180
		№ 12 , үчшарошкалы	23	1060	296	477	3,58	46	2,2	690	„	10—14	40—45	„
		„	8	310	117	182	2,65	28,8	1,7	244*	Т12МЗ-9″	8—12	40—42	—
		„	12	603	144	241	4,2	50,3	2,5	755	ТС5-9″	8—14	38—40	—
		№ 11, үчпәрли	10	947	167	242	5,67	94,7	3,9	980	Ротор	8—11	„	168

2-чи чәдвәлин арды

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
		№ 11, үчшарошкалы „С“	11	293	146	230	2,0	26,6	1,27	183*	„	8—12	„	130
		„	15	475	103	225	4,6	31,7	2,11	206*	ТС4-8″	„	34—35	—
		„	5	248	48	88	5,16	49,5	2,8	180*	ТС5-9″	10—14	36—38	—
		№ 10, үчпәрли	4	412	86	116	4,8	103	3,55	1370	Ротор	8—10	„	130
		№ 10, үчшарошкалы „С“	3	122	53	76	2,3	40,7	1,6	—	„	10—12	„	„
Сабунчу	3200	№ 11, үчпәрли	13	758	251	387	3,0	58,5	1,96	630*	Ротор	6—8	35—38	92
		№ 11, үчшарошкалы „С“	21	609	258	479	2,36	29	1,27	244*	„	10—12	„	—
		„	38	998	277	695	3,6	26,3	1,44	417*	ТС5-9″	8—14	34 - 36	—
		„	80	1988	522	1402	3,8	24,8	1,42	360*	ТС4-8″	8—12	32—34	—
		№ 10, үчшарошкалы „С“	15	401	132	297	3,04	26,7	1,35	376	„	„	30 - 32	—
Балаханы	3950	№ 11, үчшарошкалы, „С“	97	2253	489	1669	4,6	23,2	1,35	418	ТС5-9″	10—14	32—34	—
		„	272	5403	1294	4688	4,17	19,8	1,15	366	ТС4—8″	8—12	30—32	—
		„	23	553	131	411	4,22	24	1,35	665	Т12М1-8″	7—10	34 - 36	—
		№ 10, үчшарошкалы „С“	10	197	117	234	1,68	19,7	0,84	236	Ротор	10—12	32—35	92
		„	25	567	175	479	3,24	22,6	1,19	190*	ТС4-8″	„	29—32	—
Фасилә	4025	№ 11, үчшарошкалы „С“	10	119	42	182	2,83	11,9	0,655	238	ТС5-9″	8—12	32—34	—

2-чи чәдвәлин сону

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
		„	59	705	234	1060	3,0	11,9	0,655	246	ТС4-8″	7—12	29—30	—
		№ 10, үчшарошкалы „С“	5	81	74	141	1,09	16,2	0,575	241	Ротор	8—10	30	92
КУК-КУГ	4210	№ 11, үчшарошкалы „С“	138	1568	770	2791	2,03	11,4	0,562	232	ТС4-8″	7—10	29—30	—
		„	22	318	146	465	2,17	14,4	0,685	272	ТС5-9″	8—12	31—32	—
		№ 10, үчшарошкалы „С“	11	190	181	335	1,05	17,3	0,567	248	Ротор	7—9	22	92
КЛд	4.60	№ 11, үчшарошкалы „С“	196	2466	1384	4517	1,78	12.6	0,545	156*	ТС4-8″	7—11	28—29	—
		№ 10, үчшарошкалы „С“	14	282	244	455	1,16	20,2	0,62	273	Ротор	8—10	22	92
КА	4610	№ 11, үчшарошкалы „С“	269	1561	1088	5603	1,43	5,8	0,28	73*	ТС4-8″	7—11	28—29	—
		№ 10, үчшарошкалы „С“	32	166	326	828	0,51	5,2	0,20	92	Ротор	8—9	18—20	92
КаЛд	4760	№ 11, үчшарошкалы „С“	268	1433	1022	5409	1,4	5,35	0,265	83,5*	ТС4-8″	6—9	26—28	—
		№ 10, үчшарошкалы „С“	21	147	258	598	0,57	7,0	0,245	119	Ротор	7—8	18—20	92
		№ 9, алмаз	2	80	79	113	1,0	40	0,71	240	ТС5А-7½″	2—3	22—24	—
		„	1	10	26	43	0,384	10	0,232	—	ТС4-6⅝	1—2	20	—

* Гујулардан бә'зиләриндә авариjа вә ја дикәр сәбәбләрдән узун мүддәтли дајанмалар олдуғуну көстәрир.

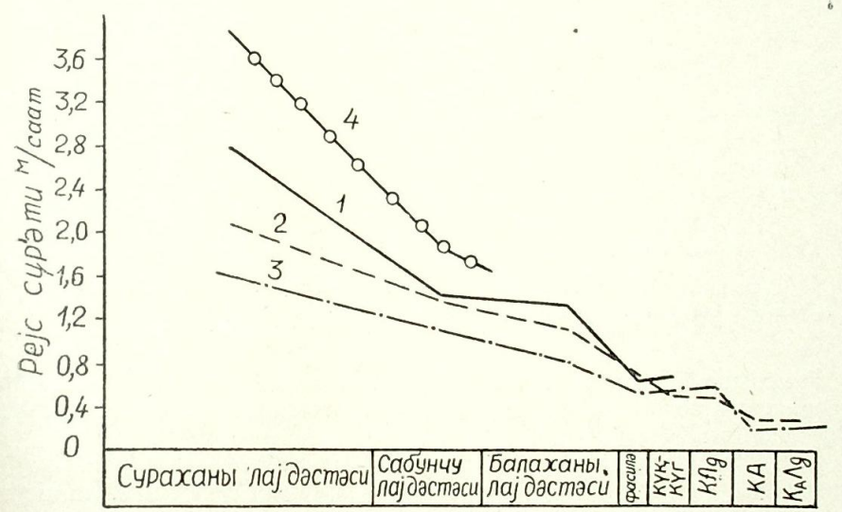
7. Кирмәкиалты лај дәстәсиндә газыманын орта механики вә реjс сүр'әтләри, еләчә дә һәр дәлмә үзрә орта газыма метрләри турбин газыма үсулунда нисбәтән jүксәк алынмышдыр. Коммерсиja сүр'әти исә ротор үсулунда артыг олмушдур. Аваријалара сәрф едилән вахт нәзәрә алынмазса, һәр ики үсулда коммерсиja сүр'әти тәхминән бәрабәрләшир.

8. Гала лај дәстәсиндә газыманын механики вә реjс сүр'әтләри турбин үсулунда чох алынмышдыр. Һәр балтаја дүшән орта газыма вә коммерсиja сүр'әтләри исә ротор үсулунда нисбәтән jүксәкдир.

Гејд етмәк лазымдыр ки, Кирмәкиалты вә Гала дәстәләриндә ајры-ајры гуjуларда (№№ 9, 13, 23, 21, 8) коммерсиja сүр'әтләринин гиjмәти роторла газылмыш 16 №-ли гуjуда олдуғундан 1,2—1,5 дәфә чох алынмышдыр.

Гала лај дәстәсиндә 9 №-ли алмаз балталарла, ТС5А-7 ½″ сексиjалы турбинләрлә газыманын техники көстәричиләри вә еләчә дә коммерсиja сүр'әтләри хejли чох алынмышдыр.

Ротор вә сексиjалы турбобурла газыманын реjс вә коммерсиja сүр'әтләриниң лај дәстәләри үзрә дәjишмәси 1 вә 2-чи шәкилләрдә көстәрилмишдир.



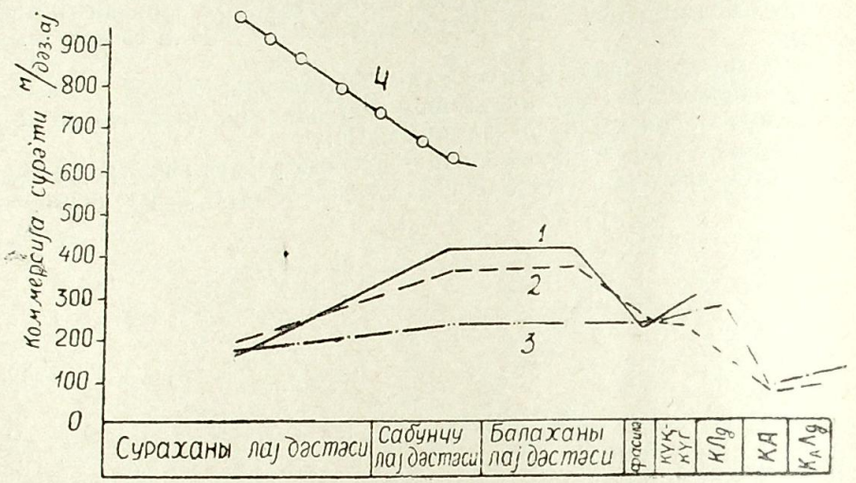
1-чи шәкил. Лај дәстәләри үзрә реjс сүр'әтинин дәjишмәси әjриләри.
1—үчшарошкалы балта, № 11, турбобур ТС5-9″; *2*—үчшарошкалы балта, № 11, турбобур ТС4-8″; *3*—үчшарошкалы балта, № 10, ротор; *4*—үчпәрли балта, № 11, ротор.

Газыманын 1 *м*-нин маја дәjәрини лај дәстәләри үзрә һесабламаг мүәjjән чәтинликләрә сәбәб олдуғундан, һәмин гиjмәт тәк-тәк гуjулар үзрә һесабланмышдыр. Бу, ајры-ајры лај дәстәсиндә газыма үсулу сәмәрәлилиjини игтисади чәһәтдән там мүәjjән етмәjә имкан вермәсә дә, үмуми анлајыш нөгтеjи-нәзәриндән фајдалыдыр.

Көрүндүjү кими, тәк-тәк гуjуларда көвдә боjу турбинлә газылан һиссә артдыгча, үмуми шәкилдә газыманын 1 *м*-нин маја дәjәри артыр.

Мәсәлән, биринчи 6 гуjуда (№№ 9, 13, 23, 16, 14, 19) көвдәнин турбинлә газылмыш һиссәси үмуми дәринлиjин 20—42%-ни тәшкил едир вә буна уjғун 1 *м* газыманын маја дәjәри 665—810 манат мәбләғиндә дәjишир. Сонунчу 5 гуjуда (№№ 15, 11, 22, 18, 28) исә турбинлә газыманын үмуми дәринлиjи 45—67%-ә гәдәр олуб, 1 *м* газыманын маја дәjәри 852—910 манат мәбләғинә чатыр. Буну тәхминән турбин газыма сында, насос һиссәләринин, електрик енержисинин, килли мәһлулларын

кимјәви ишләнмәси үчүн лазыми реакентләрин, газыма балталарының, тали канаты вә тормозлама васитәләринин вә дикәр әлагәдар авадантлыгларын роторда олдуғундан чох ишләнмәси вә газыма турбинләринин әлавә истисмар хәрчләри һесабына јаранмасы, һабелә турбин газымасында орта коммерсија сүр'әтинин нисбәтән ашағы олмасы нәтичәси кими изаһ етмәк олар. Сөз јох ки, ротор үсулунда да бә'зи аваданлыгларын (ротор, фырланғыч, газыма борулары, фәрди интигал вә с.) турбин үсулунда олдуғундан чох ишләнмәси һаллары вардыр.



2-чи шәкил. Лај дәстәләри үзрә коммерсија сүр'әтинин дәјишмәси.
1—үчшарошкалы балта, № 11, турбобур ТС5-9″; *2*—үчшарошкалы балта, № 11, турбобур ТС4-8″; *3*—үчшарошкалы балта, № 10, ротор; *4*—үчпәрли балта, № 4, ротор.

Јухарыда апарылмыш тәһлил әсасында вә газыма техникасының мүасир сәвијјәсини нәзәрә аларағ ашағыдакылары тәклиф етмәк фајдалы оларды:

1. Зирә саһәсиндә ротор вә турбин газыма үсулларындан мүәјјән едилмиш гајда үзрә истифадә етмәклә газыманын техники вә игтисади көстәричиләрини әһәмијјәтли дәрәчәдә јүксәлтмәк имканы вардыр.

2. Сабунчу лај дәстәсинин дабанына, 3100—3200 *м* дәринлијәдәк ротор үсулу илә үчпәрли балталарла газымаг сәмәрәлидир.

3. Сабунчу лај дәстәсинин дабанындан Кирмәки лај дәстәсинин таванына (3100—3200 *м*-дән 4100—4200 *м* дәринлијәдәк) 11 вә 10 №-ли үчшарошкалы балталарла, ујғун олараг 9″, јахуд 8″ сексијалы турбобурларла, үчшарошкалы балталарла газымаг мәгсәдәујғундур.

4. Кирмәки лај дәстәсини роторла газымаг даһа сәрфәли оларды.

5. ПК вә КаС лај дәстәләрини 8 «сексијалы турбобурларла, 11 №-ли балталарла газымаг техники чәһәтдән сәмәрәлидир. Лакин, игтисади чәһәтдән ротор үсулу бир гәдәр үстүнлүјә маликдир.

6. Күман етмәк олар ки, Зирә саһәсиндә ротор үсулу илә кичик диаметрли (8 вә 9 №-ли балталарла) гујулар газымаг техники вә игтисади чәһәтдән чох сәмәрәли оларды.

7. Турбин газымасында јүксәк техники вә игтисади көстәричиләрә наил олмаг үчүн ашағыдакы мәсәләләрин комплекс һәлли вачибдир: турбин газымасының тәләбатына ујғун олараг даһа кејфијјәтли балталар јаратмаг; јүксәк тәзјигли мәһсулдар насосларын вә еләчә дә 180—200 *атм* ишчи тәзјигдә ишләмәјә имкан верә биләчәк вуручу системин

олмасы; турбин валының дәгигәдә дөврләр сајыны 200—250-ә гәдәр азалда биләчәк е'тибарлы гујудиби редукторларының јарадылмасы вә нәһајәт турбин валында оптимал буручу моменти вә јахуд максимум күчү тәнзим едә биләчәк мүкәммәл автоматлар јаратмаг гаршыда дуран ән мүһүм мәсәләләрдир.

Н. Н. Мамедов

Эффективная технология бурения на площади Зыря

РЕЗЮМЕ

Для выявления эффективности способов бурения на площади Зыря был исследован фактический материал по 13 глубоким скважинам, глубины которых изменяются от 4700 до 4950 *м*.

В результате анализа определены средние значения технических и экономических показателей бурения с учетом фактической стратиграфии района, способов бурения, типа-размера долота и турбобура, а также средние значения параметров режима бурения.

В результате исследования сделаны следующие выводы.

1. На площади Зыря более рентабельно бурение комбинированным способом, т. е. в определенном интервале роторным способом и некотором интервале, турбинным.

2. До подошвы сабунчинской свиты, примерно до глубины 3100—3200 *м*, более эффективно бурение роторным способом с применением трехлопастных долот.

3. Начиная от подошвы сабунчинской свиты, кончая кровлей КС, примерно с глубины 3100—3200 до 4100—4200 *м* более целесообразно бурение секционными турбобурами типа ТС5—9″ и ТС4—8″ с трехшарошечными долотами № 11 и № 10.

4. В КС технико-экономические показатели роторного способа бурения более высокие по сравнению с показателями турбинного способа. Ее можно бурить ротором.

5. В свитах ПК и КаС, примерно с глубины 4400—4500 *м* до проекта технические показатели выше при турбинном способе бурения, а экономические при роторном.

6. Можно предполагать, что на площади Зыря проводка скважин роторным способом и облегченной конструкции (долото № 9 и № 8) даст высокие технико-экономические показатели.

7. Для улучшения технико-экономических показателей турбинного способа бурения необходимо решить комплексные вопросы: создать высокопрочные долота, отвечающие условиям турбинного бурения; иметь высокопроизводительные насосы, а также высоконапорную нагнетательную систему, позволяющие работать при рабочем давлении до 180—200 *атм*; создать надежный забойный редуктор, понижающий число оборотов долота до 200—250 *об/мин.*; и, наконец, иметь универсальный автомат, поддерживающий оптимальный момент или максимальную мощность на валу турбобура в процессе бурения.

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазијјат вә техника елмләри сериjасы, 1961, № 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1961, № 2

А. АСАДОВ, Н. ТАИРОВ

О ВЛИЯНИИ МИНЕРАЛОГИЧЕСКОГО СОСТАВА ПОРИСТОЙ СРЕДЫ НА ВЫСОТУ КАПИЛЛЯРНОЙ ПРОПИТКИ

В процессах, происходящих в нефтяных пластах, капиллярные явления играют важную роль. Поэтому изучение капиллярного проникновения жидкости в пористую среду, содержащую и не содержащую другую жидкость, имеет определенное значение, особенно при изучении процессов миграции и аккумуляции нефти.

Исследованием капиллярного поднятия в единичных капиллярах и капиллярной пропитки в пористой среде занимались многие ученые [1—12].

Как известно, высота капиллярного поднятия жидкостей зависит от их физико-химических качеств и от свойств твердого тела. Несмотря на это, вопросу влияния свойств минералов на высоту капиллярного поднятия жидкостей в пористой среде уделяется недостаточное внимание, восполнению этого пробела и посвящается настоящая работа.

Исходя из того, что основными минералами, образующими нефтяной и газовый коллекторы, являются кварц, кальцит, полевой шпат и различные глины, в работе приводятся результаты изучения влияния указанных минералов на высоту капиллярного поднятия. Исследованию были подвергнуты многие образцы пород и жидкостей.

В работе использована узкая фракция зерен этих минералов (диаметром от 0,1 до 0,2 *мм*).

В качестве углеводородной жидкости использованы керосин и изооктан (как неполярные углеводородные жидкости), а также полярная жидкость—нефть. В качестве водной фазы применялись дистиллированная, морская и щелочная воды.

Физико-химические свойства изученных жидкостей и вод приведены в табл. 1.

Таблица 1

Углеводородные жидкости и воды	Уд. вес, $г_0 см^3$	Вязкость при 25°С, *спз*	Поверхностное натяжение на границе с воздухом, *дин/см*
Изооктан	0,6480	0,79	19,1
Керосин	0,8150	1,66	26,5
Нефть	0,8522	7,06	29,1
Морская вода	0,0099		
Щелочная вода			

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазијјат вә техника елмләри серијасы, 1961, № 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1961, № 2

А. АСАДОВ, Н. ТАИРОВ

О ВЛИЯНИИ МИНЕРАЛОГИЧЕСКОГО СОСТАВА ПОРИСТОЙ СРЕДЫ НА ВЫСОТУ КАПИЛЛЯРНОЙ ПРОПИТКИ

В процессах, происходящих в нефтяных пластах, капиллярные явления играют важную роль. Поэтому изучение капиллярного проникновения жидкости в пористую среду, содержащую и не содержащую другую жидкость, имеет определенное значение, особенно при изучении процессов миграции и аккумуляции нефти.

Исследованием капиллярного поднятия в единичных капиллярах и капиллярной пропитки в пористой среде занимались многие ученые [1—12].

Как известно, высота капиллярного поднятия жидкостей зависит от их физико-химических качеств и от свойств твердого тела. Несмотря на это, вопросу влияния свойств минералов на высоту капиллярного поднятия жидкостей в пористой среде уделяется недостаточное внимание, восполнению этого пробела и посвящается настоящая работа.

Исходя из того, что основными минералами, образующими нефтяной и газовый коллекторы, являются кварц, кальцит, полевой шпат и различные глины, в работе приводятся результаты изучения влияния указанных минералов на высоту капиллярного поднятия. Исследованию были подвергнуты многие образцы пород и жидкостей.

В работе использована узкая фракция зерен этих минералов (диаметром от 0,1 до 0,2 *мм*).

В качестве углеводородной жидкости использованы керосин и изооктан (как неполярные углеводородные жидкости), а также полярная жидкость—нефть. В качестве водной фазы применялись дистиллированная, морская и щелочная воды.

Физико-химические свойства изученных жидкостей и вод приведены в табл. 1.

Таблица 1

Углеводородные жидкости и воды	Уд. вес, $г_0 см^3$	Вязкость при 25°С, *спз*	Поверхностное натяжение на границе с воздухом, *дин/см*
Изооктан	0,6480	0,79	19,1
Керосин	0,8150	1,66	26,5
Нефть	0,8522	7,06	29,1
Морская вода	0,0099		
Щелочная вода			

Опыты проведены на приборе (рис. 1), который состоит из стеклянной трубочки *1* с запаянной металлической сеткой *2* и гидравлического затвора *3*, для поддержания постоянного уровня жидкости. Уровень жидкости поддерживался на границе раздела—свободная поверхность жидкости—пористое тело.

Опыты проведены по следующей методике: засыпанием в стеклянную трубочку *1* определенного взвешанного количества песка и легким постукиванием деревянным молоточком достигалась, примерно, одинаковая пористость и проницаемость пористой среды. Подготовленная таким образом трубочка с песком опускалась в чашечку *4* прибора и одновременно включался секундомер. По известному времени t и высоте капиллярного поднятия h строились кривые зависимости $h=f(t)$. Высота капиллярного поднятия h позволяла, конечно, вычислять скорость капиллярного поднятия. Величины скоростей вычислены, но в работе они не приводятся.

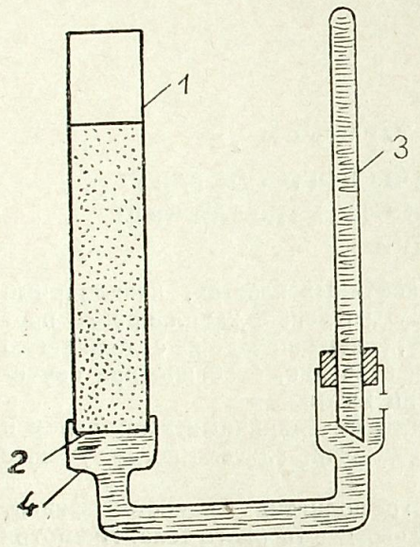


Рис. 1. Прибор для изучения капиллярной пропитки

Как уже отмечалось, в качестве твердой фазы использованы кварц, кальцит, полевой шпат и глины. Исходя из того, что влияние глины в основном связано с ее набухаемостью, в работе использованы глины двух типов: монтмориллонитовая и каолиновая.

Каолиновая глина, как известно, обладает малой набухаемостью в противовес монтмориллонитовой, обладающей высокой степенью набухаемости.

Песок из кальцита и полевого шпата был получен размолом кусков минералов на шаровой мельнице. При необходимости работы с различными смесями минералов брались весовые содержания тех или иных минералов в кварцевом песке.

На рис. 2 приведены кривые зависимости высоты капиллярного поднятия воды в пористой среде, составленной из различных минералов, от времени.

Как видно из этих кривых, наибольшая высота капиллярного поднятия наблюдается в пористой среде, представленной полевым шпатом, наименьшая—кварцем.

Указанное поднятие воды, по-видимому, связано с укладкой зерен минералов при образовании пористой среды, т. е. со структурой порового пространства, и с взаимодействием жидкостей с поверхностью минералов. В пористой среде, составленной из чистой глины, как и следовало ожидать, капиллярного поднятия воды не наблюдалось.

Из рис. 2 также видно, что на высоту капиллярного поднятия заметное влияние оказывает и качество воды. При составлении пористых сред из кварца, кальцита, полевого шпата наибольшее капиллярное поднятие наблюдается у дистиллированной воды, наименьшее—у щелочной. Среднее между ними капиллярное поднятие отмечается у морской воды.

Так как указанные кривые имеют аналогичный вид, на рис. 2 приведены только кривые зависимости высоты капиллярного поднятия для указанных вод в кварцевом песке.

На рис. 3 и 4 приведены кривые зависимости высоты капиллярного поднятия от добавок к кварцевому песку кальцита, полевого шпата и глин в различных количествах.

Как видно из этих кривых, с увеличением содержания кальцита, полевого шпата и глины в кварцевом песке до определенного предела высота капиллярного поднятия увеличивается, а затем, несмотря на дальнейшее повышение концентрации этих минералов, — уменьшается.

Как и следовало ожидать, добавка монтмориллонитовой глины к кварцу оказывает большое влияние на h по сравнению с каолиновой глиной, в силу большей степени набухаемости первой глины по сравнению со второй. Отметим, что при добавке глинистых частиц к кварцевому песку качество воды имеет значение при сравнительно малом содержании глинистых частиц в пористой среде. С увеличением глинистых частиц влияние качества воды становится менее заметным.

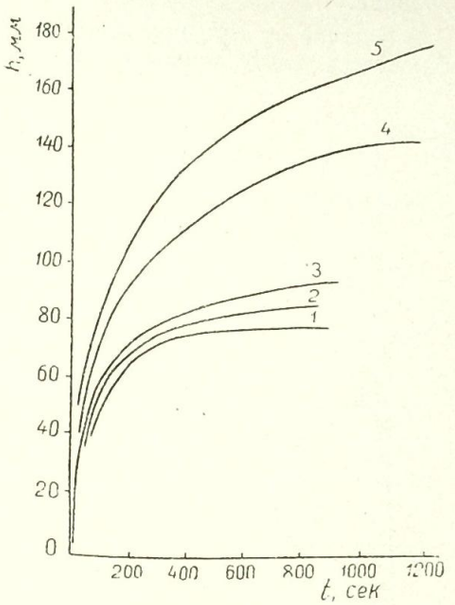


Рис. 2. Зависимость высоты капиллярного поднятия воды в пористой среде, составленной из различных минералов, от времени.
Кварц: *1*—дистиллированная вода; *2*—морская вода; *3*—щелочная; кальцит: *4*—дистиллированная вода; полевой шпат: *5*—дистиллированная вода.

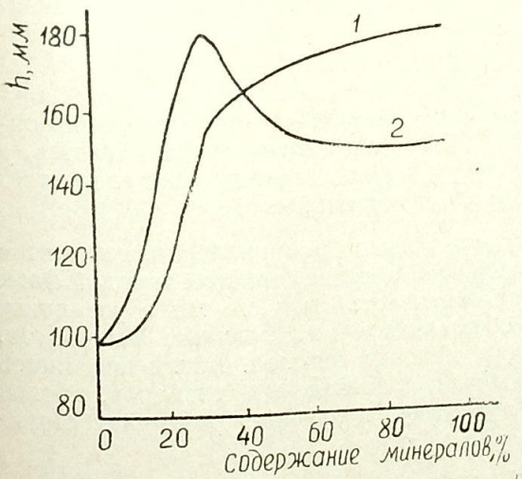


Рис. 3. Зависимость максимальной высоты капиллярного поднятия дистиллированной воды в пористой среде от содержания полевого шпата (*1*) и кальцита (*2*) в кварцевом песке.

С целью изучения капиллярного поднятия углеводородных жидкостей в пористой среде, составленной из различных минералов, в работе применялись керосин, изооктан и легкая сураханская нефть. Керосин и изооктан сравнительно мало различаются по удельному весу и по вязкости (см. табл. 1.) Легкая сураханская нефть также сравнительно мало отличается по удельному весу от керосина. Вязкость указанной нефти также сравнительно маленькая (7,06 *спз*).

Как видно из кривых, представленных на рис. 5, так же как и при использо-

вании различных вод, твердая фаза коллектора оказывает влияние на высоту капиллярного поднятия. Углеводородные жидкости лучше пропитывают пористую среду, составленную из кальцита, хуже — из кварца.

В отличие от вод, при использовании углеводородных жидкостей наблюдается (хотя и маленькое) капиллярное поднятие в пористой среде, составленной из глины. Причем, в монтмориллонитовой глине это поднятие больше, чем в коалиновой.

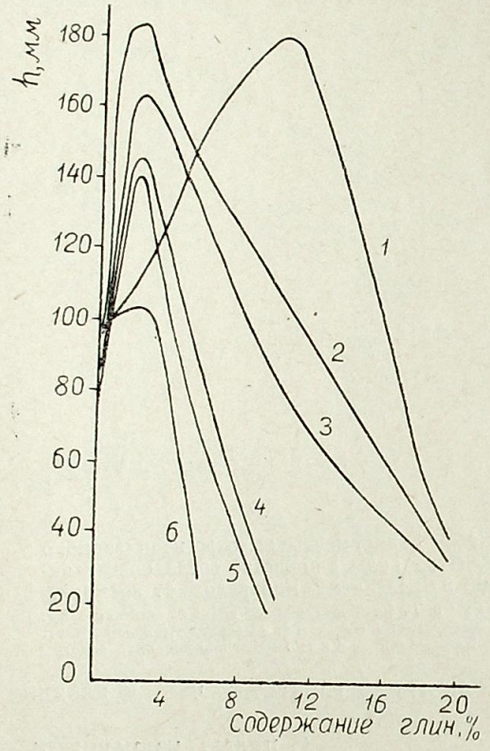


Рис. 4. Зависимость высоты капиллярного поднятия различных вод в пористой среде от содержания глин в кварцевом песке.

Глина каолиновая: *1*—дистиллированная вода, *2*—морская, *3*—щелочная; монтмориллонитовая глина: *4*—вода щелочная, *5*—морская, *6*—дистиллированная.

Качество углеводородной жидкости также оказывает влияние на высоту капиллярного поднятия. Во всех случаях лучшая пропитка наблюдается при изооктане.

Небольшая величина h у нефти помимо ее физических свойств объясняется, по-видимому, адсорбцией молекул поверхностно-активных веществ нефти на поверхность минералов, которая, создавая добавочное сопротивление, приводит к уменьшению h жидкости.

На рис. 6 показаны кривые зависимости высоты капиллярного поднятия углеводородных жидкостей от содержания кальцита и глины в кварцевом песке. Как видно из этих кривых, и в этом случае с добавкой глины до определенного предела величина h увеличивается, а затем — уменьшается.

С добавкой к кварцу кальцита h для керосина и изооктана сначала увеличивается, а затем практически перестает зависить от концентрации кальцита в пористой среде.

Проведенная работа показывает, что на капиллярное поднятие жидкостей в пористой среде оказывает влияние свойство твердой фазы пористой среды. При этом, как отмечалось выше, на таксе различное поднятие в пористой среде, составленной из различных минералов, могут оказать влияние и размеры поровых каналов. Хотя в настоящей работе использованы зерна минералов одинаковых размеров, но при создании пористой среды, по-видимому, получается различная структура порового пространства.

Поэтому для качественной оценки изменения размеров пор при использовании различных минералов на высоту капиллярного поднятия воспользуемся известным соотношением:

$$r = \frac{2}{7,\,10^{-3}} \sqrt{\frac{\kappa}{m}},$$

где κ—проницаемость пористой среды, *дарси*;
m—пористость

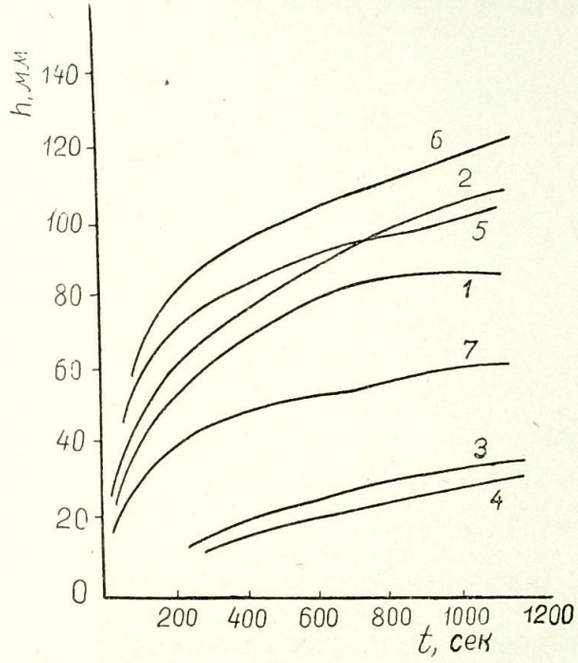


Рис. 5. Зависимость высоты капиллярного поднятия углеводородных жидкостей в пористой среде, составленной из различных минералов, от времени.

Керосин: *1*—кварц; *2*—кальцит; *3*—монтмориллонитовая глина; *4*—каолиновая глина; изооктан: *5*—кварц; *6*—кальцит; нефть: *7*—кварц.

Величина r, как известно, представляет собой радиус эквивалентной цилиндрической поры и имеет совершенно условный смысл. Однако для качественной оценки влияния размеров пор на h можно в первом приближении воспользоваться этой величиной.

Имея значение r, можно определить высоту капиллярного поднятия в условном капилляре:

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta\, 7\cdot 10^{3}\sqrt{m\kappa}}{2\gamma\kappa} \qquad (1)$$

Для одной и той же жидкости величина $\frac{2\cdot 7\cdot 10^{3}\sigma\cos\theta}{2\gamma}$ постоянная, поэтому обозначая ее через a, получим

$$h = a\frac{\sqrt{m\kappa}}{\kappa} \qquad (2)$$

В уравнение входят величины пористости и проницаемости, данные о которых приводятся в табл. 2. В табл. 2 приведены также отношения величин капиллярных поднятий в кальците и полевом шпате к

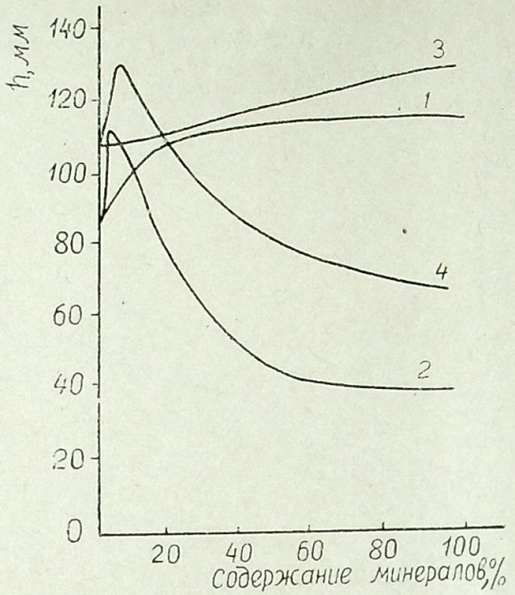


Рис. 6. Зависимость высоты капиллярного поднятия углеводородных жидкостей в пористой среде от содержания кальцита и глины в кварцевом песке.

Керосин: *1*—кальцит; *2*—глина; изооктан: *3*—кальцит; *4*—глина.

высоте капиллярного поднятия в кварце, вычисленные по формуле (2) и действительно замеренные.

Таблица 2

Минералы	Пористость, % m	Проницаемость, *дарси*, $к$	Отношения, вычисленные по формуле	Отношения, определенные экспериментально
Кварц (кв)	32	29,3	$\frac{h_{к\text{-}та}}{h_{кв}}=1{,}61$	$\frac{h_{к\text{-}та}}{h_{кв}}=1{,}53$
Кальцит (к-т)	44	15,47		
Полевой шпат (пш)	45	18,7	$\frac{h_{пш}}{h_{кв}}=1{,}47$	$\frac{h_{пш}}{h_{кв}}=2{,}02$

Как видно из табл. 2 $к$ и m пористых сред, составленных из зерен полевого шпата и кальцита, мало различаются между собой, поэтому почти не отличаются и отношения вычисленных высот капиллярных поднятий.

Отношения же экспериментально замеренных величин h для тех же минералов различны, что, вероятно, связано с взаимодействием жидкостей и поверхностей минералов.

Таким образом, проведенная работа показывает:

а) высота капиллярного поднятия жидкостей в пористой среде зависит от свойств жидкостей и твердых тел;

б) качество глин оказывает сильное влияние на высоту капиллярного поднятия воды и углеводородов;

в) добавка к кварцевому песку (до определенного предела) кальцита, полевого шпата и глин увеличивает высоту капиллярного поднятия h, выше которого добавка глин резко уменьшает h, а добавка кальцита и полевого шпата влияет незначительно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волкова З. В. Kolloid zeitschrift. 67,280 (1934).
2. Гейман М. А. Труды Ин-та нефти АН СССР, т. 1, вып. 2,
3. Котяхов Ф. И. Труды Совещания по вопросам развития научно-исследовательских работ в области вторичных методов добычи нефти. Изд. АН Азерб. ССР, Баку, 1953.
4. Кочешков А. А., Кусаков М. М., Лубман Н. М. „Нефть и газ", 1958. № 11.
5. Кусаков М. М. Труды Совещания по вопросам развития научно-исследовательских работ в области вторичных методов добычи нефти. Изд. АН Азерб. ССР, Баку, 1953.
6. Кусаков М. М., Мекенецкая Л. И. Доклады на IV международном нефтяном конгрессе в Риме. Изд. АН СССР, 1955.
7. Кусаков М. М., Гиматудинов Ш. К. Вопросы геологии и добычи нефти. Труды МНИ им. И. М. Губкина. М., 1958.
8. Кусаков М. М., Лубман Н. М., Кочешков А. А. Труды Ин-та нефти АН СССР, т. XI
9. Лыков А. В. Явления переноса в капиллярно-пористых телах. Гостехиздат, 1953.
10. Пархаев А. П. „Коллоидный журнал". 1949, № 5.
11. Geverett M. C. J. petrol. Technol., 3, № 3 (1940).
12. Waschburn. Phus. Rev., 17, № 3 (1921).

Ә. Әсәдов, Н. Таһиров

Мәсамәли мүһитин минераложи тәркибинин капилјар галхымына тә'сири

ХҮЛАСӘ

Нефт вә газ лајларында кедән просесләрдә капилјар һадисәләр мүһүм рол ојнајыр.

Она көрә мәсамәли мүһитдә капилјар һадисәләрин өјрәнилмәсинә чидди фикир верилир [1—12].

Мә'лум олдуғу кими, капилјар һадисәләр әсасән мајеләрин вә сәрт сүхурларын физики-кимјәви хүсусијјәтләриндән асылыдыр. Лакин индијә кими мәсамәли мүһитләри тәшкил едән минералларын хүсусијјәтләринин капилјар һадисәләринә тә'сири мүкәммәл өјрәнилмәмишдир.

Көстәриләнләри нәзәрә аларағ, тәгдим олунан ишдә мәсамәли мүһитин минераложи тәркибинин капилјар галхымына тә'сири тәчрүби өјрәнилмишдир.

Тәдгигатлар хүсуси чиһазда (1-чи шәкил) апарылмыш вә нәтичәләр әјриләр шәклиндә верилмишдир (2—7-чи шәкилләр).

Тәчрүбә апарыларкән кварс, калсит, чөл шпаты, мүхтәлиф килләр вә онларын гарышығындан һазырланмыш төкүлмә гумдан, дәниз гәләви вә дистилә олунмуш судан истифадә олунмушдур. Карбонидрокен мајеләр кими, гејри полјар сајылан керосин, изооктан вә полјар сајылан нефт нүмунәси көтүрүлмүшдүр.

Апарылан тәчрүбәләрдән көрүнүр ки, мәсамәли мүһитдә ону тәшкил едән минералларын, суларын вә карбоһидрокен маjеләрин хүсусиjjәтләриндән асылы олараг капилjар галхым мүхтәлифдир.

Мәсәлән, чөл шпатындан һазырланмыш гумда суларын капилjар галхымы башга минераллара нисбәтән jүксәк олур. Килләрин тәркибиндән асылы олараг сујун капилjар галхымы да мүхтәлифдир.

Мисал үчүн кварс гумуна каолин кили дахил едәндә сујун капилjар галхымы ejни параметрләрә малик олан, лакин монтмориллонит кили дахил едилмиш гума нисбәтән jүксәк олур.

Карбоһидрокен маjеләрин дә хүсусиjjәтләри капилjар галхыма көзә чарпан дәрәчәдә тә'сир көстәрир. Бүтүн тәчрүбәләрдә изооктанын капилjар галхымы jүксәкдир. Нефтин капилjар галхымы исә нисбәтән чох аз олур.

Мәсамәли мүһитдә маjеләрин мүхтәлиф капилjар галхмасы онларын вә сәрт сүхурларын хүсусиjjәтләри вә гаршылыглы тә'сири илә изаһ олунур.

АЗӘРБАJЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИJАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-риjазиjjат вә техника елмләри сериjасы, 1961, № 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1961, № 2

М. А. АБДИНОВ

К ВОПРОСУ ОТКЛОНЕНИЯ ФАКТИЧЕСКОЙ ВЫСОТЫ ПОДЪЕМА ЦЕМЕНТА ОТ РАСЧЕТНОЙ

Как известно, количество цемента, необходимое для подъема его до расчетной высоты с учетом изменения диаметра скважины и наземных потерь при цементировке, определяется по общеизвестной в литературе формуле:

$$G_1 = 0{,}785\ q\ K_2\left[\left(D_д^2 - d_н^2\right) H_р\, K_1 + h\, d_в^2\right],\ т... \qquad (1)$$

где $D_д$—диаметр скважины по долоту, *м*;
$d_н$—наружный диаметр колонны, *м*;
$d_в$—внутренний диаметр колонны, *м*;
$H_р$—расчетная высота подъема цемента за колонной, *м*;
h—высота установки упорного кольца от лезвия башмака, *м*;
K_2—коэффициент, учитывающий потери цемента при затворении последнего;
K_1—коэффициент, учитывающий увеличение диаметра ствола скважины;
q—количество сухого цемента в 1 $м^3$ цементного раствора.

Между тем определение высоты подъема цемента на основании замеров электротермометров в затрубном пространстве скважин, пробуренных на различных нефтяных и газовых площадях показывает, что фактическая высота подъема цемента $H_ф$ в большинстве случаев отклоняется от расчетной $H_р$.

Это обстоятельство, разумеется, в какой-то степени может отрицательно повлиять на конечные результаты крепления скважины.

Как видно из зависимости (1), коэффициент K_1 по существу вносит некоторую поправку к кольцевому объему 0,785 $(D_д^2 - d_н^2)H_р$.

В действительности, измененный—фактический кольцевой объем, который должен быть заполнен цементом, равен:

$$V = 0{,}785\ \left(D_к^2 - d_н^2\right) H_р\ .$$

Здесь

$$D_к = K D_д\ , \qquad (2)$$

где $D_к$—средний диаметр ствола скважины по калиброграмме, в интервале расчетного подъема цемента;
K—коэффициент, учитывающий изменение диаметра ствола скважины.

Поэтому было бы правильнее K_1 называть коэффициентом, учитывающим изменение кольцевого объема скважины в интервале подъема цемента.

Следовательно, зависимость для подсчета количества цемента примет вид:

$$G_2 = 0{,}785\, q\, K_2\, [(D_д^2 K^2 - d_н^2)\, H_р + h d_в^2], m \ldots \quad (3)$$

Из сопоставления уравнений (1) и (3) видно, что при равных прочих условиях $K<K_1$.

Для определения количества цемента большое значение имеет точное вычисление величины K, которая в каждом случае должна быть найдена из калиброграммы скважины, а при отсутствии последней, осредненное значение K должно быть подсчитано путем обработки и анализа существующих калиброграмм скважин данного района. В этом случая $H_ф$ будет ближе к $H_р$ и степень отклонения первого от последнего будет доведена до минимума.

Несмотря на это, необходимо все же выяснить почему высота фактического подъема $H_ф$ в некоторых случаях значительно отклоняется от расчетной $H_р$.

Причинами отклонения $H_ф$ от $H_р$ могут являться несоответствие принятого значения коэффициента K_1 в расчетах, не по расчету закаченное количество цемента или же односторонний подъем цемента.

Для решения указанного вопроса обязательно следует определить значения K из калиброграмм скважин и сопоставить их со значениями указанного коэффициента зацементированных скважин.

Количество цемента в зацементированной скважине с учетом наземных потерь определяется из уравнения:

$$G = 0{,}785\, q\, K_2\, [(D_д^2 K^2 - d_н^2)\, H_р + d_в^2 (h - h_1)], m \ldots, \quad (4)$$

где h_1—высота цемента над упорным кольцом.

Приравнивая уравнения (1) и (4) и решая их относительно K, получим:

$$K = \frac{1}{D_д} \sqrt{\frac{D_д^2 H_р K_1 - d_н^2 (H_р K_1 - H_ф) - d_в^2 h_1}{H_ф}} \quad (5)$$

По этой формуле были подсчитаны значения коффициента K некоторых зацементированных скважин, пробуренных на площади Карадаг-Кушхана, данные о которых приведены в табл. 1.

Как видно из этой таблицы, значения коэффициента K при $H_р<H_ф$ во всех скважинах, за исключением скважины № 165 и № 155 колеблются в пределах 1,06—1,00. При $H_р>H_ф$ наблюдается обратная картина, т. е. значения K во всех скважинах меняются в сторону увеличения и в основном колеблются в интервале 1,06—1,10.

Из этих данных видно, что значение $K=1{,}06$ фигурирует как в случае $H_р<H_ф$, так и при $H_р>H_ф$. Это означает, что количество цемента равно подсчитанному по формуле (1) при $K_1=1{,}2$ (как то принимают обычно при подсчете цемента на промыслах) и по формуле (3) при $K=1{,}06$ при прочих равных условиях.

Чтобы проверить значения K, найденные по формуле (5) путем сопоставления их с фактическими, имеющиеся калиброграммы скважин, пробуренных на указанной площади, подвергали обработке и находили среднее значение коэффициента K как для интервала рас-

Таблица 1

№№ скв.	Диаметр скв. по долоту, $D_д$	Диаметр колонны, *мм*		Высота подъема цемента, *м*		Высота цемента над упорным кольцом, h_1, *м*	Значение коэффициента K
		наружн. $d_н$	внутр. $d_в$	расчетн. $H_в$	фактич. $H_ф$		
		При $H_р<H_ф$					
252	267	168	144	850	851	0	1,06
251	267	168	144	800	806	4	1,06
130	267	168	146	1900	1925	302	1,03
232	298	168	146	750	775	7	1,05
242	267	168	146	800	830	0	1,05
188	298	168	146	700	745	3	1,04
193	298	168	140	850	901	0	1,04
224	267	168	146	700	760	3	1,03
110	267	168	140	700	800	56	1,00
165	267	168	144	700	1000	0	0,95
155	267	168	144	700	1000	0	0,95
		При $H_р>H_ф$					
207	267	146	122	900	898	14	1,06
250	298	168	144	750	746	1	1,06
190	267	168	144	800	785	1	1,06
248	267	168	146	850	826	25	1,06
192	298	168	146	750	707	4	1,09
209	267	146	122	900	853	11	1,07
126	298	168	146	700	652	12	1,09
241	298	168	144	700	639	5	1,10
247	267	168	146	850	783	0	1,09
226	267	168	140	2000	1928	141	1,06
115	267	168	144	700	615	1	1,10
205	267	168	140	1100	1004	64	1,08
160	267	168	140	1000	912	1	1,09
249	267	168	140	750	626	5	1,12
195	267	168	140	1200	900	122	1,15
225	267	168	140	1850	1105	65	1,26

четной высоты $H_р$, так и для фактического подъема цемента $H_ф$, которые приведены в табл. 2.

Здесь же приведены значения коэффициента K, найденные по формуле:

$$K_1 = \frac{D_к^2 - d_н^2}{D_д^2 - d_н^2}. \quad (6)$$

Сопоставляя значения коэффициента K, вычисленные по формуле (5), со значениями указанного коэффициента, найденными из калиброграмм скважин (табл. 2) и коэффициента K_1, можно выяснить причину отклонения $H_ф$ от расчетной высоты подъема $H_р$.

Так, значение коэффициента K по калиброграмме скважины № 249 получилось 0,96; эта величина оказалась больше 1,06, которая соответствует значению K_1, равному 1,2 в формуле (1), по которой определялось расчетное количество цемента.

Таблица 2

№ скв.	Высота подъема цемента, M		Средн. диаметр скв. по калибограме, *мм* $D_к$		$K=\frac{D_к}{D_д}$ в интервале		Значение K_1, найденное по формуле (6) для интервала	
	расчетн. $H_р$	фактич. $H_ф$	в интервале $H_р$	в интервале $H_ф$	$H_р$	$H_ф$	$H_р$	$H_ф$
249	750	626	257	251	0,96	0,94	0,87	0,80
110	700	800	235	238	0,90	0,90	0,63	0,67
225	1000	654	290	296	1,10	0,10	1,30	1,32
165	700	1000	296	294	1,10	1,10	1,38	1,35
195	1200	900	288	290	1,08	1,09	1,28	1,31
162	750	—	326	—	1,09	—	1,27	—
160	1000	912	288	287	1,08	1,08	1,27	1,27
155	700	1000	280	284	1,05	1,06	1,17	1,21

Примечание: диаметр скважины по долоту $D_д$ во всех случаях 267 *мм*.

Следовательно, в этой скважине должно было иметь место $H_ф > H_р$, а получилось наоборот.

Это положение как раз и является причиной того, что значение $K=1{,}12$, найденное по формуле (5), получилось больше 0,96.

Следовательно, в скважину № 249 при ее цементировке по различным техническим причинам не было закачено расчетное количество цемента. В скважине № 110 произошло сужение диаметра, вследствие чего цементный раствор поднялся на 100 *м* выше расчетной высоты. В скважине № 225 получилась обратная картина, т. е. имело место увеличение диаметра, а принятое значение $K_1=1{,}2$ для этого случая оказалось заниженным, что служило причиной получения $H_р > H_ф$. В скважинах № 165 и 155 произошел односторонний подъем цемента. В скважинах № 195 и 160 значения коэффициентов K и K_1 были занижены.

Таким образом, из найденных значений указанных выше коэффициентов (табл. 1 и 2) вытекают следующие закономерности:

1. При $H_ф > H_р$:

а) если значение коэффициента K, найденное из формулы (5), больше единицы и меньше 1,06, т. е, $1<K<1{,}06$, то произошло сужение диаметра скважины;

б) если получится $K<1{,}00$, то в скважине имеет место односторонний подъем цемента.

2. При $H_ф < H_р$:

а) если в этом случае значение коэффициента K, найденное по формуле (5), будет находиться в интервале:—1,06—1,10, то это означает, что при определении количества цемента, для подъема его до расчетной высоты, была допущена неточность, т. е. принятое значение коэффициента K_1, было заниженным;

б) если значение коэффициента K получилось больше 1,10, то это говорит о том, что в скважину по различным техническим причинам не было закачено расчетное количество цемента, подсчитанное по формуле (1).

Необходимо подчеркнуть, что эти закономерности получены из анализа данных, относящихся к реальным зацементированным эксплуатационным колоннам скважин, пробуренных на площади Карадаг-Кушхана.

При определении количества цемента для цементировки эксплуатационной колонны скважины на указанной площади по формулам (1) и (3) значения коэффициентов должны быть приняты:

$$K_1=1{,}25-1{,}30 \text{ и } K=1{,}06-1{,}10.$$

Количество сухого цемента, необходимое для цементировки колонн скважины, должно быть подсчитано по формуле (3).

М. А. Абдинов

Сементин фактик галхма һүндүрлүјүнүн һесабланма һүндүрлүјүндән фәргләнмәси мәсәләсинә даир

ХҮЛАСӘ

Нефт гујуларынын сементләнмәсиндә семент мәһлулуну мүәјјән һүндүрлүјә галдырмаг үчүн лазым олан гуру сементин мигдары, иткиләри нәзәрә алмаг шәрти илә, әдәбијјатда мә'лум олан (I) ифадәсилә һесабланыр.

Буна бахмајараг, бүтүн гујуларда апарылан електрик термометр ишләри көстәрир ки, гујуларын әксәријјәтиндә семент мәһлулунун фактик галхма һүндүрлүјү һесабланма һүндүрлүјүндән гијмәтчә чох фәргләнир.

(I) ифадәсиндән көрүнүр ки, K_1 әмсалы сементлә долдурулачаг һәлгәви фәзанын дәјишмәсини нәзәрә алыр. Буна көрә K_1 әмсалыны гујунун диаметринин кенишләнмәсини нәзәрә алан әмсал јох, сементин галдырылмасы һүндүрлүјүндә һәлгәви фәзанын дәјишилмәсини нәзәрә алан әмсал адландырмаг даһа доғру оларды.

Чүнки $$K_1=\frac{D_к^2-d_н^2}{D_д^2-d_н^2},$$

Гујунун диаметринин дәјишилмәсини нәзәрә алан әмсал исә

$$K=\frac{D_к}{D_д},$$

бурада $D_к$—сементин галдырылмасы интервалында гујунун орта һәгиги диаметри, калибрәлчәнлә;

$D_д$—сементин галдырылмасы интервалында гујунун диаметри;

$d_н$—мүһафизә кәмәринин харичи диаметридир.

Јухарыда көстәрдикләримизи нәзәрә алдыгда (1) ифадәсини (3) шәклиндә јазмаг олар.

(1) вә (3) ифадәләринин мүгајисәсиндән көрүнүр ки, еjни шәраит үчүн $K<K_1$.

K әмсалы гијмәтинин дүзкүн тә'јин олунмасы семент мигдарынын һесабланмасында бөјүк әһәмијјәтә маликдир. Буна көрә K-нын гијмәти һәр гуjу үчүн сементләнмәдән габаг тә'јин олунмалыдыр. Бу мүмкүн олмадыгда исә бүтүн рајон үчүн тапылмыш K-нын орта гијмәтиндән истифадә едилмәлидир.

Сементин фактик галхма һүндүрлүјү $H_ф$-ин һесабланма һүндүрлүјү $H_р$-дән гијмәтчә фәргләнмәсинин бир нечә сәбәби вардыр ки, бунлардан бири дә K әмсалы гијмәтинин калибрәлчәнлә дүзкүн көтүрүлмәмәсидир.

Сементләнмиш гујуда, семент иткиләрини нәзәрә алмаг шәрти илә сементин мигдары (4) ифадәсиндән тапылыр.

(1) вә (4) ифадәләрини бирликдә K әмсалына көрә һәлл етдикдә (5) ифадәси алыныр.

Бу ифадә илә Гарадағ—Гушхана рајонунда газылыб сементләнмиш 24 гујунун K әмсалынын гијмәтләри һесабланыб 1-чи чәдвәлдә верилмишдир.

Бундан башга K әмсалынын гијмәти һәмин рајонда газылмыш 8 гују үчүн калибрәлчәнлә тә'јин едилиб 2-чи чәдвәлдә верилмишдир. Бу чәдвәлдә K_1 әмсалынын тапылмыш гијмәтләри дә көстәрилмишдир.

(5) ифадәсиндән тапылмыш K әмсалынын гијмәтини (1-чи чәдвәл) һәмин әмсалын ејни гују үчүн калибрәлчәнлә тә'јин олунмуш гијмәти вә K_1 илә (2-чи чәдвәл) мүгајисә етдикдә $H_р$-ин $H_ф$-дән гијмәтчә фәргләнмәсинин сәбәбини ајдынлашдырмаг олур.

Мисал үчүн, 249 нөмрәли гујунун калибрәлчәнлә K әмсалынын гијмәти 0,96 алынмышдыр; бу гијмәт һәмин әмсалын (1) ифадәсиндәки $K_1=1{,}2$ гијмәтинә мүвафиг 1,06 гијмәтиндән кичикдир. Буна көрә дә гујуда $H_ф>H_р$ алынмалы иди, һәгигәтдә исә $H_ф<H_р$ алынмышдыр. Бу вәзијјәт K әмсалынын (5) ифадәсиндән тапылмыш 1,12 гијмәтинин 0,96 чох алынмасына сәбәб олмушдур. Демәк, 249 нөмрәли гују сементләндикдә, она һесабланмыш семент мигдарынын бир һиссәси мүхтәлиф техники сәбәбләрә көрә вурулмамышдыр.

Бүтүн гујулар јухарыда көстәрилдији кими тәһлил едилмиш вә ашағыдакы нәтичәләр чыхарылмышдыр.

I. $H_ф>H_р$ олдугда:

а) Әкәр (5) ифадәсиндән тапылмыш K әмсалынын гијмәти— $1<K<1{,}06$ алынарса, демәк гујунун диаметри кичилмиш вә бунун нәтичәсиндә $H_ф>H_р$ олмушдур;

б) $K<1{,}00$ олдугда исә бу һал семент мәһлулунун гујуда биртәрәфли галхмасыны көстәрир ки, бунун да нәтичәсиндә $H_ф>H_р$ алынмышдыр.

II. $H_ф<H_р$ олдугда.

а) әкәр һәмин ифадәдән тапылмыш K әмсалынын гијмәти $1{,}06\div 1{,}10$ арасында оларса, демәк гуру сементин мигдары (1) ифадәси илә һесабландыгда K_1 әмсалынын гијмәти онун һәгиги гијмәтиндән аз гәбул олунмушдур ки, бунун да нәтичәсиндә $H_ф<H_р$ алынмышдыр;

б) $K>1{,}10$ оларса, бу ону көстәрир ки, (1) ифадәси илә тә'јин олунмуш гуру сементин һамысы мүхтәлиф техники сәбәбләрә көрә, гујуја вурулмамышдыр.

Гарадағ—Гушхана рајонунда истисмар кәмәринин сементләндирилмәсиндә гуру сементин мигдары (1) вә (3) ифадәләри илә тә'јин едилдикдә $K=1{,}25—1{,}30$; $K=1{,}10—1{,}10$ гәбул едилмәлидир.

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазијјат вә техника елмләри серијасы, 1961, № 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1961, № 2

Б. И. ЕСЬМАН, М. А. АБДИНОВ, Г. Г. ГАБУЗОВ

ФОРМУЛА ДЛЯ ПЕРЕВОДА ПОКАЗАНИЙ ДИФМАНОМЕТРОВ ПРИ РАБОТЕ С ГЛИНИСТЫМ РАСТВОРОМ

При проведении экспериментальных работ по гидравлике, в качестве измерительного прибора часто используются ртутные дифференциальные манометры.

В общем случае перевод показаний шкалы дифманометром производится по формуле, хорошо известной в литературе [1]:

$$\Delta P = h(\gamma_р - \gamma_ж) \qquad (1)$$

где ΔP — перепад давления на опытном участке длиной L;

h — разница между столбиками ртути в трубках дифманометра;

$\gamma_р$ — удельный вес ртути;

$\gamma_ж$ — удельный вес рабочей жидкости, протекающей в опытной трубе.

Употребление выражения (1) справедливо только в том случае, если рабочая жидкость, протекающая в опытных трубах, заполняет также импульсные и стеклянные трубки дифманометров. Однако это допустимо не для всех жидкостей, так как некоторые загрязняют стеклянные трубки, что затрудняет отсчет показаний. В этих случаях прибегают к помощи так называемых разделителей или создают такую систему подсоединения импульсных трубок к рабочим штуцерам (при помощи трех ходовых краников), которая дает возможность иметь в импульсных трубках воду и часто их промывать. Однако вода будет находиться в импульсных трубках только перед началом замеров, пока импульсные трубки еще изолированы от рабочей жидкости.

Тотчас после сообщения трубок с рабочей линией, в точке 1 опытного участка, имеющей давление P_1 произойдет проникновение рабочей жидкости в импульсную трубку на некоторую высоту h_2 (см. рисунок). В другой импульсной трубке, соединяющейся с этой точкой и имеющей давление P_2, меньше чем P_1, напротив, произойдет вытеснение некоторого объема воды в рабочую линию.

Таким образом, в момент, когда наступит равновесие столбов жидкостей в дифференциальном манометре и импульсных трубках, будет иметь место картина, схематично изображенная на рисунке.

Тогда из условия равновесия следует равенство

$$P_1 - h_2 \cdot \gamma_ж - (h_3 - h_2) \cdot \gamma_в + h_1 \cdot \gamma_в + h \cdot \gamma_в = P_2 + h\,\gamma_р + h_1 \cdot \gamma_в - h_3 \cdot \gamma_в, \quad (2)$$

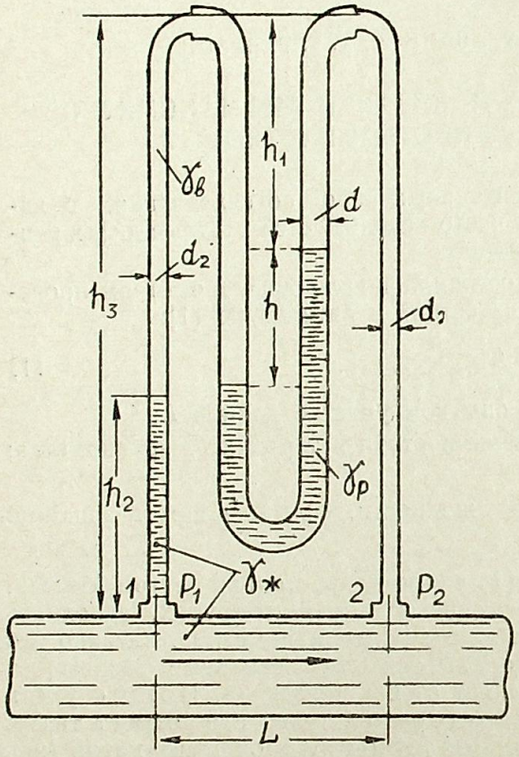
решая которое относительно разницы $P_1 - P_2$ получим:

$$\Delta P = h(\gamma_р - \gamma_в) + h_2(\gamma_ж - \gamma_в); \quad (3)$$

Здесь h_2—высота проникновения рабочей жидкости в импульсную трубку;

$\gamma_в$—удельный вес жидкости, заполняющей импульсные трубки и часть трубок дифманометра (обычно вода).

Остальные обозначения встречались ранее.



В случае, если рабочей жидкостью является глинистый раствор, или ему подобная вязко-пластичная жидкость, то в выражение (3) должна быть внесена еще поправка, которая учитывала бы склонность таких жидкостей к структурообразованию. Как известно, последнее свойство характеризуется статическим напряжением сдвига θ и проявляется, в частности в том, что при равновесии таких жидкостей в сообщающихся сосудах будет иметь место превышение уровня жидкости в одном из колен. Вес этого столбика жидкости уравновешивается силой касательных напряжений, возникающих за счет величины θ.

В общем случае высота этого столбика может быть [2] найдена из выражения:

$$H = 4 \cdot \frac{l \cdot \theta}{d_1 \cdot \gamma}, \quad (4)$$

где H—высота столбика;

l—общая длина участка;

d_1—диаметр трубки;

θ—статическое напряжение сдвига;

γ—удельный вес жидкости.

Возвращаясь к нашему случаю в свете изложенного, следует констатировать, что часть давления P_1 должна затрачиваться на преодоление касательных напряжений, которые возникнут при перемещении столбика глинистого раствора высотой h_2 из основной линии в импульсную трубку.

По аналогии с (4) величина этого давления может быть найдена из выражения

$$P_c = \frac{4 \cdot h_2 \cdot \theta}{d_2}. \quad (5)$$

Следовательно, в общем случае выражение (3) следует записывать в виде:

$$\Delta P = h \cdot (\gamma_р - \gamma_в) + h_2 \cdot (\gamma_ж - \gamma_в) + \frac{4 \cdot h_2 \cdot \theta}{d_2}. \quad (6)$$

Так как практически величина h_2 определена быть не может, выразим ее через значение h. При этом будем исходить из предположения, что объем, вытесняемый раствором из импульсной трубки диаметром d_2 должен быть равен половине объема занимаемого ртутным столбиком высотой h, при диаметре трубки дифманометра d, т. е., что

$$\frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \frac{h}{2} = \frac{\pi \cdot d_2^2}{4} \cdot h_2. \quad (7)$$

Тогда

$$h_2 = \left(\frac{d}{d_2}\right)^2 \cdot \frac{h}{2}. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (6) получим окончательно

$$\Delta P = h \cdot \left[\gamma_р - \gamma_в + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d}{d_2}\right)^2 \cdot \left(\gamma_ж - \gamma_в + \frac{4 \cdot \theta}{d_2}\right)\right]. \quad (9)$$

Учитывая наиболее употребительные единицы измерений для, величин, входящих в выражение (9), внесем в него соответствующие переводные коэффициенты, после чего оно принимает вид:

$$\Delta P = \frac{h}{10^4} \cdot \left[\gamma_р - \gamma_в + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d}{d_2}\right)^2 \cdot \left(\gamma_ж - \gamma_в + 0{,}04\,\frac{\theta}{d_2}\right)\right]. \quad (10)$$

где ΔP—$кГ/см^2$; h—$мм$; $\gamma_р$, $\gamma_в$, $\gamma_ж$—$Г/см^3$; d, d_2—$мм$; θ—$мГ/см^2$;

Полагая в частном случае, что рабочей жидкостью является вода которая заполняет и импульсные трубки, т. е. принимая, что $\gamma_ж = \gamma_в$ и $\theta = 0$; из выражения (10) получим зависимость (1), что свидетельствует о правильности предложенного вывода.

Следует отметить, что выведенная формула (10) справедлива только при условии, когда замер давления производится при изменении расходов только в одном направлении, а именно от меньшего к большему, но не наоборот. В противном случае перемена направления расхода тотчас приведет к тому, что в точке 2 произойдет снижение давления P_2, по сравнению с его значением в предыдущем опыте и рабочая жидкость проникнет во вторую импульсную трубку.

Принятая схема равновесия будет нарушена и формула (10) потеряет свою силу.

В то же время формула, выведенная для случая проникновения рабочей жидкости в обе импульсные трубки получается громоздкой и включает в себя высоту проникновения рабочей жидкости во вторую импульсную трубку, учесть которую практически не представляется возможным.

Указанное обстоятельство дает право сделать вывод весьма важный с точки зрения порядка проведения экспериментов, при которых используются дифманометры, подключаемые по разобранной выше схеме. Этот вывод заключается в том, что изменение расходов в процессе опыта следует вести строго в одном направлении, а именно от меньшего к большему. По окончании всей серии замеров импульсные трубки дифманометров обязательно должны быть промыты и только после этого можно приступать к новой серии опытов, начиная их с минимальных расходов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вилькер Д. С. Лабораторный практикум по гидравлике. М.—Л., 1949.
2. Шищенко Р. И. Гидравлика глинистых растворов. Баку, 1951.

Б. И. Јесман, М. А. Абдинов, Г. Г. Габузов

Килли мәһлул илә ишләдикдә дифманометр көстәришини чевирмәк үчүн формул

ХҮЛАСӘ

Чох вахт һидравлика мәсәләләринин тәдгигиндә тәчрүбә ишләри апарылдыгда, чивәли диференсиал манометр өлчү чиһазындан истифадә едилир.

Дифманометр көстәришини чевирмәк үчүн истифадә едилән ифадә—формул садәчә олараг үмуми һал үчүн әдәбијјатда, мә'лум олдуғу кими, ашағыдакы шәкилдә верилир:

$$\Delta P = h(\gamma_р - \gamma_ж),$$

бурада ΔP—„L“ узунлуғунда апарылан саһәдә тәзјиг дүшкүсү;
h—дифманометр боруларындакы чивә сәвијјәләринин фәрги;
$\gamma_р$—чивәнин хүсуси чәкиси;
$\gamma_ж$—Тәчрүбә борусундан ахан ишчи мәһлулунун хүсуси чәкиси.

Јухарыда көстәрилән ифадәдән истифадә етмәк о заман доғру олар ки, дифманометр чиһазынын шүшә вә импулс борулары да ишчи мәһлулу илә долдурулсун (1-чи шәкил). Анчаг бу бүтүн мәһлуллар үчүн мүмкүн олмур. Чүнки о мәһлулларын бә'зиләри дифманометр шүшә боруларына дахил олдугда онлары чирклəндирир вә нәтичәдә исә чивә сүтунунун сәвијјәсини тә'јин етмәк мүмкүн олмур. Бу һалда „Ајрычы“лардан истифадә едилир вә јахуд импулс боруларынын башланчығында „үчкедишли“ кран гојулур ки, бу да һәмин борулары тез-тез су илә јумаға имкан верир.

Импулс борулары „1“ вә „2“ нөгтәсиндә ишчи хәтти илә бирләшдирилдикдә „1“ нөгтәсиндән импулс борусуна ишчи мәһлул дахил олур. Бу заман „2“ нөгтәсиндән исә һәмин һәчмә мүвафиг, импулс борусундакы сујун бир һиссәси ишчи хәттинә дахил олур ($P_1 > P_2$ олдуғу үчүн).

Бу вәзијјәт дифманометрдәки чивәнин мүвазинәт вәзијјәти әлдә едиләнә кими давам едир.

(2) мүвазинәт шәрти бәрабәрлијини $P_1 - P_2 = \Delta P$ нисбәтән һәлл етдикдә (3) ифадәсини алмыш оларыг.

Ишчи мәһлулу килли мәһлул оларса, о заман онун статик сүрүшмә көркинлији θ нәзәрә алынмалыдыр. Бу һалда (3) ифадәси (6) шәклини алыр.

Сон формулда h_2-нин (8) ифадәсиндәки гијмәтини јеринә јаздыгда, о заман килли мәһлул илә ишләдикдә дифманометр көстәришини чевирмәк үчүн формулун ашағыдакы ифадәси алыныр:

$$\Delta P = \frac{h}{10^{\gamma}}\left[\gamma_р - \gamma_в + \frac{1}{2}\left(\frac{d}{d_2}\right)^2\left(\gamma_ж - \gamma_в + 0{,}04\,\frac{\theta}{d_2}\right)\right]$$

бурада:

$$\Delta P - \frac{к\Gamma}{см^2};\ h - мм;\ \gamma_р, \gamma_в, \gamma_ж - \frac{\Gamma}{см^3};\ d_1\, d_2 - мм;\ \theta - \frac{м\Gamma}{см^2}.$$

Гејд етмәк лазымдыр ки, һәмин ифадә тәзјигин бир истигамәтдә, јә'ни килли мәһлул сәрфинин ашағы гијмәтиндән јухары гијмәтинә артырылмасы шәранти үчүн верилмишдир. Әкс һалда „2“ нөгтәсиндән импулс борусуна килли мәһлул дахил олар.

Бу әсас нәтичәләрдән биридир.

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазијјат вә техника елмләри серијасы, 1961, № 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1961, № 2

А. А. АББАСОВ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ПРИ ВЫТЕСНЕНИИ НЕФТИ ГОРЯЧИМИ ЖИДКОСТЯМИ ИЗ ПЛАСТА

Более 30 лет как у нас, так и за рубежом ведутся теоретические, лабораторные и промысловые исследования теплового воздействия на нефтяной пласт, внедрение которого обеспечило бы наиболее полное использование запасов нефтяных месторождений, содержащих нефти больших вязкостей. Поскольку разведанные запасы таких нефтей в пластовых условиях огромны, проблема рентабельной добычи их является важнейшей задачей, стоящей перед нефтяной промышленностью.

Увеличения нефтеотдачи можно ожидать за счет уменьшения вязкости, поверхностного натяжения, прилипаемости нефти и, очевидно, нагревом пласта.

Идея использования тепловой энергии для увеличения отдачи нефтяного пласта ненова. Энергия, затрачиваемая на нагрев пласта, может быть подведена к нему различными способами. Известны три основных способа: 1) нагревом призабойной зоны; 2) подземным горением в пласте; 3) нагнетанием в пласт горячих жидкостей и газов.

Действие первого способа обусловлено снижением вязкости нефти в скважине и призабойной зоне. Указанный метод давно известен и в широком масштабе применяется в Советском Союзе и за рубежом в основном для борьбы с парафинообразованием в скважинах.

Исследования Укр. НИГРИ [5] показали, что в месторождениях Борислав, Сходница и подобных им невозможно создание и перемещение очага горения. Поэтому для решения проблемы увеличения нефтеотдачи из подобных нефтяных месторождений необходимо продолжить исследования в области применения горячей воды или перегретого пара. В этом случае пласт нагревается горячей жидкостью (вода, нефть) или горячим газом (пар, природный газ, воздух), закачиваемыми в нагнетательные скважины, а нефть добывается из эксплуатационных скважин. При этом из-за низкой теплоемкости газа применение его не рекомендуется. Применение пара [7, 8] имеет то преимущество, что используется также скрытая теплота конденсации.

При закачке водяного пара в пласт необходимо учитывать, что ширина вала конденсата при продолжительности процесса увеличивается, в результате чего применение пара может переходить к использованию горячей воды. Отсюда следует, что с экономической точки зрения горячая вода является самым наилучшим агентом для нагнета-

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазијјат вә техника елмләри серијасы, 1961, № 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1961, № 2

А. А. АББАСОВ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ПРИ ВЫТЕСНЕНИИ НЕФТИ ГОРЯЧИМИ ЖИДКОСТЯМИ ИЗ ПЛАСТА

Более 30 лет как у нас, так и за рубежом ведутся теоретические, лабораторные и промысловые исследования теплового воздействия на нефтяной пласт, внедрение которого обеспечило бы наиболее полное использование запасов нефтяных месторождений, содержащих нефти больших вязкостей. Поскольку разведанные запасы таких нефтей в пластовых условиях огромны, проблема рентабельной добычи их является важнейшей задачей, стоящей перед нефтяной промышленностью.

Увеличения нефтеотдачи можно ожидать за счет уменьшения вязкости, поверхностного натяжения, прилипаемости нефти и, очевидно, нагревом пласта.

Идея использования тепловой энергии для увеличения отдачи нефтяного пласта ненова. Энергия, затрачиваемая на нагрев пласта, может быть подведена к нему различными способами. Известны три основных способа: 1) нагревом призабойной зоны; 2) подземным горением в пласте; 3) нагнетанием в пласт горячих жидкостей и газов.

Действие первого способа обусловлено снижением вязкости нефти в скважине и призабойной зоне. Указанный метод давно известен и в широком масштабе применяется в Советском Союзе и за рубежом в основном для борьбы с парафинообразованием в скважинах.

Исследования Укр. НИГРИ [5] показали, что в месторождениях Борислав, Сходница и подобных им невозможно создание и перемещение очага горения. Поэтому для решения проблемы увеличения нефтеотдачи из подобных нефтяных месторождений необходимо продолжить исследования в области применения горячей воды или перегретого пара. В этом случае пласт нагревается горячей жидкостью (вода, нефть) или горячим газом (пар, природный газ, воздух), закачиваемыми в нагнетательные скважины, а нефть добывается из эксплуатационных скважин. При этом из-за низкой теплоемкости газа применение его не рекомендуется. Применение пара [7, 8] имеет то преимущество, что используется также скрытая теплота конденсации.

При закачке водяного пара в пласт необходимо учитывать, что ширина вала конденсата при продолжительности процесса увеличивается, в результате чего применение пара может переходить к использованию горячей воды. Отсюда следует, что с экономической точки зрения горячая вода является самым наилучшим агентом для нагнета-

ния на пласт. Учитывая изложенное, в настоящей работе рассмотрен вопрос вытеснения нефти из пласта горячими жидкостями.

Как известно, на данном этапе непосредственное определение влияния прогрева пласта на его нефтеотдачу представляет большие трудности. Поэтому в работе исследуется распределение температуры и фронта тепловой волны, которая позволяет косвенно судить о влиянии прогрева на отдачу и дает возможность оценивать при каком теплоносителе и при каких параметрах можно получить оптимальный режим теплового воздействия. При этом считаем, что чем больше расстояние между границей теплоносителя и фронтом тепловой волны, а также чем выше температура в зоне вытеснения, тем будет больше нефтеотдача.

Таким образом, в настоящей статье определяется распределение температуры и фронта тепловой волны при вытеснении нефти горячими жидкостями из пласта.

Указанная задача при граничных условиях, характеризующих полуограниченный пласт, была решена Л. И. Рубинштейном [6].

В реальных условиях граница горячей зоны с температурой, равной начальной температуре пласта, имеет конечные размеры и перемещается во времени, т. е. процесс математически описывается уравнением переноса тепла с подвижными граничными условиями. Задача в такой постановке была решена нами [1] без учета теплопотери через кровлю и подошву пласта.

Учитывая вышеизложенное, поставленная задача решается с учетом теплопотерь через кровлю и подошву пласта. При этом уравнение переноса тепла при движении несжимаемой жидкости, имеет вид;

$$c\rho\frac{\partial\Delta T}{\partial t}+\frac{q\,c\rho}{2\pi rhm}\frac{\partial\Delta T}{\partial r}=\lambda\left(\frac{\partial^2\Delta T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Delta T}{\partial r}+\frac{\partial^2\Delta T}{\partial z^2}\right), \qquad (1)$$

где ΔT—прирост температуры в текущей точке пласта относительно его начальной температуры;

λ, c, ρ—соответственно, теплопроводность, теплоемкость и плотность насыщенной породы;

$q=\text{const}$—расход нагнетательного агента;

h—мощность пласта;

m—пористость пласта.

Интегрируя (1) по z, найдем:

$$c\rho\frac{\partial\Delta\overline{T}}{\partial t}+\frac{q\,c\rho}{2\pi rhm}\frac{\partial\Delta\overline{T}}{\partial r}=\lambda\left(\frac{\partial^2\Delta\overline{T}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Delta\overline{T}}{\partial r}\right)-$$

$$-\frac{\alpha}{h}\left(2\Delta\overline{T}-\Delta T|_{z=0}-\Delta T|_{z=h}\right), \qquad (2)$$

где $\Delta\overline{T}=\frac{1}{h}\int_0^h\Delta T\,dz$ —средняя по мощности температура пласта;

α—коэффициент теплообмена.

Значение коэффициента α Л. И. Рубинштейн определяет аналитически, а Г. Е. Малофеев—по опытным данным.

Значения температур $\Delta T|_{z=0}$ и $\Delta T_{z=h}$ нам неизвестны. В первом приближении заменим $\Delta T|_{z=0}$ и $\Delta T|_{z=h}$ в (2) их начальными значениями [6], т. е. $\Delta T|_{z=0}=\Delta T|_{z=h}=0$. Тогда получаем:

$$c\rho\frac{\partial\Delta\overline{T}}{\partial t}+\frac{q\,c\rho}{2\pi rhm}\frac{\partial\Delta\overline{T}}{\partial r}=\lambda\left(\frac{\partial^2\Delta\overline{T}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Delta\overline{T}}{\partial r}\right)-\frac{2\alpha}{h}\Delta\overline{T}. \qquad (3)$$

Для решения уравнения (3) имеем следующие начальные и граничные условия:

$$\Delta\overline{T}(r,0)=0, \qquad (4)$$

$$\Delta\overline{T}(R_c,t)=\Delta\overline{T}_н, \qquad (5)$$

$$\Delta\overline{T}(R_2,t)=0, \qquad (6)$$

где $\Delta\overline{T}_н=\overline{T}_н-\overline{T}_0$;

$\Delta T_н$—температура нагнетаемого агента;

$\overline{T}_0$—начальная пластовая температура;

R_c—радиус скважины;

R_2—расстояние от нагнетательной скважины до границы тепловой волны.

Введем безразмерные величины:

$$x=\frac{r}{R};\ x_c=\frac{R_c}{R};\ x_2=\frac{R_2}{R};\ \tau=\frac{\lambda t}{c\rho R^2};\ Nu=\frac{2\alpha R^2}{h\lambda};$$

$$B=1-Pe;\quad \theta=\frac{\Delta\overline{T}}{\Delta\overline{T}_н}, \qquad (7)$$

где R—расстояние между нагнетательной и эксплуатационной скважинами;

τ—параметр Фурье;

$Pe=\frac{qc\rho}{2\pi hm\lambda}$—параметр Пекле;

Nu—параметр Нуссельта.

Поставив (7) в (3) и (4), (5), (6), получаем:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{B}{x}\frac{\partial\theta}{\partial x}-\frac{\partial\theta}{\partial\tau}-Nu\,\theta=0\\&\theta(x,0)=0;\ \theta(x_c,\tau)=1;\ \theta(x_2,\tau)=0\end{aligned}\right\}. \qquad (8)$$

Применяя преобразование Лапласа относительно переменной τ, из (8) получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами относительно изображения:

$$\frac{d^2\theta^*(x,S)}{dx^2}+\frac{B}{x}\frac{d\theta^*(x,S)}{dx}-(S+Nu)\,\theta^*(x,S)=0. \qquad (9)$$

При граничных условиях:

$$\theta^*(x_c,S)=\frac{1}{S};\ \theta^*(x_2,S)=0 \qquad (10)$$

Уравнение (9) сводится к уравнению Бесселя при помощи замены:

$$\theta^*(x,S)=x^n U^*(x,S);\ x=\frac{y}{i\sqrt{S+Nu}}$$

и получаем:

$$\theta^*(x,S)=C_1x^n J_n\left(ix\sqrt{S+Nu}\right)+C_2x^n Y_n\left(ix\sqrt{S+Nu}\right), \qquad (11)$$

где $n=\frac{Pe}{2}$ —величина положительная и может быть взята целой;

J_n, Y_n—функция Бесселя соответственно, первого и второго рода, n-го порядка.

Постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий (10). Тогда уравнение (11) принимает вид:

$$\theta^*(x,S)=\frac{x^n\left[J_n\left(ix\sqrt{S+Nu}\right)Y_n\left(ix_2\sqrt{S+Nu}\right)-\right.}{x_c^n S\left[J_n\left(ix_c\sqrt{S+Nu}\right)Y_n\left(ix_2\sqrt{S+Nu}\right)-\right.}$$
$$\left.\frac{-J_n\left(ix_2\sqrt{S+Nu}\right)Y_n\left(ix\sqrt{S+Nu}\right)\right]}{\left.-J_n\left(ix_2\sqrt{S+Nu}\right)Y_n\left(ix_c\sqrt{S+Nu}\right)\right]}. \qquad (12)$$

Функция $\theta^*(x, S)$ мероморфна и имеет простые полюсы в точках

$$S=0 \text{ и } S=S_к=-\left(Nu+\frac{\mu_к^2}{x_2^2}\right).$$

Здесь $\mu_к$ — корни характеристического уравнения.

$$J_n\left(\frac{x_c}{x_2}\mu\right)y_n(\mu)-J_n(\mu)\,Y_n\left(\frac{x_c}{x_2}\mu\right)=0. \qquad (13)$$

Используя вторую теорему разложения [4] для определения оригинала $\theta(x, \tau)$, получаем:

$$\theta(x,\tau)=\frac{x^n\left[J_n\left(ix\sqrt{Nu}\right)Y_n\left(ix_2\sqrt{Nu}\right)-\right.}{x_c^n\left[J_n\left(ix_c\sqrt{Nu}\right)Y_n\left(ix_2\sqrt{Nu}\right)-\right.}$$
$$\frac{\left.-J_n\left(ix_2\sqrt{Nu}\right)Y_n\left(ix\sqrt{Nu}\right)\right]}{\left.-J_n\left(ix_2\sqrt{Nu}\right)Y_n\left(ix_c\sqrt{Nu}\right)\right]}+2x_2x^n\sum_{к=1}^{\infty}A_к\left[J_n\left(\frac{x}{x_2}\mu_к\right)Y_n(\mu_к)-\right.$$
$$\left.-J_n(\mu_к)Y\left(\frac{x}{x_2}\mu_к\right)\right]e^{-\left(Nu+\frac{\mu_к^2}{x_2^2}\right)\tau}, \qquad (14)$$

где

$$A_к=\frac{\mu_к}{x_2x_c^n\left(x_2^2Nu+\mu_к^2\right)\left[J_{n+1}(\mu_к)Y_n\left(\frac{x_c}{x_2}\mu_к\right)J_n\left(\frac{x_c}{x_2}\mu_к\right)Y_{n+1}(\mu_к)\right]+\ldots}$$
$$\ldots+x_c^{n+1}\left(x_2^2Nu+\mu_к^2\right)\left[J_n(\mu_к)Y_{n+1}\left(\frac{x_c}{x_2}\mu_к\right)-J_{n+1}\left(\frac{x_c}{x_2}\mu_к\right)Y_n(\mu_к)\right].$$

Имея известные соотношения между функциями Бесселя [3]:

$$J_n(z)=e^{-\frac{1}{2}n\pi i}J_n\left(ze^{\frac{1}{2}\pi i}\right),$$
$$K_n(z)=\frac{1}{2}\pi i\,e^{\frac{1}{2}n\pi i}H_n^{(1)}(iz),$$
$$H_n^{(1)}(z)=J_n(z)+iY_n(z),$$

получаем:

$$\theta(x,\tau)=\frac{x^n\left[I_n\left(x\sqrt{Nu}\right)K_n\left(x_2\sqrt{Nu}\right)-I_n\left(x_2\sqrt{Nu}\right)K_n\left(x\sqrt{Nu}\right)\right]}{x_c^n\left[I_к\left(x_c\sqrt{Nu}\right)K_n\left(x_2\sqrt{Nu}\right)-I_n\left(x_2\sqrt{Nu}\right)K_n\left(x_c\sqrt{Nu}\right)\right]}+$$
$$+2x_2x^n\sum_{к=1}^{\infty}A_к\left[J_n\left(\frac{x}{x_2}\mu_к\right)J_n(\mu_к)-Y_n(\mu_к)Y_n\left(\frac{x}{x_2}\mu_к\right)\right]e^{-\left(Nu+\frac{\mu_к^2}{x_2^2}\right)\tau} \qquad (15)$$

Для определения x_2 напишем уравнения баланса тепла, вносимого жидкостью в пласт, т. е.

$$qt\cdot\overline{T}_н c_ж\rho_ж=2\pi hm\,cp\int_{R_c}^{R}\Delta\overline{T}\,rdr+4\pi\alpha\int_0^t\int_R^{R_2}\Delta\overline{T}\,rdrdt$$

или

$$\frac{\nu_1\cdot\overline{T}_n\left(x_1^2-x_c^2\right)}{2}=f(x_2,\tau)+Nu_1\int_0^{\tau}f(x_2,\tau)\,d\tau, \qquad (16)$$

где

$$f(x_2\tau)=\int_{x_c}^{x_2}\Delta\overline{T}\,xdx;$$
$$\rho=\frac{\rho_ж+\rho_н}{2}+\rho_{пор}\cdot\left(\frac{1}{m}-1\right);\quad \nu_1=\frac{c_ж\cdot\rho_ж}{c\cdot\rho}.$$

Так как из постановки задачи следует, что $x_2=x_2(\tau)$, то выражение (16) представляет собой интегральное уравнение Вольтера второго рода относительно функции f, решение которого принципиально можно найти, но это решение для применения в практических расчетах будет неприемлемым.

Поэтому, исходя из физических соображений, полагаем, что градиент температуры по кровле и подошве пласта как во времени, так и по его протяженности остается величиной постоянной. Также принимаем, что площадь кровли и подошвы пласта, через которую происходит потеря тепла, увеличивается прямо пропорционально времени [2].

При указанных допущениях следует в два раза уменьшить величину функции $f(x_2, \tau)$, входящей под интеграл в формуле (16), а x_2 считать постоянной. Тогда член, учитывающий теплопотерю через подошву и кровлю пласта, не изменяется.

Отметим, что допущение о постоянстве градиента температуры при $\Delta T\big|_{z=0}=\Delta T\big|_{z=h}=0$ далеко от реальности. При точном же решении задачи о распределении температуры в пласте и окружающей породе указанное допущение вполне возможно.

Таким образом, при принятых допущениях и после некоторых преобразований из (16) получаем уравнение для определения фронта горячей зоны (x_2).

$$\nu\left(x_1^2-x_c^2\right)=\frac{(2+Nu_1\tau)\left\{x_2^n-x^{n+1}\sqrt{Nu}\left[I_{n+1}\left(x_c\sqrt{Nu}\right)K_n\left(x_2\sqrt{Nu}\right)+\right.\right.}{Nu\,x_c^n\left[I_n\left(x_c\sqrt{Nu}\right)K_n\left(x_2\sqrt{Nu}\right)-\right.}$$
$$\frac{\left.\left.+I_n\left(x_2\sqrt{Nu}\right)K_{n+1}\left(x_c\sqrt{Nu}\right)\right]\right\}}{\left.-I_n\left(x_2\sqrt{Nu}\right)K_n\left(x_c\sqrt{Nu}\right)\right]}+4x_2^2\sum_{к=1}^{\infty}\frac{A_к}{\pi\mu_к^2}\left\{2x_2^{n+1}+\right.$$
$$\left.+\pi\mu_к\,x_c^{n+1}\left[J_n(\mu_к)\,Y_{n+1}\left(\frac{x_c}{x_2}\mu_к\right)-J_{n+1}\left(\frac{x_c}{x_2}\mu_к\right)Y_n(\mu_к)\right]\right\}e^{-\left(Nu+\frac{\mu_к^2}{x_2^2}\right)}+$$
$$+2x_2^4Nu_1\sum_{к=1}^{\infty}\frac{A_к}{\pi\mu_к^2\left(x_2^2Nu+\mu_к^2\right)}\left\{2x_2^{n+1}+\pi\mu_к\,x_c^{n+1}\left[J_n(\mu_к)\,Y_{n+1}\left(\frac{x_c}{x_2}\mu_к\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-J_{n+1}\left(\frac{x_c}{x_2}\mu_к\right)Y_n(\mu_к)\right]\right\}\cdot\left[1-e^{-\left(Nu+\frac{\mu_к^2}{x_2^2}\right)\tau}\right], \qquad (17)$$

где

$$\nu = \frac{c_{ж} \cdot \rho_{ж} \cdot T_{п}}{c \cdot \rho \cdot \Delta T_{п}}; \qquad x_1^2 = \left(\frac{R_1}{R}\right)^2 = x_c^2 + 4n\tau; \; Nu_1 = \frac{Nu}{m};$$

R_1 — расстояние от нагнетательной скважины до границ теплоносителя.

При $x_c \to 0$ получаем:

$$\theta(x, \tau) = \frac{x^n \left[I_n\left(x_2\sqrt{Nu}\right) K_n\left(x\sqrt{Nu}\right) - I_n\left(x\sqrt{Nu}\right) K_n\left(x_2\sqrt{Nu}\right)\right]}{2^{n-1}\,(n-1)!\left(\sqrt{Nu}\right)^{-n} I_n\left(x_2 \sqrt{Nu}\right)} +$$

$$+ 2x_2\, x^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k J_n\left(\frac{x}{x_2}\mu_k\right)}{\mu_k J_{n+1}(\mu_k)} e^{-\left(\nu u - \frac{\mu_k^2}{x_2^2}\right)\tau}; \qquad (18)$$

$$\nu x_1^2 = \frac{(2 + Nu_1\,\tau)\left[2^n\, n!\, I_n\left(x_2\sqrt{Nu}\right) - x_2^n\left(\sqrt{Nu}\right)^n\right]}{2^{n-1}\,(n-1)!\, Nu\, I_n\left(x_2\sqrt{Nu}\right)} +$$

$$+ 4x_2^{n+3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\mu_k^2} e^{-\left(Nu + \frac{\mu_k^2}{x_2^2}\right)\tau} +$$

$$+ 2x_2^{n+5}\, Nu_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\mu_k^2\left(x_2^2\, Nu + \mu_k^2\right)} \left[1 - e^{-\left(Nu + \frac{\mu_k^2}{x_2^2}\right)\tau}\right], \qquad (19)$$

где

$$A_k = -\frac{\mu_k^{n+1}}{2^{n-1}\,(n-1)!\, x_2^{n+1}\left(x_2^2\, Nu + \mu_k^2\right) J_{n+1}(\mu_k)};$$

μ_k — корни характеристического уравнения $J_n(\mu) = 0$.

Попутно отметим, что в частном случае, когда $Nu \to 0$ после некоторых преобразований из (15—19) получаются уравнения, ранее полученные нами [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Аббасов А. А., Кисель В. А. К вопросам распределения температуры нефти горячим агентом из пласта. „Науч. зап. Укрниипроекта", вып. 4, 1961.
2. Аббасов А. А., Кисель В. А. Теоретическое исследование процесса переноса тепловой волны при вытеснении нефти горячим агентом из пласта. „Науч. зап. Укрниипроекта", вып. 4, 1961.
3. Ватсон Г. Н. Теория Бесселевых функций, ч. 1. ИИЛ. 1949.
4. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного ГИТТЛ. 1951.
5. Оганов К. А., Маковский С. А. и Косарев Н. Н. Еще раз о создании передвижного очага горения в пористой среде пласта. НХ, 1960, № 4.
6. Рубинштейн Л. И. О температурном поле пласта при нагнетании в пласт горячего теплоносителя. Труды Уфимского нефтяного института, вып. 2. 1958.
7. IV международный нефтяной конгресс, т. III, 1956.
8. Squire s F., Merriam F. S. A burnerfor underground generation of heat Producers Monthly, vol. 16, № 7, 1952.

А. Ә. Аббасов

Ла јдан нефтин гыздырылмыш маје илә сыхышдырылмасы заманы температурун пајланмасы

ХҮЛАСӘ

Лајын нефтвермә әмсалыны чохалтмаг үчүн истилик енержисиндән истифадә едилмәси фикри чохдан мә'лумдур. Лајы гыздырмаг үчүн лазым олан енержи лаја мүхтәлиф үсулларла верилә биләр. Мәсәлән, гујудиби зонасыны гыздырмагла, лајда јанан зона јаратмагла, лаја газғын маје вә газ вурмагла вә с.

Бир чох тәдгигатлардан сонра мә'лум олмушдур ки, лајы гыздырмаг үчүн ән әлверишли үсул лаја гыздырылмыш маје (су) вурмагдыр.

Одур ки, мәгаләдә, лаја гыздырылмыш маје вураркән температурун нечә пајланмасы вә температурун јајылмасы сәрһәддинин замандан асылы олараг нечә дәјишмәси өјрәнилир. Бунун үчүн бир нечә фәрзијјәләрдән сонра (1) тәнлији, (4—6) сәрһәд вә башланғыч шәртләриндә, оператор һесабланмасы үсулу илә һәлл едилир. Температурун јајылма сәрһәдди (R_2) исә истилик балансына көрә тапылыр.

Мәсәләнин гојулушундан мә'лумдур ки, температурун јајылма сәрһәдди замандан асылы олдуғу үчүн истилик балансы тәнлији икинчи типли Волтер интеграл тәнлији шәклиндә алыныр. Алынан интеграл тәнлијинин үмуми јәтлә һәллини тампаг мүмкүндүр, анчаг һесабат үчүн әлверишли олмајачағы габагчадан көрүндүјүндән лајын дабаны вә таваны үзрә температур дүшкүсүнүн сабит галмасы вә истилик итгиси кедән саһәнин замандан асылылығыныи дүз хәтт гануну үзрә дәјишмәси фәрз олунараг интеграл тәнлији ади интегралламаја кәтирилир.

Нусселт параметрини сыфра јахынлашдырдыгда алынан формуллар, хүсуси һал олан вә габагчадан бизим тәрәфимиздән алынмыш тәнликләрә чеврилир.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазијјат вә техника елмләри серијасы, 1961, № 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1961, № 2

М. А. БАГИРОВ

НАУЧНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ ТЕХНИКИ ВЫСОКИХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОЛЬСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКЕ

Техника высоких напряжений, как и вся электротехническая наука, получила возможность широкого развития в Польше только с победой народной власти в стране. В довоенной Польше электротехническая наука, сосредоточенная главным образом в Варшаве, была, в основном, связана с обслуживанием промышленности и имела весьма малые достижения. В период фашистской оккупации значительная часть энергохозяйства страны была разрушена, а варшавский центр научных исследований был полностью уничтожен. Существенно пострадали имевшиеся в стране немногочисленные кадры электротехников, часть которых выехала за границу.

За исторически короткое время в народно-демократической Польше, наряду с высокими темпами развития электроэнергетики, имеются определенные достижения электротехнической науки, в частности, одной из ведущих ее областей — техники высоких напряжений.

Развитие исследований по технике высоких напряжений непосредственно связано с задачами все расширяющегося строительства мощных электростанций и высоковольтных электрических сетей в стране.

Основными центрами научно-исследовательских работ в области техники высоких напряжений в Польской Народной республике являются — Электротехнический, Энергетический институты в Варшаве и соответствующие кафедры политехникумов в городах Гданск, Вроцлав и Варшава.

Электротехнический институт, состоящий из 11 отделов, — наиболее крупный в стране и оснащен кадрами и оборудованием лучше других родственных научно-исследовательских институтов.

Из существующих испытательных устройств, входящих в техническое оснащение Отдела высоких напряжений Электротехнического института следует отметить: генератор импульсных напряжений башенного типа фирмы «Филипс» с номинальным напряжением 2,8 млн. *в* и энергией разряда 32 *квт. сек,* высоковольтный трансформатор 750 *кв* мощностью 750 *ква* (производство ГДР), шаровой разрядник, с диаметром шаров 1 *м,* генератор импульсных токов (максимальный ток колебательного разряда 200 *ка*) и т. д.

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазијјат вә техника елмләри серијасы, 1961, № 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1961, № 2

М. А. БАГИРОВ

НАУЧНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ ТЕХНИКИ ВЫСОКИХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОЛЬСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКЕ

Техника высоких напряжений, как и вся электротехническая наука, получила возможность широкого развития в Польше только с победой народной власти в стране. В довоенной Польше электротехническая наука, сосредоточенная главным образом в Варшаве, была, в основном, связана с обслуживанием промышленности и имела весьма малые достижения. В период фашистской оккупации значительная часть энергохозяйства страны была разрушена, а варшавский центр научных исследований был полностью уничтожен. Существенно пострадали имевшиеся в стране немногочисленные кадры электротехников, часть которых выехала за границу.

За исторически короткое время в народно-демократической Польше, наряду с высокими темпами развития электроэнергетики, имеются определенные достижения электротехнической науки, в частности, одной из ведущих ее областей — техники высоких напряжений.

Развитие исследований по технике высоких напряжений непосредственно связано с задачами все расширяющегося строительства мощных электростанций и высоковольтных электрических сетей в стране.

Основными центрами научно-исследовательских работ в области техники высоких напряжений в Польской Народной республике являются — Электротехнический, Энергетический институты в Варшаве и соответствующие кафедры политехникумов в городах Гданск, Вроцлав и Варшава.

Электротехнический институт, состоящий из 11 отделов, — наиболее крупный в стране и оснащен кадрами и оборудованием лучше других родственных научно-исследовательских институтов.

Из существующих испытательных устройств, входящих в техническое оснащение Отдела высоких напряжений Электротехнического института следует отметить: генератор импульсных напряжений башенного типа фирмы «Филипс» с номинальным напряжением 2,8 млн. *в* и энергией разряда 32 *квт. сек,* высоковольтный трансформатор 750 *кв* мощностью 750 *ква* (производство ГДР), шаровой разрядник, с диаметром шаров 1 *м,* генератор импульсных токов (максимальный ток колебательного разряда 200 *ка*) и т. д.

В настоящее время Электротехнический институт строит ряд крупных современных технически оснащенных лабораторий на окраине, в 30 *км* от Варшавы — в Мендзылесе. На территории площадью 40 *га* строятся или намечены к строительству в ближайшие годы лаборатории высоких напряжений, электрических машин, коротких замыканий, разрывных мощностей и др. Лаборатория высоких напряжений будет оснащена каскадом высоковольтных трансформаторов (в двух единицах) на 1,5 млн. *в*, мощностью 1,5 *мва*, генератором импульсных напряжении на 4,5 млн. *в* и другими установками.

В данной статье, в результате поездки автора в Польскую Народную республику* и ознакомления с результатами ряда научно-исследовательских работ польских ученых по технике высоких напряжений, дается краткий отчет о работах в этой области, представляющих на наш взгляд наибольший интерес. Эти работы охватывают, главным образом, вопросы перенапряжений, защиты от перенапряжений и электрической изоляции. В статье довольно подробно излагаются результаты научно-исследовательских работ, тематика которых близка к тематике Энергетического института Академии наук Азербайджанской ССР и ведущих высоковольтных лабораторий нашего Союза.

Из исследований коммутационных перенапряжений представляют интерес работы, проводимые в Электротехническом институте по определению предельных величин перенапряжений, возникающих при отключении ненагруженных трансформаторов. Предложена (А. Рогуски) методика определения таких перенапряжений, если известны временные характеристики восстанавливающей электрической прочности выключателей при значениях тока, равных намагничивающему току трансформатора. Перенапряжения этого же характера экспериментально изучались на моделях низкого напряжения. При этом воспроизведение нестабильно горящей дуги, являющейся причиной возникновения таких перенапряжений, осуществлялось в низковольтной системе 100—220 *в* при прерываемых токах от 0,1 до 6 *а*, с подбором различных скоростей раздвигания контактов выключателей.

В результате исследований установлены кратность перенапряжений, механизм их возникновения и также выяснено восстановливающееся сопротивление выключателей и его влияние на уровень перенапряжений.

Разносторонние исследования по молнии, атмосферным перенапряжениям и грозозащите проводятся в Гданьском политехникуме, в Электротехническом и Энергетическом институтах, а также на кафедрах техники высоких напряжений Варшавского политехникума.

Изучение молнии в полевых условиях проводилось в Гданьском политехникуме путем оптической регистрации разряда с помощью вращающихся фотокамер, измерения амплитуды токов молнии ферромагнитиками, измерения индуктированных перенапряжений на линиях электропередачи посредством клидонографов. Оптическая регистрация разрядов молнии производилась в основном в 1953—1955 гг. и в грозовой сезон 1956 г. С помощью 3 фотокамер, имеющих различную скорость развертки, было снято 13 фотоснимков лидера и главного канала. Интересным является указание авторов этих исследований на то, что на некоторых фотоснимках был обнаружен безлидерный разряд.

Исследования молнии потребовали разработки соответствующей методики и измерительной аппаратуры, что было осуществлено под руководством зав. кафедрой ТВН проф. С. Шпора.

---

* В ноябре — декабре 1960 г.

С. Шпором в 1942 г. была разработана электродинамическая теория молнии (она освещена в нашей литературе в работах И. С. Стекольникова и В. С. Комелькова по молнии и длинным искрам); позже, в 1955 г., им была развита релаксационная теория ступенчатого развития лидера молнии. Согласно этой теории ступенчатое распространение лидера молнии в значительной степени обусловлено процессами термоионизации в канале.

В Гданьском политехникуме для измерения амплитуды токов молнии разработаны два типа ферромагнитных регистраторов. Первый тип регистратора выполнен в виде тонких стальных проволочек длиной 50 *мм*, помещенных в запаянную стеклянную трубочку диаметром 6 *мм*, а второй — собран из небольших отрезков длиной 50 *мм*, тонкой листовой стали (ширина 5 *мм*) плотно уложенных и спрессованных в полистироловой смоле. Ферромагнитные регистраторы в количестве 180 тыс. штук установлены на опорах линий электропередачи, на отдельных стержневых молниеотводах и на дымовых трубах промышленных предприятий. Утверждается, что на основании ферромагнитных и клидонографических записей обнаружены максимальная амплитуда тока молнии 300 *ка* и предельная крутизна до 100 *ка. мксек*.

На этой же кафедре разработана (Т. Матузевским) методика отсчета амплитуды повторных (двух—трех) импульсов молний разной полярности на основании намагниченности одного регистратора. Изучается также вопрос влияния на точность регистрации импульсного тока ферромагнитиками при наличии близлежащих металлических проводников (трос ЛЭП, металлическая опора и т. д.).

На кафедре сконструирован (С. Шпор и Б. Василенко), новый тип трубчатых клидонографов, используемых в массовом количестве для регистрации атмосферных перенапряжений. Такие трубчатые клидонографы просты по конструкции и используют относительно небольшое количество фотопленки. Конструкция такого клидонографа приведена на рис.1.

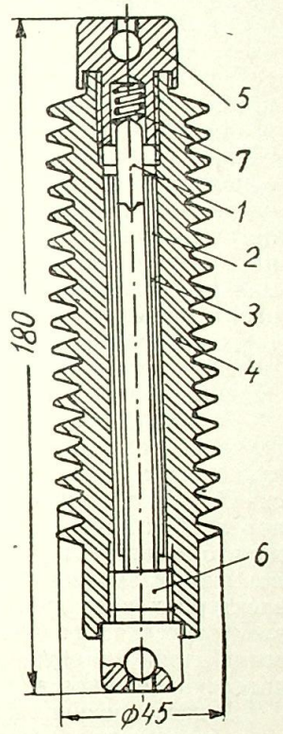


Рис. 1.

Разряд развивается вдоль наружной поверхности стеклянной трубки (1), имеющей длину 120 *мм* и диаметр 7 *мм*. В качестве электродов используются внутренняя посеребрянная поверхность стеклянной трубки и небольшой участок наружной поверхности той же трубки, покрытый серебром. Фотопленка (2) накручивается на стеклянную трубку и прижимается изоляционной трубкой (3).

Стеклянная трубка помещается в эбонитовый корпус и с торцовых концов прижимается металлическими зажимами (5, 6), покрытых слоем цинка. Клидонографы с небольшой емкостью 60 пкф применяются для регистрации максимальной крутизны токов молнии. При таких регистрациях клидонограф включается в прямоугольную рамку (индуктивную катушку) и размещается вблизи токоотвода. Применяя катушки разных индуктивностей, удается с помощью трубчатых клидонографов регистрировать крутизны с 0,4 *ка/мксек* до 50 *ка/мксек*.

Большую работу по анализу статистических данных польских энергетических районов о грозопоражаемости линий электропередачи и подстанций, в период 1955—1958 гг., провела Лаборатория высоких напряжений (М. Ячевский, В. Геллер) Энергетического института. Собран фактический материал об интенсивности гроз, составлена карта грозовой деятельности в разных районах ПНР, отражающая среднее число дней с грозами в году, частоту гроз по месяцам и т. д.

Для выяснения механизма молнии и разработки грозозащиты в Электротехническом институте и в Гданьском Политехникуме развиваются также работы по изучению длиной искры. Изучение искрового разряда в воздушном промежутке разных конфигураций ограничивается лидерной стадией разряда. Длина разрядного промежутка достигала до 200 *см* при «тормозящем» сопротивлении в цепи искры до нескольких десятков тысяч *ом*. Оптическое изображение искры разворачивалось скоростной фотокамерой типа Бойса. Использовался также метод отсекания разряда посредством подключения параллельно к разрядному промежутку шарового разрядника и статического фотографирования искры кварцевой оптикой, что позволяло получить оптическую картину развития начальной фазы лидера и импульсной короны. Производилось одновременное осциллографирование тока лидера и напряжения на разрядном промежутке. На основании фоторазверток разряда и осциллограмм получены данные о скорости развития лидера при разных длинах разрядного промежутка и сопротивлениях в цепи искры, максимальных крутизнах лидерных токов и т. д. Наряду с выяснением механизма молнии и искрового разряда, целью этих исследований являлось также использование лидерного тока (величины тока и характера изменения его во времени) как критерия изоляционного состояния разрядного промежутка.

В проводимых исследованиях по искре интересным является также изучение разряда при одновременном воздействии на промежуток импульсного напряжения и напряжения промышленной частоты (Зелински З.). Этот вопрос представляет практический интерес с точки зрения пробоя искровых промежутков защитных разрядников. Установлено, что амплитуда и крутизна лидерных токов резко возрастают при одноименном знаке импульса и напряжения промышленной частоты на электродах разрядного промежутка. Это свидетельствует о том, что электрическая прочность воздушных промежутков при одновременном воздействии напряжений разных форм, но одинаковой полярности значительно снижается.

В исследованиях при разработке проблемы грозозащиты сетей высокого напряжения и подстанций большое внимание уделяется вопросу упрощения грозозащитных установок.

Заслуживающим внимание является, в частности, разработка общих упрощенных грозозащитных мероприятий для сельскохозяйственных объектов (Гданьский политехникум). В Польше для грозозащиты (от прямых ударов молнии) сельских зданий применяют тросы, установленные непосредственно на защищаемых зданиях на небольшом расстоянии проводов от крыши и стен. В польской практике грозозащиты не применяются стержневые молниеотводы, широко распространенные в СССР, США и в других странах.

Рекомендуемая упрощенная грозозащитная установка для сельскохозяйственных объектов имеет ряд отличительных особенностей по сравнению с общепринятыми грозозащитными мероприятиями. Этими особенностями являются:

1. Использование оцинкованной железной проволоки сечением 100 *мм*^{2} как для наземных частей (троса, токоотвода), так и для заземлителей (по нашим нормам сечение тросов должно быть не менее 25—30 *мм*^{2}).

2. Крепление проводов непосредственно на стенах зданий (не исключая деревянных) без использования специальных держателей.

3. Соединение отдельных отрезков проводов, ответвлений, токоотводов посредством простого зажима. Зажим состоит из обычного болта М-10 гайки и шайбы.

4. Во избежание вторичных перекрытий осуществляется простая координация грозозащитной установки с электрическими, радиотелефонными проводками посредством промежуточных отрезков проволоки на наружных стенах здания.

Защитный угол троса допускается 45°, а иногда и больше, что превышает величины, допускаемые нашими правилами по грозозащите. Общее сопротивление заземления рекомендуется 10—50 *ом* в зависимости от свойств грунта.

Авторы упрощенной схемы грозозащиты на основании статистических данных о грозопоражаемости сельских объектов Польши за три года (1956—1958 гг.) доказывают эффективность рекомендуемых грозозащитных установок; резко сократились пожары от молнии и не было, ни одного смертельного случая поражения людей, находящихся в зданиях защищенных молниеотводами. Отмечается также значительный экономический выигрыш от массового применения упрощенной схемы грозозащиты для небольших по габариту сельских объектов.

Определенный интерес представляют также проводимые исследования по защите подстанционной изоляции от волн атмосферных перенапряжений набегающих с линий. В Энергетическом институте с помощью анализатора грозозащиты изучаются вопросы «укороченной защиты» линейных подходов к подстанции (тросовая защита подхода к подстанциям до 0,5 *км*) от атмосферных перенапряжений при наличии защитных разрядников и выбора оптимального растояния разрядника от защищенного объекта (трансформатора).

В Гданьском политехникуме предлагается для ограничения амплитуды волны напряжения на вентильном разряднике в конце линейного подхода, в рассечку проводов линии включить индуктивные катушки (дроссели без железа). После срабатывания трубчатого разрядника в начале защищенного подхода к подстанции, наличие индуктивности в линии уменьшает импульсные токи и ограничивает напряжение на вентильном разряднике.

Для грозозащиты также разрабатываются разрядники с улучшенными защитными характеристиками. Гданьским политехникумом совместно с Энергетическим институтом (С. Грудзецкий) разработано несколько конструкций трубчатых разрядников (с зазорно-винтовой гасительной камерой, простой цилиндрической камерой, разрядник с внешней фарфоровой оболочкой и т. д.) на рабочее напряжение 10, 30, 60 и 110 *кв*.

На рис. 2 приведена конструкция трубчатого разрядника в фарфоровой оболочке на напряжение 30—60 *кв*. Газогенерирующая цилиндрическая трубка (1) разрядника изготовлена из органического материала с эбонитовой смесью. Фарфоровый изолятор 2 защищает рабочую трубку разрядника от атмосферных воздействий. В изоляторе жестко крепится электрод (4), заземленный проводом (5). Внешним искровым промежутком разрядника является зазор между концом электрода (4) и экраном (7), выполненным в виде стальной трубки. Разрядник подвешивается на фазовом проводе (8), имеющем электрическую связь с электродом внутреннего искрового промежутка рабочей трубки. Возможно также обратное включение разрядника, а именно: верхняя часть изоля-

тора крепится к заземленной конструкции, а фазовый провод соединяется с электродом (4). При таком включении разрядника обеспечивается лучшая защита рабочей трубки разрядника от воздействия поверхностных токов утечки.

В Электротехническом институте разработан материал и технология изготовления дисков нелинейного сопротивления для вентильных разрядников на напряжение до 110 *кв*. Рабочим материалом является карборунд, а в качестве связки применяется жидкое стекло и мел (около 10%). Вилитовые диски прессуются под давлением 1600 *кг/см*^{2} и сушатся при температуре около 200° С в специальной печи. В изготовляемых по рекомендации института вентильных разрядниках максимально допустимый импульсный ток равен 10 *ка*. В пределах импульсных токов 1—5 *ка*, коэффициент нелинейности дисков составляет 0,18.

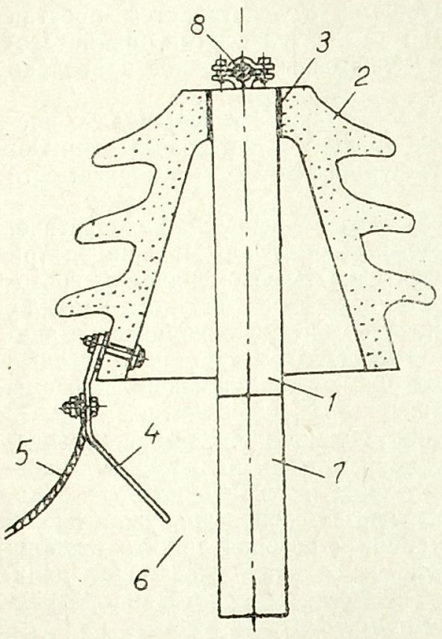


Рис. 2.

Следует отметить, что лишь в настоящее время начато изготовление вентильных разрядников с искровыми промежутками, шунтированными омическими сопротивлениями. Шунтирующие сопротивления изготовляются в основном из карборунда.

Из работ, посвященных координации изоляции в электрических установках, следует остановиться на разработанном в Электротехническом институте (И. Бадер) устройстве для защиты высоковольтных установок как от внутренних, так и от внешних перенапряжений, названном разрядником двойного действия. Принципиальная схема такого разрядника показана на рис.3.

Разрядник двойного действия состоит из двух отдельных разрядников: вентильного РВ, обеспечивающего защиту от внутренних перенапряжений, и трубчатого РТ для защиты от внешних перенапряжений. Элементами схемы являются также: выравнивающее сопротивление R_w, цепочка регулируемых сопротивлений R_1, и искровые промежутки S_1 и S_2.

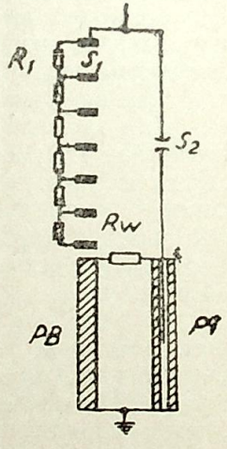


Рис. 3.

Искровой промежуток S_2 трубчатого разрядника подобран так, что его общее разрядное напряжение на переменном токе примерно на 10% больше, чем двойное разрядное напряжение искровых промежутков S_1

В случае перенапряжений при определенной величине импульсного напряжения пробиваются искровые промежутки S_1 и вступает в действие вентильный разрядник РВ.

После срабатывания вентильного разрядника, остаточное напряжение возникающее на нем, приводит к разряду между электродами внутреннего искрового промежутка трубчатого разрядника, а затем лишь происходит пробой во внешнем искровом промежутке (S_2) разрядника. Такая последовательность срабатывания искровых промежутков трубчатого разрядника с учетом того, что крутизна волны импульсного напряжения, приходящей на РТ после срабатывания вентильного разрядника, оказывается сниженной, позволяет иметь при координации изоляции более пологую вольтсекундную характеристику трубчатого разрядника. При внутренних перенапряжениях срабатывает только вентильный разрядник, так как остаточное напряжение на нем оказывается недостаточным для пробоя искрового промежутка трубчатого разрядника. Авторы исследований считают, что при применении комбинированного разрядника, состоящего из вентильного и трубчатого разрядников, при защите высоковольтных установок удается достичь защитного уровня $\frac{U_{ост}}{U_ф}$ при внешних перенапряжениях—1,8, а при внутренних перенапряжениях—1,6.

В Электротехническом институте сосредоточены основные работы по изоляционным материалам, изоляции трансформаторов, высоковольтных конденсаторов и т. д.

В области изоляции трансформаторов проводимые исследования (З. Хастерман и В. Лех) сводятся к созданию нерезонирующих трансформаторов. Разработаны два основных вида конструкции изоляции обмоток. Первый вид основан на принципе частичного емкостного экранирования обмотки и аналогичен конструкции осуществляемой Московским трансформаторным заводом. При такой конструкции, для частичной компенсации емкости обмотки относительно земли, в трансформатор вводятся искусственно добавочные емкости относительно начала обмотки, выполняемые в виде экранов. Наличие экранов хотя и приводит к снижению градиентных перенапряжений в обмотках трансформатора при набегании волн атмосферных перенапряжении, однако осложняет конструкцию трансформатора.

Второй вид конструкции обмотки более универсальный, хотя в технологии выполнении также сложный. Эта безэкранная конструкция, основанная на принципе искусственного увеличения продольной емкости обмотки, достигается путем переплетения между собой соседних катушек обмотки. Можно считать, что трудности технологии изготовления таких обмоток польским трансформаторостроением уже преодолены, так как освоено производство безэкранных трансформаторов 110 *кв*, 31,5 *мгва*, изоляция которых соответствует общепринятым нормам.

Работа по изоляционным маслам (трансформаторным) проводится в основном в Отделении электроматериаловедения и на кафедре техники высоких напряжений Вроцлавского политехникума.

Целью этих работ является исследование диэлектрических потерь в трансформаторных маслах и разработка новых методов качественный оценки масел (З. Сицински, Б. Дрысь, Е. Сковроньский и др.).

Основным критерием стабильности трансформаторных масел в этих исследованиях был выбран угол диэлектрических потерь и его изменение при повышенной температуре и разных частотах. Испытанию были подвергнуты многочисленные образцы различных трансформаторных масел при температурах от 30° до 110°С и при частоте от 50 *гц* до 10 *кгц*. Для измерения tgδ использовались низковольтные (20—30 *в*) мосты типа Шеринга.

При измерениях использовались специальные чашевидные конденсаторы конструкции З. Сицинского, вмещающие незначительное количество (6 *мл*) испытуемого масла. На основании измерений зависимостей $\operatorname{tg}\delta = \varphi(\tau f)$, где температура τ и f частота, установлено, что целесообразно заменять промышленную частоту частотой звуковой в области 400—1000 *гц*. При очень малых значениях $\operatorname{tg}\delta$ (порядка 0,0001) опыты удобно проводить при низких частотах, так как это приводит к большим количественным значениям $\operatorname{tg}\delta$ и соответственно к меньшим погрешностям измерения. Выбор для опытов звуковой частоты дает преимущество, связанное с химическими и диэлектрическими характеристиками трансформаторных масел. При звуковых частотах из-за уменьшающегося влияния на $\operatorname{tg}\delta$ ионной проводимости, влияние диполей проявляется более заметно. Это позволяет проводить более глубокий анализ тех изменений, которые происходят в трансформаторном масле как при искусственном старении, так и в процессе его эксплуатации. Продукты старения масел представляют собой разновидности смол, наличие которых в маслах придает им в большей степени дипольную проводимость по сравнению с ионной. На рис. 4 приведены зависимости угла диэлектрических потерь от температуры, измеренные при разных частотах 50 *гц* (рис. 4а) и 400 *гц* (рис. 4б). Кружочками обозначена эта зависимость для масла с сернокислотной очисткой 3,5% H_2SO_4, а крестиками для масла с очисткой 15% H_2SO_4 (масло, содержащее меньшее количество остаточных смолистых компонент). Как видно, только измерением при повышенной частоте 400 *гц* удается установить расхождение в зависимости $\operatorname{tg}\delta = \varphi(\tau)$ для масел с разным содержанием смолистых компонент.

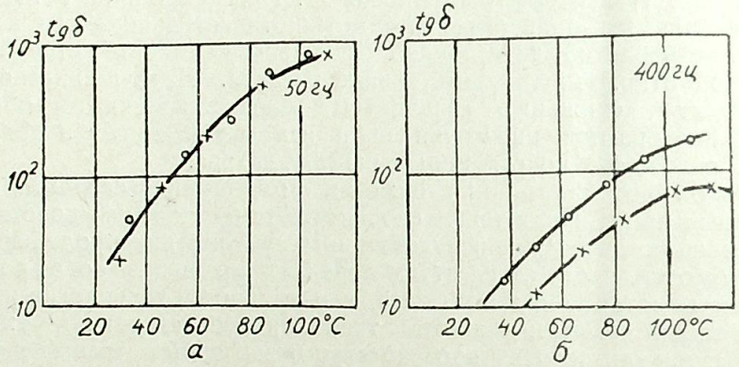


Рис. 4.

При измерении $\operatorname{tg}\delta$ при температурах окружающей среды часто погрешности измерений превосходят измеряемые величины. Поэтому рекомендуется применение повышенных температур порядка 50°С.

На рис. 5 показана зависимость $\operatorname{tg}\delta$ от степени сернокислотной очистки масла, измеренная при температурах 70°С и 30°С. Как это видно из рисунка, влияние очистки масла на $\operatorname{tg}\delta$ обнаруживается лишь в измерениях при температуре 70°С. При 30°С эта зависимость пологая и не определена из-за небольших величин $\operatorname{tg}\delta$, приближающихся к погрешностям измерительного моста.

На основе проведенных исследований рекомендуется для определения качества трансформаторных масел в процессе его старения использовать следующие 4 критерия: угол диэлектрических потерь,

кислотное число, температуру вспышки и пробивную электрическую прочность. Измерения $\operatorname{tg}\delta$ должны проводиться при повышенных температурах порядка 50°С и частотах 400—1000 *гц* при испытании масел, бывших в эксплуатации, и 50—100 *гц* при испытании новых (товарных) масел.

Из работ, посвященных исследованию трансформаторных масел, заслуживающим внимания является разработанная в Отделении электроматериаловедения методика контроля сопротивления окислению трансформаторного масла путем применения искусственного диффузного старения (методика АЗ). Эта методика более близко к эксплуатационным условиям воспроизводит процесс старения трансформаторного масла, чем например, известный немецкий метод *VDE*. Степень окисления контролируется изменением угла диэлектрических потерь и кислотного числа. Допускается также в определенных условиях контролировать степень старения масла путем измерения удельного электрического сопротивления.

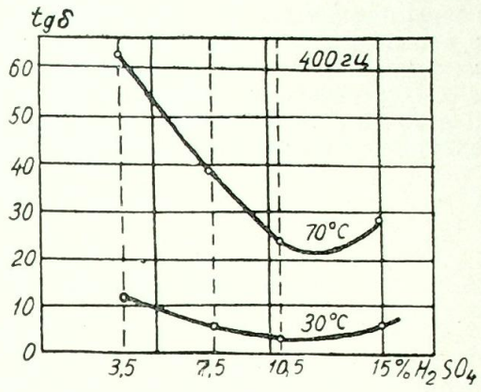


Рис. 5.

Числовые данные метода АЗ следующие: количество испытуемого масла 30 *мл*, свободная поверхность соприкосновения масла с воздухом 47 $см^2$, температура нагрева 110°С и время испытания 96 часов. В качестве катализатора для окисления используется проволока из электролитической меди общей поверхности около 9 $см^2$. Новое масло, подвергаемое испытанию, предварительно высушивается под вакуумом и очищается фильтропрессом. Измерение $\operatorname{tg}\delta$ производится до начала испытания масла и после искусственного старения при температурах 50°, 75°, 65° и частотах 50 *гц* и 1000 *гц*.

Авторы метода искусственного старения трансформаторных масел подчеркивают ряд преимуществ метода АЗ, по сравнению с методом предлагаемым МЭК, и в частности: простоту испытаний масел, меньшее время окисления и т. д.

Из работ польских ученых в области электрической изоляции следует также упомянуть исследования, направленные на улучшение разрядных характеристик изоляторов, работающих в условиях загрязнения, и исследование электрофизических свойств изоляторов из искусственных органических материалов (эпоксидных смол). В польских электрических сетях, для изоляции линий, подверженных загрязнению в основном прибегают к увеличению числа элементов гирлянды изоляторов, т. е. используют удлиненные гирлянды изоляторов. Вместе с тем, в настоящее время разрабатываются для ЛЭП и подстанций новые эффективные меры борьбы с загрязнением изоляторов (исполнитель Я. Юхневич). В качестве меры борьбы с загрязнением изоляторов используются гидрофобные изоляторы. Применяются изоляторы с кремнеорганическим покрытием (жировая силикатная паста) для ЛЭП 20 *кв*, что несколько сокращает сроки механической очистки изоляторов.

В Отделении электроматериаловедения Электротехнического института и во Вроцлавском политехникуме изучаются электрические и механические свойства изоляции, изготовленной из эпоксидных смол. Эпоксидные смолы, благодаря хорошим изоляционным свойствам (малой) величины tg δ, равной 0,002, высокой пробивной электрической прочности—30 *кв/мм* и незначительной гигроскопичности и т. д.) используются в качестве заливок в концевых и соединительных муфтах кабелей до 15 *кв*. В настоящее время исследуется вопрос их использования для заливок кабельных воронок до 30 *кв*. Изготовлены и испытываются опытные образцы эпоксидных изоляторов (состав таких изоляторов: 60 % фарфорового сырья и 40 % эпоксидной смолы) для электрических аппаратов, и в частности, для вводов конденсаторов до 20 *кв*. Эпоксидная изоляция используется также в кабелях, в электрических машинах (турбогенераторах) и т. п.

М. Ә. Бағыров

Полша Халг республикасында јүксәк кәркинликләр техникасы саһәсиндә апарылан елми тәдгигат ишләри

ХҮЛАСӘ

Полшада јүксәк кәркинликләр техникасы, електротехника елминин бүтүн саһәләри кими јалныз өлкәдә халг һакимијјәтинин гәләбәсиндән сонра кениш инкишаф јолуна гәдәм гојмушду. Мүһарибәдән әввәлки Полшада електротехника елми әсас е'тибарилә Варшава шәһәриндә мәркәзләшдирилмиш вә олдугча аз наилијјәт әлдә етмишди.

Фашист ишғалы дөврүндә өлкәнин енеркетика тәсәррүфатынын хејли һиссәси дағыдылмыш, Варшава елми тәдгигат мәркәзи исә тамамилә мәһв едилмишди. Өлкәдә електротехника саһәсиндә чалышан кадрлар әһәмијјәтли дәрәчәдә зәрәр чәкмиш, бир һиссәси исә харичә кетмишди.

Гыса тарихи дөвр әрзиндә демократик Полшада, електроенеркетиканын јүксәк инкишафы илә јанашы електротехника елми, хүсусилә, өлкәдә күчлү електрик стансијалары тикилмәси вә јүксәк кәркинликли електрик хәтләри чәкилмәсилә әлагәдар олараг јүксәк кәркинликләр техникасы саһәсиндә мүәјјән наилијјәтләр әлдә етмишди.

Полша Халг Республикасында јүксәк кәркинликләр техникасы саһәсиндә апарылан елми-тәдгигат ишләринин әсас мәркәзи Варшавада јерләшән Електротехника вә Енеркетика институтлары, Гданск, Врослав вә Варшава шәһәрләринин Политехникумларынын мүвафиг кафедраларыдыр.

Өлкәдә бу саһә ән ири елми мәркәз олан Електротехника Институту дикәр аналожи елми-тәдгигат институтларына нисбәтән кадрларла вә аваданлыгла даһа јахшы тә'мин едилмишдир.

Електротехника Институту јүксәк кәркинликләр шө'бәсинин техники тәчһизатына дахил олан мөвчуд тәчрүбә гурғуларындан ашағыдакылары гејд етмәк лазымдыр: номинал кәркинлији 2,8 *млн. в.* вә бошалма енержиси 32 *квт. сан.* олан импулслу кәркинлик кенератору; 750 *ква* күчүндә вә кәркинлији 750 *кв* олан трансформатор; шарларының диаметри 1 *м* олан күррәви бошалдычы, импулслу чәрәјан кенератору (максимал чәрәјан 200 *ка*) вә с.

Һазырда Електротехника Институту Варшавадан 30 *км* аралы јерләшән Мендзылес әтрафында мүасир техника илә тәчһиз едилмиш бир сыра ири лабораторија тикмәкдәдир.

Јахын илләрдә 40 һектар саһәси олан әразидә јүксәк кәркинликләр лабораторијасы, електрик машынлары, гыса гапанма, дағыдычы күчләр вә с. лабораторијаларын тикилиб баша чатдырылмасы нәзәрдә тутулмушдур.

Бу мәгаләдә, мүәллифин 1960-чы илин нојабр-декабр ајларында Полша Халг Республикасына сәфәри заманы Полша алимләринин јүксәк кәркинликләр техникасы саһәсиндә апардыглары бир сыра елми-тәдгигат ишләри вә танышлыг нәтичәсиндә ән чох мараг ојадан ишләри һаггында гыса һесабат верилмишдир. Бу ишләр, әсас е'тибарилә ифрат кәркинлик, ифрат кәркинликдән мүдафиә вә електрик изолјасијасы мәсәләләрини әһатә едир.

Мәгаләдә, Азәрбајчан ССР ЕА Енеркетика Институтунда вә ја Совет Иттифагынын габагчыл јүксәк кәркинликләр лабораторијаларында апарылан ишләрә јахын олан елми-тәдгигат ишләри нисбәтән мүфәссәл шәрһ едилмишдир.

МҮНДӘРИЧАТ

Һ. Н. Ағајев. Академик З. И. Хәлиловун елми вә елми педагожи фәалијјәти 3

А. М. Һүсејнбәјова. Қәсилмәз бөјүк әмсаллы икинчи тәртиб өз-өзүнә гошма ади диференсиал операторун мәхсуси гијмәт вә мәхсуси функсијаларынын асимптотик тәфриги 13

Р. Һ. Мәммәдов. Функсијаларын хәтти мүсбәт операторларла јахынлашмасынын тәртиби вә асимптотик гијмәти һаггында 27

Һ. Н. Ағајев. Сәрһәд мәсәләсинин зәиф һәлләр синфиндә нормал һәлл едилмәсинә даир 41

Л. М. Иманов, Ч. О. Гачар. C_2H_5OH молекулунун микродалғадакы спектринин өјрәнилмәси 51

Н. Ә. Әлијев, Ф. Г. Мәһәррәмова, М. М. Мусазадә. Дәликачан стан башлыгларынын бәрклијинин тә'јини 55

И. И. Һүсејнов. Кулон саһәси нүвәсинин релјатив һиссәчикләринин сәпәләнмәси нәзәријјәсинә даир 61

Ч. М. Чуварлы, М. М. Чәфәрова. Тоз һиссәчикләринин електрик саһәсиндәки изољатор әтрафында һәрәкәтинә даир 65

А. Ә. Әфәндизадә, А. А. Паршина. Фотомүгавимәтләр васитәси илә боруларын узунлуғуну өлчән јарымсәнаје типли гурғунун тәдгиги 69

Ә. Һ. Әбилов. Атмосфер гурғусундакы борулу собанын автоматик тәнзим системинин оптимал сазланмасынын һесабланмасы 77

Н. Н. Мәммәдов. Зирә саһәсиндә сәмәрәли газыма технолокијасы . . 91

Ә. Әсәдов. Н. Таһиров. Мәсамәли мүһитин минераложи тәркибинин капилјар галхымына тә'сири 101

М. А. Абдинов. Сементин фактик галхма һүндүрлүјүнүн һесабланма һүндүрлүјүндән фәргләнмәси мәсәләсинә даир 109

Б. И. Јесман, М. А. Абдинов, Г. Г. Габузов. Килли мәһлул илә ишләдикдә дифманометр көстәришини чевирмәк үчүн формул 115

А. Ә. Аббасов. Лајдан нефтин гыздырылмыш маје илә сыхышдырылмасы заманы температурун пајланмасы 121

М. Ә. Бағыров. Полша Халг республикасында јүксәк кәркинликләр техникасы саһәсиндә апарылан елми-тәдгигат ишләри 129

СОДЕРЖАНИЕ

Г. Н. Агаев. О научной и научно-педагогической деятельности академика З. И. Халилова 3

А. М. Гусейнбекова. Асимптотическое разложение собственных функций и собственных значений самосопряженного дифференциального оператора второго порядка с непрерывно-большими коэффициентами 13

Р. Г. Мамедов. О порядке и об асимптотическом значении приближения функций линейными положительными операторами 27

Г. Н. Агаев. О нормальной разрешимости краевой задачи в классе слабых решений 41

Л. М. Иманов, Ч. О. Каджар. Изучение микроволнового спектра молекулы C_2H_5OH 51

Н. А. Алиев, Ф. Г. Магеррамова, М. М. Мусазаде. Определение твердости оправ прошивного стана 55

И. И. Гусейнов. К теории рассеяния релятивистских частиц кулоновским полем ядра 61

Ч. М. Джуварлы, М. М. Джафарова. К вопросу о движении пылевых частиц в электрическом поле изолятора 65

А. А. Эфендизаде, А. А. Паршина. Исследование полупромышленной установки для измерения длины труб с использованием фотосопротивлений . 69

А. Г. Абилов. Расчет оптимальной настройки системы автоматического регулирования трубчатой печи атмосферной трубчатой установки 77

Н. Н. Мамедов. Эффективная технология бурения на площади Зыря . 91

А. А. Асадов. Н. Таиров. О влиянии минералогического состава пористой среды на высоту капиллярной пропитки 101

М. А. Абдинов. К вопросу отклонения фактической высоты подъема цемента от расчетной 109

Б. И. Есьман, М. А. Абдинов, Г. Г. Габузов. Формула для перевода показаний дифманометров при работе с глинистым раствором 115

А. А. Аббасов. Распределение температуры при вытеснении нефти горячими жидкостями из пласта 121

М. А. Багиров. Научные исследования в области техники высоких напряжений в Польской народной республике 129

Чапа имзаланмыш 18. V. 1961-чи ил. Кағыз форматы 70×108 1/16. Кағыз вәрәги 4,50.
Чап вәрәги 12,33. Һес-нәшријјат вәрәги 11,12. ФГ 10183.
Сифариш 198. Тиражы 760.

Азәрбајчан ССР Мәдәнијјәт Назирлијинин «Гызыл Шәрг» мәтбәәси.
Бакы, Һәзи Асланов күчәси, 80.