АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

# ХӘБӘРЛӘРИ

# ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-РИЈАЗИЈЈАТ ВӘ ТЕХНИКА ЕЛМЛӘРИ СЕРИЈАСЫ

☆

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

6

1960

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕА НӘШРИЈЈАТЫ
ИЗДАТЕЛЬСТВО АН АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
БАКЫ—БАКУ

РЕДАКСИЈА ҺЕЈ'ӘТИ: З. И. Хәлилов (редактор), Һ. Б. Абдуллајев, С. М. Гулијев (редактор мүавини), С. Ә. Әләскәров, А. Ә. Әфәндизадә, И. И. Ибраһимов, Һ. Ф. Султанов, Ч. М. Чуварлы, Ә. М. Мәммәдов (мәс'ул катиб).

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: З. И. Халилов (редактор), Г. Б. Абдуллаев, С. А. Алескеров, Ч. М. Джуварлы, И. И. Ибрагимов, С. М. Кулиев (зам. редактора), Г. Ф. Султанов, А. А. Эфендизаде, А. М. Мамедов (ответственный секретарь).

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-рижазијјат вә техника елмләри серијасы, 1960, № 6

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1960, № 6

В. Н. ФУНТАКОВ

# О РАЗЛОЖЕНИИ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ПРОИЗВОЛЬНОГО ЧЕТНОГО ПОРЯДКА НА ПОЛУОСИ $[0, \infty]$

*Сообщение I.*

Настоящая работа является перенесением результатов, полученных в [1] на случай операторов произвольного четного порядка. В работе используются методы, впервые примененные в [1]. Краткое содержание работы опубликовано в ДАН СССР (см. [3]).

Автор выражает глубокую признательность М. А. Наймарку за ценные советы и замечания.

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$l(y) = y^{(2n)} + P_2(x)\, y^{(2n-2)} + P_3(x)\, y^{(2n-3)} + \ldots + P_{2n}(x)\, y, \qquad (1)$$

где $P_\kappa(x)$, $\kappa = 2, 3, \ldots, 2n$—комплекснозначные функции, суммируемые в $[0, \infty]$. Обозначим через $D$ совокупность всех функций, $y(x) \in L^2(0, \infty)$ таких, что:

1) производные $y^{(v)}(x)$, $v = 1, 2, \ldots, 2n-1$ существуют и абсолютно непрерывны в каждом конечном интервале $[0, b]$, $b > 0$;

2) $l(y) \in L^2(0, \infty)$.

Обозначим через $D_\alpha$ совокупность всех функций $y(x) \in D$, удовлетворяющих краевым условиям:

$$U_v(y) = \alpha_{v0}\, y(0) + \alpha_{v1}\, y'(0) + \ldots + \alpha_{v,2n-1}\, y^{(2n-1)}(0) = 0, \qquad (2)$$
$$v = 1, \ldots, n$$

где $\alpha_{vk}$—комплексные числа.

Определим оператор $L_\alpha$ следующим образом: его область определения есть $D_\alpha$ и при $y \in D_\alpha$

$$L_\alpha y = l(y).$$

## § 1. Асимптотика решений дифференциального уравнения

Рассмотрим систему интегральных уравнений:

$$U_i(x, \rho) = f_i(x, \rho) + \sum_{j=1}^{2n} \int_a^\infty K_{ij}(x, \xi, \rho)\, U_j(\xi, \rho)\, d\xi \qquad (1.1)$$
$$i = 1, 2, \ldots, 2n.$$

Повторяя рассуждения, приведенные в [1], получим:

Лемма 1. 1. Если выполнены условия:

а) для каждого значения $\rho$, принадлежащего некоторому открытому множеству $E$ комплексной $\rho$—плоскости и каждого значения $x$ из интервала $[a, \infty)$ ядра $K_{ij}(x, \xi, \rho)$; $i, j=1, \ldots, 2n$, суть суммируемые функции переменного в интервале $[a, \infty)$;

б) существует положительное число $q<1$, такое, что

$$\int_a^\infty | K_{ij}(x,\xi,\rho) | d\xi; \; i, j = 1, 2, \ldots, 2n;$$

в) для каждой точки $x_0$ интервала $[a, \infty)$ и каждого $\rho_0 \in E$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ \rho\to\rho_0}} \int_a^\infty | K_{ij}(x, \xi, \rho) - K_{ij}(x_0, \xi, \rho_0) | d\xi = 0;$$

$$a \leqslant x, \; x_0 < \infty; \; \rho, \rho_0 \in E; \; i, j = 1, 2, \ldots, 2n;$$

г) функции $f_i(x, \rho)$, $i = 1, 2, \ldots, 2n$ непрерывны по совокупности переменных $(x, \rho)$ и ограничены на множестве $a \leqslant x < \infty, \rho \in E$;

д) для каждого фиксированного значения $x \in [a, \infty)$ функции $f_i(x, \rho)$, $i=1, 2, \ldots, 2n$ суть голоморфные функции переменного $\rho$ в области $E$;

е) для каждого фиксированного значения $x \in [a, \infty)$ и для любой функции $f_i(x, \rho)$, удовлетворяющей условиям $г$ и $д$, интегралы

$$\int_a^\infty K_{ij}(x, \xi, \rho) f_i(\xi, \rho) d\xi; \; ij = 1, 2, \ldots, 2n$$ суть голоморфные функции переменного $\rho$ в области $E$;

то система (1. 1) имеет решение $U_i(x, \rho)$, $i=1, \ldots, 2n$. непрерывное по совокупности переменных $(x, \rho)$ и ограниченное на множестве $a \leqslant x < \infty$, $\rho \in E$. Для любого фиксированного значения $x \in [a, \infty)$ решения $U_i(x, \rho)$ системы (1. 1) суть голоморфные функции переменного $\rho$ в области $E$.

Замечание 1. 1. Условия леммы 1. 1 будут выполнены, если

$$K_{ij}(x, \xi, \rho) = \begin{cases} \varphi_{ij1}(x, x, \xi \rho) p_j(\xi) & \text{при } a \leqslant \xi < x \\ \varphi_{ij2}(x, \xi \rho) p_j(\xi) & \text{при } a \leqslant x < \xi, \end{cases}$$

где $p_j(\xi)$, $j = 1, 2, \ldots, 2n$ — суммируемые в интервале $[a, \infty)$ функции, а $\varphi_{ijk}(x, \xi, \rho)$, $k=1, 2)$ суть ограниченные непрерывные функции по совокупности переменных $(x, \xi, \rho)$, $a \leqslant x \xi < \infty$, $\rho \in E$, удовлетворяющие условию

$$c \int_a^\infty p_j(\,) | d\xi < \frac{1}{2n}, j = 1, 2, \ldots, 2n,$$

при

$$c = \max_j \{\sup | \varphi_{ij1}(x, \xi, \rho)', | \varphi_{ij2}(x, \xi, \rho) | \};$$

и кроме того—голоморфные функции переменного $\rho$ в области $E$ при фиксированных $x$ и $\xi$-из интервала $[a, \infty]$.

Рассмотрим уравнение

$$l(y) = \lambda y). \tag{1. 2}$$

Положив

$$\rho^{2n} = -\lambda, \tag{1. 3а}$$

$$m(y) = -p_2(x) y^{(2n-2)} - \ldots - p_{2n}(x) y \tag{1. 3б}$$



перепишем его в виде

$$y^{(2n)} + \rho^{2n} y = m(y). \tag{1. 4}$$

Пусть $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2n}$—корни степени $2n$ из $-1$. Разобьем комплексную $\rho$—плоскость на $2n$ равных секторов $S_к$, определенных неравенством

$$\frac{\kappa\pi}{n} < \arg\rho < \frac{(\kappa+1)\pi}{n}$$

(рис. 1). Каждый из полученных секторов $S_к$ разобьем на два равных сектора $S_к'$ и $S_к''$. Тогда в каждом секторе $S_к'$, $S_к''$ можно выбрать такое расположение чисел $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2n}$, что при $\rho \in S_к'$ или $\rho \in S_к''$:

$$\mathrm{Re}(\rho\omega_1) < \mathrm{Re}(\rho\omega_2) \leqslant \ldots \leqslant \mathrm{Re}(\rho\omega_n) < 0,$$
$$0 < \mathrm{Re}(\rho\omega_{n+1}) \leqslant \mathrm{Re}(\rho\omega_{n+2}) \leqslant \ldots \leqslant \mathrm{Re}(\rho\omega_{2n})$$

(см. [2], стр. 43). Пусть $T_к$ и $T_{к+1}$ —границы сектора $S_к$. Тогда при $\rho \in T_к$:

$$\mathrm{Re}(\rho\omega_n) = \mathrm{Re}(\rho\omega_{n+1}') = 0$$

и при $\rho \in T_{к-1}$:

$$\mathrm{Re}(\rho\omega_{n-1}) = \mathrm{Re}(\rho\omega_{n+2}) = 0$$

(при расположении чисел $\omega_j$, выбранном для сектора $S_к''$. Поскольку при $\rho \in S_к$ нет такого числа $\omega_j$, для которого $\mathrm{Re}(\rho\omega_j) = 0$, то условимся считать, что данное расположение $\omega_1, \ldots, \omega_{2n}$ выбрано для всего сектора $S_к$.

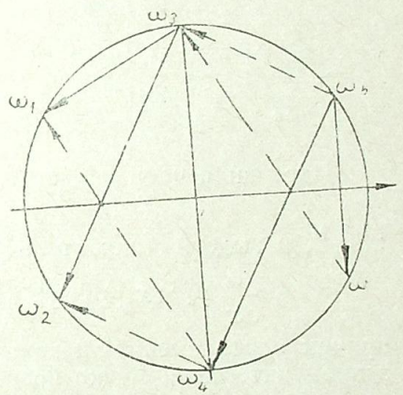


Рис. 1.

Теорема 1. 1. *Уравнение* (*1. 2*) *имеет решения* $y_к(x, \rho)$, $k=1, 2, \ldots, 2n$, такие, что при $x \geqslant a$

$$y_к^{(v)}(x, \rho) = \rho^v e^{\rho\omega_к x} z_{кv}(x, \rho), \tag{1. 5}$$

$k = 1, \ldots, 2n$, $v = 0, 1, \ldots, 2n-1$,

где функции $z_{кv}(x, \rho)$ ограничены в области $a < x < \infty$, $\rho \in S_к$, $|\rho| \geqslant r > 0$.

Функции $y_к^{(v)}(x, \rho)$ непрерывны по совокупности переменных $(x, \rho)$ при $x \in (0, \infty)$, $\rho \in S_к$, $|\rho| \geqslant r$; при каждом фиксированном значении $x$ из интервала $[0, \infty)$ $y_к^{(v)}(x, \rho)$ суть голоморфные функции от $\rho$ в области $\rho \in S_к$, $|\rho| > r$.

Доказательство. Рассмотрим систему интегральных уравнений:

$$z_{кv}(x, \rho) = \omega_к^v - \sum_{i=1}^{\kappa=1} \int_a^x \frac{\omega_i^{v+1} e^{\rho(\omega_i-\omega_к)(x-\xi)}}{2n\rho^{2n-1}} m(z_к) d\xi +$$

$$+ \sum_{i=к}^{2n} \int_x^\infty \frac{\omega_i^{v+1} e^{\rho(\omega_i-\omega_к)(x-\xi)}}{2n\rho^{2n-1}} m(z_к) d\xi, \tag{1. 6}$$

$v = 0, 1, \ldots, 2n-1$; $k$—фиксировано,

где обозначено

$$m(z_к) = \rho^{2n-2} p_2(x) z_{к,\,2n-2}(x, \rho) + \ldots + p_{2n}(x) z_{к0}(x, \rho). \tag{1. 7}$$

Пусть $|\rho| \geqslant r > 0$, где $r$ – произвольное фиксированное число. Тогда можно найти такое $a$, что условия леммы 1. 1 будут выполнены. Положим

$$y_k^{(v)}(x,\rho) = \rho^v e^{\rho\omega_k x} z_{kv}(x,\rho), k = 1, \ldots, 2n; v = 0, 1 \ldots, 2n-1,$$

где значок $v$ указывает пока только номер функции. Умножая обе части системы (1. 6) на $\rho^v e^{\rho\omega_k x}$, получим:

$$y_k^{(v)}(x,\rho) = \rho^v \omega_k^v e^{\rho\omega_k x} + \sum_{i=1}^{k-1} \int_a^x \frac{\omega_i^{v+1} \rho^v e^{\rho\omega_i(x-\xi)}}{2n\rho^{2n-1}} m(y_k)\, d\xi -$$

$$- \sum_{i=k}^{2n} \int_x^\infty \frac{\omega_i^{v+1} e^{\rho\omega_i(x-\xi)} \rho^v}{2n\rho^{2n-1}} m(y_k)\, d\xi. \qquad (1.8)$$

Покажем, что $y_k^{(v+1)}(x,\rho)$ – производная по $x$ от $y_k^{(v)}(x,\rho)$. В самом деле, дифференцируя формально обе части (1. 8), получим:

$$\frac{d}{dx} y_k^{(v)}(x,\rho) = \rho^{v+1} \omega_k^{v+1} e^{\rho\omega_k x} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k-1} \int_a^x \frac{\omega_i^{v+2} \rho^{v+1} e^{\rho\omega_i(x-\xi)}}{2n\rho^{2n-1}} m(y_k)\, d\xi -$$

$$- \sum_{i=k}^{2n} \int_x^\infty \frac{\omega_i^{v+1} \rho^{v+1} e^{\rho\omega_i(x-\xi)}}{2n\rho^{2n-1}} m(y_k)\, d\xi + \frac{m(y_k)}{2n} \rho^{v-2n+1} \sum_{i=1}^{2n} \omega_i^{v+1}.$$

Последний член исчезает, так как $\sum_{i=1}^{2n} \omega_i^{v+1} = 0$, $v = 0, 1, \ldots, 2n-2$, и выделяя множитель $\rho^v e^{\rho\omega_k x}$, получим:

$$\frac{d}{dx} y_k^{(v)}(x,\rho) = y_k^{(v+1)}(x,\rho); \; v = 0, 1, \ldots, 2n-2,$$

причем одновременно показана законность дифференцирования под знаком интеграла. Легко проверить непосредственно, что

$$y_k^{(2n)}(x,\rho) = \rho^{2n} \omega_k^{2n} e^{\rho\omega_k x} + \sum_{i=1}^{k-1} \int_a^x \frac{\omega_i^{2n+1} \rho^{2n} e^{\rho\omega_i(x-\xi)}}{2n\rho^{2n-1}} m(y_k)\, d\xi -$$

$$- \sum_{i=k}^{2n} \int_x^\infty \frac{\omega_i^{2n+1} \rho^{2n} e^{\rho\omega_i(x-\xi)}}{2n\rho^{2n-1}} m(y_k)\, d\xi + m(y_k). \qquad (1.9)$$

Определенные таким образом функции $y_k(x,\rho)$, $k=1,2, \ldots, 2n$, суть решения уравнения (1. 2). В самом деле, умножая (1. 8) при $v=0$ на $\rho^{2n}$ и складывая с (1. 9), получим $y_k^{(2n)} + \rho^{2n} y_k \equiv m(y_k)$.

Каждое из полученных решений $y_k(x,\rho)$ можно продолжить на интервал $[0, a]$, построив в этом интервале решения уравнения (1. 2), удовлетворяющие условиям:

$$y^{(v)}(a) = y_k^{(v)}(a), v=0, 1, \ldots, 2n-1; k=1, 2, \ldots, 2n.$$

Из известных свойств решений дифференциальных уравнений вытекает, что $y_k(x,\rho)$ будет голоморфной функцией от $\rho$ в области



$\rho \in S_k$, $|\rho| > r$ при $x \in [0, \infty)$, непрерывной по совокупности переменных $(x, \rho)$. Теорема доказана.

Замечание 1. 2. Если $r>1$ и таково, что

$$\frac{1}{r} \int_a^\infty |p_j(x)|\, dx < 1, \quad j = 2,3 \ldots, 2n;$$

то в теореме 1. 1 можно положить $a=0$.

Пусть выполнено условие

$$e^{\varepsilon_2 x} |p_i(x)| \leqslant c_i, \; i = 2, 3, \ldots, 2n, \qquad (1.10)$$

где $c_i$ – постоянные для всех $x \in [0, \infty)$ при некотором малом $\varepsilon_2 > 0$. Тогда при произвольном положительном $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$

$$\int_0^\infty e^{\varepsilon_1 x} |p_i(x)|\, dx < +\infty; \; i = 2, 3, \ldots, 2n. \qquad (1.11)$$

Если $\rho \in S_k$ таково, что для некоторого $p<k$

$$\operatorname{Re}[\rho(\omega_p - \omega_k)] = 0, \qquad (1.12)$$

то заменим систему (1. 6) системой

$$\bar{z}_{kv}(x,\rho) = \omega_k^v - \sum_{\substack{i=1 \\ i-p}}^{k-1} \int_a^x \frac{\omega_i^{v+1} e^{\rho(\omega_i-\omega_k)(x-\xi)}}{2n\rho^{2n-1}} m(\bar{z}_k)\, d\xi +$$

$$+ \sum_{i=k}^{2n} \int_x^\infty \frac{\omega_i^{v+1} e^{\rho(\omega_i-\omega_k)(x-\xi)}}{2n\rho^{2n-1}} m(\bar{z}_k)\, d\xi +$$

$$+ \int_x^\infty \frac{\omega_p^{v+1} e^{\rho(\omega_i-\omega_k)(x-\xi)}}{2n\rho^{2n-1}} m(\bar{z}_k)\, d\xi. \qquad (1.13)$$

Для $\rho \in S_k$, и таких, что

$$-\varepsilon_1 \leqslant \operatorname{Re}[\rho(\omega_p - \omega_k)] = -\sigma_{pk} \leqslant 0 \qquad (1.14)$$

она удовлетворяет всем условиям леммы 1. 1 и имеет решение, ограниченное и непрерывное по совокупности переменных $(x, \rho)$, $x \in [a, \infty)$, $\rho \in S_k$, $|\rho| \geqslant r > 0$, $-\varepsilon_1 \leqslant \operatorname{Re}[\rho(\omega_p - \omega_k)] \leqslant 0$, голоморфное по $\rho$ для $\rho \in S_k$, $|\rho| > r$, $-\varepsilon_1 \operatorname{Re}[\rho(\omega_p - \omega_k)] < 0$. Соответствующее решение уравнения (1. 2) запишется в виде

$$\tilde{y}_k^{(v)}(x,\rho) = \rho^v e^{\rho\omega_k x} \bar{z}_{kv}(x,\rho), \; v = 0, 1, \ldots, 2n-1.$$

В дальнейшем будем считать, что замена функции $y_k(x,\rho)$ на функцию $\tilde{y}_k(x,\rho)$ для $\rho \in S_k$ и удовлетворяющих (1. 14) всегда выполнена. Тогда, повторяя рассуждения, проведенные в [1], получим:

Теорема 1.2. *Пусть выполнено условие (1. 10) Тогда при* $x \to +\infty$

$$y_k^{(v)}(x,\rho) = \rho^v e^{\rho\omega_k x} [\omega_k^v + o(1)] \qquad (1.15)$$

*равномерно относительно* $\rho \in S$, $|\rho| \geqslant r$.

Теорема 1. 3. *Пусть выполнено условие (1. 10).* Тогда функции $y_k(x,\rho)$, $k=1, \ldots, 2n$ *линейно независимы.*

Доказательство. Используя условие (1. 10) и соотношение (1. 15), вычислим вронскиан функций $y_k(x,\rho)$ при $x \to +\infty$. Он равен

$$W(y_1, \ldots y_{2n}), = \Pi \rho^{n(2n-1)}, \qquad (1.16)$$

где П—определитель Вандермонда чисел $\omega_1, \ldots, \omega_{2n}$. Из (1. 16) следует утверждение теоремы.

Повторяя рассуждения, проведенные в [1], имеем:

Теорема 1. 4. *При* $\rho \in S_\kappa$ и $\rho \to \infty$

$$y_\kappa^{(\nu)}(x, \rho) = \rho^\nu e^{\rho\omega_\kappa x}\left[\omega_\kappa^\nu \quad O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] \tag{1. 17}$$

*равномерно относительно* $x$ *из интервала* $[0, \infty)$.

Пусть выполнено условие (1. 10). Обозначим через $\tilde{S}_\kappa$ область комплексного переменного $\rho$, определенную соотношением

$$|\operatorname{Re}(\rho\omega_n)| \leqslant \varepsilon_1, \quad \rho \in S_\kappa \text{ или } S_{\kappa+1}$$

(рис. 2). Учитывая, что

$$\omega_1 = -\omega_{2n}, \ \omega_2 = -\omega_{2n-1}, \ \ldots, \ \omega_n = -\omega_{n+1}$$

(см. [2], стр. 59), построим для $\rho \in S_\kappa$ и $k=n+1$ специальную систему

$$\overset{\Lambda}{z}_{n+1,\nu}(x, \rho) = \omega_{n+1}^\nu - \sum_{i=1}^{n-1}\int_a^x \frac{\omega_i^{\nu+1} e^{\rho(\omega_i-\omega_{n+1})(x-\xi)}}{2n\rho^{2n-1}} m\left(\overset{\Lambda}{z}_{n+1}\right)d\xi +$$

$$+ \sum_{i=n}^{2n}\int_x^\infty \frac{\omega_i^{\nu+1} e^{\rho(\omega_i-\omega_{n+1})(x-\xi)}}{2n\rho^{2n-1}} m\left(\overset{\Lambda}{z}_{n+1}\right)d\xi. \tag{1. 18}$$

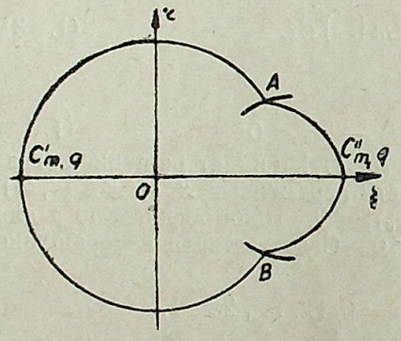


Рис. 2.

Имеет место:

Теорема 1. 5. *Если выполнено условие (1. 10), то решения* $y_1(x, \rho), \ldots, y_n(x, \rho)$, $\overset{\Lambda}{y}_{n+1}(x, \rho), \ldots, y_{2n}(x, \rho)$ *уравнения (1. 2) существуют при* $\rho \in S_\kappa$, $|\rho| \geqslant r$, *при каждом фиксированном значении* $x \in [0, \infty)$ *они являются голоморфными функциями от* $\rho$ *в области* $\rho \in S_\kappa$, $|\rho| > r$. Асимптотические формулы (1. 15) и (1. 17) имеют место равномерно относительно $\rho \in \tilde{S}_\kappa$, $|\rho| > r$ и $x \in [0, \infty)$ соответственно.

При $\rho=0$ уравнение (1. 2) принимает вид:

$$y^{(2n)} + p_2(x)\, y^{(2n-2)} + p_3(x)\, y^{(2n-3)} + \ldots + p_{2n}(x)\, y = 0 \tag{1. 19}$$

Теорема 1. 6. *Пусть выполнено (1. 10). Тогда уравнение (1. 19) имеет линейно независимые решения* $y_\kappa(x, \rho)$, $k=1, \ldots, 2n$, *такие, что при* $x \to +\infty$ *и произвольном положительном* $\varepsilon < \varepsilon_1$:

$$y_\kappa(x) = \frac{x^{2n-\kappa}}{(2n-k)!} + o\left(e^{-\varepsilon x}\right); \quad k = 1, 2, \ldots, 2n. \tag{1. 20}$$



Доказательство. Положим

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^{2n} y_\kappa}{dx^{2n}} = U_\kappa(x), \quad \frac{d^{2n-1} y_\kappa}{dx^{2n-1}} = -\int_x^\infty U_\kappa(\xi)\, d\xi \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{d^{2n-\kappa} y_\kappa}{dx^{2n-\kappa}} = -\int_x^\infty \frac{(x-\xi)^{\kappa-1}}{(k-1)!} U_\kappa(\xi)\, d\xi + 1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y_\kappa(x) = -\int_x^\infty \frac{(x-\xi)^{2n-2}}{(2n-1)!} U_\kappa(\xi)\, d\xi + \frac{x^{2n-\kappa}}{(2n-k)!} \end{aligned}\right\} \tag{1. 21}$$

Подставляя (1. 21) в (1. 19), получим интегральное уравнение для функции $U_\kappa(x)$:

$$U_\kappa(x) = f_\kappa(x) + \int_x^\infty K(x, \xi)\, U_\kappa(\xi)\, d\xi, \tag{1. 22}$$

где

$$K(x, \xi) = p_2(x)(x-\xi) + \ldots + p_{2n}(x)\frac{(x-\xi)^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

$$f_\kappa(x) = -\left[p_\kappa(x) + \frac{x}{1} p_{\kappa+1}(x) + \ldots + \frac{x^{2n-\kappa}}{(2n-k)!}\right].$$

Покажем, что уравнение (1. 22) имеет при $x \geqslant a$ решение $U_\kappa(x)$ такое, что

$$e^{\varepsilon_1 x}|U_\kappa(x)| \leqslant c_\kappa \tag{1. 23}$$

где $c_\kappa$—постоянная, а $a$ будет выбрано в дальнейшем. Применим к уравнению (1. 22) метод последовательных приближений, положив

$$U_\kappa^0 \equiv 0,$$

$$U_\kappa^{m+1}(x) = f_\kappa(x) + \int_x^\infty K(x, \xi)\, U_\kappa^m(\xi)\, d\xi. \tag{1. 24}$$

Докажем по индукции, что

$$e^{\varepsilon_1 x}|U_\kappa^m(x)| \leqslant c_m \text{ при } x \geqslant a, \ m=0,1, \ldots \tag{1. 25}$$

При $m=0$ утверждение тривиально. Пусть оно доказано при $m$. Докажем его при $m+1$. Имеем:

$$e^{\varepsilon_1 x}|U_\kappa^{m+1}(x)| \leqslant e^{\varepsilon_1 x}|f_\kappa(x)| + \int_a^\infty e^{\varepsilon_1 x}|K(x, \xi)| \cdot |U_\kappa^m(\xi)|\, d\xi.$$

Очевидно, что $e^{\varepsilon_1 x}|f_\kappa(x)| \leqslant c$ при $x \geqslant a$, для $i$-го члена второго слагаемого имеем оценку:

$$\int_a^\infty \frac{|p_i(x)|}{(i-1)!} e^{\varepsilon_1 x}\left|\left(\frac{x}{\xi}-1\right)\right|^{i-1} \xi^{i-1}|U_\kappa^m(\xi)|\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A_i}{(i-1)!}\int_a^\infty \xi^{i-1} e^{\varepsilon_1\xi} e^{-\varepsilon_1\xi}|U_\kappa^m(\xi)|\, d\xi \leqslant \frac{c_m A_i}{(i-1)!}\int_a^\infty \xi^{i-1} e^{-\varepsilon_1\xi} d\xi < +\infty,$$

где

$$A_i = \max_{x\in[a,\infty)} e^{\varepsilon_i x} \mid p_i(x) \mid .$$

Отсюда следует (1.25). Рассмотрим теперь ряд

$$e^{\varepsilon_i x}\left|U_\kappa^0(x)\right| + e^{\varepsilon_i x}\left[U_\kappa^1(x) - U_\kappa^0(x)\right] + \ldots + e^{\varepsilon_i x}\left[U_\kappa^m(x) - U_\kappa^{m-1}(x)\right] + \ldots \qquad (1.26)$$

и обозначим:

$$\mu_m \sup_{x\in[a,\infty)} e^{\varepsilon_i x}\left|U_\kappa^m(x) - U_\kappa^{m-1}(x)\right|$$

Условимся считать $\mu_0 = 0$. Тогда $\mu_1, \ldots, \mu_m, \ldots$ существуют и

$$e^{\varepsilon_i x}\left|U_\kappa^{m+1}(x) - U_\kappa^m(x)\right| \leqslant e^{\varepsilon_i x}\int_x^\infty \mid K(x,\xi)\mid \left|U_\kappa^m(\xi) - U_\kappa^{m-1}(\xi)\right| d\xi =$$

$$= e^{\varepsilon_i x}\int_x^\infty \mid K(x,\xi)\mid e^{-\varepsilon_i\xi}\left[\left|U_\kappa^m(\xi) - U_\kappa^{m-1}(\xi)\right| e^{\varepsilon_i\xi}\right] d\xi,$$

откуда

$$\mu_{m+1} \leqslant \mu_m \int_x^\infty e^{\varepsilon_i x} \mid K(x,\xi)\mid e^{-\varepsilon_i\xi}\, d\xi.$$

Для $i$-го члена ядра $K(x,\xi)$ имеем оценку:

$$\frac{1}{(i-1)!}\int_x^\infty e^{\varepsilon_i x} \mid p_i(x)\mid \cdot \left|\left(\frac{x}{\xi} - 1\right)\right|^{i-1} \xi^{i-1} e^{-\varepsilon_i\xi}\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(i-1)!}\int_a^\infty e^{\varepsilon_i x} \mid p_i(x)\mid \xi^{i-1} e^{-\varepsilon_i\xi}\, d\xi \leqslant \frac{A_i}{(i-1)!}\int_a^\infty \xi^{i-1} e^{-\varepsilon_i\xi}\, d\xi,$$

и можно указать такое $a_i$, что

$$\int_{a_i}^\infty \xi^{i-1} e^{-\varepsilon_i\xi} d\xi < \frac{(i-1)!}{A_i}\cdot\frac{1}{2n}.$$

Взяв $a = \max_i a_i$, получим, что $\mu_{m+1} \leqslant \mu_m\, q$, где $q<1$ и ряд

$$\mu_0 + \mu_1 + \ldots + \mu_m + \ldots$$

сходится. Тогда ряд (1.26) сходится равномерно относительно $x \geqslant a$ следовательно, подавно сходится ряд

$$U_\kappa^0(x) + \left[U_\kappa^1(x) - U_\kappa^0(x)\right] + \ldots + \left[U_\kappa^m(x) - U_\kappa^{m-1}(x)\right] + \ldots$$

Пусть $U_\kappa(x)$—его сумма. Тогда равномерно относительно $x \geqslant a$

$$U_\kappa(x) = \lim_{m\to\infty} U_\kappa^m.$$

Переходя к пределу при $m\to\infty$ в (1. 24), получим, что $U_\kappa(x)$ есть решение уравнения (1. 22) удовлетворяющее условию (1. 23). Подставляя полученные решения в (1. 21), найдем решения уравнения (1. 19):

$$y_\kappa(x) = -\int_x^\infty \frac{(x-\xi)^{2n-1}}{(2n-1)!} U_\kappa(\xi)\, d\xi + \frac{x^{2n-\kappa}}{(2n-k)!}, \quad k=1, 2, \ldots, 2n.$$

При $x\to+\infty$ имеем:

$$\left|\int_x^\infty U_\kappa(\xi)(x-\xi)^{2n-1} d\xi\right| \leqslant \int_x^\infty e^{2n-1} \mid U_\kappa(\xi)\mid d\xi \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\varepsilon_i x}\int_x^\infty e^{\varepsilon\xi}\xi^{2n-1} \mid U_\kappa(\xi)\mid d\xi = o\left(e^{-\varepsilon x}\right).$$



Полученные решения, как легко видеть, линейно независимы и их можно продолжить на интервал $[0, a]$. Итак, теорема доказана.

Теорема 1. 7. *Пусть выполнено условие* (1. 10). *Тогда уравнение* (1. 2) *имеет линейно независимые решения* $y_\kappa(x,\rho)$, $k=1, \ldots, 2n$, *в области* $x\in[0,\infty)$, $0 \leqslant \mid\rho\mid \leqslant r$, *голоморфные по* $\rho$ *при* $0 < \mid\rho\mid < r$. *Асимптотические формулы* (*1. 15*) *имеют место равномерно относительно* $\rho$, $0 < \mid\rho\mid \leqslant r$.

Доказательство. Полагая

$$y_\kappa(x,\rho) = e^{\rho\omega_\kappa x}\left[1 + U_\kappa(x,\rho)\right], \quad k = 1, 2, \ldots, 2n, \qquad (1.27)$$

перепишем уравнение (1. 2) в виде

$$U_\kappa^{(2n)} + q_1^\kappa(x,\rho)\, U_\kappa^{(2n-1)} + \ldots + q_{2n}^\kappa(x,\rho)\, U_\kappa = -q_{2n}^\kappa(x,\rho), \qquad (1.28)$$

где

$$q_i^\kappa(x,\rho) = \binom{2n}{2n-i}\rho^i\,\omega_\kappa^i + p_2(x)\binom{2n-2}{2n-i}\rho^{i-2}\,\omega_\kappa^{i-2} + \ldots + p_j(x).$$

Полагая $i = 1, 2, \ldots, 2n$

$$\frac{d^{2n-i}u_\kappa}{dx^{2n-i}} = -\int_x^\infty \frac{(x-\xi)^{i-1}}{(i-1)!}\,\eta_\kappa(\xi,\rho)\, d\xi, \quad i = 0,1, \ldots, 2n, \qquad (1.29)$$

сведем уравнение (1. 28) к интегральному уравнению для функции $\eta_{i\kappa}(x,\rho)$:

$$\eta_\kappa(x,\rho) = -q_{2n}^\kappa(x,\rho) + \int_x^\infty K_\kappa(x,\xi,\rho)\,\eta_\kappa(\xi,\rho)\, d\xi, \qquad (1.30)$$

где

$$K_\kappa(x,\xi,\rho) = \sum_{i=1}^{2n} q_i^\kappa(x,\rho)\,\frac{(x-\xi)^{i-1}}{(i-1)!}.$$

Повторяя предыдущие рассуждения, легко показать, что при $x \geqslant a$ уравнение (1. 30) имеет решение $\eta_\kappa(x,\rho)$, такое, что

$$e^{\varepsilon_i x} \mid \eta_\kappa(x,\rho)\mid \leqslant c_\kappa,$$

где $c_\kappa$—постоянное; голоморфное по $\rho$ в области $0 < \mid\rho\mid < r$. Легко видеть, что при $x\to+\infty$

$$U_\kappa^{(\nu)}(x,\rho) = o(1), \quad \nu = 0,1, \ldots, 2n-1. \qquad (1.31)$$

Продолжив полученные решения на интервал $[0, a]$, докажем теорему.

Теорема 1. 8. *Пусть выполнено условие* (*1. 10*). *Тогда функция* $w(x,\rho) = \dfrac{U_n(x,\rho) - U_{n+1}(x,\rho)}{\rho}$ *и ее производные по* $x$ *до порядка* $2n-1$ *включительно голоморфны по* $\rho$ *в области* $x\in[0,\infty)$, $0 < \mid\rho\mid < r$.

Доказательство. В самом деле, функция $w(x,\rho)$ удовлетворяет уравнению

$$w^{(2n)} + q_1^n(x,\rho)\, w^{(2n-1)} + \ldots + q_{2n}^n(x,\rho)\, w =$$

$$= -\psi_1(x,\rho)\, u_{n+1}^{(2n-1)}(x,\rho) - \ldots - \psi_{2n}(x,\rho)\, u_{n+1}(x,\rho) - \psi_{2n}(x,\rho),$$

где

$$\psi_i(x,\rho) = \varphi_i^n(x,\rho) - \varphi_i^{n+1}(x,\rho), \quad i=1, 2, \ldots, 2n,$$

$$\varphi_i^{\kappa}(x,\rho)=\binom{2n}{2n-i}\rho^{i-1}\omega_{\kappa}^{i}+$$

$$\ldots+p_i(x)\binom{2n-i+1}{2n-i}\omega_{\kappa},\quad i=1,2,\ldots,2n$$

и, проводя обычные рассуждения, докажем теорему.

Замечание 1. 3. Этот факт имеет место для любых пар функций $U_{\kappa}(x,\rho)$.

Теорема 1. 9. При $x\to+\infty$

$$\frac{\partial^{\nu}y_{\kappa}(x,\rho)}{\partial\rho^{\nu}}=(x\omega_{\kappa})^{\nu}e^{\rho\omega_{\kappa}x}\,[1+0(1)]\qquad(1.32)$$

$$\nu=1,2,\ldots,m\ldots,k=1,2,\ldots,2n$$

*равномерно относительно* $\rho\in S_{\kappa}$, $|\rho|\geqslant r$.

Доказательство. Повторяя рассуждения, проведенные в [1], легко показать, что функции $\frac{\partial z_{\kappa\nu}(x,\rho)}{\partial\rho}$ удовлетворяют системе

$$\frac{\partial z_{\kappa\nu}(x,\rho)}{\partial\rho}=f_{\kappa\nu}(x,\rho)-$$

$$-\sum_{i=1}^{\kappa-1}\int_a^x\frac{\omega_i^{\nu+1}e^{(\omega_i-\omega_{\kappa})(x-\xi)}}{2n\rho^{2n-1}}m\left(\frac{\partial z_{\kappa}}{\partial\rho}\right)d\xi+$$

$$+\sum_{i=\kappa}^{2n}\int_x^{\infty}\frac{\omega_i^{\nu+1}e^{\rho(\omega_i-\omega_{\kappa})(x-\xi)}}{2n\rho^{2n-1}}m\left(\frac{\partial z_{\kappa}}{\partial p}\right)d\xi,\qquad(1.33)$$

где $f_{\kappa}(x,\rho)$, $k=1,\ldots,2n$; $\nu=0,1,\ldots,2n-1$,—ограниченные при $x\geqslant a$, $\rho\in S_{\kappa}$ $|\rho|\geqslant r$ функции. Тогда, согласно лемме 1. 1, функция $\frac{\partial z_{\kappa\nu}(x,\rho)}{\partial\rho}$ также ограничена при $x\geqslant a$, $\rho\in S_{\kappa}$, $|\rho|\geqslant r$. Дифференцируя формулу (1. 5) при $\nu=0$ по $\rho$, получим

$$\frac{\partial y_{\kappa}(x,\rho)}{\partial\rho}=x\omega_{\kappa}e^{\rho\omega_{\kappa}x}\left[z_{\kappa 0}(x,\rho)+\frac{1}{\omega_{\kappa}x}\frac{\partial z_{\kappa 0}(x,\rho)}{\partial\rho}\right]$$

и при $x\to+\infty$

$$\frac{\partial y_{\kappa}(x,\rho)}{\partial\rho}=x\omega_{\kappa}e^{\rho\omega_{\kappa}x}\,[1+o(1)].$$

Повторяя это рассуждение, получим (1. 32).

Замечание 1. 4. Из формулы (1. 32) следует, что

$$\frac{\partial^{\nu}y_{\kappa}}{\partial\lambda^{\nu}}=\left(\frac{x\omega_{\kappa}}{2n\rho}\right)^{\nu}e^{\rho\omega_{\kappa}x}[1+0(1)],\ \nu=1,2,\ldots;$$

$$k=1,\ldots,2n.\qquad(1.34)$$

Пусть теперь $l^{*}(z)$—сопряженное к $l(y)$ дифференциальное выражение:

$$l^{*}(z)=z^{(2n)}+(\bar{p}_2z)^{(2n-2)}-(\bar{p}_3z)^{(2n-3)}+\ldots+\bar{p}_{2n}z.\qquad(1.35)$$

Рассмотрим уравнение

$$l^{*}(z)=\bar{\lambda}\bar{z}.\qquad(1.36)$$



Как известно из общей теории дифференциальных уравнений, его решения имеют вид:

$$w_{\kappa}(x,\rho)=(-1)^{\kappa}\frac{w(y_1,\ldots,y_{\kappa-1},y_{\kappa+1},\ldots,y_{2n})}{w(y_1,\ldots,y_{2n})},$$

где $w(y_1,\ldots,y_{\kappa-1},y_{\kappa+1},\ldots,y_{2n})$—алгебраическое дополнение элемента $y_{\kappa}^{(2n-1)}(x,\rho)$ определителя Вронского. В качестве решений (1. 36) мы будем брать функции

$$\bar{z}_{\kappa}(x,\rho)=\frac{\Pi}{\Pi_{2n-\kappa+1}}\rho^{2n-1}w_{2n-\kappa+1}(x,\rho),\ k=1,\ldots,n,\qquad(1.37а)$$

$$\bar{z}_{2n-\kappa+1}(x,\rho)=\frac{\Pi}{\Pi_{\kappa}}\rho^{2n-1}w_{\kappa}(x,\rho),\ k=1,\ldots,n,\qquad(1.37б)$$

где $\Pi$—определитель Вандермонда чисел $\omega_1,\ldots,\omega_{2n}$, а $\Pi_j$—алгебраическое дополнение элемента $\omega_j^{2n-1}$ определителя $\Pi$. Можно легко проверить непосредственно, что имеют место асимптотические формулы:

при $x\to+\infty$.

$$\bar{z}_{\kappa}(x,\rho)=e^{\rho\omega_{\kappa}x}\,[1+o(1)],\ k=1,2,\ldots,2n\qquad(1.38)$$

равномерно относительно $\rho\in S_{\kappa}$,

при $\rho\to\infty$

$$\bar{z}_{\kappa}(x,\rho)=e^{\rho\omega_{\kappa}x}\,[1+o(1)],\ k=1,2,\ldots,2n\qquad(1.39)$$

равномерно относительно $x\in[0,\infty]$.

## § 2. Резольвента и спектр оператора

Пусть выполнено условие (1. 10). Обозначим

$$A(\rho)=\begin{vmatrix}U_1(y_1)&\ldots&U_1(y_n)\\ \ldots&\ldots&\ldots\\ U_n(y_1)&\ldots&U_n(y_n)\end{vmatrix},$$

$$\bar{A}(\rho)=\begin{vmatrix}U_1(y_1)&\ldots&U_1(y_{n-1})&U_1\left(\overset{\wedge}{y}_{n+1}\right)\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\ U_n(y_1)&\ldots&U_n(y_{n-1})&U_n\left(\overset{\wedge}{y}_{n+1}\right)\end{vmatrix}\qquad(2.1)$$

Уравнение для нахождения собственных значений оператора $L_{\alpha}$ имеет вид:

$$A(\rho)=0.\qquad(2.2)$$

Пусть $\lambda_{\kappa}$—какое-нибудь собственное значение оператора $L_{\alpha}$ причем соответствующее $\rho_{\kappa}\in T_{\kappa}$. Тогда собственная функция, соответствующая $\lambda_{\kappa}$, имеет вид:

$$y_{\kappa}(x)=-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\Delta_i}{\Delta_0}y_i(x,\rho)+y_n(x,\rho),\qquad(2.3)$$

где

$$\Delta_i=\begin{vmatrix}U_1(y_1)&\ldots&U_1(y_{i-1})&U_1(y_n)&U_1(y_{i+1})&\ldots&U_1(y_{n-1})\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\ U_{n-1}(y_1)&\ldots&U_{n-1}(y_{i-1})&U_{n-1}(y_n)&U_{n-1}(y_{i+1})&\ldots&U_{n-1}(y_{n-1})\end{vmatrix}\qquad(2.4а)$$

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & \dots & U_1(y_{n-1}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ U_{n-1}(y_1) & \dots & U_{n-1}(y_{n-1}) \end{vmatrix} \qquad (2.\ 4б)$$

Будем считать, что при $\rho \in T_к$.

$$A(\rho),\ \overline{A}(\rho) \neq 0. \qquad (2.\ 5)$$

Теорема 2. 1. *Пусть выполнены условия (1. 10) и (2. 5). Тогда множество собственных значений оператора $L_a$ конечно.*

Доказательство. Из соотношений (1. 17) ясно, что при $\rho \to \infty$ уравнение (2. 2) имеет вид

$$a_1 \rho^{n(2n-1)} + a_2 \rho^{n(2n-1)-1} + \dots + a_{n(2n-1)} + O\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0, \qquad (2.\ 6)$$

где $a_i$—некоторые числа. Отсюда следует, что $\rho$ достаточно большое не может быть корнем уравнения (2. 6), т. е. множество собственных значений оператора $L_a$ ограничено. Из соотношений (1. 20) видно, что точка $\lambda=0$ не является собственным значением оператора $L_a$. Функция $A(\rho)$ голоморфна в области $S_к$, а в силу условия (1. 10) и в области $\overline{S}_к$. Ее нули образуют органиченное множество, не имеющее предельных точек, следовательно, это множество конечно.

Пусть $\lambda$—комплексное число. Учитывая, что $y_к(x,\rho) \in L^2(0,\infty)$, $k=1, \dots, n$; $y_к(x,\rho)\,\overline{\in} L^2(0,\infty)$, $k=n+1, \dots, 2n$ и используя краевые условия (2), построим резольвенту $R_\lambda$ оператора $L_a$. Ее аналитическое выражение

$$R_\lambda f = \int_0^\infty K(x,\xi,\lambda)\, f(\xi)\, d\xi, \qquad (2.\ 7)$$

где $f(x)$—финитная функция;

$$K(x,\xi,\lambda) = \begin{cases} \sum_{к=1}^{n} y_к(x,\rho)\, h_к(\xi,\rho) - \sum_{к=n+1}^{2n} y_к(x,\rho)\, w_к(\xi,\rho), \\ \qquad \text{при } x < \xi \\ \sum_{к=1}^{n} y_к(x,\rho)\,[w_к(\xi,\rho) + h_к(\xi,\rho)], \\ \qquad \text{при } x > \xi \end{cases} \qquad (2.\ 8)$$

$$h_к(x,\rho) = -\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{\Delta_{iк}}{A(\rho)}\, w_i(x,\rho), \qquad (2.\ 9)$$

$$\Delta_{jк} = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & \dots & U_1(y_{к-1}) & U_1(y_i) & U_1(y_{к+1}) & \dots & U_1(y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n(y_1) & \dots & U_n(y_{к-1}) & U_n(y_i) & U_n(y_{к+1}) & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix} \qquad (2.\ 10)$$

Докажем ограниченность резольвенты для всех $f(x) \in L^2(0,\infty)$. Представим ядро $K(x,\xi,\lambda)$ в виде:

$$K(x,\xi\lambda) = K_1(x,\xi,\lambda) + K_2(x,\xi,\lambda),$$



где

$$K_1(x,\xi,\lambda) = \sum_{к=1}^{n} y_к(x,\rho)\, L_к(\xi,\rho) \qquad (2.\ 11а)$$

$$K_2(x,\xi,\lambda) = \begin{cases} -\sum_{к=n+1}^{2n} y_к(x,\rho)\, w_к(\xi,\rho) \text{ при } x<\xi \\ \sum_{к=1}^{n} y_к(x,\rho)\, w_к(\xi,\rho) \text{ при } x>\xi. \end{cases} \qquad (2.\ 11б)$$

Так как $w_к(x,\rho)$, $k=n+1, \dots, 2n$ суть решения уравнения (1. 36), принадлежащие $L^2(0,\infty)$, то ядро $K_1(x,\xi,\lambda)$ есть ядро Гильберта-Шмидта. Поскольку

$$|y_к(x,\rho)| \leqslant c_к e^{-\sigma_к x},\ |y_{2n-к+1}(x,\rho)| \leqslant c_к e^{\sigma_к x},$$
$$|w_к(x,\rho)| \leqslant D_к e^{\sigma_к x},\ |w_{2n-к+1}(x,\rho)| \leqslant D_к e^{-\sigma_к x},$$
$$\rho \in S_к,\ \rho\,\omega_к = -\sigma_к + i\tau_к,\ \sigma_к > 0,\ k=1, \dots, n,$$

где $c_к$, $D_к$ от $x$ не зависят, что вытекает из асимптотических формул (1. 15) и (1. 37), то, пользуясь соотношением

$$\Big|\sum_{i=1}^{к} x_i\Big|^2 \leqslant к \sum_{i=1}^{к} |x_i|^2$$

и формулой 3. 4. 20 (см. [1], стр. 209), получим:

$$\int_0^\infty \Big|\int_0^\infty K_2(x,\xi,\lambda)\, f(\xi)\, d\xi\Big|^2 dx =$$
$$= \int_0^\infty \Big|\sum_{к=1}^{n} \int_0^x y_к(x,\rho)\, w_к(\xi,\rho)\, f(\xi)\, d\xi -$$
$$- \sum_{к=n+1}^{2n} \int_x^\infty y_к(x,\rho)\, w_к(\xi,\rho)\, f(\xi)\, d\xi\Big|^2 dx \leqslant$$
$$\leqslant \text{const} \cdot \sum_{к=1}^{n} \int_0^\infty \Big| e^{-\sigma_к x} \int_0^x e^{\sigma_к \xi} |f(\xi)|\, d\xi +$$
$$+ e^{\sigma_к x} \int_x^\infty e^{-\sigma_к \xi} |f(\xi)|\, d\xi \Big|^2 dx \leqslant$$
$$\leqslant \text{const} \int_0^\infty |f(x)|^2\, dx < +\infty.$$

Итак, ядро $K_2(x,\xi,\lambda)$ порождает ограниченный интегральный оператор, определенный во всем пространстве $L^2(0,\infty)$. Мы пришли к теореме.

Теорема 2. 2. *Для значений $\rho \in S_к$ и таких, что $\lambda = -\rho^{2n}$ не есть собственное значение оператора $L_a$, резольвента последнего—ограниченный интегральный оператор с ядром $K(x,\xi,\lambda)$, удовлетворяющим условиям:*

$$\int_0^\infty |K(x,\xi,\lambda)|^2\, d\xi < +\infty;\quad \int_0^\infty |K(x,\xi,\lambda)|^2\, dx < +\infty.$$

Последнее утверждение непосредственно следует из формулы (2. 11) и асимптотических свойств функций $y_к(x,\rho)$, $w_к(x,\rho)$, $к=1, \dots, 2n$ при $x \to +\infty$.

Повторяя рассуждения, приведенные в [1], легко показать, что оператор $L_\alpha$ замкнут и кроме того, что для любой функции $y(x) \in D$

$$y^{(v)}(x) \to 0 \text{ при } x \to +\infty \qquad (2.\ 12)$$
$$v = 0, 1, \ldots, 2n-1.$$

Пусть $\overline{D}$ есть совокупность функций $z \in L^2(0, \infty)$ таких, что:

1) производные $z^{(v)}(x)$, $v = 1, \ldots, 2n-1$ существуют и абсолютно непрерывны в каждом конечном интервале $[0, b]$, $b > 0$.

2) $l^*(z) \in L^2(0, \infty)$.

Поскольку имеет место формула Лагранжа

$$\int_0^\infty l(y)\,\overline{z}\,dx = p(\eta, \zeta) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \overline{y l^*(z)}\,dx, \qquad (2.\ 13)$$

где $p(\eta, \zeta)$—билинейная форма относительно переменных

$$\eta = \left(y_a, \ldots, y_a^{(2n-1)}, y_b, \ldots, y_b^{(2n-1)}\right),$$
$$\zeta = \left(\overline{z}_a, \ldots, \overline{z}_a^{(2n-1)}, \overline{z}_b^{(2n-1)}, \ldots, \overline{z}_b\right)$$

при $a = 0$, $b = -$, то из (2. 12) следует, что для любых функций $y \in D$, $z \in \overline{D}$:

$$\int_0^\infty \left[l(y)\overline{z} - y\overline{l^*(z)}\right] dx = p(\eta, \zeta)\Big|_0.$$

Определим теперь сопряженный к $L_\alpha$ оператор $L_\alpha^*$. Оператор $L_\alpha^*$ порождается дифференциальным выражением (1. 35) и сопряженными к (2) краевым условиями

$$v_v(z) = \beta_{v0} z(0) + \beta_{v1} z'(0) + \ldots + \beta_{v,2n-1} z^{(2n-1)}(0) = 0 \qquad (2.\ 14)$$
$$v = 1, 2, \ldots, n.$$

Область его определения $D_\alpha^*$ есть совокупность функций из $L^2(0, \infty)$, удовлетворяющих (2. 14), производные которых до порядка $2n-1$ включительно существуют и абсолютно непрерывны в каждом конечном интервале $[0, b]$, $b > 0$, а $l^*(z) \in L^2(0, \infty)$; при $z \in D_\alpha^*$

$$L_\alpha^* z = l^*(z).$$

Обозначим через $z_\kappa(x)$ собственную функцию оператора $L_\alpha^*$, соответствующую собственному значению $\lambda_\kappa$:

$$z_\kappa(x) = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\Delta_i^*}{\Delta_0^*} z_i(x, \rho) + z_n(x, \rho), \qquad (2.\ 15)$$

где $\Delta_i^*$ и $\Delta_0^*$—определители, построенные аналогично определителям $\Delta_i$ и $\Delta_0$.

Теорема 2. 3. *Пусть $\rho \in S_\kappa$ таково, что*

$$-\varepsilon_1 \leqslant \operatorname{Re}(\rho\omega_n) < 0,\ 0 < \alpha \leqslant \sin(\rho\omega_n) \leqslant \beta \qquad (2.\ 16)$$

*и $\lambda = -\rho^{2n}$ не есть собственное значение оператора $L_\alpha$. Тогда*

$$\|R_\lambda f\| \geqslant \left[\frac{c_2}{\sqrt{-\sigma}} - c_1\right] \cdot \|f\|, \qquad (2.\ 17)$$

где $c_1$, $c_2$—*постоянные*, $\sigma = \operatorname{Re}(\rho\omega_n)$, $\sigma < 0$.



Доказательство. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} \overline{w_n(x, \rho)} - \overline{h_n(x, \rho)} \dfrac{\int_0^a \overline{w_n(\xi, \rho)}\, h_n(\xi, \rho)\, d\xi}{\int_0^a |h_n(\xi, \rho)|^2\, d\xi} & \text{при } x \leqslant a \\ 0 & \text{при } x \geqslant a \end{cases}$$

Тогда при $x \geqslant a$

$$R_\lambda f = \sum_{i=1}^{n} y_i(x, \rho) \int_0^a [w_i(\xi, \rho) + h_i(\xi, \rho)]\, f(\xi)\, d\xi.$$

Обозначим

$$^1R_\lambda f = \sum_{i=1}^{n-1} y_i(x, \rho) \int_0^a [w_i(\xi, \rho) + h_i(\xi, \rho)]\, f(\xi)\, d\xi,$$

$$^2R_\lambda f = y_n(x, \rho) \int_0^a [w_n(\xi, \rho) + h_n(\xi, \rho)]\, f(\xi)\, d\xi.$$

Подобно тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 2. 2, можно показать, что

$$\|\,^1R_\lambda\| \leqslant c_1 \|f\| \qquad (2.\ 18)$$

при $\lambda$, удовлетворяющих условию (2. 16). Далее, при нашем выборе функции $f(x)$:

$$\int_0^a f(\xi)\, h_n(\xi, \rho)\, d\xi = 0; \quad \int_0^a w_n(\xi, \rho)\, f(\xi)\, d\xi = \int_0^a |f(\xi)|^2 d\xi$$

и

$$^2R_\lambda f = y_n(x, \rho) \int_0^a |f(\xi)|^2 d\xi.$$

Поэтому

$$\|\,^2R_\lambda f\|^2 = \int_0^\infty |\,^2R_\lambda f|^2\, dx \geqslant \int_a^\infty |y_n(x, \rho)|^2\, dx \left(\int_0^a |f(\xi)|^2 d\xi\right)^2.$$

Выбирая $a$ так, чтобы при $x \geqslant a$ было $o(1) < \frac{1}{2}$, имеем оценку

$$\int_a^\infty |y_n(x, \rho)|^2\, dx = \int_a^\infty e^{-2\sigma x}\,[1 + o(1)]\, dx \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{4} \int_a^\infty e^{-2\sigma x}\, dx = \frac{1}{4} \frac{e^{-2\sigma a}}{-2\sigma}.$$

Далее, $\int_0^a |f(x)|^2\, dx$ есть непрерывная функция от $\rho$ в области (2. 16) и не обращается в нуль ни в какой точке этой области, ибо $\overline{w_n(x, \rho)}$ и $\overline{h_n(x, \rho)}$ линейно независимы, следовательно, этот интеграл ограничен снизу положительным числом. Отсюда и из (2. 18) получаем утверждение теоремы.

Теорема 2. 4. *Все точки полуоси* $\lambda \geqslant 0$ *при* $n$ *четном (соответственно* $\lambda \leqslant 0$ *при* $n$ *нечетном) являются точками непрерывного спектра оператора* $L_\alpha$.

Доказательство. Докажем теорему для $n$ четного. Действительно, из неравенства (2. 17) вытекает, что при приближении к точке $\lambda_0 \geqslant 0$ норма резольвенты неограниченно возрастает, следовательно, такая точка $\lambda_0$ должна принадлежать спектру оператора $L_\alpha$. Согласно условию (2. 5) оператор $L_\alpha$ не имеет собственных значений на положительной полуоси. Докажем, что при $\lambda \geqslant 0$ область определения оператора $R_\lambda$ плотна в $L^2(0, \infty)$ т. е. при $\lambda \geqslant 0$ область изменения оператора $R_\alpha - \lambda 1$ плотна в $L^2(0, \infty)$; тем самым теорема будет доказана. Предположим противное; тогда существует функция $f \in L^2(0, \infty)$, не равная тождественно нулю и такая, что

$$(L_\alpha y - \lambda y, f) = 0,$$

т. е.

$$(L_\alpha y, f) = (\lambda y, f) \text{ для всех } y \in D_\alpha.$$

Это означает, что $L_\alpha^* f = \lambda f$, т. е. $\lambda \geqslant 0$ есть собственное значение оператора $L_\alpha^*$, $f$—соответствующая собственная функция. Повторяя рассуждения, приведенные в [2] (стр. 18, 24), можно доказать, что тогда $\lambda \geqslant 0$, $\lambda = -\rho^{2n}$, $\rho \in T_\kappa$ есть решение уравнения $A(\rho) = 0$, что противоречит условия (2. 5). Доказательство остается справедливым и для нечетного $n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Наймарк М. А. Тр. Московского матем. об-ва, 3, 181 (1954).
2. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М., 1954.
3. Фунтаков В. Н. „ДАН СССР", 132, 4 (1960).

В. Н. Фунтаков

## [0, ∞) јарымохда өз-өзүнә гошма олмајан ихтијари чүт тәртибли дифференсиал операторун мәхсуси функсијаларына көрә ајрылышы һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә $l(y) = \lambda y$ (1)
тәнлијинә бахылыр. Бурада $l(y)$, комплекс $p_i$ әмсаллары $x \in [0, \infty)$ олдугда

$$e^{\varepsilon x}|p_i(x)| < C_i \qquad i = 2, 3, \ldots 2_n$$

шәртини өдәјән

$$l(y) = y^{(2n)} + p_2 y^{(2n-2)} + \ldots + p_{2n}(x) y, \tag{2}$$

диференсиал ифадәсидир.

(1) тәнлијинин $\frac{\kappa\pi}{n} \leqslant \rho \leqslant \frac{(\kappa+1)\pi}{n}$ бәрабәрсизлији илә тә'јин олунмуш $S_\kappa$ областларда $\rho$-ја көрә һоломорф, $x \in [0, \infty)$, $\rho \in S_\kappa$ олдугда, $(x, \rho)$ дәјишәнләринин һәр икисинә көрә кәсилмәз вә $x \to \infty$ олдугда,

$$y_\kappa^{(n)}(x, \rho) = \rho^\nu e^{\rho\omega_\kappa x}\left[\omega_\kappa^\nu + 0(1)\right] \tag{3}$$
$$\kappa = 1 \ldots 2n \qquad \nu = 0, 1 \ldots 2n$$

асимтотикасына малик олан $y_\kappa(x, \rho)$ $\kappa = 1, \ldots 2n$ һәлләри гурулур.

(1) тәнлијинин $y_{n+1}(x, \rho)$ һәлли $\rho \in S_\kappa$ јахуд $\rho \in S_{\kappa+1}$ олдугда,

$$|Re(\rho\omega_\kappa)| \leqslant \varepsilon$$

бәрабәрсизлији илә тә'јин олунмуш $S_\kappa$ областында ејни хассәли $y_{n+1}^1(x, \rho)$ илә әвәз олунур.

(2) диференсиал ифадәсинин

$$u_\nu(y) = \alpha_{\nu_0} y(0) + \alpha_{\nu_1} y'(0) + \ldots + \alpha_{\nu_{2n-1}} y^{(2n-1)}(0) = 0 \tag{4}$$

сәрһәд шәртләринин көмәји илә $y \in D_\alpha$ олдугда,

$$L_\alpha y = l(y)$$

олан оператору гурулур. $L_\alpha$ операторунун тә'јин областы $D_\alpha$:

1) $L^2(0, \infty)$ фәзасына дахил олан;

2) өзләри вә $(2n-1)$ тәртибә гәдәр төрәмәләри һәр бир сонлу $[0, b]$ $b > 0$ интервалында мүтләг кәсилмәз;

3) $l(y) \in L_2(0, \infty)$;

4) (4) сәрһәд шәртләрини өдәјән функсијаларын чохлуғундан ибарәтдир.

$L_\alpha$ операторуна гошма олан $L_\alpha^*$ оператору

$$l^*(y) = y^{(2n)} + (p_2(x)y)^{(2n-2)} + \ldots + p_{2n}(x) y;$$

вә (4) сәрһәд шәртләринә гошма

$$u_\nu(y) = \beta_{\nu_1} y(0) + \beta_{\nu_1} y'(0) + \ldots + \beta_{\nu_1 2n-1} y^{(2n-1)}(0) = 0, \nu = 1, \ldots n,$$

сәрһәд шәртләри васитәси илә охшар шәкилдә гурулур.

Гурулан һәлләр васитәси илә ашағыдакы әсас нәтичә алынмышдыр.

Теорем. *$L_\alpha$ операторун спектри n-чүт олдугда мүсбәт охда (тәк олдугда мәнфи охда) кәсилмәз олуб, $\lambda$ комплекс мүстәвисини $L_\alpha$ һиссәсиндә дискретдир. $L_\alpha$ операторунун мәхсуси әдәдләри сонлу чохлуг тәшкил едир.*

$L_\alpha$ операторунун резолвентасы $(L_\alpha - \lambda 1)^{-1}$, $\lambda$-нын спектрә дахил олмајан гијмәтләри үчүн $K(x, \xi, \lambda)$ нүвәси

$$\int_0^\infty |K(x, \xi, \lambda)|^2 d\xi < +\infty, \int_0^\infty |K(x, \xi, \lambda)|^2 dx < +\infty$$

шәртини өдәјән мәһдуд интеграл операторудур.

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазијјат вә техника елмләри серијасы, 1960, № 6

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1960, № 6

И. А. МАМЕДОВ

# ПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ МЕТАЛЛА ПРИ ПРОКАТКЕ В КАЛИБРАХ

Теория прокатки широкой полосы, решение которой сводится к плоской задаче теории пластичности, в значительной мере уже построена. Задача объемной и профильной прокатки сводится к трехмерной задаче теории пластичности. Можно утверждать, что теория объемной и профильной прокатки еще не создана. Имеется ряд работ, в которых делается попытка тем или иным упрощенным методом решать задачи объемной и профильной прокатки, Г. А. Смирнова-Аляева, К. Н. Шевченко, Н. Я. Тарновского и др.

Технология процесса прокатки и требование конструирования станов и вспомогательных оборудований делает необходимым изучение кинематических и силовых параметров в очаге деформации.

В данной работе определяются кинематические параметры в очаге деформации в калибрах (ромб—ромб), а также кинематические и силовые при прокатке толстой полосы способом накатки.

## 1. Прокатка в калибре (ромб—ромб)

Решение этой задачи получено при следующих условиях и предположениях. Материал считается идеально пластичным и несжимаемым. Скорость течения осреднена по вертикальному сечению, уширением пренебрегается. Используются также условия постоянства секундного объема в направлении прокатки, при решении берется логарифмический закон деформации.

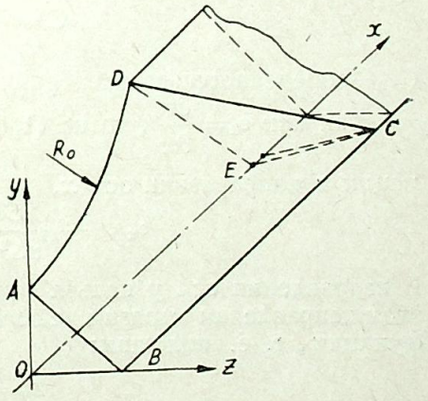


Рис. 1.

Как видно из рис. 1, радиус ($R_0$) валка будет функцией $z$. Если обозначить наклон AB через $\varphi(z)$, тогда для $R$ —получим:

$$R(z)=R_0+\varphi(z),$$

где $R_0$—есть радиус валка при $z=0$

В выходном сечении ($x=0$) имеем:

$$h_* = h_0 - \varphi(z)$$

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазијјат вә техника елмләри серијасы, 1960, № 6

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1960, № 6

И. А. МАМЕДОВ

# ПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ МЕТАЛЛА ПРИ ПРОКАТКЕ В КАЛИБРАХ

Теория прокатки широкой полосы, решение которой сводится к плоской задаче теории пластичности, в значительной мере уже построена. Задача объемной и профильной прокатки сводится к трехмерной задаче теории пластичности. Можно утверждать, что теория объемной и профильной прокатки еще не создана. Имеется ряд работ, в которых делается попытка тем или иным упрощенным методом решать задачи объемной и профильной прокатки, Г. А. Смирнова-Аляева, К. Н. Шевченко, Н. Я. Тарновского и др.

Технология процесса прокатки и требование конструирования станов и вспомогательных оборудований делает необходимым изучение кинематических и силовых параметров в очаге деформации.

В данной работе определяются кинематические параметры в очаге деформации в калибрах (ромб—ромб), а также кинематические и силовые при прокатке толстой полосы способом накатки.

## 1. Прокатка в калибре (ромб—ромб)

Решение этой задачи получено при следующих условиях и предположениях. Материал считается идеально пластичным и несжимаемым. Скорость течения осреднена по вертикальному сечению, уширением пренебрегается. Используются также условия постоянства секундного объема в направлении прокатки, при решении берется логарифмический закон деформации.

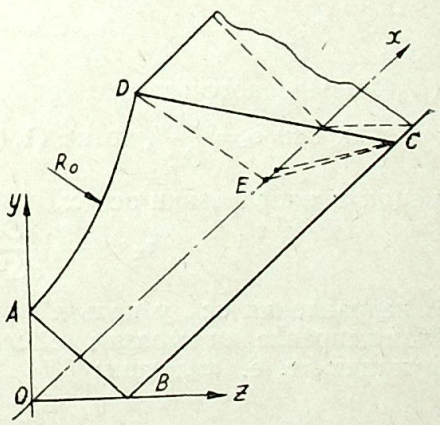



Рис. 1.

Как видно из рис. 1, радиус ($R_0$) валка будет функцией $z$. Если обозначить наклон AB через $\varphi(z)$, тогда для $R$ —получим:

$$R(z)=R_0+\varphi(z),$$

где $R_0$—есть радиус валка при $z=0$

В выходном сечении ($x=0$) имеем:

$$h_*=h_0-\varphi(z)$$

при $z=0$ $\varphi(z)=0$, а при $z=z_1=1$ $\varphi(z)=h_0$. Следовательно, $0\leqslant\varphi(z)\leqslant h_0$, а $R$ удовлетворяет следующему неравенству $R_0\leqslant R(z)\leqslant R_0+h_0$.

Для достаточно малого угла захвата и любого поперечного сечения из геометрических соображений можно написать:

$$h=h_0-az+\frac{x^2}{R_0+\varphi(z)} \tag{1.1}$$

Отсюда для главного продольного сечения получим:

$$h_{|z=0}=h_0+\frac{x^2}{R_0} \tag{1.2}$$

Для крайнего продольного сечения ($z=\pm 1$)

$$h=\pm\frac{x^2}{R_0+h_0} \tag{1.3}$$

В рассматриваемом случае (калибр ромб—ромб) для $\varphi(z)$ выбираем следующие значения:

$$\varphi(z)=az,$$

где $a$—есть параметр, который можно определить следующим образом:

$$\varphi(z)_{|z=1}=a=h_0$$

Площадь поперечного сечения будет:

$$ds=h\,dz$$

или

$$S=\int_0^1 h\,dz=\frac{h_0}{2}+\frac{x^2}{a}\ln\frac{R_0+h_0}{R_0} \tag{1.4}$$

Из условия постоянства секундного объема в направлении $x$ определим осредненную скорость течения металла $u$.

$$SU=C \tag{1.5}$$

где $C$—постоянная определяемая из граничных условий для $U$, т. е.

$$U_{|x=0}=U_0$$

Отсюда:

$$C=\frac{1}{2}h_0U_0$$

($U_0$—определяется из эксперимента).

Так как $\varepsilon_x=\dfrac{\partial u}{\partial x}$, то из (1,4) и (1.5) определяем скорость деформации в направлении оси $x$.

$$\varepsilon_x=-\frac{2Cx}{aS^2}\ln\frac{R_0+h_0}{R_0}. \tag{1.6}$$

В направлении оси $y$ нельзя считать деформации малыми, поэтому в этом направлении выразим деформации сжатия через логарифмическую функцию, т. е. положим:

$$e_y=\ln\frac{h}{h_*},$$

тогда соответствующая скорость деформации будет иметь вид:

$$\varepsilon_y=\frac{d}{dt}\ln h \tag{1.7}$$



Так как рассматривается станционарный процесс, то $\dfrac{\partial h}{\partial t}=0$, скорость деформации $\varepsilon_y$ выразится следующим образом

$$\varepsilon_y=\frac{\partial h}{\partial x}u+\frac{\partial h}{\partial z}W, \tag{1.8}$$

где $u=\dfrac{dx}{dt}$, $W=\dfrac{dz}{dt}$ —компоненты скорости течения металла в направлении оси $x$ и $z$,

Из формулы (1.1) определяем $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial h}{\partial z}$, подставляем их значение в (1.8), учитывая (1.5) для $\varepsilon_y$ получаем:

$$\varepsilon_y=\frac{2Cx}{S\left(h_0-az+\dfrac{x^2}{R_0+az}\right)(R_0+az)}-\frac{a[(R_0+az)^2+x^2]}{\left(h_0-az+\dfrac{x^2}{R_0+az}\right)(R_0+az)^2} \tag{1.9}$$

Принимая во внимание, что $\varepsilon_z=\dfrac{\partial W}{\partial z}$ и учитывая условие несжимаемости ($\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=0$) материала, получаем уравнение для определения $W$ в следующем виде:

$$\frac{\partial W}{\partial z}-\frac{a[(R_0+az^2)^2+x^2]\cdot W}{(R_0+az)^2\left(h_0-az+\dfrac{x^2}{R_0+az}\right)}=\frac{2Cx}{aS^2}\ln\frac{R_0+h_0}{R_0}-\frac{2Cx\ln\dfrac{R_0+h_0}{R_0}}{S(R_0+az)^2\left(h_0-az+\dfrac{x^2}{R_0+az}\right)} \tag{1.10}$$

В полученном уравнении $x$ рассматриваем как произвольный параметр, а интегрирование производим по $z$.

Решение запишется в таком виде:

$$W=\left\{\int\left[\frac{2Cx}{aS^2}\ln\frac{R_0+h_0}{R_0}-\frac{2Cx(R_0+az)}{S\left(h_0-az+\dfrac{x^2}{R_0+az}\right)(R_0+az)^2}\right]e^{-a\int\frac{((R_0+az)^2+x^2}{(R_0+az^2)\left(h-az+\frac{x^2}{R_0+az}\right)}dz}\cdot dz+C_1\right\}e^{a\int\frac{(R_0+az)^2+x^2}{(R_0+az)^2\left(h_0-az+\frac{x}{R_0+az}\right)}dz} \tag{1.11}$$

Обозначим через $I_1$ и $I_2$ следующие интегралы:

$$I_1=\int\frac{(R_0+az)^2+x^2}{(R_0+az)^2\left(h_0-az+\frac{x^2}{R_0+az}\right)}\,dz$$

$$I_2=\int\left[\frac{2Cx}{aS^2}\ln\frac{R_0+h_0}{R_0}-\right.$$

$$\left.-\frac{2Cx\,(R_0+az)}{S\left(h_0-az+\frac{x^2}{R_0+az}\right)R_0+az)^2}\right]e^{-a\int\frac{(R_0+az)^2+x^2}{(R_0+az)^2\left(h_0-az+\frac{x^2}{R_0+az}\right)}\,dz}\,dz$$

Вычисление интегралов $I_1$ и $I_2$ дает:

$$I_2=\frac{1}{a}\ln\frac{R_0+az}{z^2+\frac{1}{a}(R_0-h_0)z-\frac{R_0h_0+x^2}{a^2}}\qquad(1.12)$$

$$I_2=\frac{2Cx}{a^3S^2}\left(\frac{az^2}{2}-h_0z\right)\ln\frac{R_0+h_0}{R_0}+$$

$$+\frac{2Cx}{aS}\ln(R_0+az)\left[1-\frac{x^2}{a^3S}\ln\frac{R_0+h_0}{R_0}\right]\qquad(1.13)$$

Подставляя значение $I_1$ и $I_2$ в (1.11), получим:

$$W=\left\{\frac{2Cx}{a^3S^2}\left(\frac{az^2}{2}-h_0z\right)\ln\frac{R_0+h_0}{R_0}+\frac{2Cx}{aS}\left(1-\frac{x^2}{a^3S}\ln\frac{R_0+h_0}{R_0}\right)\cdot\ln(R_0+\right.$$

$$\left.+az)+C_1\right\}\frac{R_0+az}{z^2+\frac{1}{a}(R_0-h_0)z-\frac{R_0h_0+x^2}{a^2}}\qquad(1.14)$$

где $C_1$—определяется из граничных условий для $W$.

$$W_{|z=1}=0$$

$$C_1=-\frac{2Cx}{aS}\left(1-\frac{x^2}{a^3S}\ln\frac{R_0+h_0}{R_0}\right)\ln R_0.$$

Окончательно для $W$ получаем:

$$W=\left[\frac{2Cx}{a^3S^2}\ln\frac{R_0+h_0}{R_0}\cdot\left(\frac{az^2}{2}-h_0z\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{2Cx}{aS}\left(1-\frac{x^2}{a^3S}\ln\frac{R_0+h_0}{R_0}\right)\ln\frac{R_0+az}{R_0}\right]\frac{R_0+az}{z^2+\frac{1}{a}(R_0-h_0)z-\frac{R_0h_0+x^2}{a^2}}\qquad(1.15)$$

Условие несжимаемости $\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=0$ и (1.15) дает:

$$\varepsilon_z=\frac{2Cx}{aS^2}\ln\frac{R_0+h_0}{R_0}-\frac{2Cx}{S[(R_0+az)\,(h_0-az)+x^2]}+$$

$$+\frac{[a(R_0+az)^2+x^2}{[(R_0+az)\,(h_0-az)+x^2]\,(R_0+az)}\left\{\frac{2Cx}{a^3S^2}\left(\frac{az^2}{2}-\right.\right.$$



$$\left.\left.-h_0z\right)\ln\frac{R_0+h_0}{R_0}+\frac{2Cx}{aS}\left(1-\frac{x^2}{a^3S}\ln\frac{R_0+h_0}{R_0}\right)\ln\frac{R_0+az}{R_0}\right\}\cdot$$

$$\cdot\frac{R_0+az}{z^2+\frac{1}{a}(R_0-h_0)z-\frac{R_0h_0+x^2}{a^2}};\qquad(1.16)$$

$\varepsilon_y$—находим из уравнения (1.9):

$$\varepsilon_y=\frac{2Cx}{S[(R_0+az)(h_0-az)+x^2]}-\frac{a[(R_0+az)^2+x^2]}{[(R_0+az)(h_0-az)+x^2](R_0+az)}\cdot$$

$$\left\{\frac{2Cx}{a^3S^2}\left(\frac{az^2}{2}-h_0z\right)\ln\frac{R_0+h_0}{R_0}+\right.$$

$$\left.+\frac{2Cx}{aS}\left(1-\frac{x^2}{a^3S}\ln\frac{R_0+h_0}{R_0}\right)\ln\frac{R_0+az}{h_0}\right\}\frac{R_0+az}{z^2+\frac{1}{a}(R_0-h_0)z-\frac{R_0h_0+x^2}{a^2}}.\qquad(1.17)$$

Так как $\varepsilon_y=\dfrac{\partial v}{\partial y}$, то для $v$ получим:

$$v=\frac{2Cxy}{S[(R_0+az)\,(h_0-az)+x^2}-$$

$$-ay\frac{(R_0+az)^2+x^2}{[(R_0+az)(h_0-az)+x^2](R_0+az)}\left\{\frac{2Cx}{a^3S^2}\left(\frac{az^2}{2}-h_0z\right)\ln\frac{R_0+h_0}{R_0}+\right.$$

$$\left.+\frac{2Cx}{aS}\left(1-\frac{x^2}{a^3S}\ln\frac{R_0+h_0}{R_0}\right)\ln\frac{R_0+az}{R_0}\right\}\frac{R_0+az}{z^2+\frac{1}{a}(R_0-h_0)z-\frac{R_0h_0+x^2}{a^2}}\qquad(1.18)$$

Дифференциальное уравнение траектории в проекции на плоскости $yoz$ получим из уравнений (1.15) и (1.18):

$$\frac{dy}{dz}=-\frac{1}{a}\frac{y}{\left[\frac{1}{a^2S}\left(\frac{az^2}{2}-h_0z\right)\ln\frac{R_0+h_0}{R_0}+\right.}-$$

$$-\frac{y}{\left.+\left(1-\frac{x^2}{a^3S}\ln\frac{R_0+h_0}{R_0}\right)\ln\frac{R_0+az}{R_0}\right](R_0+az)}-$$

$$-\frac{ay\,[(R_0+az)^2+x^2]}{[(R_0+az)\,(h_0-ar)+x^2](R_0+az)}\qquad(1.19)$$

Положим в этом уравнении $x=0$ и проинтегрируем: получим:

$$y=C_2(h_0-az)\,e^{-\frac{1}{a}\int_0^z\frac{dz}{\left[\frac{1}{a^2S}\left(\frac{az^2}{2}-h_0z\right)\ln\frac{R_0+h_0}{R_0}+\ln\frac{R_0+az}{R_0}\right](R_0+az)}};$$

При $z=0$ $y=h_0$; тогда $y=Ch_0$
отсюда $C_2=1$ и, следовательно,

$$y=(h_0-az)\,e^{-\frac{1}{a}\int_z^z\frac{dz}{\left[\frac{1}{a^2S}\ln\frac{R_0+h_0}{R_0}\cdot\left(\frac{az^2}{2}-h_0z\right)+\ln\frac{R_0+az}{R_0}\right](R_0+az)}}\qquad(1.20)$$

Дифференциальное уравнение траектории в проекции на плоскости $xoy$ получим из уравнений (1.5) и (1.18).

Для главного продольного сечения ($z=0$) получим:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{R_0h_0+x^2}$$

Отсюда: $y=C_3(R_0h_0+x^2)$ или

$$y=C_3R_0\left(h_0+\frac{x^2}{R_0}\right)$$

Сравнивая это (1.2) получим:

$$C_3=\frac{1}{R}.$$

## 2. Теория течения и напряженного состояния при накатке

Рассмотрим процесс обработки металла способом накатки (т. е. металл и матрица двигаются вместе, а валок накатывается по металлу). Для простоты предположим, что валок не приводной. Тогда можно пренебречь силой трения между валком и металлом. Поскольку при пластическом течении металл опережает матрицу, появляется сила трения между металлом и матрицей, которую можно взять как функцию разностей скоростей течения и матрицы. Ширина полосы органичена, т. е. соизмерима с размером очага деформации. В этом процессе металл будет растекаться в двух направлениях ($ox$ и $oy$ рис. 2).

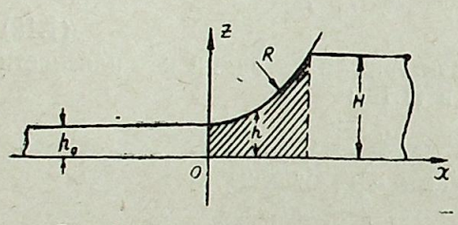



Рис. 2. Продольная сечения очага деформации (заштриховано)

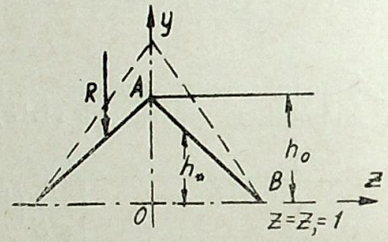



Рис. 3. Проекция очага деформации в вертикальной плоскости.

При решении этой задачи будем следовать К. Н. Шевченко [3, 5]. Все условия предыдущего параграфа остаются в силе. В этом параграфе будем пользоваться еще условием полной пластичности. В этом случае скорость деформации $\varepsilon_z$ по абсолютной величине больше остальных, поэтому без большой погрешности можно положить:

$$\varepsilon_i=\varepsilon_z \tag{2.1}$$

Условие пластичности Мизуса для главных компонент напряжения, отнесенное к величине предела текучести на сдвиг, запишется в следующем виде:

$$(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2=6 \tag{2.2}$$

Если положить $\delta=1$, то уравнение связывающее напряжения и скорости будет иметь вид

$$\sigma_x-\sigma=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_i};\ \sigma_y-\sigma=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_i};\ \sigma_z-\sigma=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_i}. \tag{2.3}$$



Здесь $\sigma$—среднее напряжение, $\varepsilon_i$—интенсивность скоростей деформации, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \varepsilon_x, \varepsilon_y$, и $\varepsilon_z$ соответствующие главные компоненты напряжения и скоростей деформации.

Следуя [3] после замены $\sigma_z$ через $-p$ (удельное нормальное давление); исключая из (2.3) $\sigma$ и учитывая (2.1) получим:

$$\sigma_x+P=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(1-\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z}\right);\ \sigma_y+P=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(1-\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_z}\right). \tag{2.4}$$

Если удовлетворять условиям полной пластичности:

$$\sigma_x=\sigma_y, \tag{2.5}$$

то условия пластичности Мизеса выражается в следующем:

$$\sigma_x+P=\sigma_y+P=\sqrt{3}. \tag{2.6}$$

Условия полной пластичности в компонентов скорости течения будет:

$$\varepsilon_x=\varepsilon_y=-\frac{1}{2}\varepsilon_z \tag{2.7}$$

Деформацию сжатия полосы выразим через логарифмическую функцию

$$e_z=\ln\frac{h}{H}.$$

Так как рассматриваем станционарный процесс $\frac{\partial h}{\partial t}=0$, а $h$—есть функция только от $x$ получим для скорости течения в направлении оси $z$.

$$\varepsilon_z=\frac{2xU}{Rh_0+x^2}. \tag{2.8}$$

Поскольку $\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}$, то учитывая (2.7) определим $u$:

$$u=\frac{C}{(Rh_0+x_0)^{1/2}};$$

где $C$—постоянная, определяемая из граничных условий для $u$. Например при $x=0$, $u=u_0$, где $u_0$—есть скорость течения металла на выходном сечении.

$$u=u_0\sqrt{\frac{Rh_0}{Rh_0+x^2}} \tag{2.9}$$

Для $v$ и $w$ находим соответственно из (2.7) (и 2.9):

$$v=-\frac{xu_0}{Rh_0+x^2}\sqrt{\frac{Rh_0}{Rh_0+x^2}}\cdot y \tag{2.10}$$

$$w=\frac{2xu_0}{Rh_0+x^2}\sqrt{\frac{Rh_0}{Rh_0+x^2}}\cdot z \tag{2.11}$$

а скорости деформации $\varepsilon_z$ и $\varepsilon_y$ будет:

$$\varepsilon_z=\frac{2xu_0}{Rh_0+x^2}\sqrt{\frac{Rh_0}{Rh_0+x^2}} \tag{2.12}$$

$$\varepsilon_y=-\frac{xu_0}{Rh_0+x^2}\sqrt{\frac{Rh_0}{Rh_0+x^2}} \tag{2.13}$$

Дифференциальное уравнение траекторий в проекции на плоскости ($xoz$) получим из (2.9) и (2.11):

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2x}{Rh_0 + x^2} \cdot z. \tag{2.14}$$

После интегрирования получим:

$$z = C_1 R\left(h_0 + \frac{x^2}{R}\right) \tag{2.14}$$

Так как координаты контактных точек удовлетворяют следующим условиям (для малых угла захватов):

$$h = h_0 + \frac{x^2}{R},$$

то мы получим для $C_1$—следующее значение:

$$C_1 = \frac{1}{R}.$$

На плоскости ($xoy$) получим:

$$y = C_2 (Rh_0 + x^2)^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.15}$$

Отсюда можно определить деформации полосы в направлении оси валка (т. е. уширение).

Для крайних точек листа ($y = \pm y_1$) получим:

$$y = \pm y_1 \frac{(Rh_0 + x^2)^{\frac{1}{2}}}{(Rh_0 + x^2)^{\frac{1}{2}}};$$

Теперь определим силовые параметры.

Условия равновесия элемента объема, если учитывать (2.6) дает следующие уравнения:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{R}{Rh_0 + x^2}\tau_x + \frac{2\sqrt{3}}{Rh_0 + x^2}x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\frac{2R\tau_y}{Rh_0 + x^2} = 0. \tag{2.16}$$

Уравнение (2.16) решаем для различных значений силы трения:

1. Сила трения между металлом и матрицей постоянно, т. е.

$$\tau_x = -\tau_0$$

Тогда имеем:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{R}{h_0}}\tau_0 \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{Rh_0}} - \sqrt{3}\ln\left(1 + \frac{x^2}{Rh_0}\right) \tag{2.17}$$

2. Сила трения зависит от относительной скорости течения.

$$\tau_x = -\tau_0 (1 + u^*), \quad \tau_z = -\tau_0' W,$$

где $u^* = \frac{u}{u_0^*}$, $u_0^*$ — есть скорость матрицы.

Если учитывать (2.9), до для $\tau_x$ получим:

$$\tau_x = -\tau_0\left(1 + \kappa \frac{1}{(Rh_0 + x^2)^{\frac{1}{2}}}\right), \text{ где } \kappa = \frac{u_0}{u_0^*}\sqrt{Rh_0} \tag{2.13}$$



Из (2.16) и (2.13) для компонентов напряжения в области, лежащей вблизи линии симметрии ($z=0$) получаем:

$$\sigma_x = \sigma_z = \tau_0 R\left\{\frac{1}{(Rh_0)^{\frac{1}{2}}}\operatorname{arctg}\frac{x}{Rw_0^{\frac{1}{2}}} + \frac{\kappa}{(Rh_0)^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{1}{(Rh_0 + x^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{Rh_0}}\right]\right\} - \sqrt{3}\ln\left(1 - \frac{x^2}{Rh_0}\right) \tag{2.19}$$

3. Допустим, что $\sigma_x = \sigma_y = 0$, трение в направлении оси не существует ($\tau_z = 0$). Тогда трение в направлении прокатки будет:

$$\tau_x = -\frac{2\sqrt{3}}{R}x \quad \text{и} \tag{2.20}$$

$\sigma_z = -P = -\sqrt{3}$ будет постоянно по всей зоне деформации.

4. По краям ($z = \pm z_1$), металл течет преимущественно в направлении оси $z$. В области близко к краям трение можно положить равным:

$$\tau_x = -\frac{2\sqrt{3}}{R}x, \quad \tau_z = -\tau_0' w \tag{2.21}$$

Тогда из (2.16) и (2.21) учитывая (2.10) для компонентов напряжения получим:

$$\sigma_x = -\sigma_y = -\frac{2Ru_0\sqrt{Rh_0}}{(Rh_0 + x^2)^{\frac{5}{2}}} \cdot x\tau_0'(z_1^2 - z^2). \tag{2.22}$$

Максимальное значение будет при $x = x_1$, т. е.

$$\sigma_x = -\sigma_y = -\frac{2Ru_0\sqrt{Rh_0}x_1}{(Rh_0 + x_2^1)^{\frac{5}{2}}}\tau_0'(z_1^2 - z^2) \tag{2.23}$$

Таким образом в области близкой к средней линии мы получили решение (2.17) и (2.19), а в области близкой к краям решение (2.23). Границу областей существование этих решений можно определить следующим образом (в проекции на плоскости $xoy$):

$$\frac{2Ru_0\sqrt{Rh_0}x_1}{(Rh_0 + x_1^2)^{\frac{5}{2}}}(z_1^2 - z^2)\tau_0^1 - \sqrt{\frac{R}{h_0}}\tau_0\left\{\frac{1}{\sqrt{Rh_0}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{Rh_0}} + \frac{\kappa}{Rh_0}\left[\frac{1}{(Rh_0 + x^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{Rh_0}}\right]\right\} + \sqrt{3}\ln\left(1 + \frac{x^2}{Rh_0}\right) = 0 \tag{2.24}$$

Удельное давление на валки в точках контакта определяется из следующего уравнения:

$$P = \sqrt{3} - \sigma_x = \sqrt{3} - \sigma_y \tag{2.25}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. О. Гоффман Г. Закс. Введением в теорию пластичности для инженеров ГНТИМЛ. М., 1957.

2. Ильюшин А. А. Течение пластического вещества на поверхности. ПММ, т. XVIII, в. 3, 1954.

3. Шевченко К. Н. Напряжение и течение металла в некоторых задачах объемной и профильной прокатки. Изв. АН СССР. ОТН № 2, 1960.

4. Nadai A. The Forces Reguired for Rolling Steel Strip Under Fension. Journal ot Applied Mechanies. vol, № 2 1938.

5. Shevtchenko K.N. Theory of flow Metal as Applied to the Problem of rolsing fo wide and Wairow Strip. Труды Брюссельского конгресса по прикладной механике.

**И. А. Мәммәдов**

## Калибрләрдә јајма просесиндә металларын пластик ахмасы

ХҮЛАСӘ

Јајма просесинин технолокијасы, дәзкаһ вә көмәкчи аләтләрин конструксијасы мәсәләси деформасија зонасында кинематик вә гүввә параметрләринин өјрәнилмәсини тәләб едир.

Тәгдим олунан ишдә ромб-ромб калибриндә деформасија зонасынын кинематик параметрләри вә галын листин јајылмасы просесинин кинематик вә гүввә параметрләри тә'јин олунур.

Бахылан мәсәләләр ашағыдакы фәрзијјәләр вә шәртләр дахилиндә һәлл олунур: материал идиал пластик вә сыхылмајандыр, шагули ен кәсикдә ахма сүр'әтинин орта гијмәти көтүрүлүр. Үфүги кенишләнмә нәзәрә алынмыр. Јајма истигамәтиндә санијә әрзиндә кечән һәчмин сабитлији гәбул едилир, нәһајәт, деформасија үчүн логарифмик ганундан истифадә олунур.

1-чи параграфда ромб-ромб калибриндә јајма заманы металын ахма сүр'әтинин компонентләри ($u$, $v$, $w$) үчүн ујғун олараг (1.5), (1.15) вә (1.18) дүстурлары алынмышдыр, деформасија сүр'әти компонентләри исә (1.6), (1.16) вә (1.17) дүстурлары илә тә'јин едилир. Һәмин параграфда, һәмчинин металын ахма траекторијасынын ајры-ајры мүстәви кәсикләрдә пројексијалары тә'јин едилир.

2-чи параграфда накттка үсулу илә галын листин јајылмасы просеси, кинематик вә гүввә параметрләри тә'јин едилир. Металын ахма сүр'әти компонентләри (2.9), (2.10) вә (2.11) дүстурлары илә, деформасија сүр'әти компонентләри (2.12), (2.13) вә (2.7) дүстурлары илә вә гүввәт параметрләри сүртүнмә гүввәсинин мүхтәлиф гијмәтләри үчүн (2.17), (2.19) вә (2.23) дүстурлары илә тә'јин олунур.

Алынан һәлләрдән (2.17) вә (2.19) нејтрал хәттә јахын областда, (2.23) исә листин кәнарларына јахын зонаја ујғун кәлир. Һәлләрин өдәнилдији зонанын сәрһәдди (2.24) тәнлијиндән тә'јин едилир.

Нәһајәт, металын вала етдији хүсуси тәзјиг (2.25) дүстуру илә һесабланылыр.

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазијјат вә техника елмләри серијасы, 1960, № 6

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1960, № 6

Г. МӘММӘДОВ (ХӘЈЈАМИ)

## IX—XV ӘСРЛӘРДӘ ЈАХЫН ВӘ ОРТА ШӘРГ РИЈАЗИЈЈАТЫ ҺАГГЫНДА

VII әсрин әввәлләриндән башлајараг әрәбләр Јахын вә Орта Шәрги, Африканын шималыны, чәнуб-гәрби Авропаны истила едирләр. Илк заманлар әрәб хәлифәләри елм вә мәдәнијјәтә гијмәт вермирдиләр. Онлар фәтһ етдикләри јерләрдә дини хадимләрин фитвасы илә китабханалары јандырырдылар. Лакин тәдричлә мәдәни дөвләтләрлә әрәбләр арасында әмәлә кәлән рабитә, әрәбләрин фикрини маарифә чәлб етди. Бу ајылма вә елмин тәкамүлә башламасы бир әср јарым узанды.

Аббасиләр хилафәти (750—1258) дөврүндән башлајараг, әрәбләр кечмишин керилијиндән хилас олуб, мүхтәлиф халгларын алимләринин көмәји илә мәғлуб олмуш гоншу өлкәләрин мәдәнијјәтини өјрәнир вә ону инкишаф етдирирдиләр.

Әрәбләр Шам вә Ираны тутдугда јунанларын бу ики өлкәдә јајылмыш мүһүм әсәрләрини өз дилләринә тәрчүмә етдиләр. Һәмин китаблар үзрә тә'лим едир вә јунан дилини тезликлә өјрәнирләр. Әрәбләр үмуми мәдрәсәләрдән әлавә Бағдад, Гаһирә, Гәртәбә дарүлфүнунларыны да ачмышдылар. Онларда лабораторијалар, рәсәдханалар, китабханалар вә башга тәһсилат васитәләри олмушдур. Бағдад дарүлфүнунунун тә'лиминдә әсас чәһәтләрдән бири онларда сүбут методларынын тамамы илә елми шәкилдә әсасландырмасы иди. Јә'ни намә'лумлары мә'лумлар васитәси илә тапмаг, һадисәләри мүшаһидә етмәк вә мәсәләләрин исбатыны тәчрүбә јолу илә тәсдиг етмәк әсас көтүрүлмүшдүр. Бә'зиләринин дедији кими, Јахын вә Орта Шәрг ријазијјатчылары јалныз өзләриндән габаг кәлмиш ријазијјатчыларын ишләрини әкс етдирмәмиш, ријазијјатда јени истигамәтләр ачмышлар вә әһәмијјәтли кәшфләрлә елми зәнкинләшдирмишләр. Шәрг алимләри ријазијјатын һесаб-чәбр, һәндәсә, тригонометрија саһәләриндә вә астрономија саһәсиндә бир сыра јениликләр әлдә етмишләр.

### Һесаб-чәбр саһәсиндә көрүлән ишләр

Сон заманлара гәдәр күман олунурду ки, Јахын вә Орта Шәрг ријазијјатчыларынын мәнфи әдәд һаггында мә'луматлары олмамышдыр. Лакин бу јахынларда мүәјјән едилмишдир ки, X әсрдә јашамыш Әбүл-Вәфанын әл јазмаларында мәнфи әдәдләр ишләдилмишдир. Мәнфи әдәдләрә „Ихтисары вурма“ гајдасында тәсадүф едилир. Бу әл јазмалары Лејден китабханасында сахланылыр [9]. Мәнфи әдәдләрин Әбүл-Вәфадан габаг кәлмиш мүәллифләр тәрәфиндән ишлә-

дилмәси мүәјјән едилмәмишдир. Илк дәфә чинлиләрдә, һиндлиләрдә вә көстәрилән әљазмасында мәнфи әдәдә борч кими бахмышлар.

Һесаб-чәбр саһәсиндә Гијасәддин Чәмшид Мәс'уд Әл-Кашинин бөјүк хидмәти олмушдур (1430-чу илдә вәфат етмишдир). Әл-Каши Сәмәргәндә مفتاح‌الساب „Һесабын ачары“ адлы ријази енсиклопедија китабыны јазмышдыр. Бу трактат проф. Б. А. Розенфелд тәрәфиндән өјрәнилмиш вә она чохлу коментарија јазылмышдыр [8]. „Һесабын ачары“ китабынын әљазмасы Ленинградда Салтыков-Шедрин адына күтлəви китабханада сахланылыр (Дорнун коллексијасы, № 131). Әл-Каши һәмин китабында илк дәфә олараг онлуг кәср системини әтрафлы изаһ етмишдир. Јенә һәмин китабда Әл-Каши дахили биноминал әмсалларын тә'јин едилмәси үсулуну көстәрәрәк

$$(a+1)^n-a^n=C_n^1a^{n-1}+C_n^2a^{n-2}+\cdots+C_n^{n-1}a+1$$

шәклиндә олан биномиал ајрылманы сөзлә ифадә едиб мисал илә әјани шәкилдә көстәрмишдир. Лакин ики һәдлинин күввәтә јүксәлдилмәси гајдасынын Гијасәддиндән габаг ишләдилиб-ишләдилмәмәси һәлә мүәјјән едилмәмишдир.

Јунанлар бир нечә куб тәнлијә кәтирилән мәсәләләри һәлл едирдиләр. Лакин јунанлар куб тәнлијин һеч бир үмуми нәзәријјәсини јарада билмәдиләр. Һәмчинин нә јунанларда, нә дә һиндлиләрдә чәбр хүсуси ријази фәнн дејилди. Ријазиҗҗатда чәбрин хүсуси шәкилдә тәнликләрә мәхсус олмасынын көстәрилмәси Јахын вә Орта Шәрг ријазиҗҗатчыларының хидмәтидир. Јахын вә Орта Шәрг ријазиҗҗатчыларының чәбрдә мүһүм ишләри үчүнчү дәрәчәли тәнликләрин груплара ајрылмасы вә һәллидир. Мүхтәлиф шәкилли куб тәнликләрә кәтирилән чохлу мәсәләләр, онларын һәлләринин мүмкүнолма шәртини (мүсбәт көкләрин варлығыны) тәдгиг етмәк тәбии олараг онларын үмуми нәзәријјәсинин ишләнмәсини тәләб едирди, бу истигамәтдә ән бөјүк наилијјәти Өмәр Хәјјамын чәбри (1040—1123) көстәрир. Өмәр Хәјјамын бу ишини Иран ријазиҗҗатчысы

غلام حسین مصاحب جبر و مقابله خیام تهران ۱۳۱۱

Гулам Һүсејн Мүсаһиб „Хәјјамын чәбр вә мүгабиләси“ [1] адлы китабында вә проф. Б. А. Розенфелд „Исто ико математические исследовани“ әсәриндә өјрәнмишдир. Икинчи дәрәчәдән јүксәк тәнликләрин чәбри һәллиндә Хәјјам вә башга Шәрг алимләри мүвәффәгиҗјәт әлдә етмәмишләр. Лакин Гулам Һүсејн Мүһасиб ады чәкилмиш китабында көстәрир ки, „XVI әсрдә јашамыш Әли Мәһәммәд Исфәһани адлы бир нәфәр Иран ријазиҗҗатчысы үчүнчү дәрәчәли тәнлијин чәбри јолла һәлл етмишдир. Онун годуғу мәсәлә вә һәлл методу мөвчуддур“. Лакин бу иш һаггында әлавә һеч бир мә'луматымыз јохдур.

Әл-Хәрәзми (тәгрибән 830-чу илдә) икинчи тәртибдән көк алмаг јолу илә квадрат тәнлијин көкләрини ифадәетмә јолуну көстәрмишдир. Јахын вә Орта Шәрг ријазиҗҗатчылары иррасионал көкү тәгриби һесабламаг үчүн

$$\sqrt[n]{q}=\frac{1}{z}\sqrt[n]{qz^n}$$

дүстурундан истифадә етмишләр.

Бурада $z=10^k$-дыр. Бу дүстуру Әл-Хәрәзми $n=2$ үчүн ишләтмишдир. Јахын вә Орта Шәрг алимләри бә'зи сыраларла да мәшғул олмушлар. Лакин бу саһәдә јалныз јунанлардан онларын әлинә чатмыш



бә'зи дүстурларын исбатындан башга бир иш көрмүшләр. Буна ашағыдакылар мисал ола биләр:

1) $\sum_1^n n^3=\left(\sum_1^n n\right)^2$

Бу тәнлији илк дәфә Кәрхи (1025-чи илдә вәфат етмишдир) исбат етмишдир.

2) $\sum_0^{63}2^n$ сырасынын һесабланмасыны Әбү Реjһан Бируни (973—1048) вермишдир.

3) $\sum n^4=\left(\frac{-1+\Sigma n}{5}+\sum n\right)\sum n^2$ тәнлијин исбатыны Улуг бәј Рәсәдханасынын илк рәһбәри Әл-Каши вермишдир.

## Һәндәсә саһәсиндә көрүлән ишләр

Хорасанлы Нәсрәддин Тусинин (1201—1274) „Тәһрире өглидис“ تحریر اوقلیدس (Евклидин шәрһи) адлы китабынын биринчи һиссәсиндә, Евклидин V постулатыны исбат етмәк үсулу бөјүк әһәмиҗјәтә маликдир. „Тәһрире өглидисин әљазмасы“ Ленинградын шәргшүнаслыг институтунда (№ А 258) сахланылыр.

Инкилис ријазиҗҗатчысы Валлисин (1616—1703) һәндәсәјә аид мүһазирәләриндә V постулатын Нәсирәддин тәрәфиндән тәклиф едилмиш исбаты шәрһ олунмушдур. Москва Университетинин профессору В. Ф. Каган бу шәрһә истинад едәрәк белә гејд едир: „Көстәрилән исбат она көрә дәјәрлидир ки, бурада илк дәфә олараг паралел хәтләр һаггында постулат үчбучагларын дахили бучаглары чәминин өјрәнилмәси илә әлагәләндирилмишдир. Бу үсул паралел хәтләр һаггындакы нәзәријјәнин тәкамүлүндә бөјүк рол оjнамышдыр.

Нәсирәддинин паралел хәтләр һаггындакы ишләри илә Москва Университетинин профессору В. Ф. Каган [3] өзүнүн „Основания геометрии“, һәмчинин Азәрбајчан ССР Елмләр Академијасынын академики проф. З. И. Хәлилов [11] „Нәсирәддин Тусинин ријази әсәрләри һаггында“ проф. Б. А. Розенфелд [7] „Историко математические исследования“, Азәрбајчан Дөвләт Университетинин доссенти Р. М. Султанов „Нәсирәддин Туси паралеллик постулаты һаггында“ вә Һ. Д. Мәммәдбәјли [5] „Мухаммед Насиреддин Туси о теории параллельных линии и теории отношени“ адлы әсәрләриндә мәшғул олмушлар.

Нәсрәддин Миср ријазиҗҗатчысы ибн-Һејсәм (965—1039) кими, һәрәкәтин һәндәсәјә тәтбиг едилмәсинин тәрәфдары олуб мүтәрәгги нөгтеји-нәзәри мүдафиә етмишдир.

Азәрбајчан ССР ЕА-нын академики З. И. Хәлилов ([11] сәһ. 10) јухарыда ады чәкилән әсәриндә гејд едир ки, көһнә Аристотел нөгтеји-нәзәриндә дајанмыш Хәјјамдан фәргли олараг Нәсирәддин, Миср ријазиҗҗатчысы Әбу Әли ибн-Һејсәмин (X әср) ардынча јени нөгтеји-нәзәрдә дајанмышдыр. Бу да ондан ибарәтдир ки, һәрәкәт һәндәсәјә тәтбиг едилә биләр вә едилмәлидир (мәсәлән, хәтт һәрәкәт едән нөгтәнин јолудур).

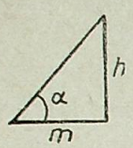
Чевранын өз диаметринә олан нисбәтини һесабламагда Гијасәддинин чох әһәмиҗјәтли хидмәти олмушдур. Гијасәддин өз һесабламалары нәтичәсиндә

$$2\pi=6{,}283\,1\,853\,071\,795\,865$$

гиjмәтини тапмышдыр. Бурада 17 онлуг ишарә дүзкүн тапылмышдыр. Авропада Ф. Виет 1593-чү илдә бу кәмиjjәти анчаг 9 онлуг ифадәjә гәдәр дүзкүн һесаблаjа билмишдир.

### Тригонометриjа саһәсиндә көрүлән ишләр

Һиндлиләр илк дәфә синус мәфһумуну тригонометриjа елминә дахил етмишләр. Бунунла белә һәмин елм Һиндистанда о гәдәр дә тәрәггi етмәмишдир. Әксинә, Jахын вә Орта Шәргдә дүз хәтли вә күрәви тригонометриjа чох инкишаф етмишдир. Бу тәрәггi милади X әсрин башланғычы дөврүнүн риjазиjjатчысы Бәттанидән башлаjыр. Бәттани ашағыдакы jолла танкенс мәфһумуну ишләтмәли олмушдур: әкәр $h$ узунлугда шагули милин көлкәси $m$-дирсә вә күнүн дүшмә бучағы $\alpha$-дырса онда:




$$m = h\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\text{-дыр.}$$

Бәттани көстәрир ки, әкәр $\sin\alpha : \cos\alpha$-ны $M$ илә ишарә етсәк,

$$\sin\alpha = \frac{M}{\sqrt{1+M^2}}$$

олар.

Әкәр $M$ мә'лум олса $\alpha$-ны синус чәдвәлиндән тапмаг олар. Бу jолла о, танкенси һесабламаг үчүн чәдвәл дүзәлтмишдир.

Милади X әсрин ахырында Әбүл-Вәфа көлкә васитәси илә танкенсә тә'риф вермишдир.

Һәмчинин $\sin(\alpha+\beta)$ дүстурунун инкишафы да она аиддир.

Нәсирәддинин كتاب الشعلى القطاع (там дөрдбучаглы һаггында китаб) трактаты әсасән тригонометриjаjа һәср олунмушдур. „Шәклүл гита“ трактатынын әлjазмасы Ленинградда (күтлəви китабхана, Хаһиковун фонду, № 144), Берлин дөвләт китабханасында (№ 5956, Бодеjане № 1, 875/16) вә Париж милли китабханасында (№ 2467/10, 11) сахланылыр.

Бу трактат 1891-чи илдә Истамбулда фарс дилиндә нәшр едилмишдир. Сонрадан әрәб дилинә тәрчүмә олунмушдур. Бу иш илә Нәсирәддин биринчи мүнтәзәм тригонометриjа курсуну jаратмышдыр. Бу вахта гәдәр исә тригонометриjа астрономиjа китабларында верилмишдир. Трактат беш китабдан ибарәтдир.

Биринчи китаб тригонометриjа үчүн әһәмиjjәтли олан, нисбәтләр нәзәриjjәсинин инкишафына һәср олунмушдур. Нәсирәддин мүрәккәб нисбәтләр нәзәриjjәси илә Тәбризинин вә Өмәр Хәjjамын мүрәккәб нисбәтләр нәзәриjjәсини инкишаф етдирир. Нәсирәддинин мүрәккәб нисбәтләр нәзәриjjәси Азәрбаjчан Дөвләт Университетинин досенти Ф. А. Гасымханов [2] тәрәфиндән мүфәссәл өjрәнилмишдир.

Икинчи китаб мүстәви үзәриндә там дөрдбучаглы вә онун мүхтәлиф хүсуси һаллары һаггында мәнлаj теоремини, үчүнчү китаб даирәдә вә мүстәви үзәриндәки тригонометрик мүнасибәтләрә һәср олунмушдур. Бурада гөвсүн синусу тә'jин олунур.

Дөрдүнчү китаб сферик там дөрдтәрәфлинин нәзәриjjәсинә һәср едилмишдир.

Бешинчи китабда сферик тригонометриjа верилир. Бурада Нәсирәддинә гәдәр исбат едилмиш сферик һәндәсә теоремләри верилир вә сферик үчбучағын алты елементиндән (бурада үч бучаг вә үч тәрәф нәзәрә алынмалыдыр) верилмиш үч елементинә көрә һәлл едилмәсинин бүтүн алты һалы көстәрилир. Бу алты һалдан ән мараглысы, сферик үчбучағы үч бучағына көрә һәлл етмәкдир.



### Астрономиjа саһәсиндә көрүлән ишләр

Jахын вә Орта Шәрг алимләринин хидмәтләри даһа мүһүм олмушдур. Бу дөврдә астрономлар әсасән әрәб олмаjан халглардан ибарәт иди. XIII әсрдә Азәрбаjчанын Мараға рәсәдханасы вә XV әсрдә Сәмәргәнд рәсәдханасы өз елми ишләри илә бүтүн дүнjада шөһрәт газанмышды. Һәмчинин Бағдад, Рәггә вә Куфә шәһәрләриндә дә мүһүм рәсәдханалар олмушдур. Бу jерләрдә рәсәдханалар үчүн хүсуси биналар тикилмиш вә бу рәсәдханәләрдә бир сыра мүһүм мүшаһидәләр апарылмышдыр. Мараға рәсәдханасында мүшаһидәләрин нәтичәләри («زيج الخانى» Елхан чәдвәлләри) ады илә мәшһур олан улдуз каталогунда топланмышдыр. Мараға рәсәдханасы илә Ханбалыг (индики Пекин) рәсәдханасы сых әлагәдә олмушдур. Ханбалыг рәсәдханасы Мараға рәсәдханасынын мүтәхәссисләри тәрәфиндән тикилмишдир.

Ханбалыг рәсәдханасынын елми рәһбәри Ко-шу-тезин Нәсирәддин Тусинин тә'сири алтында тригонометриjа илә мәшғул олмушдур.

Буну да геjд етмәк лазымдыр ки, Мараға рәсәдханасынын тәдгигатчылары астрономиjа елмини тәк нәзәри чәһәтдән инкишаф етдирмәклә кифаjәтләнмәjиб мүшаһидә үчүн лазым олан аләтләр дә ихтира етмишләр. Мараға рәсәдханасында jер вә улдуз глобусу һазырланмышдыр. Бир улдуз глобусу һазырда Шәрги Алманиjанын Дрезден шәһәриндә, XVI әсрдә тәшкил едилмиш „Риjазиjjат физика салону“ адлы елми чиһазлар музеjиндә сахланылыр. Глобусун диаметри 140 *мм* олуб бүрүнч, күмүш вә гызылдан һазырланмышдыр. Глобусун үзәриндәки jазылардан мә'лум олмушдур ки, ону Мәһәммәд Ибн Мүвәjидәддин милади 1279-чу илдә һазырламышдыр.

Бә'зиләринә көрә дивар даирәсини 1579-чу илдә Авропада илк рәсәдхананын бинасыны гоjан Тихо-Брahe кәшф етмишдир. Лакин бу аләт 1260-чы илдә Азәрбаjчанын Мараға рәсәдханасында ишләдилмишдир.

XIV әсрдә Jахын вә Орта Шәрг Теjмурләнк тәрәфиндән тутулур. XV әсрин башланғычында Теjмурләнкин нәвәси Улуг бәj, Сәмәргәндә jени елми мәркәз тәшкил едир. Улуг бәj алимләрә һөрмәт едир, өзү дә астрономиjа елми илә мәшғул олурду. Сәмәргәнд рәсәдханасынын ән бөjүк елми ишчиси олан Әл-Каши زيج خاقانى (Хаган улдуз чәдвәли)-ни Сәмәргәндә кәлмиш Улуг бәjин атасы Шапурун адына дүзәлтмишдир. Бу чәдвәллəр Нәсирәддин Тусинин—Елхан чәдвәлинин тәкмилләшдирилмишидир. Әл-Кашинин رسالة المحيطيه (Чевrә һаггында трактат) әсəри астрономиjа елминә һәср олунмушдур. Бунлардан әлавә, Әл-Каши Сәмәргәнд рәсәдханасынын мүшаһидәләри нәтичәсиндә زيج جديد گر گانى (jени гурган улдуз чәдвәли)-нин дүзәлмәсиндә иштирак етмишдир.

Милади X әсрин ахырларындан башлаjараг Jахын вә Орта Шәргин сиjаси вәзиjjәти дәjишир. Бағдад хилафәти зәифләмәjә башлаjыр. Сәлчуг вә Моғулларын истиласы, Сәлиб jүрүшләри Бағдад хилафәтинин вәзиjjәтини алт-үст едир. Сакит һәjат позулур. Елми һәjатда да тәнәззүл әмәлә кәлир. Нәтичәдә Гаһирә вә Әндәлис елми-тәдгигат ишиндә Бағдадын jерини тутур. Буна бахмаjараг, XV әсрин орталарына кими астрономиjа елми Jахын вә Орта Шәргдә

инкишаф етмишдир. Сонралар шəраитдən асылы олараг ријази фикирлəр мүхтəлиф јолларла инкишаф етмəјə башлады. Капитализмин инкишаф етдији Авропа шəраитиндə ријазијјат сəмəрəли инкишаф едир. Керидə галмыш феодализм гурулушу шəраитиндə исə Јахын вə Орта Шərг ријазијјаты (Бөјүк Октјабр сосиалист ингилабына гədəр) Авропадакы сүр'əтлə ирəлиләјə билмəмишдир.

Бурада көстəриләнлəр Јахын вə Орта Шəргин ријазијјат тарихи үчүн олдугча аздыр. Чүнки ады чəкилмиш алимлəрин чохларынын елми ирсləри сон заманлар өјрənилмишдир. Бундан əлавə, бир чох алимлəрин елми ирсləри һəлə дə јахшы өјрənилмəмишдир. Бə'зи алимлəрин əсəрləринин ады чəкилирсə дə бу əсəрлəр тапылмыр. Хүсуси илə X əсрə гədəр Јахын вə Орта Шəргин ријазијјат алимлəринин елми ишləри һаггында тəгрибən һеч бир мə'лумат јохдур. Күман едилир ки, һərби јүрүшлəр заманы вə хүсусən əрəбləрин истиласы дөврүндə китабханалар јандырылдыгда елми ирсləр мəһв едилмишдир. Белə олмаса иди, ерамыза гədəр, һəр бир чəһəтдən Јунаныстанла рəгиб олан Јахын вə Орта Шəргин һəмин дөвр үчүн, зənкин елми ирси галмалы иди. Лакин белə елми ирсləр галмаса да инамла демək олар ки, гədим јунанларын адына бағлы олан ријази фикирлəрин мүһүм һиссəси Јахын вə Орта Шəргдə һазырланмыш вə јунанларын гədим китабларында əкс етдирилмишдир.

ƏДƏБИЈЈАТ

1. Гуламһүсејн Мүсаһиб. Хəјјамын чəбр вə мүгабиləси, 1939, Теһран (фарс дилиндə).
2. Ф. Н. Гасымханов. Тəбиəтшүнаслыг вə Техника Тарихи Институтунун əсəрləри, I чилд, М. 1954.
3. Каган В. Ф. Основания геометрии, т. 1 М.—Л., 1949.
4. Маммедбейли. Г. Д. Звездный глобус Марагинской обсерватории. Уч. зап. Азгосуниверситета 1955.
5. Мамедбейли Г. Д. Мухаммед Насирэддин Туси о теории параллельных линий и теории отношений. Баку, 1959.
6. Нəсирəддин Туси Мəһəммəд. Тəһрире-еглидис. Рома, 1594 (əрəб. дилиндə).
7. Розенфельд Б. А. „Историко-математические исследования", вып. IV 1951.
8. Розенфельд Б. А. Ключ к арифметике. [Трактат об окружности. ГИИТТЛ. М. 1956.
9. Розенфельд Б. А. „Историко-математические исследования" вып. XI, М., 1958.
10. Розенфельд Б. А., Юшкевич А. П. Математика стран Ближнего и Среднего Востока в средние века. „Советское востоковедение" № 6, 1958.
11. Халилов З. И. Насириддин Тусинин. ријази əсəрləри һаггында. Бакы, 1956.

К. М. Мамедов (Хайями)

## О математике Ближнего и Среднего Востока IX—XV вв.

РЕЗЮМЕ

В статье дается обзор работ ближневосточных и средневосточных математиков IX—XV вв. в области арифметики, алгебры, геометрии, тригонометрии и астрономии.

Наряду с описанием научных заслуг ученых Абул Вафа, Омар Хайяма, Насирэддина Туси, Ал-Каши, Беттани, кратко освещается роль Марагинской и Самаркандской обсерваторий в развитии науки.

Кроме того, в статье дается краткий обзор последних работ советских ученых, посвященных истории восточной математики этого периода.

АЗƏРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХƏБƏРЛƏРИ
Физика-ријазијјат вə техника елмləри сериjасы, 1960, № 6

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1960, № 6

П. А. РАХМАНОВ

## ИССЛЕДОВАНИЯ ПОПЕРЕЧНОГО УДАРА ПО ГИБКОЙ НИТИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В СПЛОШНОЙ СРЕДЕ
(большие деформации)

В настоящей работе дается решение задач рассмотренных в работе [2] для случая больших деформаций. Нити из полимеров остаются упругими до больших значений деформации, превосходящих единицу. Поэтому предположения о малости по сравнению с единицей для полимерных материалов не имеют места. Это обстоятельство является существенным основанием для проведения настоящих исследований. В данном случае оказалось справедливыми качественные результаты предыдущей работы.

### § 1. Исследование движения нити в сплошной среде при постоянной скорости удара, когда сила сопротивления перпендикулярна к элементу нити

Если обозначить через $\bar{x}$ продольное, а через $\bar{y}$ поперечное смещение частиц нити и если направить ось $ox$ вдоль нити, ось $oy$ перпендикулярно к нити, то уравнение движения ее будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial s_0}(T\cos\theta) - Ay_t^2(1+\varepsilon)\sin\theta \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial s_0}(T\sin\theta) - Ay_t^2(1+\varepsilon)\cos\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (1.2)$$

Здесь $\rho_0$—масса единицы длины недеформированной нити, $s_0$—лагранжева координата частицы нити, $\varepsilon$—деформация элемента нити $T=T(\varepsilon)$ напряжения нити, как известно

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s_0}\right)^2} - 1$$

или

$$\frac{\partial y}{\partial s_0} = -(1+\varepsilon)\sin\theta \qquad \frac{\partial x}{\partial s_0} = (1+\varepsilon)\cos\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (1.3)$$

В работе [2] дано приближенное решение движения нити в сплошной среде при малых деформациях с постоянной и переменной скоростями удара. Исследование с постоянной скоростью удара дано для того, чтобы узнать поведение параметров на граничных условиях, так как поведение граничных параметров с переменной скоростью удара не было ясным. Поэтому в данной работе исследуется движе-

ние нити сперва постоянной и затем переменной скоростями удара в данном случае при больших деформациях. Как и в работе [2], в данной работе допущенное приближение сохраняется.

Положим 1) $x_{tt}=0$, в силу того, что смещение в продольном направлении мало, и 2) $y_{tt}=\frac{dv_0}{dt}$. Так как мы рассматриваем удар с постоянной скоростью, тогда $\frac{dv_0}{dt}=0$, поэтому уравнения движения нити (1.1) и (1.2) можно привести к следующему виду

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial s_0}(T\cos\theta)-Ay_t^2(1+\varepsilon)\sin\theta=0$$

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial s_0}(T\sin\theta)+Ay_t^2(1+\varepsilon)\cos\theta=0$$

или в упругом случае получим

$$a_0^2\frac{\partial}{\partial s_0}(\varepsilon\cos\theta)-Ay_t^2(1+\varepsilon)\sin\theta=0 \quad \ldots\ldots \quad (1.4)$$

$$a_0^2\frac{\partial}{\partial s_0}(\varepsilon\sin\theta)+Ay_t^2(1+\varepsilon)\cos\theta=0 \quad \ldots\ldots \quad (1.5)$$

Эти уравнения можно представить в виде:

$$a_0^2\cos\theta\frac{\partial\varepsilon}{\partial s_0}-a_0^2\varepsilon\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial s_0}=Ay_t^2(1+\varepsilon)\sin\theta$$

$$a_t^2\sin\theta\frac{\partial\varepsilon}{\partial s_0}+a_0^2\varepsilon\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial s_0}=-Ay_t^2(1+\varepsilon)\cos\theta,$$

откуда получаем

$$a_0^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial s_0}=0 \quad (1.6)$$

$$a_0^2\varepsilon\frac{\partial\theta}{\partial s_0}=Ay_t^2(1+\varepsilon), \quad (1.7)$$

где $A=\frac{c_1\rho_1 d}{2F_0\rho_0}$

Из уравнения (1.6) видно, что $\varepsilon$ не зависит от $s_0$, т. е.

$$\varepsilon=\varepsilon_0(t)=\varepsilon_1(t), \quad (1.8)$$

где $\varepsilon_0$—деформация в точке удара, $\varepsilon_1$—деформация на волне сильного разрыва. Кроме того, на волне сильного разрыва из работы [1] известно следующее соотношение

$$\frac{ds_0'}{dt}=\frac{b+u}{1+\varepsilon_1}=\frac{b+x_t'}{(1+\varepsilon_1)\cos\theta_1}=\frac{y_t'}{(1+\varepsilon_1)\sin\theta_1}=a_0\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1}},$$

откуда имеем

$$\frac{ds_0'}{dt}=a_0(1-\cos\theta_1) \quad (1.9)$$

$$\varepsilon_1=\frac{(1-\cos\theta_1)^2}{\cos\theta_1(2-\cos\theta_1)} \quad (1.10)$$

$$b=a_0\frac{1-\cos\theta_1}{2-\cos} \quad (1.11)$$



$$y_t'=a_0\frac{\sin\theta_1(1-\cos\theta_1)}{\cos\theta_1(2-\cos\theta_1)} \quad (1.12)$$

Дифференцируя равенства (1.10) и (1.12) находим

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt}=\frac{2\sin\theta_1(1-\cos\theta_1)}{\cos^2\theta_1(2-\cos\theta_1)^2}\frac{d\theta_1}{dt} \quad (1.13)$$

$$\frac{dy_t'}{dt}=a_0\frac{(2+\cos^2\theta_1)(1-\cos\theta_1)}{\cos^2\theta_2(2-\cos\theta_1)^2}\frac{d\theta_1}{dt}. \quad (1.14)$$

С другой стороны на волне сильного разрыва имеем следующие соотношения.

$$\frac{d\theta_1}{dt}=\frac{\partial\theta_1}{\partial t}+\frac{\partial\theta_1}{\partial s_0'}\frac{ds_0'}{dt} \quad (1.15)$$

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt}=\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t}+\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial s_0'}\frac{ds_0'}{dt} \quad (1.16)$$

$$\frac{dy_t'}{dt}=\frac{\partial y_t'}{\partial t}+\frac{\partial y_t'}{\partial s_0'}\frac{ds_0'}{dt} \quad (1.17)$$

Местное ускорение в первом приближении примем равным $\frac{dv_0}{dt}$, т. е. $\frac{\partial y_t'}{\partial t}=\frac{dv_0}{dt}$. Так как мы рассматриваем удар с постоянной скоростью, то $\frac{\partial y_t'}{\partial t}=\frac{dv_0}{dt}=0$. Дифференцируя первое соотношение (1.3) получим

$$\frac{\partial y_t}{\partial s_0}=-\sin\theta\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}-(1+\varepsilon)\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial t}\right] \quad (1.18)$$

Таким образом, выражения (1.15), (1.16), и (1.17) с учетом (1.13), (1.14), (1.18) и (1.6), (1.7) можно привести к следующему виду:

$$\frac{d\theta_1}{dt}=-Aa_0\frac{\sin^2\theta_1(1-\cos\theta_1)}{(2-\cos\theta_1)[3\cos^2\theta_1+(2-\cos\theta_1)(2-\cos^2\theta_1)]}.$$

Из полученного уравнения видно, что $\theta_1$ убывает со временем, значит $\varepsilon_1$ тоже убывает. Таким образом при больших деформациях тоже получается неожиданный результат. Из (1.8) видно, что $\varepsilon_0(t)$ убывает со временем.

Теперь рассмотрим случай когда материал нити удовлетворяет схеме Прандтля, т. е.

для $\varepsilon<\varepsilon_s$, $T=E\varepsilon$
для $\varepsilon>\varepsilon_s$, $T=T_s+E_1(\varepsilon-\varepsilon)$ (1.19)

Так как из работы (1) известно, что при отсутствии начальных напряжений

$$u=\int_0^{\varepsilon}a(\varepsilon)d\varepsilon.$$

В рассматриваемом случае

для $\varepsilon<\varepsilon_s$; $u=a_0\varepsilon$
для $\varepsilon>\varepsilon_s$; $u=(a_0-a_1)\varepsilon_s+a_1\varepsilon$ (1.20)

Тогда условия на волне сильного разрыва можно привести к следующему виду

$$\frac{ds_0'}{dt}=\frac{b+u}{1+\varepsilon_1}=\frac{b}{(1+\varepsilon_1)\cos\theta_1}=\frac{y_t'}{(1+\varepsilon_1)\sin\theta_1}=\sqrt{\frac{T_1}{\rho_0(1+\varepsilon_1)}}=b_1$$

отсюда

$$b=(1+\varepsilon_1)b_1-u\ . \tag{1.21}$$

$$\cos\theta_1=1-\frac{u}{(1+\varepsilon_1)b_1} \tag{1.22}$$

$$y_t'=\sqrt{u[2(1+\varepsilon_1)b_1-u]} \tag{1.23}$$

Дифференцируя (1.22) и (1.23) получим

$$\frac{d\theta_1}{dt}=\frac{2a_1(1+\varepsilon_1)b_1^2-u(b_1^2+a_1^2)}{(1+\varepsilon_1)2b_1^2\sqrt{u[2(1+\varepsilon_1)b_1-u]}}\frac{d\varepsilon_1}{dt}\ . \tag{1.24}$$

$$\frac{dy_t'}{dt}=\frac{a_1[2(1+\varepsilon_1)b_1-u]b_1+u[b_1^2+a_1^2-a_1b_1]}{2b_1\sqrt{u[2(1+\varepsilon_1)b_1-u]}}\frac{d\varepsilon_1}{dt}\ . \tag{1.25}$$

Уравнения движения в рассматриваемом случае можно привести к следующему виду

$$a_1^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial s_0}=0 \tag{1.26}$$

$$\frac{T}{\rho_0}\frac{d\theta}{ds_0}=-Ay_t^2(1+\varepsilon)\ . \tag{1.27}$$

Из уравнения (1.26) видно, что

$$\varepsilon=\varepsilon_1(t)=\varepsilon_0(t)\ . \tag{1.28}$$

Уравнения (1.15) (1.16) и (1,17) с учетом (1.26) и (1.27) напишем в следующем виде

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt}=\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t}$$

$$\frac{d\theta_1}{dt}=\frac{\partial\theta_1}{\partial t}-\frac{A}{b_1}y_t'^2$$

$$\frac{dy_t'}{dt}=-\sin\theta_1 b_1\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t}-(1+\varepsilon_1)\cos\theta_1 b_1\frac{\partial\theta_1}{\partial t}$$

или

$$\frac{\partial\theta_1}{dt}=\frac{2a_1(1+\varepsilon_1)b_1^2-u(b_1^2+a_1^2)}{2(1+\varepsilon_1)b_1^2\sqrt{u[2(1+\varepsilon_1)b_1-u]}}\frac{d\varepsilon_1}{dt}+\frac{A}{b_1}y_t'^2$$

$$\frac{a_1[2(1+\varepsilon_1)b_1-u]b_1+u[b_1^2+a_1^2-a_1b_1]}{2b_1\sqrt{u[2(1+\varepsilon_1)b_1-u]}}\frac{d\varepsilon_1}{dt}=$$

$$=-b_1\sin\theta_1\frac{d\varepsilon_1}{dt}-(1+\varepsilon_1)b_1\cos\theta_1\frac{\partial\theta_1}{\partial t}$$

Исключая $\frac{\partial\theta_1}{\partial t}$ получим

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt}=-\frac{2Ab_1\sqrt{u^3}[(1+\varepsilon_1)b_1-u][2(1+\varepsilon_1)b_1-u]}{4b_1^2[a_1(1+\varepsilon_1)+4][b_1(1+\varepsilon_1)-u]+a_1^2u^2+3u^2b_1^2}, \tag{1.29}$$

где

$$u=(a_0-a_1)\varepsilon_s+a_1\varepsilon_1$$



$$b_1=\sqrt{\frac{(a_0^2-a_1^2)\varepsilon_s+a_1^2\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1}}.$$

Таким образом, из (1.29) видно, что при схеме Прандтля, деформация на волне сильного разрыва падает со временем, следовательно на основе (1.28) падает $\varepsilon_0$.

## § 2. Исследование движения нити в сплошной среде при переменной скорости удара когда сила сопротивления перпендикулярна к элементу нити

В первом приближении уравнения движения (1.1) и (1.2) можно привести к следующему виду

$$a_0^2\frac{\partial}{\partial s_0}(\varepsilon\cos\theta)-Ay_t^2(1+\varepsilon)\sin\theta=0 \tag{2.1}$$

$$\frac{dv_0}{dt}=-a_0^2\frac{\partial}{\partial s_0}(\varepsilon\sin\theta)-Ay_t^2(1+\varepsilon)\cos\theta \tag{2.2}$$

Эти уравнения можно представить в виде

$$a_0^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial s_0}=-\frac{dv_0}{dt}\sin\theta \tag{2.3}$$

$$a_0^2\varepsilon\frac{\partial\theta}{\partial s_0}=-\frac{dv_0}{dt}\cos\theta-Ay_t^2(1+\varepsilon) \tag{2.4}$$

Таким образом уравнения (1.15), (1.16) и (1.17) с учетом (1.13), (1.14) и (2.3), (2.4) можно привести к следующему виду

$$\frac{d\theta_1}{dt}=-\frac{a_0^2A\sin^2\theta_1(1-\cos\theta_1)-\cos^3\theta_1(1+\cos\theta_1)(2-\cos\theta_1)^4\frac{dv_0}{dt}}{a_0(2-\cos\theta_1)[3\cos^2\theta_1+(2-\cos\theta)(2-\cos^2\theta_1)]} \tag{2.5}$$

Отсюда следует, что $\theta_1$ убывает в силу (1.13) $\varepsilon_1$ тоже убывает. Умножив (2.3) на (1+ε) и интегрируя получим

$$-\frac{dv_0}{dt}y_0=\frac{a_0^2}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_0)(2+\varepsilon_1+\varepsilon_0)\ . \tag{2.6}$$

Уравнение (2.6) показывает что $\varepsilon_1>\varepsilon_0$, так как $\varepsilon_1$ убывает со временем значит и убывает $\varepsilon_0$.

В уравнение первого приближения полагая $y_t=v_0$ и интегрируя получим

$$s_0'\frac{dv_0}{dt}=-a_0^2(\varepsilon_1\sin\theta_1-\varepsilon_0\sin\theta_0)-Av_0^3x_1\ . \tag{2.7'}$$

С другой стороны известно, что

$$A_1\frac{dv_0}{dt}=-a_0^2\varepsilon_0\sin\theta_0.$$

Исключив из полученных уравнений $\varepsilon_0$ получим

$$\frac{dv_0}{dt}=\frac{a_0^2\varepsilon_1\sin\theta_1+Av_0^2x_1}{s_0'+A_1}\ . \tag{2.8}$$

Подставляя в (2.5) имеем:

$$\frac{d\theta_1}{dt}=-\frac{a_0^2A(s_0'+A_1)\sin^2\theta_1(1-\cos\theta_1)+a_0^2\sin^3\theta_1\cos^2\theta_1(1-\cos\theta_1)}{a_0^2(s_0'+A_1)(2-\cos\theta_1)(3\cos^2\theta_1)+(2-\cos\theta_1)(2-\cos^2\theta_1)]}$$
$$\frac{(2-\cos\theta_1)^3+Av_0^2x'\cos^3\theta_1(1+\cos\theta_1)(2-\cos\theta_1)}{} \tag{2.9}$$

Таким образом, мы получили уравнения (1.9), (1.11) ,(2.8) и (2.9), которые после решения определяются $v_0$ $\theta_1$, $s_0$, $x'$ после чего из граничного условия $y_0 = \int_0^t v_0 dt$ определяется $y_0$ и подставляя в (2,6) можно определить $\varepsilon_0$.

В случае схемы Прандтля уравнения движения в первом приближении можно представить в виде

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial s_0}(T\cos\theta) = Ay_t^2(1+\varepsilon)\sin\theta \tag{2.10}$$

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial s_0}(T\sin\theta) = -Ay_t^2(1+\varepsilon)\cos\theta - \frac{dv_0}{dt} \tag{2,11}$$

или

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial T}{\partial s_0} = -\frac{dv_0}{dt}\sin\theta \tag{2.12}$$

$$\frac{T}{\rho_0}\frac{\partial\theta}{\partial s_0} = -\frac{dv_0}{dt}\cos\theta - Ay_t^2(1+\varepsilon) \tag{2.13}$$

В случае схемы Прандтля эти уравнения сводятся к следующим

$$a_1^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial s_0} = -\frac{dv}{dt}\sin\theta$$

$$[(a_0^2 - a_1^2)\varepsilon_s + a_1^2\varepsilon]\frac{\partial\theta}{\partial s_0} = -\frac{dv_0}{dt}\cos\theta - Ay_t^2(1+\varepsilon)$$

Из (1.15), (1.16) и (1.17) с учетом (2.12) (2.13) имеем

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{\partial\theta_1}{\partial t} - \frac{1}{(1+\varepsilon_1)b_1}\frac{dv_0}{dt}\cos\theta_1 - \frac{Ay_t^2}{b_1}$$

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t} - \frac{b_1}{a_1^2}\frac{dv_0}{dt}\sin\theta_1$$

$$\frac{dy_t'}{dt} = \frac{dv_0}{dt} - b_1\sin\theta_1\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t} - (1+\varepsilon_1)b_1\cos\theta_1\frac{\partial\theta_1}{\partial t}$$

или пользуясь (1.24) и (1.28) эти уравнения сводятся к следующим

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t} - \frac{b}{a_1^2}\frac{dv_0}{dt}\sin\theta_1$$

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial t} = \frac{2a_1(1+\varepsilon_1)b_1^2 - u(b_1^2+a_1^2)}{2b_1^2(1+\varepsilon_1)\sqrt{u[2(1+\varepsilon_1)b_1 - u]}}\frac{d\varepsilon_1}{dt} + \frac{1}{(1+\varepsilon_1)b_1}\frac{dv_0}{dt}\cos\theta_1 +$$

$$+\frac{Ay_t^2}{b_1}\frac{ab_1[2(1+\varepsilon_1)b_1 - u] + u[b_1^2 + a^2 - a_1b_1]}{2b_1\sqrt{u[2(1+\varepsilon_1)b_1 - u]}}\frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{dv_0}{dt} -$$

$$-b_1\sin\theta_1\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t} - (1+\varepsilon_1)b_1\cos\theta_1\frac{\partial\theta_1}{\partial t}$$

Исключая $\frac{d\varepsilon_1}{dt}$ и $\frac{\partial\theta_1}{\partial t}$ получим

$$\frac{4b_1^2[a_1(1+\varepsilon) + u][b_1(1+\varepsilon_1) - u] + u^2(a_1^2+3b_1^2)}{2(1+\varepsilon_1)b_1\sqrt{u[2(1+\varepsilon_1)b_1 - u]}}\frac{d\varepsilon_1}{dt} =$$

$$= -Au[2(1+\varepsilon_1)b_1 - u][(1+\varepsilon_1)b_1 - u] +$$

$$+\frac{u[a_1^2 - b_1^2][2(1+\varepsilon_1)b_1 - u]}{a_1^2b_1(1+\varepsilon_1)^2}\frac{dv_0}{dt} \tag{2.14}$$



Из полученного уравнения видно, что $\varepsilon_1$ со временем убывает.

Умножив уравнение (2.12) на $(1+\varepsilon)$ и после интегрирования получим

$$-\frac{dv_0}{dt}y_0 = \frac{a_1^2}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_1)(2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_0) \tag{2.15}$$

Из полученного уравнения видно, что $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$. Так как $\varepsilon_1$ убывает со временем, следовательно $\varepsilon_0$ тоже убывает со временем. Полагая в первом приближении $y_t = v_0$ в уравнение (2.11) и интегрируя, получим

$$s_0'\frac{dv_0}{dt} = [(a^2 - a_1^2)\varepsilon_s + a_1^2\varepsilon_0]\sin\theta_0 - [(a_0^2 - a_1^2)\varepsilon_s + a_1^2\varepsilon_1]\sin\theta_1 - Av_0^2x'$$

Уравнение движения тела можно написать в следующем виде:

$$A_1\frac{dv_0}{dt} = -[(a_0^2 - a_1^2)\varepsilon_s + a_1^2\varepsilon_0]\sin\theta_0.$$

Таким образом для $\frac{dv_0}{dt}$ получаем следующее уравнение

$$\frac{dv_0}{dt} = -\frac{[(a_0^2 - a_1^2)\varepsilon_s + a_1^2\varepsilon_1]\sin\theta_1 + Av_0^2x'}{A_1 + s_0'} \tag{2. 16}$$

С другой стороны имеем уравнения

$$\frac{dx'}{dt} = \sqrt{(1+\varepsilon_1)[(a_0^2 - a_1^2)\varepsilon_s + a_1^2\varepsilon_1]} - (a_0 - a_1)\varepsilon_s - a_2\varepsilon_1 \tag{2. 17}$$

$$\frac{ds_0'}{dt} = \sqrt{\frac{(a_0^2 - a_1^2)\varepsilon_s + a_1^2\varepsilon_1}{(1+\varepsilon_1)}} \tag{2. 18}$$

$$y_0 = \int_0^t v_0 dt \tag{2. 19}$$

Уравнения (2.14), (2. 16), (2. 17), (2. 18) и (2. 19) являются замкнутой системой обыкновенных дифференциальных уравнений, которые после интегрирования можно определить $\varepsilon_1$, $v_0$, $s_0$, $x'$, $y_0$ как функции времени, затем по уравнению (2. 15) определяется $\varepsilon_0$.

## § 3. Исследование движения нити в сплошной среде, когда сила сопротивления касательно к элементу нити

Уравнение движения нити в первом приближении напишем в следующем виде

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial s_0}(T\cos\theta) + Ay_t^2(1+\varepsilon)\cos\theta = 0 \tag{3. 1}$$

$$\frac{dv_0}{dt} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial s_0}(T\sin\theta) - Ay_t^2(1+\varepsilon)\sin\theta \tag{3. 2}$$

Рассмотрим случай линейной зависимости $T$ от $\varepsilon$, т. е. $T = E\varepsilon$. Имеем

$$a_0^2\frac{\partial}{\partial s_0}(\varepsilon\cos\theta) + Ay_t^2(1+\varepsilon)\cos\theta = 0 \tag{3. 3}$$

$$\frac{dv_0}{dt} = -a_0^2\frac{\partial}{\partial s_0}(\varepsilon\sin\theta) - Ay_t^2(1+\varepsilon)\sin\theta \tag{3. 4}$$

или

$$a_0^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0} = -\frac{dv_0}{dt} \sin\theta - A y_t^2 (1+\varepsilon) \tag{3.5}$$

$$a_0^2 \varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial s_0} = -\frac{dv_0}{ds} \cos\theta \tag{3.6}$$

Из условий на волне сильного разрыва находим

$$\frac{ds_0'}{dt} = a_0 \sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1}}$$

$$\frac{dx'}{dt} = a_0 \sqrt{\varepsilon_1(1+\varepsilon_1)} - a_0\varepsilon_1$$

$$y_t' = a_0 \sqrt{(1+\varepsilon_1)\left[2\sqrt{\varepsilon_1(1+\varepsilon_1)} - \varepsilon_1\right]}$$

$$\cos\theta_1 = 1 - \frac{\sqrt{\varepsilon_1(1+\varepsilon_1)}}{1+\varepsilon_1}$$

Если вводить обозначение $b_1 = a_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1}}$, тогда получим

$$\frac{dx'}{dt} = (1+\varepsilon_1) b_1 - a_0\varepsilon_1 \tag{3.7}$$

$$\cos\theta_1 = 1 - \frac{b_1}{a_0}; \quad \sin\theta_1 = \frac{1}{a_0}\sqrt{b_1(2a - b_1)} \tag{3.8}$$

$$y_t' = \frac{1}{a_0}(1+\varepsilon_1) b_1 \sqrt{b_1(2a_0 - b_1)} \tag{3.9}$$

Дифференцируя находим

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{a_0^2}{2b_1\sqrt{b_1(2a_0 - b_1)}} \frac{d\varepsilon_1}{dt} \tag{3.10}$$

$$\frac{dy_t'}{dt} = \frac{3a_0^2 - b_1(2a_0 - b_1)}{2\sqrt{b_1(2a_0 - b_1)}} \frac{d\varepsilon_1}{dt} \tag{3.11}$$

Уравнения (1. 15), (1. 16) и (1. 17) в рассматриваемом случае приводятся к следующему виду

$$\frac{a_0^2}{2\sqrt{b_0^3}\cdot\sqrt{2a_0 - b_1}} \frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{\partial\theta_1}{\partial t} - \frac{1}{a_0^3} \frac{(a_0 - b_1)^2(a_0 + b_1)}{b_1} \frac{dv_0}{dt}$$

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t} - \frac{\sqrt{(2a_0 - b_1)b_1^3}}{a_0^3} \frac{dv_0}{dt} \frac{a_0^2 A b_1^4 \cdot (2a_0 - b_1)}{(a_0^2 - b_1^2)^3}$$

$$\frac{3a_0^2 - b_1(2a_0 - b_1)}{2\cdot\sqrt{(2a_0 - b_1)b_1}} \frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{dv_0}{dt} - \frac{\sqrt{b_1^3}}{a_0}\sqrt{2a_0 - b_1}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t} - \frac{a_0 b_1}{a_0 + b_1}\frac{\partial\theta_1}{\partial t}$$

Из этих полученных уравнений имеем:

$$\left[\frac{3a_0^2 - b_1(2a_0 - b_1)}{2\cdot\sqrt{2a_0 - b_1)b_1}} + \frac{\sqrt{b_1^3}}{a_0}\sqrt{a_0 - b_1} + \frac{a_0^3}{2\sqrt{b_1}\cdot(a_0 + b_1)\sqrt{2a_0 - b_1}}\right]\frac{d\varepsilon_1}{dt} =$$

$$= \left[1 - \frac{b_1^3(2a_0 - b_1)}{a_0^4} - \frac{(a_0 - b_1)}{a_0^2}\right]\frac{dv_0}{dt} - a_0 A \frac{\sqrt{b_1^{11}(2a_0 - b_1)^3}}{(a_0^2 - b^2)^3} \tag{3.12}$$



Из полученного выражения видно, что скорость деформации отрицательна, т. е. $\frac{d\varepsilon_1}{dt} < 0$ для всего времени, отсюда следует, что $\varepsilon_1$ убывает.

Для исследования поведения функции $\varepsilon_0$ интегрируем уравнения (3. 3) и (3. 4)

$$a_0^2(\varepsilon_1\cos\theta_1 - \varepsilon_0\cos\theta_0) + A v_0^2 x' = 0 \tag{3.13}$$

$$\frac{dv_0}{dt} s_0' = -a_0^2(\varepsilon_1\sin\theta_1 - \varepsilon_0\sin\theta_0) - A v_0^3 y_0 \tag{3.14}$$

С другой стороны

$$A_1 \frac{dv_0}{dt} = -a_0^2 \varepsilon_0 \sin\theta_0.$$

Исключив $\frac{dv_0}{dt}$ находим

$$a_0^2\varepsilon_0\cos\theta_0 = a_0^2\varepsilon_1 \quad \cos\theta_1 + A v_0^2 x'$$

$$a_0^2\varepsilon_0\sin\theta_0 = \frac{A_1}{s_0' + A_1}\left(a_0^2\varepsilon_1\sin\theta_1 + A v_0^2 y_0\right)$$

или

$$\varepsilon_0\cos\theta_0 = \varepsilon_1\cos\theta_1 + A\bar{v}_0^2 x'$$

$$\varepsilon_0\sin\theta_0 = \frac{A_1}{s_0' + A_1}\left(\varepsilon_1\sin\theta_1 + A\bar{v}_0^2 y_0\right)$$

Отсюда

$$\varepsilon_0^2 = \left(\varepsilon_1\cos\theta_1 + A v_0^2 x'\right)^2 + \frac{A_1^2}{(s_0' + A_1)^2}\left(\varepsilon_1\sin\theta_1 + A\bar{v}_0^2 y_0\right)^2 \tag{3.15}$$

Из полученного уравнения видно, что $\varepsilon_0 > \varepsilon_1$. Для исследования возрастания или убывания деформации $\varepsilon_0$ рассмотрим удар с постоянной скоростью. Так как при ударе с постоянной скоростью удара $\frac{dv_0}{dt} = 0$, тогда из уравнения (3.12) видно, что $\varepsilon_1$ убывает со временем.

Уравнение (3.6) показывает, что

$$\theta = \theta_0(t) = \theta_1(t).$$

Интегрируя уравнение (3.5) получим

$$1 + \varepsilon_0 = (1+\varepsilon_1) e^{A\bar{v}_0^2 s_0'}. \tag{3.16}$$

Из этого уравнения видно, что во-первых $\varepsilon_0 > \varepsilon_1^*$, во-вторых $\varepsilon_0$ со временем растет. Таким образом при ударе с переменной скоростью $\varepsilon_0$ растет со временем. Так и должно быть, потому что сила сопротивления действует на элемент нити касательно при случае в конце удара.

Теперь рассмотрим случай когда материал нити удовлетворяет схеме Прандтля. В этом случае уравнения (1. 15), (1. 16) и (1. 17) с учетом (1. 24) и (1. 25) можно привести к следующему виду

$$\frac{2a_1(1+\varepsilon_1)b_1^2 - u(b_1^2 + a_1^2)}{2b_1^2(1+\varepsilon_1)\sqrt{u[2(1+\varepsilon_1)b_1 - u]}} \frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{\partial\theta_1}{\partial t} - \frac{\cos\theta_1}{(1+\varepsilon_1)b_1}\frac{dv_0}{dt}$$

$$\frac{a_1[2(1+\varepsilon_1)b_1^2 - u]b_1 + u[b_1^2 + a_1^2 - a_1 b_1]}{2b_1\sqrt{u[2(1+\varepsilon_1)b_1 - u]}} \frac{d\varepsilon_1}{dt} =$$

$$= \frac{dv_0}{dt} - b_1 \sin\theta_1 \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t} - (1+\varepsilon_1) b_1 \cos\theta_1 \frac{\partial\theta_1}{\partial t}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t} - \frac{b_1 \sin\theta_1}{a_1^2}\frac{dv_0}{dt} - \frac{A}{a_1^2} y_1^2 (1+\varepsilon_1) b_1.$$

Исключив $\frac{\partial\theta_1}{\partial t}$ и $\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t}$ получим

$$\frac{4b_1^2 a_1(1+\varepsilon_1)+u][b_1(1+\varepsilon_1)-u]+u^2(a_1^2+3b_1^2)}{2b_1^2(1+\varepsilon_1)\sqrt{u[2(1+\varepsilon_1)b_1-u]}}\frac{d\varepsilon}{dt} =$$

$$= \frac{Ab_1}{a_1^2}\sqrt{\{[2b_1(1+\varepsilon_1)-u]\}^3} + \frac{(a_1^2-b_1^2)u[2(1+\varepsilon_1)b_1-u]}{a_1^2 b_1^2(1+\varepsilon_1)^2}\frac{dv_0}{dt}$$

Таким образом мы доказали, что $\frac{d\varepsilon_1}{dt}<0$, т. е. $\varepsilon_1$ убывает со временем.

Чтобы исследовать поведение функции $\varepsilon_0$ уравнения движения представим в следующем виде

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial s_0}(T\cos\theta) = -Av_0^2(1+\varepsilon)\cos\theta$$

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial s_0}(T\sin\theta) = -\frac{dv_0}{dt} - Av_0^2(1+\varepsilon)\sin\theta$$

Интегрируя находим

$$\frac{1}{\rho_0}(T_1\cos\theta_1 - T_0\cos\theta_0) = -Av_0^2 x'$$

$$\frac{1}{\rho_0}(T_1\sin\theta - T_0\sin\theta_0) = -\frac{dv_0}{dt}s_0' - Av_0^2 y_0$$

Имея ввиду уравнение движения тела второе уравнение можно привести к следующему виду

$$\frac{T_0}{\rho_0}\sin\theta_0 = \frac{A_1}{A_1+s_0'}\left(\frac{T_1}{\rho_0}\sin\theta_1 + Av_0^2 y_0\right).$$

Исключив $\theta_0$ получим

$$[(a_0^2-a_1^2)\varepsilon_s + a_1^2\varepsilon_0]^2 = \{[(a_0^2-a_1^2)\varepsilon_s + a_1^2\varepsilon_1]\cos\theta_1 + Av_1^2 X'\}^2 +$$

$$+ \frac{A_1^2}{(A_1+s_0')^2}\{[(a_0^2-a_1^2)\varepsilon_s + a_1^2\varepsilon_1]\sin\theta_1 + Av_0^2 v_0)\}^2$$

Таким образом мы получили, что $\varepsilon_0>\varepsilon_1$.

При ударе с постоянной скоростью уравнение движения представим в следующем виде:

$$a_1^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial s_0} = -Av_0^2(1+\varepsilon)$$

$$[(a_0^2-a_1^2)\varepsilon_s + a_1^2\varepsilon]\frac{\partial a}{\partial s_0} = 0.$$

Второе уравнение показывает, что

$$\theta = \theta_0(t) = \theta_1(t).$$



Интегрируя первое уравнение находим

$$1+\varepsilon_0 = (1+\varepsilon_1)e^{\frac{Av_0^2 s_0'}{a_1^2}}.$$

Таким образом мы доказали, что при ударе с постоянной скоростью, когда материал нити удовлетворяет схеме Прандтля $\varepsilon_0>\varepsilon_1$ и $\varepsilon_0$ возрастает со временем. Следовательно $\varepsilon_0$ возрастает при ударе с переменной скоростью.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А. О косом ударе по гибкой нити с большими скоростями при наличии трения. ПММ, т. IX, вып. 6, 1945.

2. Рахманов П. А. Исследования при малых деформациях поперечного удара по гибкой нити, находящейся в сплошной среде. „Изв. АН Азерб. ССР", сер. физ.-технич. 1960, № 5.

П. Ә. Рəһманов

## Сəлт мүһитдə еластики телə енинə зəрбəнин арашдырылмасы

### ХҮЛАСƏ

Мəгаләдə су вə ја газ ичəрисиндə јерləшən полимердən дүзəлмиш еластики телə енинə зəрбə заманы əмələ кəлən кəркинлик һалы арашдырылыр.

Телин һəрəкət тənликləри гејри-хəтти икинчи тəркибли, һиперболик типли хүсуси төрəмəли тənликləр системиндən ибарətдир. Кичик деформасијаларда гојулмуш мəсələнин арашдырылмасында олдуғу кими, бу мəгаләдə биринчи јахынлашмада гојулмуш мəсələнин һəлли (бөјүк деформасијаларда) ади диференсиал тənликləр үчүн мүəјјən Коши мəсələси һəллинə кəтирилир.

Мəгаләдə гојулмуш мəсələ кичик деформасијалар үчүн олдуғу кими, дөрд хүсуси һалда арашдырылыр.

Арашдырылан тəдгигатдан ашағыдакы нəтичə əлдə едилмишдир.

Мүгавимət гүввəси телин елементинə перпендикуљар олдуғу һəр ики һалда деформасија заман кечдикчə азалыр. Бу алынан нəтичə кичик деформасијалардакы арашдырманын дүзкүн олмасыны бир даһа сүбут едир.

Гејд етмək лазымдыр ки, апарылан тəдгигат кејфијјət чəһətдən мəсələнин галан јахынлашмалары үчүн дə өз күчүндə галыр.

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазијјат вә техника елмләри серијасы, 1960, № 6

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1960, № 6

А. М. ГУСЕЙНБЕКОВА

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ И СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ В ЗАДАЧАХ С ПОТЕНЦИАЛЬНЫМИ ЯМАМИ

В заметке дается асимптотическое разложение собственных функций и собственных значений обыкновенного самосопряженного дифференциального оператора второго порядка с разрывными коэффициентами, причем коэффициент при самой функции большой в подинтервале и содержит параметр.

Мы рассматриваем дифференциальный оператор на интервале $(-1, +\infty)$.

Рассматривается задача асимптотического разложения по параметру $\varepsilon$ собственных функций и собственных значений оператора

$$L_\varepsilon y \equiv -\frac{d}{dx}\left[\kappa(x)\frac{dy}{dx}\right] + c_\varepsilon(x)\,y, \tag{1}$$

где

$$\kappa(x) = \begin{cases} \kappa(\bar{x}) & -1<x<0 \quad (D^-)^* \\ \kappa^+(x) & 0<x<+\infty \quad (D^+) \end{cases}$$

$$c_\varepsilon(x) = \begin{cases} c(\bar{x}) & -1<x<0 \quad (D^-) \\ \dfrac{c^+(x)}{\varepsilon^2} & 0<x<+\infty \quad (D^+) \end{cases}$$

$$c(\bar{x})\geqslant 0, \quad c_0^+(x)\geqslant p_0^2>0, \quad \kappa(x)>0 \tag{2}$$

при условиях склейки

$$y\big|_{x=-0} = y\big|_{x=+0}, \qquad \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=-0} = \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=+0} \tag{3}$$

и граничных условиях

$$y\big|_{x=-1} = 0, \quad y\big|_{x=+\infty} = 0 \tag{4}$$

Разлагая коэфициенты оператора $L_\varepsilon$ в $D^+$ по степеням $x$ по формуле Тейлора и делая замену переменной $\frac{x}{\varepsilon}=t$ найдем второе расщепление оператора $L_\varepsilon$ вблизи точки $x=0$ со стороны $D^+$ в виде

$$L_\varepsilon v \equiv \frac{1}{\varepsilon^2}\left[M_0+\varepsilon M_1+\varepsilon^2 M_2+\ldots\right] v, \tag{5}$$

* Интервал $(-1,0)$ в дальнейшем обозначается $D^-$, а интервал $(0, +\infty)$ $D^+$.

где

$$M_0 v \equiv -\kappa_0^+ \frac{d^2 v}{dt^2} + c_0^+ v \tag{6}$$

$$M_1 v \equiv -\kappa_1^+ t \frac{d^2 v}{dt^2} - \kappa_1^+ \frac{dv}{dt} + c_1^+ t\, v$$

$$M_2 v \equiv -\kappa_2^+ t^2 \frac{d^2 v}{dt^2} - \kappa_2^+ 2t \frac{dv}{dt} + c_2^+ t^2 v.$$

Здесь

$$\kappa_i^+ = \frac{1}{i!} \frac{d^i \kappa^+(x)}{d x^i}\bigg|_{x=0}, \qquad c_i^+ = \frac{1}{i!} \frac{d^i c^+(x)}{d x^i}\bigg|_{x=0} \quad (i=0, 1, 2..)$$

Функция $v$ зависит от $t$, т. е. $v = v(t)$.

Из условия (2) ясно, что $\kappa_0^+ > 0$, $c_0^+ > 0$.

Асимптотическое разложение $i$-го собственного значения $\lambda_{i\varepsilon}$ оператора $L_\varepsilon$ будем искать в виде:

$$\lambda_{i\varepsilon} = \mu_0 + \varepsilon\mu_1 + \ldots + \varepsilon^m \mu_m + \ldots, \tag{7}$$

а соответствующей собственной функции $y_{i\varepsilon}$ оператора $L_\varepsilon$ в виде:

$$y_{i\varepsilon} = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \ldots + \varepsilon^m \omega_m + \ldots \quad \text{в } D^- \tag{8}$$

$$y_{i\varepsilon} = v_0 + \varepsilon v_1 + \ldots + \varepsilon^m v_m + \ldots \quad \text{в } D^+ \tag{9}$$

Для нахождения $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots$ в формуле (7) и $\omega_0, \omega_1 \ldots$ $v_0, v_1 \ldots$ в формулах (8), (9) подставляем эти разложения в уравнение для собственной функции

$$0 \equiv (L_\varepsilon - \lambda_{i\varepsilon} I)\, y_{i\varepsilon} = \left[ -\frac{d}{dx}\left(\kappa(x) \frac{d}{dx}\right) + c(x) - (\mu_0 + \varepsilon\mu_1 + \right.$$

$$\left. + \ldots) I \right] (\omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \ldots) \text{ в } D^- \tag{10}$$

$$0 \equiv (L_\varepsilon - \lambda_{i\varepsilon} I)\, y_{i\varepsilon} = [\varepsilon^2 (M_0 + \varepsilon M_1 + \ldots) - (\mu_0 + \varepsilon\mu_1 +$$

$$+ \ldots) I] (v_0 + \varepsilon v_1 + \ldots) \text{ в } D^+ \tag{11}$$

и в условиях „склейки"

$$\omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \ldots + \varepsilon^m \omega_m + \ldots \Big|_{x=-0} = v_0 + \varepsilon v_1 +$$

$$+ \ldots \varepsilon^m v_m + \ldots \Big|_{t=+0} \tag{12}$$

$$\frac{d\omega_0}{dx} + \varepsilon \frac{d\omega_1}{dx} + \ldots + \varepsilon^m \frac{d\omega_m}{dx} + \ldots \Big|_{x=-0} = \frac{d v_0}{dx} + \varepsilon \frac{d v_1}{dx} + \ldots +$$

$$+ \varepsilon^m \frac{d v_m}{dx} + \ldots \Big|_{x=+0} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{d v_0}{dt} + \frac{d v_1}{dt} + \ldots + \varepsilon^{m-1} \frac{d v_m}{dt}\Big|_{t=+0} \tag{13}$$

и в условиях (4)

$$\omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \ldots + \varepsilon^m \omega_m + \ldots \Big|_{x=-1} = 0$$

$$v_0 + \varepsilon v_1 + \ldots + \varepsilon^m v_m + \ldots \Big|_{t=+\infty} = 0 \tag{13'}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon$ в уравнениях (10), (11), (12), (13), (13'), получаем систему уравнений:

$$-\frac{d}{dx}\left(\kappa(x) \frac{d\omega_0}{dx}\right) + c(x)\omega_0 - \mu_0\omega_0 = 0 \quad \text{(Из (10))} \tag{14}$$



$$\omega_0\big|_{x=-0} = v_0\big|_{t=+0}, \quad \omega_0\big|_{x=-1} = 0 \quad \text{(Из (12), (13'))} \tag{14}$$

$$-\frac{d}{dx}\left(\kappa(x) \frac{d\omega_1}{dx}\right) + c(x)\omega_1 - \mu_0\omega_1 = \mu_1\omega_0 \quad \text{(Из (10))} \tag{15}$$

$$\omega_1\big|_{x=-0} = v_1\big|_{t=+0}, \quad \omega_1\big|_{x=-1} = 0 \quad \text{(Из (12) и (13'))} \tag{15'}$$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

$$\frac{d}{dx}\left(\kappa(x) \frac{d\omega_n}{dx}\right) + c(x)\omega_n - \mu_0\omega_n = \mu_1\omega_{n-1} + \ldots + \mu_n\omega_0 \quad \text{(Из (10))} \tag{16}$$

$$\omega_n\big|_{x=-0} = v_n\big|_{t=+0}, \quad \omega_n\big|_{x=-1} = 0 \quad \text{(Из (12), (13'))} \tag{16'}$$

$$M_0 v_0 = 0 \quad \text{(Из (11))} \tag{17}$$

$$\frac{d v_0}{dt}\bigg|_{s=+0} = 0, \quad v_0\big|_{t=+\infty} = 0 \quad \text{(Из (13), (13'))} \tag{17'}$$

$$M_0 v_1 = -M_1 v_0 \quad \text{(Из (11))} \tag{18}$$

$$\frac{d v_1}{dt}\bigg|_{t=+0} = \frac{d\omega_0}{dx}\bigg|_{x=-0}, \quad v_1\big|_{t=+\infty} = 0, \text{ (Из (13), (13'))} \tag{18'}$$

$$M_0 v_2 = -M_1 v_1 - M_2 v_0 - \mu_0 v_0 \quad \text{(Из (11))} \tag{19}$$

$$\frac{d v_2}{dt}\bigg|_{t=+0} = \frac{d\omega_1}{dx}\bigg|_{x=-0}, \quad v_2\big|_{t=+\infty} = 0 \text{ (Из (13), (13'))} \tag{19'}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$M_0 v_n = -M_1 v_{n-1} - M_2 v_{n-2} - \ldots - M_n v_0 + \mu_0 v_{n-2} +$$

$$+ \mu_1 v_{n-3} + \mu_{n-2} v_0 \tag{20}$$

$$\frac{d v_n}{dt}\bigg|_{t=+0} = \frac{d\omega_{n-1}}{dx}\bigg|_{x=-0}, \quad v_n\big|_{t=+\infty} = 0 \tag{20'}$$

Начнем с решения уравнения

$$M_0 v_0 \equiv -\kappa_0^+ \frac{d^2 v_0}{dt^2} + c_0^+ v_0 = 0, \tag{17}$$

так как для $v_0$ имеем явное граничное условие

$$\frac{d v_0}{dt}\bigg|_{t=+0} = 0, \quad v_0\big|_{t=+\infty} = 0. \tag{17'}$$

Решая задачу (17), (17'), получаем

$$v_0 \equiv 0$$

В силу условия (14')

$$\omega_0\big|_{x=-0} = v_0\big|_{t=+0} \equiv 0, \quad \omega_0\big|_{x=-1} = 0,$$

что является граничным условием для уравнения (14), т. е. $\omega_0$ получается как решение задачи

$$-\frac{d}{dx}\left[\kappa(x) \frac{d\omega_0}{dx}\right] + c(x)\omega_0 - \mu_0\omega_0 = 0 \tag{21}$$

$$\omega_0\Big|_{x=-0}=0, \quad \omega_0\Big|_{x=-1}=0 \tag{21'}$$

Известно, что оператор

$$L_0 y\equiv -\frac{d}{dx}\left(\kappa(x)\frac{dy}{dx}\right)+c(x)\,y, \quad \kappa(x)>0,\ c(x)\geqslant 0 \tag{22}$$

при условии

$$y\Big|_{x=-1}=0, \quad y\Big|_{x=0}=0 \tag{22'}$$

имеет дискретный спектр.

Под $L_0$ мы понимаем оператор, заданный формулой (22) и действующий на функции, заданные лишь на отрезке $(-1,0)$ и обращающиеся в нуль на обоих концах интервала $(-1,0)$.

Пусть $\lambda_{10}<\lambda_{20}<\ldots<\lambda_{i0}<\ldots$ —упорядоченные в порядке возрастания собственные значения задачи (22), (22′) и $\{y_{i0}\}$ полная ортонормированная система собственных элементов этой задачи, причем мы для простоты изложения предполагаем, что эти собственные значения $\lambda_{i0}$ $(i=1, 2, \ldots)$ простые. Следовательно, согласно (21), (21′) $\mu_0$ совпадает с собственным значением оператора (22) при условии (22′) (допустим с $i=м$), т. е. $\mu_0=\lambda_{i0}$, а $\omega_0$ с соответствующей собственной функцией, т. е. $\omega_0=y_{i0}$. После того, как найдено $\omega_0$ в силу (18′) нам становится известным краевое условие для $v_1$. Решая уравнение (18) при условии (18′) находим

$$v_1=A\,e^{-\nu t}=Ae^{-\gamma\frac{x}{\varepsilon}}, \text{ где } \gamma=\sqrt{\frac{c_0^+}{k_0^+}}>0, \quad A=-\frac{1}{\gamma}\frac{d\omega_0}{dx}\Big|_{x=-0}$$

Зная функцию $v_1$ в силу (15′) находим граничное условие для $\omega_1$

$$\omega_1\Big|_{x=-0}=v_1\Big|_{t=+0}=A, \ \omega_1\Big|_{x=-1}=0$$

Следовательно, для неизвестных $\omega_1$ и $\mu_1$ получается следующая задача:

$$L_1\omega_1\equiv -\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{d\omega_1}{dx}\right)+c(x)\,\omega_1-\mu_{0i}\omega_1=\mu_1\omega_0 \tag{23}$$

$$\omega_1\Big|_{x=-1}=0, \qquad \omega_1\Big|=A. \tag{24}$$

Так как однородная задача, соответствующая задаче (23), (24) имеет не нулевое решение, то задача (23), (24) „находится на спектре“ и не всегда разрешима. Выберем $\mu_1$ так, чтобы задача (23), (24) была разрешима. Для того, чтобы неоднородная краевая задача (23), (24) имела решение необходимо и достаточно, чтобы

$$\mu_1(\omega_0,\omega_0)=\omega_1\kappa(x)\frac{d\omega_0}{dx}\Big|_{x=-1}^{x=0}=A\kappa(0)\frac{d\omega_0}{dx}\Big|_{x=0}$$

Это условие получается из формулы Грина

$$(L_1\omega_1, z_0)-(\omega_1, L_1 z_0)=\omega_1 k(x)\frac{dz_0}{dx}\Big|_{x=-1}^{x=0}-k(x)\frac{d\omega_1}{dx}\cdot z_0\Big|_{x=-1}^{x=0}, \tag{25}$$

примененной к искомому решению $\omega_1$ и $\kappa$ функции $z_0$, совпадающей с решением сопряженной однородной задачи:

$$L_1^* z_0=0, \qquad z_0\Big|_{x=0}=z_0\Big|_{x=-1}=0$$



Так как оператор самосопряженный, то можно взять, $z_0=\omega_0$. Действительно, формула (25) получается из (25′), если использовать уравнение (23) и граничное условие (21′), которым удовлетворяет $z_0=\omega_0$ и граничное условие (24) которому должна удовлетворять искомая функция $\omega_1$.

При таком выборе $\mu_1$ [см. (25)] задача (23), (24) становится разрешимой.

Решая задачу (23), (24) находим ее общее решение в виде

$$\omega_1=\tilde{\omega}_1+c\,\omega_0,$$

где $\tilde{\omega}_1$—частное решение неоднородного уравнения (23), $c_1\omega_0$—общее решение соответствующего однородного уравнения.

Выберем теперь $c_1$ так, чтобы $\omega_1$ была ортогональна $\omega_0$, т. е.

$$(\omega_1, \omega_0)=0.$$

Отсюда находим

$$c_1=-\frac{(\tilde{\omega}_1, \omega^0)}{(\omega_0, \omega_0)}=-(\tilde{\omega}_1, \omega_0)$$

После такого выбора $c_1$, $\omega_1$ определяется однозначно.

Допустим, что мы уже нашли $\omega_0, \omega_1, \ldots \omega_{к-1}$, $v_0, v_1, \ldots, v_{к-1}$ $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_{к-1}$, причем $v_i$—функции типа пограничного слоя вида

$$v_i=P_i(t)\,e^{-\nu t}, \quad t=\frac{x}{\varepsilon},$$

где $P_i(t)$ многочлены по $t$.

После того, как найдено $\omega_{к-1}$ в силу (20′) можно найти граничное условие для $v_к$

$$\frac{dv_к}{dt}\Big|_{t=+0}=\frac{d\omega_{к-1}}{dx}\Big|_{x=-0}, \qquad v_к\Big|_{t=+\infty}=0.$$

Решая уравнение

$$M_0 v_к=-M_1 v_{к-1}-M_2 v_{к-2}-\ldots-M_{к-1}v_1+\mu_0 v_{к-2}+\ldots+\mu_{к-3}v_1=P_{к-1}\,e^{-\nu t} \tag{26}$$

при условиях

$$\frac{dv_к}{dt}\Big|_{t=+0}=\frac{d\omega_{к-1}}{dx}\Big|_{x=0}, \qquad v_к\Big|_{t=+\infty}=0$$

находим

$$v_к=P_к(t)\,e^{-\nu t},$$

где $P_к(t)$—многочлен от $t$ степени, на единицу большей, чем $P_{к-1}(t)$ [см. (26)].

Зная $v_к$ в силу (16′) находим граничное условие для $\omega_к$

$$\omega_к\Big|_{x=0}=v_к\Big|_{t=+0}=P_к(0).$$

Решая уравнение (16), т. е. уравнение

$$-\frac{d}{dx}\left(\kappa(x)\frac{d\omega_к}{dx}\right)+c(x)\,\omega_к-\mu_0\omega_к=\mu_1\omega_{к-1}+\ldots+\mu_к\omega_0 \tag{27}$$

при условии

$$\omega_к\Big|_{x=0}=P_к(0), \quad \omega_к\Big|_{x=-1}=0 \tag{27'}$$

находим неизвестные $\mu_к$ и $\omega_к$.

Задача (27), (27′) также „находится на спектре". Для разрешимости этой задачи должно выполняться некоторое дополнительное условие, а именно, условие

$$\mu_\kappa = P_\kappa(0)\,\kappa(\bar{0})\left.\frac{d\omega_0}{dx}\right|_{x=-0}, \tag{28}$$

которое мы получаем из формулы Грина, используя уравнение (27) и граничное условие (27′) [см. (25)].

После такого выбора $\mu_\kappa$, задача (27), (27′) становится разрешимой. Решая задачу (27), (27′) находим ее общее решение в виде

$$\omega_\kappa = \tilde{\omega}_\kappa + c_\kappa \omega_0,$$

где $\tilde{\omega}_\kappa$—частное решение задачи (27), (27′).

$c_\kappa$ выбираем так, чтобы $\omega_\kappa$ была ортогональна $\omega_0$, т. е.

$$(\omega_\kappa, \omega_0) = 0.$$

Отсюда получаем

$$c_\kappa = -(\tilde{\omega}_\kappa, \omega_0).$$

После такого выбора $c_\kappa$, $\omega_\kappa$ определяется однозначно. Итак индукция проходит, итерационный процесс можно продолжать неограниченно, если выполнены соответствующие условия гладкости данных задачи.

Обозначим

$$\lambda_{i\varepsilon,m} = \mu_0 + \varepsilon\mu_1 + \ldots + \varepsilon^m\mu_m \tag{31}$$

$$y_{i\varepsilon,m} = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \ldots + \varepsilon^m\omega_m + \varepsilon^{m+1}\alpha \quad \text{в } D^- \tag{32}$$

$$y_{i\varepsilon,m} = 0 + \varepsilon v_1 + \ldots + \varepsilon^m v_m + \varepsilon^{m+1} v_{m+1} + \varepsilon^{m+2} v_{m+2} \quad \text{в } D^+, \tag{33}$$

где $\omega_0$, $v_1$, $\omega_1$, $v_2$, . . . $\omega_m$, $\omega_{m+1}$, найдены указанным выше способом, а $v_{m+2}$ определяется как решение задачи:

$$M_0 v_{m+2} = -M_1 v_{m+2} - M_2 v_m - \ldots - M_{m+1} v_1 + \mu_0 v_m + \ldots + \mu_{m-1} v_1$$

$$\left.\frac{d v_{m+2}}{dt}\right|_{t=+0} = 0, \quad v_{m+2}\big|_{t=+\infty} = 0$$

Функция

$$\Phi = \begin{cases} \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \ldots + \varepsilon^m\omega_m \\ 0 + \varepsilon v_1 + \ldots + \varepsilon^m v_m + \varepsilon^{m+1} v_{m+1} + \varepsilon^{m+2} v_{m+2} \end{cases}$$

имеет непрерывную производную в точке $x=0$, если производную доопределить в этой точке, но сама функция Φ терпит разрыв порядка $O(\varepsilon^{m+1})$. Этот разрыв равен $\varepsilon^{m+1} v_{m+1} + \varepsilon^{m+2} v_{m+2}\big|_{t=+0}$. Поэтому в (32) мы добавили еще слагаемое $\varepsilon^{m+1}\alpha$, определенное лишь в $\bar{D}$ и удовлетворяющее в точке $x=0$ следующему условию

$$\varepsilon^{m+1}\alpha\big|_{x=0} = \varepsilon^{m+1}(v_{m+1} + \varepsilon v_{m+2})\big|_{t=+0}, \quad \left.\frac{d\alpha}{dx}\right|_{x=0} = 0 \tag{36}$$

Имеет место следующая теорема:

**Теорема 1.** *Если* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{c^+(x)}{\varepsilon^2} = \frac{c_0}{\varepsilon^2}$, то на *полуоси* $x < \frac{c_0}{\varepsilon^2}$ *спектр оператора* $L_\varepsilon$ *может быть только дискретным, причем все его собственные значения близки к соответствующим собственным значениям оператора* $L_0$, *точнее, для любого фиксированного* $i$ *имеет место оценка*

$$|\lambda_{i\varepsilon} - \lambda_{i0}| < b_i \varepsilon^{1/2},$$

*где* $b_i$ *не зависит от параметра* $\varepsilon$.



Справедливость первой части теоремы хорошо известна (см. например [4], [5]).

Для доказательства второй части теоремы ограничимся случаем

$$L_\varepsilon y_\varepsilon \equiv -\frac{d^2 y_\varepsilon}{dx^2} + c_\varepsilon(x) y_\varepsilon = \lambda_\varepsilon y_\varepsilon, \tag{37}$$

где

$$c_\varepsilon(x) = \begin{cases} c(\bar{x}) \text{ при} & -1 < x < 0 \qquad c(\bar{x}) \geqslant 0 \\ \dfrac{c^+(x)}{\varepsilon^2} \text{ при} & 0 < x < +\infty \qquad c^+(x) \geqslant p_0^2 > 0 \end{cases}$$

$$y_\varepsilon\big|_{x=0} = y_\varepsilon\big|_{x=+0}; \quad \left.\frac{d y_\varepsilon}{d x}\right|_{x=-0} = \left.\frac{d y_\varepsilon}{d x}\right|_{x=+0} \tag{38}$$

$$y_\varepsilon\big|_{x=-1} = 0, \qquad y_\varepsilon\big|_{x=+\infty} = 0.$$

В общем случае доказательство проводится буквально так же.

Пусть $\lambda_{1\varepsilon}$—первое собственное значение оператора $L_\varepsilon$

$\lambda_{10}$—первое собственное значение оператора $L_0$.

Имеет место неравенство:

$$\lambda_{1\varepsilon} \leqslant \lambda_{10}$$

Действительно:

$$\lambda_{1\varepsilon} = \min_{y_\varepsilon} \frac{(L_\varepsilon y_\varepsilon, y_\varepsilon)}{(y_\varepsilon, y_\varepsilon)} = \min_{y_\varepsilon} \frac{B_\varepsilon(y_\varepsilon, y_\varepsilon)}{(y_\varepsilon, y_\varepsilon)} \tag{37}$$

$$\lambda_{10} = \min_{y_0} \frac{(L_0 y_0, y_0)}{(y_0, y_0)} = \min_{y_0} \frac{B_0(y_0, y_0)}{(y_0, y_0)}, \tag{38}$$

где $B_\varepsilon$—квадратичная форма, определенная для функций, заданных на интервале $(-1, +\infty)$, для которых первая производная может иметь разрыв в точке $x=0$, а $B_0$—квадратичная форма, определенная для функций, заданных лишь в $\bar{D}$ и обращающихся в нуль в обоих концах интервала. Поэтому в качестве допустимой функции сравнения для определения $\lambda_{1\varepsilon}$ можно брать все допустимые функции сравнения, которые используются для определения $\lambda_{10}$, продолжая их нулем в $D^+$. Следовательно, класс допустимых функций сравнения для определения $\lambda_{1\varepsilon}$ шире, чем класс функций сравнения для определения $\lambda_{10}$ Кроме того, в класс допустимых функций сравнения для определения $\lambda_{10}$ выражение $B_\varepsilon$, $B_0$ принимают одинаковые значения. Отсюда и вытекает, что

$$\lambda_{1\varepsilon} \leqslant \lambda_{10} \tag{39}$$

Далее неравенство (39) можно записать так:

$$\lambda_{1\varepsilon} = (L_\varepsilon \tilde{y}_{1\varepsilon}, \tilde{y}_{1\varepsilon}) = \int_{-1}^{0}\left[\left(\frac{d\,\tilde{y}_{1\varepsilon}}{dx}\right)^2 + c(\bar{x})\,\tilde{y}_{1\varepsilon}^2\right]dx + \int_0^\infty\left[\left(\frac{d\,\tilde{y}_{1\varepsilon}}{dx}\right)^2 + \frac{c^+(x)}{\varepsilon^2}\,\tilde{y}_{1\varepsilon}^2\right]dx \leqslant \lambda_{10}, \tag{40}$$

где $L_\varepsilon \tilde{y}_{1\varepsilon} = \lambda_{1\varepsilon}\tilde{y}$, $\tilde{y}_{1\varepsilon}$— первая нормированная собственная функция оператора $L_\varepsilon$.

Из неравенства (40) имеем

$$\int_0^\infty \frac{c^+(x)}{\varepsilon^2}\,\tilde{y}_{1\varepsilon}^2\,dx \leqslant \lambda_{10} \quad \text{или} \quad \min_{x\in D^+} c^+(x) \int_0^\infty \tilde{y}_{1\varepsilon}^2\,dx \leqslant \varepsilon^2\lambda_{10}$$

Отсюда получаем, что

$$\int_0^\infty \tilde{y}_{1\varepsilon}^2\,dx \leqslant \varepsilon^2 \frac{\lambda_{10}}{\min\limits_{x\in D^+} c^+(x)}, \quad \text{т. е.} \quad \|\tilde{y}_{1\varepsilon}\|_{D^+}=O(\varepsilon). \tag{41}$$

Напишем то уравнение, из которого определяется первая собственная функция оператора $L_\varepsilon$

$$-\frac{d^2\bar{y}_{1\varepsilon}}{dx^2}+c(\tilde{x})\,\bar{y}_{1\varepsilon}=\lambda_{1\varepsilon}\bar{y}_{1\varepsilon} \qquad (\text{в } D^-) \tag{42}$$

$$-\frac{d^2\bar{y}_{1\varepsilon}^+}{dx^2}+\frac{c^+(x)}{\varepsilon^2}\,\tilde{y}_{1\varepsilon}^+=\lambda_{1\varepsilon}\bar{y}_{1\varepsilon}^+ \qquad (\text{в } D^+), \tag{43}$$

где $\bar{y}_{1\varepsilon}^-$—мы обозначили функцию $\tilde{y}_{1\varepsilon}$ в $D^-$,

а $\bar{y}_{1\varepsilon}^+$—функцию $\tilde{y}_{1\varepsilon}$ в $D^+$.

Пусть

$$\bar{y}_{1\varepsilon}\big|_{x=0}=A_\varepsilon. \tag{44}$$

Используя второе расщепление оператора $L_\varepsilon$ в окрестности точки $x=0$, т. е. расщеплением (5) для оператора (37) в $D^+$, строим асимптотику решения уравнения (43) при краевом условии (44) и $\tilde{y}_{1\varepsilon}\big|_{x=+\infty}=0$.

Для этой цели сначала найдем асимптотику решения следующей вспомогательной задачи

$$L_\varepsilon\bar{y}_\varepsilon\equiv-\frac{d^2\bar{y}_\varepsilon}{dx^2}+\frac{c^+(x)}{\varepsilon^2}\bar{y}_\varepsilon=0 \quad 0<x<+\infty \tag{45}$$

$$\bar{y}_\varepsilon\big|_{x=0}=1,\ \bar{y}_\varepsilon\big|_{x=+\infty}=0. \tag{46}$$

Напомним как строится асимптотическое разложение по $\varepsilon$ решения $\bar{y}_\varepsilon$ задачи (45), (46). Разлагая $c^+(x)$ по степеням $x$ по формуле Тейлора и делая замену переменной $\frac{x}{\varepsilon}=t$ находим второе расщепление оператора (45) в окрестности точки $x=0$ в виде

$$L_\varepsilon=\varepsilon^{-2}\left(-\frac{d^2}{dt^2}+c_0^+ +\varepsilon c_1^+ t+\varepsilon^2 c_2^+ t^2+\ldots\right). \text{ (ср. (5))} \tag{47}$$

В качестве первого приближения к $\bar{y}_\varepsilon$ берем решение уравнения

$$-\frac{d^2y_0}{dt^2}+c_0^+\,y_0=0 \tag{48}$$

при условии

$$y_0\big|_{x=0}=1,\ y_0(+\infty)=0. \tag{49}$$

Из (48), (49) получаем $y_0=e^{-\sqrt{c_0^+}\,t}$ [см. [1]]

В качестве второго приближения берем решение уравнения

$$-\frac{d^2y_1}{dt^2}+c_0^+\,y_1=-c_1^+\,t\,y_0=-c_1^+\,t\,e^{-\sqrt{c_0^+}\,t} \tag{48'}$$



при условии

$$y_1\big|_{x=0}=0,\quad y_1\big|_{x=+\infty}=0 \tag{49'}$$

Из (48'), (49') получаем

$$y_1=P_1(t)\,e^{-\sqrt{c_0^+}\,t}$$

функции $y_0$, $y_1$ определены только при $0<x<\eta$.

Определим эти функции всюду в $(0, +\infty)$, считая их равными нулю при $x>\eta$. Для того, чтобы сделать эти функции гладкими в $D^+$ умножим их при $0<x<\eta$ на сглаживающий множитель $\psi\left(\frac{x}{\eta}\right)$ равную 1 при $x\leqslant\frac{\eta}{3}$, равную 0 при $x\geqslant\frac{2}{3}\eta$ и бесконечно дифференцируемую (см. [1]). $\psi\left(\frac{x}{\eta}\right)y_i$ по-прежнему будем обозначать $y_i$.

Оценим разность $z_\varepsilon=\bar{y}_\varepsilon-(y_0+\varepsilon y_1)$ между точным решением $\bar{y}_\varepsilon$ задачи (45), (46) и $y_0+\varepsilon y_1$. Имеем:

$$L_\varepsilon z=L_\varepsilon[\bar{y}_\varepsilon-(y_0+\varepsilon y_1)]=L_\varepsilon\bar{y}_\varepsilon-L_\varepsilon(y_0+\varepsilon y_1)=$$

$$=0-\varepsilon^{-2}\left[-\frac{d}{dt^2}+c_0^+ +\varepsilon c_1^+ t+\varepsilon^2 c_2^+ t^2+\ldots\right](y_0+\varepsilon y_1)=$$

$$=-\varepsilon^{-2}\left[-\frac{d^2y_0}{dt^2}+c_0^+y_0+\varepsilon\left(-\frac{d^2y_1}{dt^2}+c_0^+y_1+c_1^+\,t\,y_0\right)+\varepsilon^2(c_1^+\,t\,y_1+\right.$$

$$\left.+c_2^+t^2y_0)+\ldots\right]=-(c_1^+t\,y_1+c_2^+t^2y_0)+O(\varepsilon)$$

$$L_\varepsilon z_\varepsilon=-(c_1^+t\,y_1+c_2^+t^2y_0)+O(\varepsilon),\quad 0<x<\frac{\eta}{3} \tag{50}$$

При $x>\frac{\eta}{3}$ функции $\exp\left(-\sqrt{c_0^+}\,\frac{x}{\varepsilon}\right)$ и их любые производные стремятся к нулю быстрее, чем любая степень $\varepsilon$. Это имеет место и для $\psi\left(\frac{x}{\eta}\right)\exp\left(-\sqrt{c_0^+}\,\frac{x}{\varepsilon}\right)$, а значит и для $y_i$. Следовательно, при $\eta\geqslant x\geqslant\frac{\eta}{3}$ $L_\varepsilon\left(\sum\limits_{i=0}^{1}\varepsilon^i y_i\right)$ будет функцией порядка малости, например $\varepsilon$. При $x>\eta$

$$L_\varepsilon\left(\sum_{i=0}^{1}\varepsilon^i y_i\right)\equiv 0.$$

Таким образом формула (50) имеет смысл не только на интервале $\left(0, +\frac{\eta}{3}\right)$, но и на интервале $(0, -\infty)$.

Далее, так как $\int_0^\infty e^{-\sqrt{c_0^+}\frac{x}{\varepsilon}}dx=O(\varepsilon)$ и функции $y_0$, $y_2$ в выражении (50) есть функции типа $e^{-\sqrt{c_0^+}\frac{x}{\varepsilon}}$, то из (50) вытекает, что

$$\|L_\varepsilon Z_\varepsilon\|_{D^+}=O\left(\varepsilon^{1/2}\right) \tag{50'}$$

Очевидно, что

$$z_\varepsilon'\big|_{x=0} = 0 \qquad (50'')$$

Из (50'), (50''), в силу того, что $c_0^+ > 0$, мы делаем вывод, что

$$z_\varepsilon = O(\varepsilon^{1/2}).$$

Следовательно, асимптотику решения задачи (45), (46) получаем в виде

$$\bar{y}_\varepsilon = y_0 + \varepsilon y_1 + z_\varepsilon = e^{-\sqrt{c_0^+}\,t} + \varepsilon p_1(t)\, e^{-\sqrt{c_0^+}\,t} + O(\varepsilon^{1/2}) = e^{-\sqrt{c_0^+}\,t} + z_{1\varepsilon},$$

т. е. $\bar{y}_\varepsilon = e^{-\sqrt{c_0}\,t} + z_{1\varepsilon}$,

где $$z_{1\varepsilon} = O(\varepsilon^{1/2}), \quad z_{1\varepsilon}\big|_{x=0} = 0.$$

Так как $\|\tilde{y}_{1\varepsilon}\|_{D^+} = O(\varepsilon)$ [см. (41)] и $\lambda_{1\varepsilon} \leqslant \lambda_{10}$ [см. (39)], то асимптотику решения, которое обозначим через $y_\varepsilon^*$, уравнения (43) при краевом условии (46) получаем в аналогичном виде

$$y_\varepsilon^* = e^{-\sqrt{c_0^+}\,t} + z_{1\varepsilon} + z_{1\varepsilon}^*, \text{ где } z_{1\varepsilon}^* = O(\varepsilon), \qquad z_{1\varepsilon}^*\big|_{x=0} = 0$$

т. е.

$$y_\varepsilon^* = e^{-\sqrt{c_0^+}\,t} + O(\varepsilon^{1/2}) + O(\varepsilon) = e^{-\sqrt{c_0^+}\,t} + z_{2\varepsilon},$$

где $$z_{2\varepsilon} = O(\varepsilon^{1/2}), \quad z_{2\varepsilon}\big|_{x=0} = 0.$$

Так как задача (43), (44) отличается от задачи (43), (46) лишь множителем $A_\varepsilon$, то решение ее имеет асимптотическое разложение:

$$\tilde{y}_{1\varepsilon}^+ = A_\varepsilon y_\varepsilon^* = A_\varepsilon\left(e^{-\sqrt{c_0^+}\frac{x}{\varepsilon}} + z_{2\varepsilon}\right), \text{ где } z_{2\varepsilon} = O(\varepsilon^{1/2}) \qquad (51)$$

Далее, учитывая, что $\int_0^\infty e^{-\sqrt{c_0^+}\frac{x}{\varepsilon}}\,dx = O(\varepsilon)$, мы из соотношения (41)

$$\|\tilde{y}_{1\varepsilon}\|_{D^+} = O(\varepsilon).$$

подставив в него выражение (51) получим

$$A_\varepsilon = O(\varepsilon^{1/2}).$$

После того как найдено, что $A_\varepsilon = O(\varepsilon^{1/2})$, мы получим из условий „склейки" (38) граничное условие для уравнения (42):

$$\bar{\tilde{y}}_{1\varepsilon}\big|_{x=0} = O(\varepsilon^{1/2})$$

т. е. для $\bar{\tilde{y}}_{1\varepsilon}$ получаем следующую задачу

$$-\frac{d^2\bar{\tilde{y}}_{1\varepsilon}}{dx^2} + \bar{c}(x)\bar{\tilde{y}}_{1\varepsilon} = \lambda_{1\varepsilon}\bar{\tilde{y}}_{1\varepsilon} \qquad (52)$$

$$\bar{\tilde{y}}_{1\varepsilon}\big|_{x=0} = O(\varepsilon^{1/2}), \quad \bar{\tilde{y}}_{1\varepsilon}\big|_{x=-0} = 0 \qquad (53)$$

Мы видим, что $\bar{\tilde{y}}_{1\varepsilon}$ удовлетворяет почти тем же условиям, что собственной функции оператора $L_0$. Покажем, что

$$|\lambda_{12} - \lambda_{10}| = O(\varepsilon^{1/2})$$



Для этой цели обозначим $v$ решение задачи

$$-\frac{d^2v}{dx^2} + \bar{c}(x)\,v = 0$$

$$v\big|_{x=0} = O(\varepsilon^{1/2}), \; v\big|_{x=-1} = 0.$$

Очевидно, что

$$v = O(\varepsilon^{1/2}).$$

Теперь обозначая

$$\bar{\tilde{y}}_{1\varepsilon} - v = W \qquad (53')$$

имеем:

$$-\frac{d^2W}{dx^2} + \bar{c}(x)\,W = \lambda_{1\varepsilon}W + \lambda_{1\varepsilon}v$$

$$W\big|_{x=0} = 0, \; W\big|_{x=-2} = 0$$

Так как $\lambda_{1\varepsilon} \leqslant \lambda_{10}$ и $v = O(\varepsilon^{1/2})$, то получаем

$$-\frac{d^2W}{dx^2} + \bar{c}(x)\,W = \lambda_{1\varepsilon}W + O(\varepsilon^{1/2}) \qquad (54)$$

$$W\big|_{x=-1} = 0, \; W\big|_{x=0} = 0 \qquad (55)$$

$$\|W\|_{D^-} = 1 + O(\varepsilon^{1/2}) \qquad (56)$$

Из (54) следует:

$$\|L_0W - \lambda_{1\varepsilon}W\|_{D^-} = O(\varepsilon^{1/2}). \qquad (57)$$

и, далее, из (56) и (57) имеем:

$$\frac{\|L_0W - \lambda_{1\varepsilon}W\|_{D^-}}{\|W\|_{D^-}} = O(\varepsilon^{1/2}). \qquad (58)$$

В силу того, что спектр оператора $L_0$ дискретен можно применять лемму 12 в работе [1].

В силу (58) и леммы 12

$$\min_i |\lambda_{1\varepsilon} - \lambda_{i0}| = O(\varepsilon^{1/2})$$

Отсюда в силу неравенства $\lambda_{1\varepsilon} \leqslant \lambda_{10}$ и дискретности спектра оператора $L_0$ имеем.

$$|\lambda_{1\varepsilon} - \lambda_{10}| = O(\varepsilon^{1/2}).$$

Теперь покажем, что

$$\|\tilde{y}_{1\varepsilon} - \tilde{y}_{10}\|_{D^- + D^+} = O(\varepsilon^{1/2}),$$

где $\tilde{y}_{1\varepsilon}$—первая собственная функция оператора $L_\varepsilon$, а
$y_{10}$—первая собственная функция оператора $L_0$, которую мы продолжили нулем в $D^+$.

Действительно, согласно (56), (57) имеем:

$$\|L_0W - \lambda_{1\varepsilon}W\|_{D^-} = O(\varepsilon^{1/2}). \qquad \|W\|_{D^-} = 1 + O(\varepsilon^{1/2})$$

Отсюда если положить $\frac{W}{\|W\|_{D^-}} = W_1$ имеем:

$$\|L_0W_1 - \lambda_{1\varepsilon}W_1\|_{D^-} = \alpha = O(\varepsilon^{1/2}) \qquad (59)$$

$$\|W_1\|_{D^-} = 1. \tag{60}$$

Очевидно, что

$$\|W - W_1\|_{D^-} = O\left(\varepsilon^{1/2}\right) \tag{61}$$

Пусть $l$—некоторое число, $l>\alpha$ и $3l=\lambda_{20}-\lambda_{10}$. Обозначим через $T_1^0$ замкнутую линейную оболочку собственных функций, отвечающих собственным значениям, лежащим на отрезке $[\lambda_{10}-l,\ \lambda_{10}+l]$. Очевидно, что на отрезке $[\lambda_{10}-l,\ \lambda_{10}+l]$ заключено единственное сообственное значение $\lambda_{10}$ оператора $L_0$, которому, по предположению, отвечает единственная нормированная собственная функция $\tilde{y}_{10}$ оператор $L_0$.

Таким образом, $T_1^0$ состоит из функций вида $t\,\tilde{y}_{10}$, $-\infty<t<+\infty$. Применяя лемму 13 [1] утверждаем, что существует в $T_1^0$ элемент $u_0$ для которого

$$\| W_1 - u_0 \|_{D^-} \leqslant \frac{2\alpha}{l}, \quad \| u_0 \| = 1 \tag{62}$$

Очевидно, что фигурирующая в этой лемме нормированная функция в $T_1^0$ $u_0$ равна $\tilde{y}_{10}$. Итак, подставляя в (62) $u_0=\tilde{y}_{10}$ имеем

$$\| W_1 - \tilde{y}_{10} \|_{D^-} = O\left(\varepsilon^{1/2}\right).$$

Так как $\| W - W_1 \| = O\left(\varepsilon^{1/2}\right)$ [см. (61)], то

$$\| W - \tilde{y}_{10} \|_{D^-} = O\left(\varepsilon^{1/2}\right) \tag{63}$$

Учитывая, что $\| W - \tilde{y}_{1\varepsilon} \|_{D^-} = O\left(\varepsilon^{1/2}\right)$ [см. (53)] и $\| y_{1\varepsilon} \|_{D^+} = O(\varepsilon)$ [см (41)] имеем

$$\| W - \tilde{y}_{1\varepsilon} \|_{D^- + D^+} = O\left(\varepsilon^{1/2}\right) \tag{64}$$

Отсюда в силу (63) получаем, что

$$\| \tilde{y}_{1\varepsilon} - \tilde{y}_{10} \|_{D^- + D^+} = O\left(\varepsilon^{1/2}\right). \tag{65}$$

Теперь покажем, что

$$| \lambda_{2\varepsilon} - \lambda_{20} | = O\left(\varepsilon^{1/2}\right).$$

Как и выше, исходя из мнимаксной теории собственных значений Куранта, можно показать, что

$$\lambda_{2\varepsilon} \leqslant \lambda_{20}. \tag{66}$$

Это неравенство можно записивать так:

$$\lambda_{2\varepsilon} = (L_\varepsilon \tilde{y}_{2\varepsilon}, y_{2\varepsilon}) = \int_{-1}^{0} \left[ \left( \frac{d\tilde{y}_{2\varepsilon}}{dx} \right)^2 + c^-(x)\, \tilde{y}_{2\varepsilon}^2 \right] dx +$$

$$+ \int_0^{\infty} \left[ \left( \frac{d\tilde{y}_{2\varepsilon}}{dx} \right)^2 + \frac{c^+(x)}{\varepsilon^2}\, \tilde{y}_{2\varepsilon}^2 \right] dx \leqslant \lambda_{20}$$

или

$$\min_{x \in D} c^+(x) \int_0^{\infty} \tilde{y}_{2\varepsilon}^2\, dx \leqslant \varepsilon^2 \lambda_{20}$$

Отсюда вытекает, что

$$\| y_{2\varepsilon} \|_{D^+} = O(\varepsilon) \tag{67}$$



где $\tilde{y}_{2\varepsilon}$—вторая нормированная собственная функция оператора $L$ во всем пространстве.

Напишем то уравнение, из которого определяется вторая собственная функция $\tilde{y}_{2\varepsilon}$ оператора $L_\varepsilon$

$$-\frac{d^2\tilde{y}_{2\varepsilon}^-}{dx^2} + c^-(x)\tilde{y}_{2\varepsilon}^- = \lambda_{2\varepsilon}\tilde{y}_{2\varepsilon}^- \ (\text{в } D) \tag{68}$$

$$-\frac{d^2\tilde{y}_{2\varepsilon}^+}{dx^2} + \frac{c^+(x)}{\varepsilon^2}\tilde{y}_{2\varepsilon}^+ = \lambda_{2\varepsilon}\tilde{y}_{2\varepsilon}^+, \tag{69}$$

где $\tilde{y}_{2\varepsilon}^-$—мы обозначили $\tilde{y}_{2\varepsilon}$ в $D^-$,

а $\tilde{y}_{2\varepsilon}^+$— $\tilde{y}_{2\varepsilon}$ в $D^+$.

Пусть

$$\tilde{y}_{2\varepsilon}^-\big|_{x=0} = A_\varepsilon^* \tag{70}$$

Повторяя буквально выше проведенные выкладки построим асимптотику решения уравнения (69) при краевом условии (70) и $\tilde{y}_{2\varepsilon}^+\big|_{x=+\infty} = 0$ в виде

$$\tilde{y}_{2\varepsilon}^+ = A_\varepsilon^* \left( e^{-\sqrt{c_0^+}\frac{x}{\varepsilon}} + z_{2\varepsilon} \right),$$

где $z_{2\varepsilon} = O\left(\varepsilon^{1/2}\right)$, $z_{2\varepsilon}\big|_{x=0} = O$ [ср. (51)]. (71)

После того как найдено асимптотическое разложение (71) для $\tilde{y}_{2\varepsilon}^+$, учитывая, что $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{c_0^+}\frac{x}{\varepsilon}} dx = O(\varepsilon)$ мы из соотношения (67)

$$\| \tilde{y}_{2\varepsilon} \|_{D^+} = O(\varepsilon),$$

подставив в него выражение (71), получим

$$A_\varepsilon^* = O\left(\varepsilon^{1/2}\right).$$

Зная, что $A_\varepsilon^* = O\left(\varepsilon^{1/2}\right)$, мы получим из условий „склейки“ (38) граничное условие для уравнения (68):

$$\tilde{y}_{2\varepsilon}^-\big|_{x=0} = O\left(\varepsilon^{1/2}\right)$$

т. е. для $\tilde{y}_{2\varepsilon}^-$ получается следующая задача

$$-\frac{d^2\tilde{y}_{2\varepsilon}^-}{dx^2} + c^-(x)\tilde{y}_{2\varepsilon}^- = \lambda_{2\varepsilon}\tilde{y}_{2\varepsilon}^- \tag{72}$$

$$\tilde{y}_{2\varepsilon}^-\big|_{x=0} = O\left(\varepsilon^{1/2}\right), \quad \tilde{y}_{2\varepsilon}^-\big|_{x=-1} = 0 \tag{73}$$

Согласно (72), (73) $\tilde{y}_{2\varepsilon}^-$ так же, как $\tilde{y}_{1\varepsilon}$, [см. зад. (52), (53)] удовлетворяет почти тем же условиям, что и собственной функции оператора $L_0$. Перейдем к доказательству оценки:

$$| \lambda_{2\varepsilon} - \lambda_{20} | = O\left(\varepsilon^{1/2}\right). \tag{73'}$$

Для этой цели, как выше, обозначим $\overline{v}$ решение задачи

$$-\frac{d^2\overline{v}}{dx^2}+c(\overline{x})\,\overline{v}=0$$

$$\overline{v}\Big|_{x=0}=A_\varepsilon^*=O\left(\varepsilon^{1/2}\right),\quad \overline{v}\Big|_{x=-1}=0.$$

Очевидно, что

$$\overline{v}=O\left(\varepsilon^{1/2}\right) \tag{74'}$$

Теперь обозначая

$$\overline{y}_{2\varepsilon}-\overline{v}=\overline{W} \tag{74}$$

имеем:

$$-\frac{d^2\overline{W}}{dx^2}+c(\overline{x})\,\overline{W}=\lambda_{2\varepsilon}\overline{v}\quad \overline{W}+\lambda_{2\varepsilon}\,\overline{v}$$

$$\overline{W}\Big|_{x=-1}=0,\ \overline{W}\Big|_{x=0}=0.$$

Отсюда, в силу того, что $\lambda_{2\varepsilon}\leqslant\lambda_{20}$ и $\overline{v}=O\left(\varepsilon^{1/2}\right)$ получаем

$$-\frac{d^2\overline{W}}{dx^2}+c(\overline{x})\,\overline{W}=\lambda_{2\varepsilon}\overline{W}+O\left(\varepsilon^{1/2}\right) \tag{75}$$

$$\overline{W}\Big|_{x=-1}=0,\quad \overline{W}\Big|_{x=0}=0 \tag{76}$$

$$\left\|\overline{W}\right\|_{D^-}=1+O\left(\varepsilon^{1/2}\right) \tag{77}$$

Из (75), (77) следует, что

$$\frac{\left\|\overline{L}_0\,\overline{W}-\lambda_{2\varepsilon}\overline{W}\right\|_{D^-}}{\left\|\overline{W}\right\|_{D^-}}=O\left(\varepsilon^{1/2}\right) \tag{78}$$

В силу (78) и леммы 12 (см. [1])

$$\min_i\left|\lambda_{2\varepsilon}-\lambda_{i0}\right|=O\left(\varepsilon^{1/2}\right),$$

т. е. второе собственное значение $\lambda_{2\varepsilon}$ оператора $L_\varepsilon$ близка к какому-то собственному значению оператора $L_0$.

Но $\lambda_{2\varepsilon}$ не может быть близка к первому собственному значению $\lambda_{10}$ оператора $L_0$.

Действительно, в силу (67), (74), (74'), (77)

$$\left\|\overline{y}_{2\varepsilon}-\overline{W}\right\|_{D\overline{+}D^+}=O\left(\varepsilon^{1/2}\right)\ [\text{ср. (64)}] \tag{79}$$

Далее учитывая, что $\widetilde{y}_{2\varepsilon}\perp\widetilde{y}_{1\varepsilon}$, из (79) получаем

$$\left(\overline{W},\ \widetilde{y}_{1\varepsilon}\right)_{D\overline{+}D^+}=O\left(\varepsilon^{1/2}\right) \tag{80}$$

Отсюда в силу того, что

$$\left\|\widetilde{y}_{1\varepsilon}-\widetilde{y}_{10}\right\|_{D\overline{+}D^+}=O\left(\varepsilon^{1/2}\right)$$

следует

$$\left(\overline{W},\ \widetilde{y}_{10}\right)_{D\overline{+}D^+}=O\left(\varepsilon^{1/2}\right),\text{где}\ \left\|\overline{W}\right\|_{D^-}=1+O\left(\varepsilon^{1/2}\right).$$

Итак, мы получили, что $W$ почти ортогональна к $\widetilde{y}_{10}$ и $\|\overline{W}\|=1+O\left(\varepsilon^{1/2}\right)$, следовательно $\overline{W}$ не может близка к $\widetilde{y}_{10}$.

Согласно (75) (76), (77) $\overline{W}$—почти собственная функция оператора $L_0$, соответствующая собственному значению $\lambda_{2\varepsilon}$ и так как $\overline{W}$ не может быть близка к $\widetilde{y}_{10}$, то им соответствующие собственные значения тоже не могут быть близки друг-другу, т. е. $\lambda_{2\varepsilon}$ не может близка к $\lambda_{20}$.



Далее в силу неравенства $\lambda_{2\varepsilon}\leqslant\lambda_{20}$ и дискретности спектра оператора $L_0$, получаем, что $\lambda_{2\varepsilon}$ близко, именно, к $\lambda_{20}$ т. е.

$$\left|\lambda_{2\varepsilon}-\lambda_{20}\right|=O\left(\varepsilon^{1/2}\right) \tag{81}$$

Теперь покажем, что

$$\left\|\overline{y}_{2\varepsilon}-\widetilde{y}_{20}\right\|_{D\overline{+}D^+}=O\left(\varepsilon^{1/2}\right).$$

Действительно, мы видели, что $\overline{W}$ почти собственная функция оператора $L_0$ соответствующая собственному значению $\lambda_{2\varepsilon}$, а следовательно $\overline{W}$ почти собственная функция оператора $L_0$, соответствующая собственному значению $\lambda_{20}$, и поэтому применяя лемму 13 (см. [1]) получаем, что

$$\left\|\overline{W}-\widetilde{y}_{20}\right\|_{D^-}=O\left(\varepsilon^{1/2}\right)\ (\text{см. (63)}), \tag{81'}$$

Учитывая, что $\left\|\overline{W}-\widetilde{y}_{2\varepsilon}\right\|_{D^-}=O\left(\varepsilon^{1/2}\right)$ (ср. (74)) и $\left\|\overline{y}_{2\varepsilon}\right\|_{D^+}=O(\varepsilon)$ (ср. (67)) имеем

$$\left\|\overline{W}-\widetilde{y}_{2\varepsilon}\right\|_{D\overline{+}D^+}=O\left(\varepsilon^{1/2}\right)$$

Тогда в силу (81') получаем, что

$$\left\|\overline{y}_{2\varepsilon}-\widetilde{y}_{20}\right\|_{D\overline{+}D^+}=O\left(\varepsilon^{1/2}\right)$$

Рассуждая таким образом можно показать, что

$$\left|\lambda_{i\varepsilon}-\lambda_{i0}\right|=O\left(\varepsilon^{1/2}\right)\quad(i=1,2\ldots)$$

$$\left\|\widetilde{y}_{2\varepsilon}-\widetilde{y}_{10}\right\|=O\left(\varepsilon^{1/2}\right)\qquad(i=1,\ 2,\ \ldots)$$

Тем самым доказана теорема 1.

**Теорема 2.** *Пусть на интервале* $(-1,+\infty)$ *дан обыкновенный самосопряженный дифференциальной оператор второго порядка*

$$L_\varepsilon y\equiv-\frac{d}{dx}\left(\kappa(x)\frac{dy}{dx}\right)+c_\varepsilon(x)\ y,\quad \kappa(x)>0$$

где

$$\kappa(x)=\begin{cases}\kappa^-(x) & -1<x<0\\ \kappa^+(x) & 0<x<+\infty\end{cases}$$

$$c_\varepsilon(x)=\begin{cases}c^-(x) & -1<x<0 \qquad c^-(x)\geqslant 0\\ \dfrac{c^+(x)}{\varepsilon^2} & 0<x<+\infty \qquad c^+(x)\geqslant p_0^2>0\end{cases}$$

*при условиях „склейки“*

$$y\Big|_{x=-0}=y\Big|_{x=+0},\qquad \frac{dy}{dx}\Big|_{x=-0}=\frac{dy}{dx}\Big|_{x=+0}$$

*и граничных условиях*

$$y\Big|_{x=-1}=0,\qquad y\Big|_{x=+\infty}=0$$

*Тогда для i-го собственного значения* $\lambda_{i\varepsilon}$ *оператора* $L_\varepsilon$ *и для соответствующей i-ой собственной функции* $y_{i\varepsilon}$ *этого оператора имеют место следующие асимптотические представления*

$$\lambda_{i\varepsilon}=\sum_{\kappa=0}^{m}\varepsilon^\kappa\mu_\kappa+\varepsilon^{m+1}\delta_{m+1},\quad \mu_0=\lambda_{i0},\ \delta_{m+1}=O(1) \tag{83}$$

$$y_{i\varepsilon}=y_{i\varepsilon,\,m}+\varepsilon^{m+1}z_m,\ \|z_m\|=O(1) \tag{84}$$

*причем*

$$y_{i\varepsilon,\,m}=\begin{cases}\omega_0+\varepsilon\omega_1+\ldots+\varepsilon^m\omega_m+\varepsilon^{m+1}\alpha & -1<x<0\\ 0+\varepsilon v_1+\ldots+\varepsilon^m v_m+\varepsilon^{m+1}v_{m+1}+\varepsilon^{m+2}v_{m+2}, & \\ 0<x<+\infty & \end{cases}$$

где $\mu_0=\lambda_{i0}$ *i-ое простое собственное значение задачи* (22), (22′), $\omega_0=y_{i0}$ *—соответствующая i-я собственная функция этой задачи:* $\omega_j$ *при* $j\geqslant 1$ *определяется из уравнений* (16) *при условии* (16′), *а* $\mu_\kappa$ *при* $\kappa\geqslant 1$ *определяется по формуле* (28). $v_s$*—функции типа пограслоя погашающие невязки в выполнении условий „склейки“. Остаточный член имеет порядок* $O(\varepsilon^{m+1})$ т. е.

$$z_m=y_{i\varepsilon}-y_{i\varepsilon,\,m}=\varepsilon^{m+1}z_m,\ \text{где}\ \|z_m\|=O(1)$$

***Доказательство.***

Построенная функция

$$y_{i\varepsilon,\,m}=\omega_0+\varepsilon\omega_1+\ldots+\varepsilon^m\omega_m+\varepsilon^{m+1}\alpha\ \text{в}\ D^-$$

$$y_{i\varepsilon,\,m}=0+\varepsilon v_1+\ldots+\varepsilon^m v+\varepsilon^{m+1}v_{m+1}+\varepsilon^{m+2}v_{m+2}\ \text{в}\ D^+$$

удовлетворяет условию (3), (4).

Так как $\|\omega_0\|=\|y_{i0}\|=1$, то

$$\|y_{i\varepsilon,\,m}\|=1+O(\varepsilon) \tag{86}$$

В силу наших построений в выражениях (10), (11) все члены при $\varepsilon^\kappa$ ($\kappa=0,1,\ldots m$) равны нулю.

Поэтому, очевидно, что

$$L_\varepsilon y_{i\varepsilon,\,m}-\lambda_{i\varepsilon,\,m}y_{i\varepsilon,\,m}=\varepsilon^{m+1}g_m,\ \|g_m\|=O(1),$$
$$\|y_{i\varepsilon,\,m}\|=1+O(\varepsilon), \tag{87}$$

где

$$\lambda_{i\varepsilon,\,m}=\sum_{\kappa=0}^{m}\varepsilon^\kappa\mu_\kappa$$

*Замечание.*

Функции типа пограслоя $v_i$ ($i=1,2,\ldots$) определены только $\eta_i$ окрестности точки $x=0$, т. е. на отрезке $0<x<\eta$. Умножим их на сглаживающий множитель $\psi\left(\frac{x}{\eta_i}\right)$ и по-прежнему обозначим их через $v_i$. Они тогда будут определены всюду в $D^+$ и формула (87) будет справедлива всюду в интервале $(-1,+\infty)$ (подробности см. [1]).

Справедливость разложения (83), (84), в силу (87), вытекает из следующих элементарных свойств самосопряженных операторов в гильбертовом пространство.

Пусть оператор A имеет дискретный и непрерывный спектр, причем дискретная часть спектра лежит на полуоси $\lambda<\frac{c_0}{\varepsilon^2}$ и значения $\lambda>\frac{c_0}{\varepsilon^2}$ принадлежат к непрерывному спектру.

а) *Лемма* 1. Если $U$ произвольный элемент из области определения $\mathfrak{D}_A$ оператора $A$, а $\lambda$ точка лежащая на полуоси $\lambda<\lambda_\kappa$, где $\lambda_\kappa$ некоторая точка дискретного спектра, то

$$\inf_i|\lambda-\lambda_i|\leqslant\frac{\|AU-\lambda U\|}{\|U\|} \tag{88}$$



В самом деле,

$$U=\sum_{\lambda_i<\frac{c_0}{\varepsilon^2}}C_iU_i+\int_{\frac{c_0}{\varepsilon^2}}^{\infty}dE_\mu U.$$

$$C_i=(U,U_i),\qquad \|U\|^2=\sum C_i^2+\int_{\frac{c_0}{\varepsilon^2}}^{\infty}d\,(E_\mu U,U)$$

$$AU-\lambda U=\sum_{\lambda_i<\frac{c_0}{\varepsilon^2}}(\lambda_i-\lambda)\,C_iU_i+\int_{\frac{c_0}{\varepsilon^2}}^{\infty}(\mu-\lambda)\,dE_\mu U$$

$$\|AU-\lambda U\|^2=\sum_{\lambda_i<\frac{c_0}{\varepsilon^2}}(\lambda_i-\lambda)^2C_i^2+\int_{\frac{c_0}{\varepsilon^2}}^{\infty}(\mu-\lambda)^2\,d(E_\mu U,U)$$

Поэтому

$$\|AU-\lambda U\|^2\geqslant\sum_{\lambda_i>\frac{c_0}{\varepsilon^2}}(\lambda_i-\lambda)^2C_i^2+\left(\frac{C_0}{\varepsilon^2}-\lambda\right)^2\int_{\frac{c_0}{\varepsilon^2}}^{\infty}d\,(E_\mu U,U)\geqslant$$

$$\geqslant\{\inf_i|\lambda-\lambda_i|\}^2\left[\sum C_i^2+\int_{\frac{c_0}{\varepsilon^2}}^{\infty}d\,(E_\mu U,U)\right]=\{\inf_i|\lambda-\lambda_i|\}^2\|U\|^2$$

Откуда и вытекает неравенство (88).

б) Пусть $\|AU-\lambda U\|=d\alpha$, $\|U\|=1$, и пусть $d$ такое число, что отрезок $[\lambda-d,\ \lambda+d]$ лежит слева от непрерывного спектра, т. е. отрезок $[\lambda-d,\ \lambda+d]$ не содержит точки непрерывного спектра и $d>\alpha$.

Обозначим через $\{v_r\}$ собственные значения оператора $A$, лежащие на отрезке $[\lambda-d,\ \lambda+d]$, и через $\{v_r\}$ соответствующие им собственные функции. Их замкнутую линейную оболочку обозначим через $T_d^0$. Пусть $T_d^1$ ортогональное дополнение $T_d^0$ к $H$.

Лемма 2. Существует в $T_d^0$ элемент $U_0$, для которого

$$\|U-U_0\|\leqslant\frac{2\alpha}{d},\qquad \|U_0\|=1 \tag{89}$$

В самом деле, если проекции $U$ на $T_d^0$ и $T_d^1$ обозначить соответственно через $U_d^0$ и $U_d^1$, то

$$\alpha^2=\|AU-\lambda U\|^2=\|AU_d^0-\lambda U_d^0\|^2+\|AU_d^1-\lambda U_d^1\|^2. \tag{90}$$

Очевидно, что

$$U_d^1=\int_{|\mu-\lambda|>d}dE_\mu U$$

$$AU_d^1-\lambda U_d^1=\int_{|\mu-\lambda|>d}(\mu-\lambda)\,dE_\mu U,U)$$

$$\|AU_d^1-\lambda U_d^1\|^2=\int_{|\mu-\lambda|>d}(\mu-\lambda)^2\,d\,(E_\mu U,U)>d^2\int_{|\mu-\lambda|>d}d\,(E_\mu U,U)=d^2\|U_d^1\|^2 \tag{91}$$

Отсюда и из (90) имеем

$$\|U_d^1\|<\frac{1}{d}\|AU_d^1-\lambda U_d^1\|\leqslant\frac{1}{d}\|AU-\lambda U\|=\frac{\alpha}{d}$$

$$\|U-U_d^0\|=\|U_d^1\|<\frac{\alpha}{d} \tag{92}$$

$$\|U_d^0\|>\|U\|-\|U_d^1\|>1-\frac{\alpha}{d}>0 \tag{93}$$

Обозначая $U_0=\frac{1}{\|U_d^0\|}U_d^0$, имеем $\|U_0\|=1$, при этом, в силу (92), (93),

$$\|U-U_0\|\leqslant\|U-U_d^0\|+\|U_0-U_d^0\|<\frac{\alpha}{d}+(1-\|U_d^0\|)\|U_0\|=$$

$$=\frac{\alpha}{d}+(1-\|U_d^0\|)\leqslant\frac{\alpha}{d}+\left[1-\left(1-\frac{\alpha}{d}\right)\right]=\frac{2\alpha}{d}$$

Так как $U_0\in T_d^0$, $\|U_0\|=1$, то мы доказали лемму.

Перейдем к доказательству разложения (83), (84).

Применяя лемму 1 сразу получаем

$$\inf_j|\lambda_{j\varepsilon}-\lambda_{i\varepsilon,m}|\leqslant\frac{\|L_\varepsilon y_{i\varepsilon,m}-\lambda_{i\varepsilon,m}y_{i\varepsilon,m}\|}{\|y_{i\varepsilon,m}\|}. \tag{94}$$

Очевидно, что

$$\inf_j|\lambda_{j\varepsilon}-\lambda_{i\varepsilon,m}|=|\lambda_{i\varepsilon}-\lambda_{i\varepsilon,m}| \tag{95}$$

Учитывая (95), из (94) имеем

$$|\lambda_{i\varepsilon}-\lambda_{i\varepsilon,m}|\leqslant\frac{\|L_\varepsilon y_{i\varepsilon,m}-\lambda_{i\varepsilon,m}y_{i\varepsilon,m}\|}{\|y_{i\varepsilon,m}\|}$$

Оттюда, учитывая (87), имеем

$$|\lambda_{i\varepsilon}-\lambda_{i\varepsilon,m}|\leqslant\varepsilon^{m+1}\frac{\|g_m\|}{\|y_{i\varepsilon,m}\|}$$

Обозначая

$$\lambda_{i\varepsilon}-\lambda_{i\varepsilon,m}=\varepsilon^{m+1}\delta_{m+1},$$

имеем

$$\lambda_{i\varepsilon}=\lambda_{i\varepsilon,m}+\varepsilon^{m+1}\delta_{m+1},\quad\text{где}\quad|\delta_{m=1}|\leqslant\frac{\|g_m\|}{\|y_{i\varepsilon,m}\|}=0(1) \tag{96}$$

Тем самым мы получили разложение (83).

Теперь докажем, что

$$y_{i\varepsilon}=y_{i\varepsilon,m}+\varepsilon^{m+1}z_m,\qquad\|z_w\|=0(1). \tag{97}$$

Согласно (87)

$$\|L_\varepsilon y_{i\varepsilon,m}-\lambda_{i\varepsilon,m}y_{i\varepsilon,m}\|=\alpha=\varepsilon^{m+1}\|g_m\| \tag{98}$$

Пусть $3d=\min(\lambda_{i0}-\lambda_{i-1,0},\lambda_{i+1,0}-\lambda_{i0})$

При достаточно малом $\varepsilon$

$$\lambda_{i\varepsilon}-\lambda_{i\varepsilon,m}\leqslant d,\qquad\lambda_{i-1,\varepsilon}-\lambda_{(i-1)\varepsilon,m}\leqslant d,\qquad\lambda_{i+1,\varepsilon}-\lambda_{(i+1)\varepsilon,m}\leqslant d$$

Таким образом, на отрезке $[\lambda_{i\varepsilon,m}-d.\ \lambda_{i\varepsilon,m}+d]$ заключено единственное собственное значение $\lambda_{i\varepsilon}$ оператора $L_\varepsilon$, которому отвечает единственная нормированная собственная функция $W_{i\varepsilon}$. Следовательно, $T_d^0$ (см. стр. 28), отвечающее оператору $L_\varepsilon$ и интервалу $[\lambda_{i\varepsilon,m}-\delta,\lambda_{i\varepsilon,m}+\delta]$, состоит из функции вида $tW_{i\varepsilon}$, $-\infty<+<+\infty$, где $\delta>0$ такое, что отрезок $[\lambda_{i\varepsilon,m}-\delta,\lambda_{i\varepsilon,m}+\delta]$ не содержит точки непрерывного спектра.



Фигурирующая в лемме 2 нормированная функция $U_0$ равна $\pm W_{i\varepsilon}$. Можно именно ее обозначить через $\widetilde{y}_{i\varepsilon}$.

В силу (98) и леммы 2

$$\left\|\widetilde{y}_{i\varepsilon}-\frac{y_{i\varepsilon,m}}{\|y_{i\varepsilon,m}\|}\right\|\leqslant0(\varepsilon^{m+1})$$

Если положить $\widetilde{y}_{i\varepsilon}\|y_{i\varepsilon,m}\|=y_{i\varepsilon}$, имеем

$$y_{i\varepsilon}-y_{i\varepsilon,m}=\varepsilon^{m+1}z_m=z_\varepsilon,\qquad\|z_m\|=0(1) \tag{99}$$

Тем самым доказана теорема 2.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Вишик М. И. и Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром, УМН XII, вып. 5 (1957), 3—122.

2. Вишик М. И. и Люстерник Л. А. Асимптотическое поведение решений дифференциальных уравнений с большими и быстро изменяющимися коэффициентами. „ДАН СССР", 125, № 2 (1950), 247—250.

3. Олейник О. А. Решение основных краевых задач для уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами, „ДАН СССР" 124 № 6 (1958), 1219—1222.

4. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. ГТТИ, 1954.

5. Блохинцев, Д. И. Основы квантовой механики, ГТТИ, 1949.

А. М. Һүсејнбәјова

## Чухур потенсиаллы мәсәләләрдә мәхсуси функсијалар вә мәхсуси әдәдләрин асимптотик тәфриги

## ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә кәсилән әмсаллы өз-өзүнә гошма икитәртибли ади дифференсиал $L_\varepsilon$ операторунун мәхсуси функсијалары вә мәхсуси гијмәтләринин $\varepsilon$ параметринә көрә тәфриги (31), (32), (33) дүстурларындан тапылыр.

Ашағыдакы ики теорем исбат олунур:

1-чи теорем. $L_\varepsilon$ операторунун спектри дискретдир, белә ки, онун бүтүн мәхсуси гијмәтләри $L_0$ операторунун үјғун мәхсуси гијмәтләринә јахындыр, даһа доғрусу

$$|\lambda_{i\varepsilon}-\lambda_{i0}|\leqslant b_i\varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

Бурада $b_i\varepsilon$ параметриндән асылы дејилдир.

2-чи теорем. Тутаг ки, $(-1,\infty)$ интервалында өз-өзүнә гошма ади (1) оператору верилир.

$$L_\varepsilon y\equiv-\frac{d}{dx}\left(\kappa(x)\frac{dy}{dx}\right)c_\varepsilon^+(x)y.$$

Бурада

$$\kappa(x)=\begin{cases}\kappa^-(x) & -1<x<0\\ \kappa^+(x)\ .\ .\ . & 0<x<\infty\end{cases}\qquad c_\varepsilon(x)=\begin{cases}c^-(x)=-1<x<0\\ \underline{c^+(x)}\quad 0<x<+\infty\\ \varepsilon^2\end{cases}$$

Е ни заманда (3) вә (4) шәртләр өдәнилир.

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазијјат вә техника елмләри серијасы, 1960, № 6

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1960, № 6

Е. И. МАНАФЛЫ, М. Ә. ТАЛИБИ

# АЗӘРБАЈЧАН ССР ӘРАЗИСИ ЈАТАГЛАРЫНДАН КӨТҮРҮЛМҮШ ГАЛЕНИТИН БӘ'ЗИ ХАССӘЛӘРИНӘ ДАИР

Тәбии минерал олан галенит тәчрүбәдә тәтбиг едилмиш илк јарымкечиричиләрдән биридир.

Мүхтәлиф јатаглардан көтүрүлмүш тәбии минераллар хассәләринә көрә, кристаллик гурулушларындан вә тәркибиндәки ашгарын миқдарындан асылы олараг бир-бириндән фәргләнир.

Азәрбајчан ССР јатагларындан көтүрүлмүш тәбии галенитин електрик, термоелектрик вә дүзләндиричи хассәләринин тәдгиги нәтичәсиндә параметрләри замана көрә сабит олан термоелектрокенераторлар һазырланмышдыр [1—3].

Һәмин иш Азәрбајчан галенитинин әсас е'тибары илә, фотокечиричилијинин тәдгиги вә бә'зи оптик хассәләриндән алынан нәтичәләрә һәср олунмушдур. Тәдгигатлар тәбии монокристал, поликристаллик нүмунәләр, еләчә дә вакуумда бухарландырма васитәси илә алынмыш назик тәбәгәләр үзәриндә апарылмышдыр.

Нүмунә һазырламаг үчүн сечилмиш минераллар үзәриндә әввәлчәдән ренткенгурулуш вә спектрал тәһлилләр апарылмышдыр.

Спектрал тәһлил нәтичәсиндә поликристаллик аленит минералында бир сыра ашгарларын (Fe, Ag, Al, Mg, Si, Ba, Ca, Cu, Sb, Zn, Sr) олдуғу мүәјјән едилмишдир.

Ренткенгурулуш тәһлили мәгсәди илә алынмыш дебајаграмларда мүхтәлиф чинсли атомларын хәтләри мүшаһидә олунмамышдыр. Чүнки онларын фаизлә миқдары ренткен методунун һәссаслығындан (~5%) бир нечә дәфә аздыр. Ренткенгурулуш тәһлилинә әсасән тәбии галенитин гәфәс сабитинин $a = 5{,}89$ Å олдуғу тапылмышдыр ки, бу да әдәбијјатда көстәрилән гијмәтләрә $(a = 5{,}97$ Å$)$ јахындыр. Тәбии монокристалларын ренткен шәкли көстәрди ки, онлар тамамы илә мүкәммәл дејилләр. Лауеграм үзәриндә монокристала хас олан кәскин ләкәләр әвәзинә енли вә јајылмыш ләкәләр алынмышдыр.

Тәдгигат үчүн нүмунәләр, агат һәвәнкиндә поликристаллик вә монокристаллик нүмунәләрин нарын тозуну алыб 200—250 *кг/см*$^2$ тәзјигдә пресләмә јолу илә һазырланмышдыр. Контактлар үчүн исә галенитлә омик контакт верән акводагдан истифадә олунмушдур. Нүмунәјә латун мәфтил пресләдикдә дә кечиҹ мүгавимәтләри алынмамышдыр.

Тәдгигат үчүн назик тәбәгәләр ади шүшә үзәринә $10^{-4}$ *мм* Hg тәртибли вакуумда тәбии галенитин бухарландырылмасы јолу илә һазырланмышдыр.

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-рнјазијјат вә техника елмләри серијасы, 1960, № 6

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1960, № 6

Е. И. МАНАФЛЫ, М. Ә. ТАЛИБИ

# АЗӘРБАЈЧАН ССР ӘРАЗИСИ ЈАТАГЛАРЫНДАН КӨТҮРҮЛМҮШ ГАЛЕНИТИН БӘ'ЗИ ХАССӘЛӘРИНӘ ДАИР

Тәбии минерал олан галенит тәчрүбәдә тәтбиг едилмиш илк јарымкечиричиләрдән биридир.

Мүхтәлиф јатаглардан көтүрүлмүш тәбии минераллар хассәләринә көрә, кристаллик гурулушларындан вә тәркибиндәки ашгарын мигдарындан асылы олараг бир-бириндән фәргләнир.

Азәрбајчан ССР јатагларындан көтүрүлмүш тәбии галенитин електрик, термоелектрик вә дүзләндиричи хассәләринин тәдгиги нәтичәсиндә параметрләри замана көрә сабит олан термоелектрокенераторлар һазырланмышдыр [1—3].

Һәмин иш Азәрбајчан галенитинин әсас е'тибары илә, фотокечиричилијинин тәдгиги вә бә'зи оптик хассәләриндән алынан нәтичәләрә һәср олунмушдур. Тәдгигатлар тәбии монокристал, поликристаллик нүмунәләр, еләчә дә вакуумда бухарландырма васитәси илә алынмыш назик тәбәгәләр үзәриндә апарылмышдыр.

Нүмунә һазырламаг үчүн сечилмиш минераллар үзәриндә әввәлчәдән ренткенгурулуш вә спектрал тәһлилләр апарылмышдыр.

Спектрал тәһлил нәтичәсиндә поликристаллик аленит минералында бир сыра ашгарларын (Fe, Ag, Al, Mg, Si, Ba, Ca, Cu, Sb, Zn, Sr) олдуғу мүәјјән едилмишдир.

Ренткенгурулуш тәһлили мәгсәди илә алынмыш дебајаграмларда мүхтәлиф чинсли атомларын хәтләри мүшаһидә олунмамышдыр. Чүнки онларын фаизлә мигдары ренткен методунун һәссаслығындан (~5%) бир нечә дәфә аздыр. Ренткенгурулуш тәһлилинә әсасән тәбии галенитин гәфәс сабитинин $a = 5{,}89$ Å олдуғу тапылмышдыр ки, бу да әдәбијјатда көстәрилән гијмәтләрә ($a = 5{,}97$ Å) јахындыр. Тәбии монокристалларын ренткен шәкли көстәрди ки, онлар тамамы илә мүкәммәл дејилләр. Лауеграм үзәриндә монокристала хас олан кәскин ләкәләр әвәзинә енли вә јајылмыш ләкәләр алынмышдыр.

Тәдгигат үчүн нүмунәләр, агат һәвәнкиндә поликристаллик вә монокристаллик нүмунәләрин нарын тозуну алыб 200—250 *кг/см*$^2$ тәзјигдә пресләмә јолу илә һазырланмышдыр. Контактлар үчүн исә галенитлә омик контакт верән акводагдан истифадә олунмушдур. Нүмунәјә латун мәфтил пресләдикдә дә кечид мүгавимәтләри алынмамышдыр.

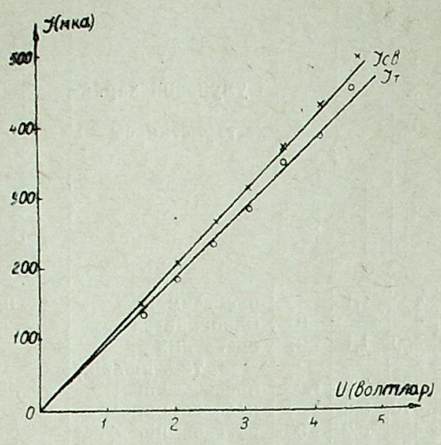
Тәдгигат үчүн назик тәбәгәләр ади шүшә үзәринә $10^{-4}$ *мм* Hg тәртибли вакуумда тәбии галенитин бухарландырылмасы јолу илә һазырланмышдыр.

Пресләнмиш нүмунәләр вә еләчә дә вакуумда бухарландырма јолу илә алынмыш галенитин назик тәбәгәләринин дешик кечиричилијинә малик олдуғу мүәјјән едилмишдир.

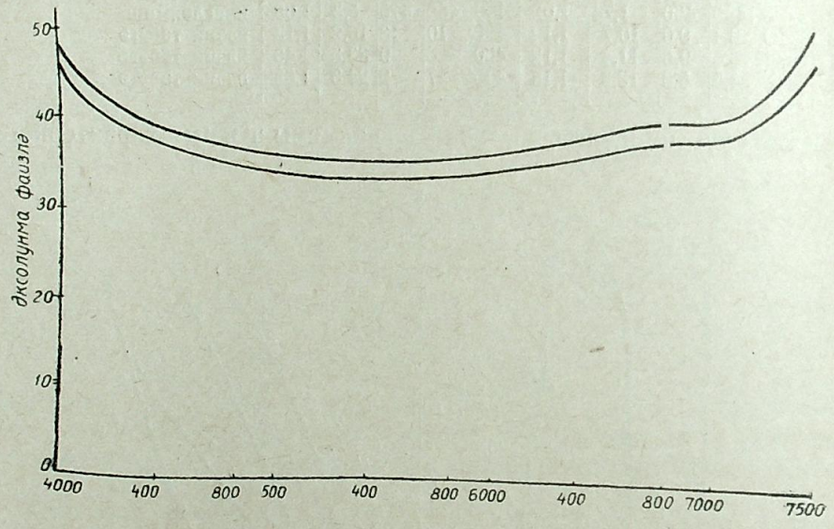
Назик тәбәгәләрин галынлығы чәки методу илә тә'јин едилмишдир. 1-чи чәдвәлдә фотокечиричилији өјрәнилмиш нүмунәләрдән үчү

Көстәрилән асылылыглар тәдгиг едилмиш 100-ə јахын нүмунə үчүн характерикдир.

4-чү шəкилдə 4000—7500 Å далға узунлуғу областында галенитин тəбии кристалынын вə преслəнмиш нүмунəнин сəтһləриндəн əксолунма əјриləри көстəрилмишдир. Шəкилдəки əјриләр спектрофотометрдə алынмышдыр. Көрүндүју кими, 5200 Å-дəн башлајараг 7100 Å-дəк əксолунма сабит олуб 30%-дир. 7100 Å-дəн башлајараг əксолунма артыб~40%-ə чатыр. Далға узунлуғунун һəмин интервалында назик тəбəгəнин оптик сыхлығы монотон азалыр. Бу ахырынчы Смитин [9] кимјəви чөкдүрмə јолу илə алынмыш лајлар үчүн вердији нəтичəләрə ујғундур. Назик тəбəгəнин јахын инфрагырмызы областа (0,9—1,5 микрон) удма əјриси




3-чү шəкил.




4-чү шəкил.

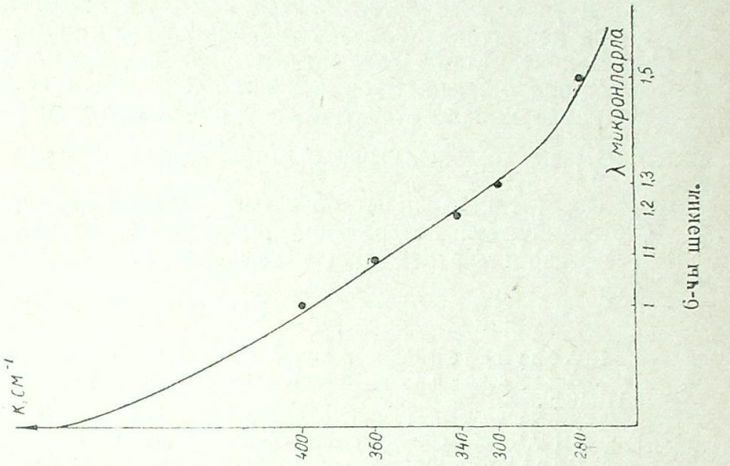
6-чы шəкилдə көстəрилмишдир. Нəтичəләр Смитин [9] вə И. Д. Конозенконун [6] вердији гиjмəтләрə уjғун кəлир. Тəбии галенит чиркли олдуғундан онун електрик мүгавимəти мə'лум:

$$R \sim Ae^{\frac{\Delta E}{2\kappa T}}$$

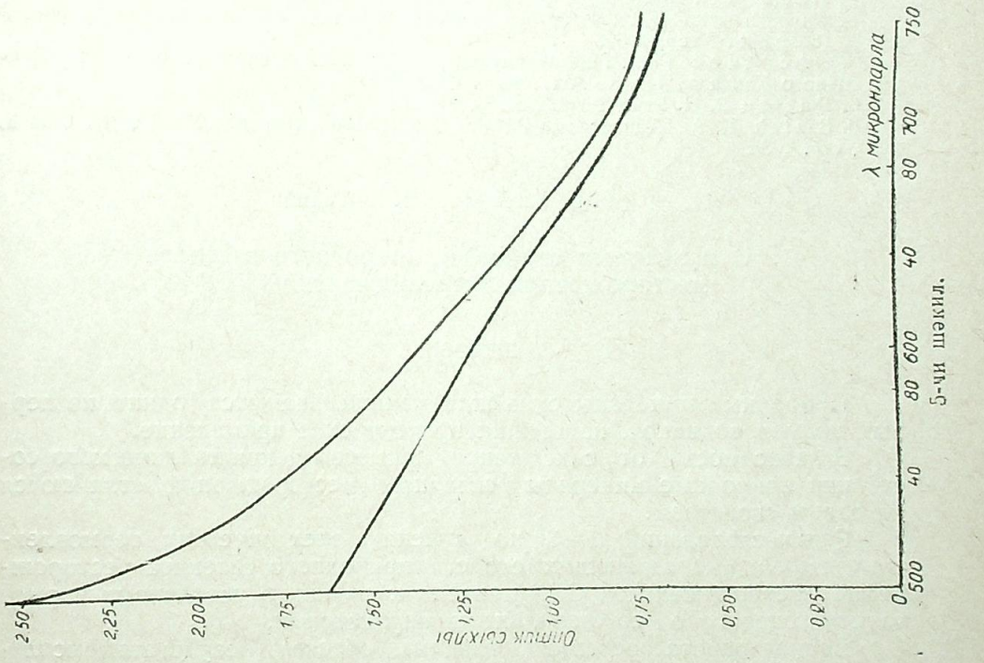
асылылығыны өдəмир. Смит [9] көстəрмишдир ки, мүгавимəтин температурдан асылылығыны көстəрəн тəчрүбəләр назик тəбəгə, ири күтләли поликристаллик нүмунə вə еләчə дə тəбии PbS кристалы илə



апарылмышдыр. Алынан нəтичəләри $\ln R = f\left(\frac{1}{T}\right)$ графики васитəси илə көстəрдикдə көзлəнилəн хəтти асылылыг алынмамышдыр. Бурадакы мүсбəт мејилли əјриләр $\Delta E$-нин, 0—0,3 *ев* гиjмəтләринə уjғун олмуш, бə'зи нүмунəләр үчүн исə мејл һəтта мənфи гиjмəт алмышды.




6-чы шəкил.




5-чи шəкил.

Бизим нүмунəләрдə мүгавимəтин температурдан асылылығы өлчүләркəн, һəтта 20—200° С температур интервалында бу чүр уjғунсузлуг мејдана чыхмышдыр. Бу нүмунəләр əввəлчədən 600°С температурунда бир нечə саат термик ишләнмишдир.

Үмумиjjətlə термик ишləмə нүмунələрин мүгавимətини кəскин дəjишдирир. Мəсəлən, назик тəбəгəлəрин хүсуси мүгавимəти термик ишləнмə нəтичəсиндə 200—300 *ом.см*-ə гəдəр артырды. Преслəнмиш нүмунələрин хүсуси мүгавимəти 10—30 *ом см*-ə чатырды. Назик тəбəгəлəрдə вə преслəнмиш нүмунələрдə мүгавимətин ири күтləли нүмунələрдə ($10^{-1}-10^{-2}$ *ом.см*) нисбətən бөjүк олмасынын сəбəби вəнинкинə еһтимала көрə кристаллар арасында jүксəк мүгавимətли контактын əмələ кəлмəсиндəдир. Путлинин көстəрди,и ками, [8] бу кристаллараrасы контактлар мүгавимətин температур асылылығынын дəjишмəсиндə бөjүк рол ојнаjыр. Бу чүр кристаллараrасы мүгавимəти нəзəрə алараг нүмунələримиздə отаг температурунда күчлү саһə еффектинин олуб олмамасы jохланылмышдыр. Мүəjjən едилмишдир ки, 1000 $\frac{в}{см}$ гəдəр саһədə статик гаранлыг вə ишыг волт-ампер характеристикаларында Ом ганунундан нəзəрə чарпачаг дəрəчədə кənара чыхма jохдур, jə'ни күчлү саһə еффекти мүшаһидə олунмур.

ƏДƏБИЈЈАТ

1. Абдуллаев Г. Б., Ахундов Г. А. „Изв. АН Азерб. ССР" №12, 1955.
2. Абдуллаев Г. Б., Ахундов Г. А., Алиева М. Х. „ДАН Азерб. ССР," № 11, 1959.
3. Абдуллаев Г. Б., Кулиев А. З., Керимов И. Г., Насиров Я. Н. „Изв. АН Азерб. ССР" (сер. физ.-мат. и технич. наук) № 3, 1960.
4. Герлих П. Фотоэлементы. ОГИЗ, Гостехиздат, М.—Л. 1948.
5. Данлеп У. Введение в физику полупроводников. Изд.-во ИЛ, М. 1959.
6. Конозенко И. Д. Фотоэлектрическая и оптические явления в полупроводниках (сборник). Киев. 1959.
7. Эфендиев Г. Х. Гидротермальный рудный комплекс северо-восточной части Малого Кавказа. Изд.-во АН Азерб. ССР, 1957.
8. Putley E. H. Proc. Phys. Soc. B, 65, 388, (1952).
9. Smith R. A. Aduances in Physics 2, 321, 1953 (перевод УФН т. 18, вып. 3, 1956, стр. 433).

Э. И. Манафли, М. А. Талиби

## О некоторых свойствах природного галенита месторождений Азербайджанской ССР

РЕЗЮМЕ

Природные минералы сульфида свинца являются одним из первых полупроводников, нашедших практическое применение.

В зависимости от содержания примесей и кристаллического состояния природные минералы различных месторождений отличаются по своим свойствам.

Ряд исследований [1—3] по изучению электрических, термоэлектрических и выпрямляющих свойств природного галенита месторождений Азербайджанской ССР привели к созданию устойчивых термоэлектрогенераторов со стабильными параметрами.

Данная работа посвящена главным образом результатам исследования фотопроводимости и некоторым оптическим свойствам азербайджанского галенита. Минералы, отобранные для изготовления образцов предварительно были подвергнуты спектральному и рентгеновскому анализу. Спектральный анализ обнаружил наличие ряда примесей. Для постоянной решетки получено $a = 5{,}89$ Å, что близко



к литературным данным $a = 5{,}97$ Å. Лауэграмма природных монокристаллов показала, что они весьма далеки от совершенства.

Изучение фотопровидимости азербайджанского галенита показало, что наибольшей фоточувствительностью обладают образцы в виде тонких пленок, полученных испарением в вакууме. Фоточувствительность прессованных образцов из порошка поликристаллического минерала значительно выше фоточувствительности таких же образцов, изготовленных из порошка монокристаллов. На самих же монокристаллах изредка обнаруживали слабый фотоэффект. По результатам исследования фотопроводимости различных образцов при комнатной температуре и температуре жидкого азота видно (табл. 1), что при температуре жидкого азота общая фоточувствительность выше фоточувствительности при комнатной температуре.

На рис. 4 приводятся кривые отражения от поверхности естественного кристалла PbS и прессованного образца в области длин волн 4000—7500 Å. Кривые получены на спектрофотометре. Как видно, начиная с 5200 Å до 7100 Å отражение постоянно и равно ~30%. Начиная с 7100 Å отражение, возрастая, достигает~ 40%. В том же интервале длин волн оптическая плотность тонких пленок записанная с помощью претерпевает монотонный спад (рис. 5). Последнее находится в согласии с данными Смита, полученными на химически осажденных слоях PbS [7]. Поглощение тонкой пленки в инфракрасной области (0,9—1,5 μ) приводится на рис. 6. Результаты согласуются с данными Смита [7] и Д. Д. Конозенко [9].

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-рижазијјат вә техника елмләри серијасы, 1960, № 6

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1960, № 6

Г. Б. АБДУЛЛАЕВ, М. Я. БАКИРОВ, Р. Б. ГАСЫМОВ, Я. Н. НАСИРОВ

# СЕЛЕНОВЫЕ ФОТОЭЛЕМЕНТЫ СО СЛОЯМИ *CdO, CdS, CdSe* и *CdTe*

Опыты по термической и электрической формовке, а также электронографические исследования убедительно показали, что в осерненных и неосерненных селеновых фотоэлементах с кадмиевым катодом, возникновение вентильного фотоэффекта обусловлено образованием и усовершенствованием слоя CdS и CdSe [1]. При этом установлено, что в процессе нанесения верхнего электрода из Cd на поверхности селена образуются тонкие слои CdS и CdSe, обладающие $n$-типом проводимости и в контакте с селеном дают $p$—$n$ переход. Следовательно в селеновых фотоэлементах с кадмиевым электродом возникновения фотоэффекта обусловливается образованием в них $p$—$n$ перехода. Опыты показывают, что указанные $p$—$n$ переходы можно создать также искусственным нанесением на селен слоя CdS и CdSe [1].

Возможность создания искусственного $p$—$n$ перехода на границе полупроводников была отмечена и экспериментально изучена в работах [2, 5]. Селеновые фотоэлементы с искусственными слоями из различных изолирующих материалов, были исследованы в работах [6, 11]. Одно фотоэффект в этих элементах был настолько мал, что его нельзя сравнить с эффектом в современных технических фотоэлементах.

В данной работе приводятся результаты исследования фотоэлектрических характеристик селеновых фотоэлементов со слоями CdO, CdS, CdSe и CdTe.

Известно, что CdO, CdS, CdSe и CdTe (т. е. соединение кадмия с группами халкогенидов) являются полупроводниками $n$-типа с высокой фоточувствительностью. Особенностью этих материалов является их высокая чувствительность к свету в видимой области спектра, что характерно для селена. Поэтому исследования фотоэффекта на $p$—$n$ переходах Se—Cdo, Se—CdS, Se—CdSe и Se—CdTe представляет особый интерес.

CdS, CdSe и CdTe используемые для создания искусственного $p$—$n$ перехода, были получены синтезом с последующей очисткой методом зонной плавки. Синтезированные соединения были проверены рентгенографическим методом, а тип проводимости зондовым методом по знаку термоэдс.

Для изготовления образцов на поверхность кристаллического селена путем испарения в вакууме были нанесены тонкие слои

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-рижазијјат вә техника елмләри серијасы, 1960, № 6

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1960, № 6

Г. Б. АБДУЛЛАЕВ, М. Я. БАКИРОВ, Р. Б. ГАСЫМОВ, Я. Н. НАСИРОВ

# СЕЛЕНОВЫЕ ФОТОЭЛЕМЕНТЫ СО СЛОЯМИ *CdO, CdS, CdSe* и *CdTe*

Опыты по термической и электрической формовке, а также электронографические исследования убедительно показали, что в осерненных и неосерненных селеновых фотоэлементах с кадмиевым катодом, возникновение вентильного фотоэффекта обусловлено образованием и усовершенствованием слоя CdS и CdSe [1]. При этом установлено, что в процессе нанесения верхнего электрода из Cd на поверхности селена образуются тонкие слои CdS и CdSe, обладающие $n$-типом проводимости и в контакте с селеном дают $p$—$n$ переход. Следовательно в селеновых фотоэлементах с кадмиевым электродом возникновения фотоэффекта обусловливается образованием в них $p$—$n$ перехода. Опыты показывают, что указанные $p$—$n$ переходы можно создать также искусственным нанесением на селен слоя CdS и CdSe [1].

Возможность создания искусственного $p$—$n$ перехода на границе полупроводников была отмечена и экспериментально изучена в работах [2, 5]. Селеновые фотоэлементы с искусственными слоями из различных изолирующих материалов, были исследованы в работах [6, 11]. Одно фотоэффект в этих элементах был настолько мал, что его нельзя сравнить с эффектом в современных технических фотоэлементах.

В данной работе приводятся результаты исследования фотоэлектрических характеристик селеновых фотоэлементов со слоями CdO, CdS, CdSe и CdTe.

Известно, что CdO, CdS, CdSe и CdTe (т. е. соединение кадмия с группами халкогенидов) являются полупроводниками $n$-типа с высокой фоточувствительностью. Особенностью этих материалов является их высокая чувствительность к свету в видимой области спектра, что характерно для селена. Поэтому исследования фотоэффекта на $p$—$n$ переходах Se—Cdo, Se—CdS, Se—CdSe и Se—CdTe представляет особый интерес.

CdS, CdSe и CdTe используемые для создания искусственного $p$—$n$ перехода, были получены синтезом с последующей очисткой методом зонной плавки. Синтезированные соединения были проверены рентгенографическим методом, а тип проводимости зондовым методом по знаку термоэдс.

Для изготовления образцов на поверхность кристаллического селена путем испарения в вакууме были нанесены тонкие слои

($\sim 5{,}10^{-5}$ *см*) CdO, CdS, CdSe и CdTe. После этого наносили верхний электрод.

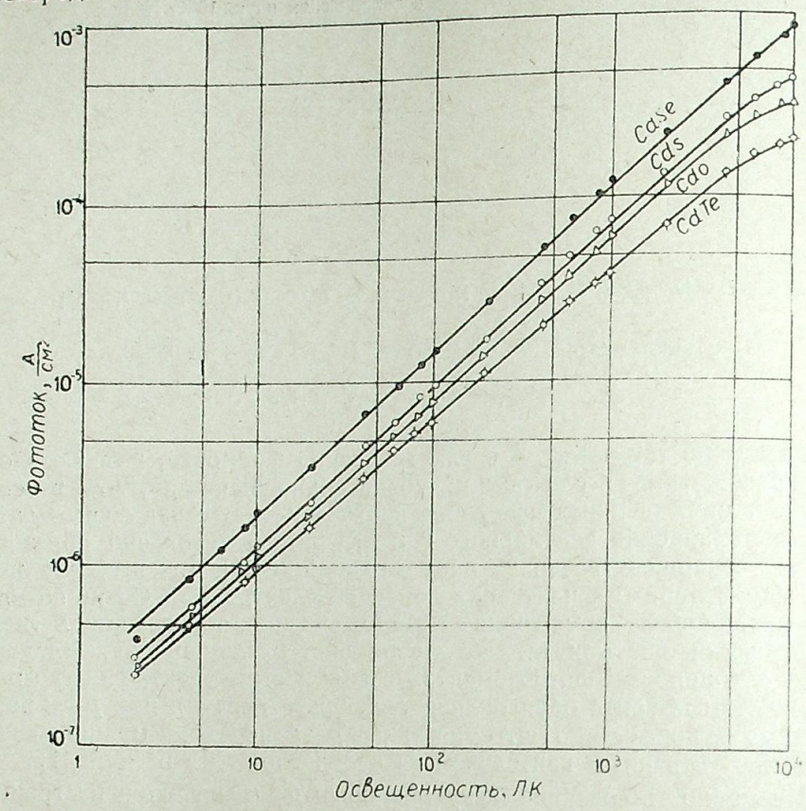



Рис. 1.

На рис. 1 показана зависимость фототока короткого замыкания от силы света. Как видно из рисунка в указанных фотоэлементах с увеличением освещенности до 10000 *лк* фототок короткого замыкания практически растет линейно, а при больших освещенностях линейность нарушается.

Зависимость фотоэдс холостого хода от силы света приведена на рис. 2, откуда видно, что при очень слабых освещенностях, примерно до 10—15 *лк* фотоэдс растет линейно, начиная с 10—15 *лк* прирост ее уменьшается, и линейность нарушается, а около 1000 *лк* наступает насыщение.

Такая зависимость фототока и фотоэдс от силы света удовлетворительно объясняется известными формулами [3, 8].

$$J_{кз} = \frac{к\phi}{\frac{r}{R} + 1} \qquad (1)$$

$$V_{xx} = R\, к\phi, \qquad (2)$$

где $J_{кз}$—фототок короткого замыкания, $V_{xx}$—фотоэдс холостого хода, $к$—интегральная чувствительность, $\phi$—световой поток, $R$—сопротивления $p-n$ перехода, $r$—сопротивления толщи полупроводника и контактов.



Сопротивление запирающего слоя $R$ с увеличением силы света $\phi$ уменьшается по логарифмическому закону [3, 8]. При слабых освещенностях $R \gg r$, тогда согласно (1) $J_{кз} \sim к\phi$. С ростом освещенности $R$ уменьшается так, что фототок растет слабее, чем $\phi$, т. е. нарушается линейность.

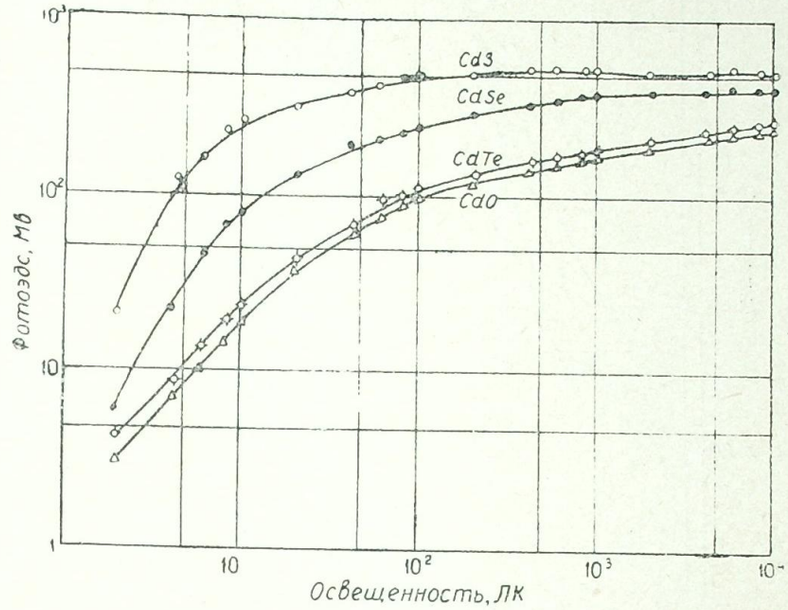



Рис. 2.

При слабых освещенностях $R$ можно считать постоянным, тогда согласно (2) с ростом $\phi$ растет $V_{xx}$, а при больших освещенностях в результате уменьшения $R$, $V_{xx}$ приближается к насыщению.

На рис. 3 показаны спектральные характеристики указанных систем. Как видно, из рисунка для всех систем спектральная характеристика имеет общий ход. Максимумы их лежат в интервале 0,56—0,58 $\mu$. В образцах со слоями CdS селективность больше и ширина спектральной характеристики узкая $\left(\sim 100\ m\mu, \text{ а на уровне } \frac{\lambda_{макс}}{2}\right)$.

В образцах со слоями CdO и CdTe характеристика широкая и относительная чувствительность в коротковолновой части спектра высокая. В образцах со слоями CdSe при $\lambda = 710\ m\mu$ наблюдается второй максимум, что характерно для данной системы [9, 10].

Такое сходство спектральных характеристик фотоэлементов со слоями CdO, CdS, CdSe и CdTe, по-видимому, обусловлено тем, что возникновение фотоэффекта, в основном, связано с образованием пара в селене.

При исследовании полупроводниковых устройств всегда значительный интерес представляет температурная зависимость характеристики данных систем Температурная зависимость фотоэдс фотоэлементов со слоями CdO, CdS, CdSe и CdTe показана на рис. 4.

Как видно из графиков для всех исследуемых систем с повышением температуры от 0, до 100° С фотоэдс практически линейно уменьшается. Различия наблюдаются лишь в температурном коэффициенте.

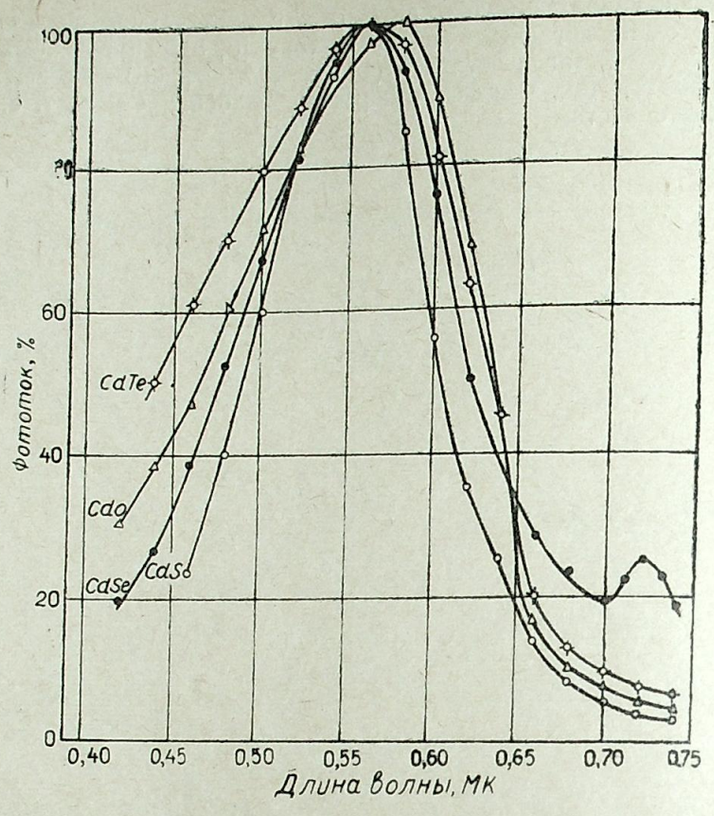



Рис. 3.

$\frac{\Delta V}{\Delta t}$ имеет наибольшее значение в образцах со слоями CdTe (−0,002 *в/град*), а наименьшее—со слоями CdSe (−0,001 *в/град*).

Уменьшение фотоэдс с повышением температуры можно объяснить температурной зависимостью внутреннего сопротивления элемента.

Согласно формулы (2) $V_{xx} \sim R\,кф$, где $R$—сопротивление запирающего слоя, которое является основной частью сопротивления фотоэлемента. С повышением температуры от 0 до 100° С $R$ уменьшается. Уменьшение $R$ приводит к уменьшению $V_{xx}$, что согласуется с результатами работы [4, 7]. Вероятно температурная зависимость внутреннего сопротивления для систем Se—CdO, Se—CdS, Se—CdSe и Se—CdTe различно, вследствие чего температурный коэффициент фотоэдс отличается.

В отличие от фосоэдс температурная зависимость фототока совершенно различна (рис. 5).

В образцах со слоями CdSe в интервале 0—100° С фототок практически не зависит от температуры, лишь около 100° С наблюдается незначительный (8—10%) спад. В образцах со слоям CdS с повышением температуры фототок растет и при 100° С прирост его составляет~30% от значения фототока при комнатной температуре.

В образцах со слоями CdO и CdTe с повышением температуры фототок сначала растет, а затем падает. В элементах со слоями CdO



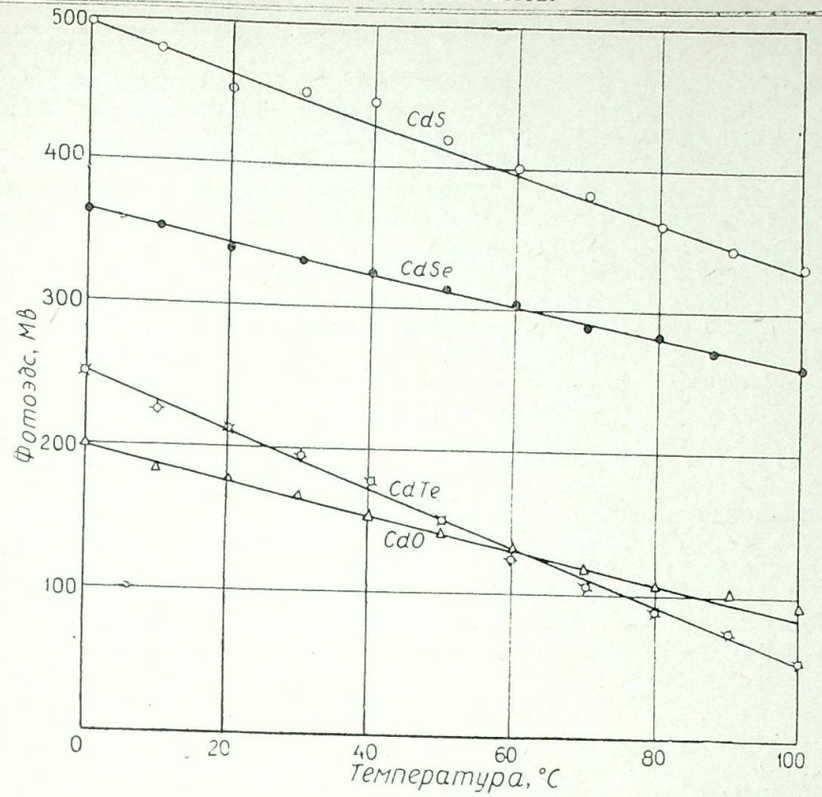



Рис. 4

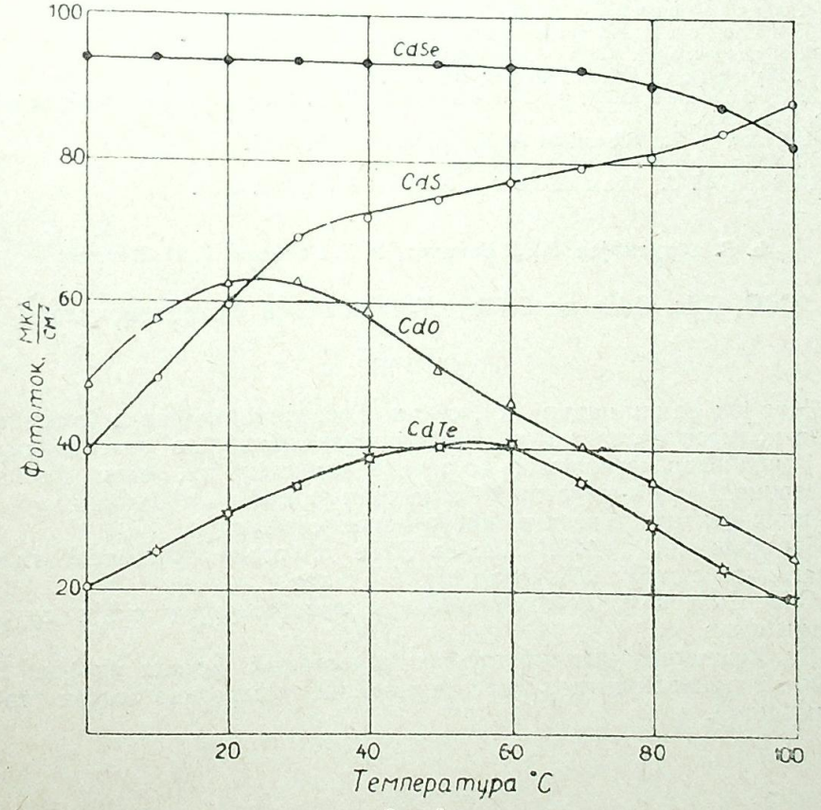



Рис. 5.

фототок достигает максимума около 25° С. При этом прирост составляет ~45% от значения фототока при 0° С. Уменьшение фототока при 100° С составляет~75% от максимального значения.

В элементах со слоями CdTe фототок достигает максимума при 60° С. При этом прирост составляет~25% от значения фототока при комнатной температуре. Уменьшение фототока при 100° С составляет ~50% максимального значения.

В результате этих опытов можно указать, что фототок может как увеличиваться, так и уменьшаться с температурой в зависимости от области температур. Вероятно это обусловливается изменением времени жизни носителей тока и сопротивления контактов.

## ВЫВОДЫ

1. Путем искусственного нанесения на селен слоев CdO, CdS, CdSe и CdTe, обладающие *n*-типом проводимости, установлено, что возникновение вентильного фотоэффекта в селеновых фотоэлементах со слоями CdO, CdS, CdSe и CdTe обусловлено образованием $p-n$ перехода на границе Se—CdO, Se—CdS, Se—CdSe и Se—CdTe.

2. В образцах со слоями CdO, CdS, CdSe и CdTe материалы верхнего электрода не играют существенной роли и не требуется дополнительная формовка.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Абдуллаев Г. Б., Бакиров М. Я., Гасымов Г. В., Насиров Я. М. „Изв. АН Азерб. ССР". № 4, 1960.
2. Иоффе А. Ф. ЖТФ, 18, 1498, 1948.
3. Лукьянов С. Ю. Фотоэлементы. Изд. АН СССР, 1948.
4. Маслаковец Ю. П. ЖТФ, III, 377, 1933.
5. Наседов Д. Н., Неменов Л. М. ЖЭТФ, 2 183, 1952.
6. Пуцейко Е. К. ЖТФ, 8, 646, 1949.
7. Пуцейко Е. К. ЖТФ, VII, 10, 1937.
8. Субашиев В. К. и Сominский М. С. Полупроводники в науке и технике, т. 2, 1958.
9. Eskart E., Shmidt A. Z. Phys., 118, 199, 1941.
10. Görlich P. Z. Phys., 112, 490, 1939.
11. Van W. C., Gal. de Boer J. H. Physicka, 2, 892, 1935.

**Һ. Б. Абдуллајев, М. Ј. Бәкиров, Р. Б. Гасымов, Ј. Н. Нәсиров**

## CdO, Cds, CdSe вә CdTe тәбәгәли селен фотоелементләри

## ХҮЛАСӘ

Мүәјјән едилмишдир ки, селен фотоелементләриндә фотоеһг-ин әмәлә кәлмәси онларда *p-n* кечидинин јаранмасы илә әлагәдардыр.

Тәчрүбәләр нәтичәсиндә мүәјјән едилмишдир ки, селен фотоелементләриндә сүн'и сүрәтдә $p-n$ кечиди јарамаг вә белә ликлә елементин характеристикасыны идарә етмәк мүмкүндүр.

Мәгаләдә CdO, CdS, CdSe вә CdTe тәбәгәли фотоелементләрин тәдгигиндән алынан нәтичәләр шәрһ едилир.

CdS, CdSe вә CdTe бирләшмәләри лабораторијада сүн'и сүрәтдә алынмышдыр.

Бу бирләшмәләрин тәбиәти ренткенографик үсулла мүәјјән едиләрәк, кечиричилијин нөвү илә термоеһг-ин ишарәсинә әсасән тә'јин олунмушдур.



Бухарланма заманы көстәрилән бирләшмәләрин парчаланмасы електронографик үсулла мүәјјән едилмишдир.

Тәчрүбәләр әсасында ајдынлашдырылмышдыр ки, CdSe тәбәгәли фотоелементләр 0,7 *в*; 2,5—3 $\frac{мА}{см^2}$ →чәрәјан, CdSe тәбәгәли елементләр 0,6 *в*; 3 $\frac{мА}{см^2}$ чәрәјан, CdTe тәбәгәли елементләр 0,5 *в*; 1,5 $\frac{мА^2}{с^2}$ чәрәјан вә CdO тәбәгәли елементләр исә 0,4 *в*; 2 $\frac{мА}{см^2}$ чәрәјан верирләр.

Фотоелектрик параметрләринә көрә ән еффектив фотоелемент CdS тәбәгәли фотоелементләрдир. CdTe тәбәгәли елементләр спектрин гыса далғалы һиссәсинә кифајәт гәдәр һәссаслыға маликдир ки, бунун да бөјүк тәчрүби әһәмијјәти вардыр.

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазиҹҹат вә техника елмләри серијасы, 1960, № 6

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1960, № 6

А. Х. ХАЛИЛОВ, Т. Д. АЛИЕВА

# ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОВЫСВЕЧИВАНИЯ НЕКОТОРЫХ KCl—КРИСТАЛЛОФОСФОРОВ

Метод термовысвечивания успешно применяется для исследования свойств центров захвата в люминесцирующих кристаллах. Этот метод из-за высокой чувствительности и точности был использован во многих советских и зарубежных работах для изучения центров захвата в различных классах кристаллофосфоров, в том числе в щелочно-галоидных кристаллофосфорах [1—10].

В работе Ч. Б. Лущика [2] была применена скорость нагрева, равная 0,15 *град/сек* и были разрешены многие детали спектра центров захвата в KCl, KBr, KJ—фосфорах, активированных Cu, Ag, Tl.

В настоящей работе, применяя постоянную скорость нагрева, равную 0,05 *град/сек*, были изучены спектры термовысвечивания монокристаллических кристаллофосфоров. Запись кривых термовысвечивания производилась на саморегистрирующей фотоэлектрической установке, собранной нами. Последняя состоит из фотоумножителя ФЭУ-18, двухлампового усилителя постоянного тока, электронного потенциометра и блоков электронных стабилизаторов для питания ФЭУ-18 и усилителя.

Наша установка позволяет регистрировать свечение с очень незначительной яркостью и обладает ничтожным ползанием „места нуля—2—3 *мм* за 1,5 часа записи одной кривой термовысвечивания.

Монокристаллы были выращены из расплава методом Киропулоса. Концентрации активаторов в расплаве во всех одноактиваторных и двухактиваторных кристаллофосфорах были взяты одинаковыми. Были постоянными также условия выращивания и охлаждения полученных монокристаллов.

Из полученных монокристаллов выкаливались образцы размерами 20×12×1 *мм*. Кривые термовысвечивания у всех монокристаллов были записаны при одинаковых условиях работы усилителя, фотоумножителя, электронного потенциометра и режима нагрева спустя 20 минут после рентгенизации монокристаллов. Рентгенизация кристаллов производилась вольфрамовой трубкой (ток 15 *ma*, напряжение—40 *кv*), время рентгенизации для всех кристаллофосфоров было 45 минут.

Во время рентгенизации кристаллы защищались от действия видимого света. Кривые термовысвечивания, автоматически записанные на ленте приведены на рисунках 1—7, где на оси абцисс указана температура в градусах Цельсия, а на оси ординат отложена относительная интегральная интенсивность свечения фосфоров.

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазијјат вә техника елмләри серијасы, 1960, № 6

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1960, № 6

А. Х. ХАЛИЛОВ, Т. Д. АЛИЕВА

# ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОВЫСВЕЧИВАНИЯ НЕКОТОРЫХ KCl—КРИСТАЛЛОФОСФОРОВ

Метод термовысвечивания успешно применяется для исследования свойств центров захвата в люминесцирующих кристаллах. Этот метод из-за высокой чувствительности и точности был использован во многих советских и зарубежных работах для изучения центров захвата в различных классах кристаллофосфоров, в том числе в щелочно-галоидных кристаллофосфорах [1—10].

В работе Ч. Б. Лущика [2] была применена скорость нагрева, равная 0,15 *град/сек* и были разрешены многие детали спектра центров захвата в KCl, KBr, KJ—фосфорах, активированных Cu, Ag, Tl.

В настоящей работе, применяя постоянную скорость нагрева, равную 0,05 *град/сек*, были изучены спектры термовысвечивания монокристаллических кристаллофосфоров. Запись кривых термовысвечивания производилась на саморегистрирующей фотоэлектрической установке, собранной нами. Последняя состоит из фотоумножителя ФЭУ-18, двухлампового усилителя постоянного тока, электронного потенциометра и блоков электронных стабилизаторов для питания ФЭУ-18 и усилителя.

Наша установка позволяет регистрировать свечение с очень незначительной яркостью и обладает ничтожным ползанием „места нуля—2—3 *мм* за 1,5 часа записи одной кривой термовысвечивания.

Монокристаллы были выращены из расплава методом Киропулоса. Концентрации активаторов в расплаве во всех одноактиваторных и двухактиваторных кристаллофосфорах были взяты одинаковыми. Были постоянными также условия выращивания и охлаждения полученных монокристаллов.

Из полученных монокристаллов выкаливались образцы размерами $20\times12\times1$ *мм*. Кривые термовысвечивания у всех монокристаллов были записаны при одинаковых условиях работы усилителя, фотоумножителя, электронного потенциометра и режима нагрева спустя 20 минут после рентгенизации монокристаллов. Рентгенизация кристаллов производилась вольфрамовой трубкой (ток 15 *ма*, напряжение—40 *кв*), время рентгенизации для всех кристаллофосфоров было 45 минут.

Во время рентгенизации кристаллы защищались от действия видимого света. Кривые термовысвечивания, автоматически записанные на ленте приведены на рисунках 1—7, где на оси абцисс указана температура в градусах Цельсия, а на оси ординат отложена относительная интегральная интенсивность свечения фосфоров.

На рисунках 1—6 цифрой 1 обозначены кривые термовысвечивания, записанные через 20 минут после рентгенизации, цифрой 2—то же самое после рентгенизации и после 20-минутного $F$-облучения;

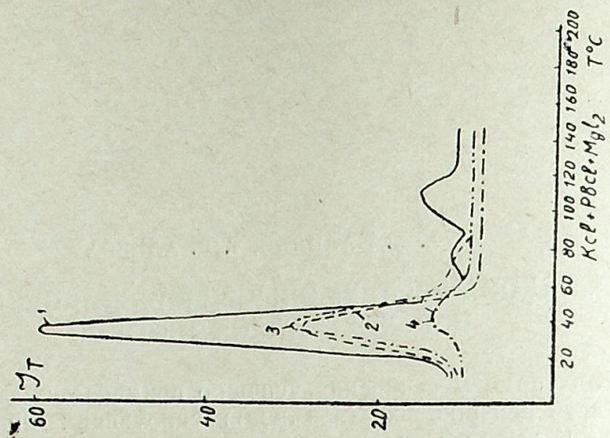



Рис. 3.

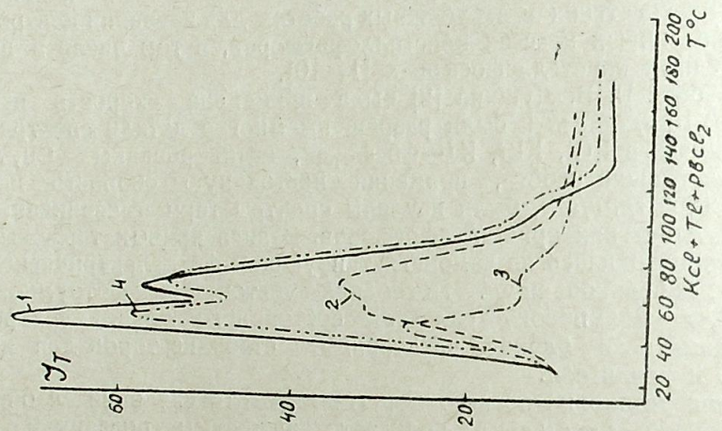



Рис. 2.

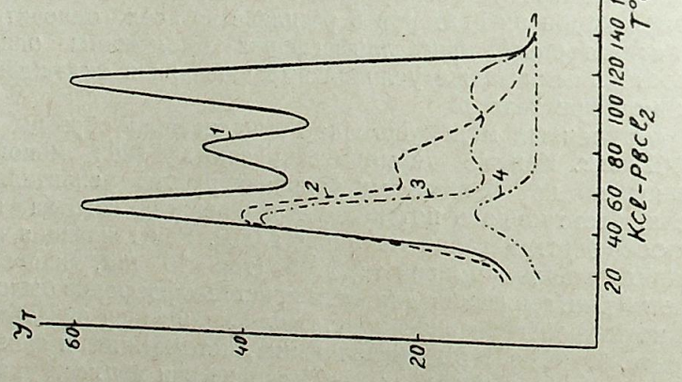



Рис. 1.

цифрой 3—обозначены кривые термовысвечивания, записанные через фильтр перед ФЭУ-18 для выделения ультрафиолетовой части



свечения кристаллофосфоров; цифрой 4—обозначено то же самое через фильтр перед ФЭУ-18 для выделения видимой части свече-

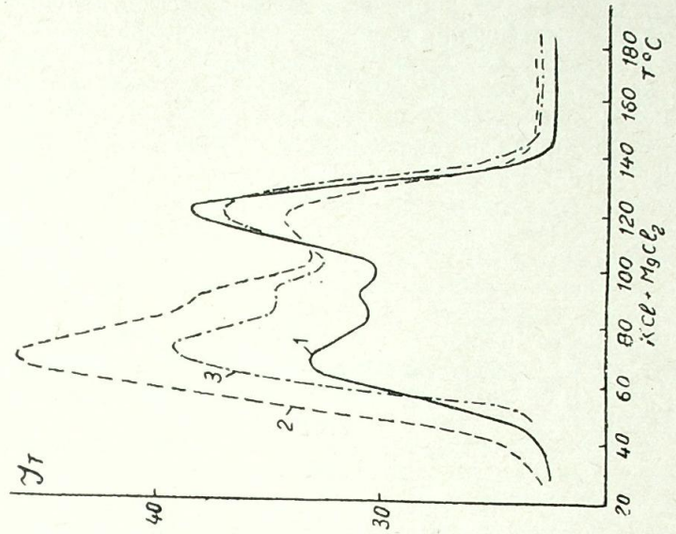



Рис. 6.

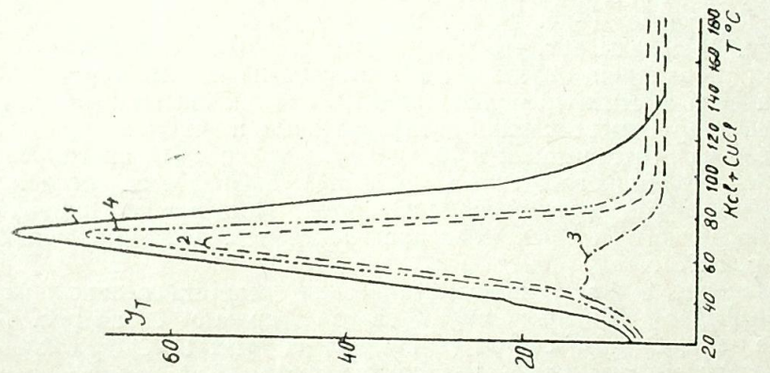



Рис. 5.

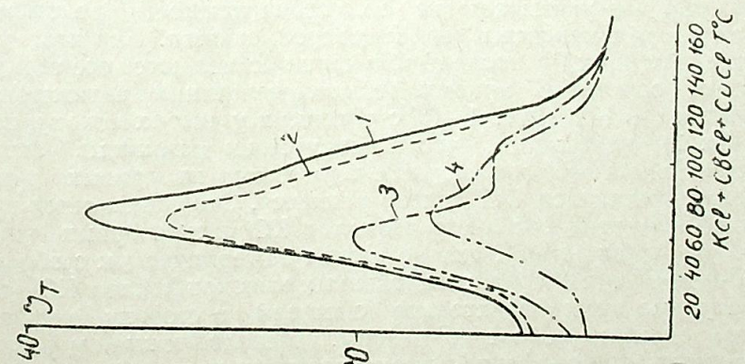



Рис. 4.

ния кристаллофосфоров. Масштаб кривых 3—4 увеличен в 20 раз по сравнению с кривыми 1—2.

Полосы термовысвечивания на кривых 1—4 рисунков 1—6 соответствуют рекомбинации электронов, термически освобожденных и центров захвата фосфоров, где электроны были локализованы во время их рентгенизации. В процессе нагрева фосфоров постоянной скоростью по мере повышения температуры кристалла растет вероятность тепловой ионизации электронов, локализованных на более глубоких уровнях захвата. Последовательное выхолащивание отдельных групп локальных уровней захвата с различной глубиной расположения создает возможность возникновения ряда термопиков с различной $T_m$ для одного и того же фосфора.

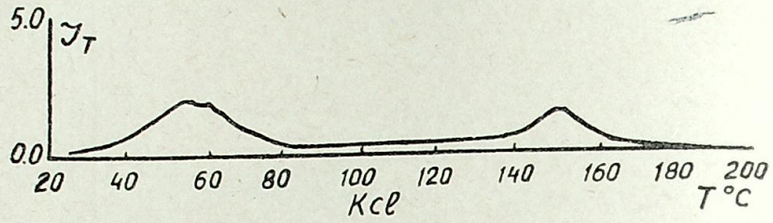



Рис. 7.

Сравнение кривых термовысвечивания двухактиваторных фосфоров KCl+Cu+Pb, KCl+Pb+Mg и соответствующих одноактиваторных кристаллофосфоров (рис. 1—6) с кривой термовысвечивания кристалла KCl (рис. 7) показывает, что у двух активаторных фосфоров нет аддитивности во влиянии отдельных активаторов на кривые термического высвечивания чистых монокристаллов KCl. Наши опыты показали, что на кривых термовысвечивания активированных и чистых кристаллов KCl после их рентгенизации и облучения инфракрасным светом из области $M$—полосы поглощения ($\lambda$=850 $m\mu$) наблюдается ослабление наиболее низкотемпературного пика, что указывает на принадлежность последнего к рекомбинации электронов, освобожденных из $M$-центров KCl.

Сравнение кривых термовысвечивания рентгенизованных кристаллофосфоров до облучения $F$-светом (кривые 1 на рис. 1—6) и после облучения $F$-светом (кривые 2 на рис. 1—6) показывает, что высокотемпературные термопики после $F$-облучения сильно ослабляются, что указывает на их принадлежность рекомбинации электронов, освобожденных из $F$-центров захвата. При этом у фосфоров, содержащих Pb после $F$-облучения ослабляются все термопики.

Далее, сравнение кривых термовысвечивания активированных монокристаллов KCl (рис. 1—6) с таковыми у чистых монокристаллов KCl (рис. 7) показывает, что в присутствии различных активаторов интенсивность и расположение термопиков на кривых термовысвечивания кристаллов KCl сильно меняется. Это объясняется присутствием вблизи тепловых микродефектов KCl активаторных микродефектов, что, по-видимому, сильно влияет на термическую стабильность $F$-и $M$-центров, ибо у активированных монокристаллов KCl высокотемпературные пики значительно смещены в сторону меньших $T$. При этом одни и те же $F$-центры, расположенные у различных активаторных микродефектов имеют различную термическую стабильность. Действительно, как видно из сравнения кривых термовысвечивания KCl+Pb (рис. 1 кривые 1, 2) до и после $F$-облучения у



KCl+Pb ослабляются все 3 пика термовысвечивания. Это позволяет думать, что все термопики у KCl+Pb обусловлены рекомбинацией электронов, освобожденных из $F$-центров различной термической стабильности. Таким образом, путем введения в кристаллы KCl различных активаторов можно регулировать термическую стабильность центров захвата, в которых накапливается в процессе возбуждения основная часть энергии возбуждения, что имеет важное значение для регулирования инерционных и аккумуляционных свойств кристаллофосфоров. Как видно из полученных результатов, исследование термовысвечивания активированных монокристаллов KCl позволяет получить данные о наличии и характере взаимодействия активаторных и тепловых микродефектов, а также влияние последних на глубину расположения центров захвата. Как видно из сравнения интенсивности термопиков в их максимуме $J_m$, которая пропорциональна числу электронов, локализованных на данном центре захвата, природа активирующих примесей влияет не только на тепловую глубину центров захвата, но и на распределение электронов по центрам захвата. При этом наибольшую электронную емкость центров захвата создает активатор Cu.

Далее, в настоящей работе для установления спектрального состава различных термопиков изученных кристаллофосфоров на рис. 1—6 для сравнения приведены кривые термовысвечивания, обозначенные цифрами 3—4. Эти кривые записаны с установленными перед ФЭУ-18 фильтрами ЖС-4, пропускающими соответственно ультрафиолетовую и видимую части свечения фосфоров при нагреве их с постоянной скоростью. Знания о спектральном составе отдельных термопиков на кривых термовысвечивания позволяют выяснить структуру центров свечения в кристаллофосфорах.

Как видно из сравнения на рисунках 1—6 кривых термовысвечивания 3, 4 с кривыми 1, записанными без фильтров перед ФЭУ-18, у всех кристаллофосфоров свечение, соответствующее отдельным термопикам содержит ультрафиолетовые лучи. Однако, у кристаллофосфоров KCl+Pb, KCl+Pb+Mg, KCl+Pb+Cu термопики, расположенные в области 45°C содержат кроме ультрафиолетового свечения также видимые лучи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кац М. Л. Оптика и спектроскопия т. 1, в. 2, 1956.
2. Лущик Ч. Б. Диссертация, ЛГУ, 1954.
3. Парфианович И. А. „Изв. АН СССР", 13, 161, 1949.
4. Парфианович И. А. ЖЭТФ, 21, 1389, 1951.
5. Парфианович И. А. ЖЭТФ. 21, 314, 1951.
6. Парфианович И. А. ЖЭТФ 24, 117, 1953.
7. Парфианович И. А. ЖЭТФ, 25, 614, 1953.
8. Kandall J., Wilkins M. Pros, Phys. Soc. A, 184, 366, 1945.
9. Smoller B., May, Freedman. Phys. Rev. 87, № 3, 1952.
10. Smoller B., Avery E., Phys. Rev. 92, 232, 1953.

Ə. Х. Хəлилов, Т. Ч. Əлијева

## Бə'зи KCl кристаллофосфорларынын термошуаланмасынын тədгиги

ХУЛАСə

Термошуаланма үсулу луминессенсија верən кристалларда тутма мəркəзləринин хассələрини өјрənмək үчүн тətбиг олунур. Көстəрилən үсул мүхтəлиф синиф кристаллофосфорларда, о чүмлədən гələви hало-

кен кристаллофосфорларда тутма мәркәзләринин өјрәнилмәси үчүн бир чох совет вә харичи алимләрин ишләриндә тәтбиг едилмишдир.

Бу ишдә Pb, Cu, Tl ашгарлары илә активләшдирилмиш KCl фосфорларынын мүәллифләрин јығмыш олдуғу өзүјазан гурғуда термошүаланмасынын өјрәнилмәси нәтичәләри шәрһ едилмишдир. Тәчрүбәләр нәтичәсиндә мүәјјән етмишләр ки Pb, Cu, Tl ионлары дахил едилмиш KCl гәфәсинин електронлары локализәедичи сәвиҹҹәләринин спектри вә һәмин сәвиҹҹәләрдә електронларын пајланмасы һәмин ионларын тә'-сириндән кәскин дәјишир. О чүмләдән мүәјјән едилмишдир ки, көстәрилән Pb, Tl, Cu ионлары дахил едилмиш KCl гәфәсиндәки F-мәркәзләрин термик дајаныглығы тәмиз KCl гәфәсинә нисбәтән аздыр.

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-риjазиjjат вә техника елмләри серијасы, 1960, № 6

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1960, № 6

М. А. ТАЛИБИ, А. Г. ЮСИФОВ

# О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ВЛИЯНИЯ РЕНТГЕНОВСКИХ И ГАММА ЛУЧЕЙ НА ЭЛЕКРОСОПРОТИВЛЕНИЕ CdS КРИСТАЛЛОВ

Высокая чувствительность CdS к ионизирующим излучениям позволила изготовить малогабаритные дозиметры для рентгеновских и гамма лучей [2—8, 12, 13].

Степень однородности и волновой состав рентгеновских излучений зависят от напряжения, при котором работает рентгеновская трубка.

Одному и тому же режиму работы трубки (заданные значения $U_{тр}$, $J_{тр}$) соответствуют рентгеновские излучения различного волнового состава и интенсивности в зависимости от материала анода.

Ввиду сравнительно небольшой абсолютной интенсивности характерического излучения и ряда других причин на практике (в частности, в медицине) используется сплошное рентгеновское излучение, которое подвергается фильтрации, в результате чего в зависимости от толщины и материала фильтра достигается определенная степень однородности пучка.

Как известно [7], чувствительность кристаллов CdS является функцией длины волны с максимумом в видимой области спектра при $\lambda \sim 0{,}52$ Å. В коротковолновой области максимум чувствительности лежит между значениями $\lambda = (0{,}08 - 0{,}1)$ Å

В связи с изложенным для использования сернистого кадмия в качестве датчика дозиметра ионизирующего излучения необходимо установить чувствительность образца к излучениям различного волнового состава.

Исследование CdS как составной части одного из видов селеновых выпрямляющих элементов представляет так же интерес при исследовании влияния постоянно действующей радиации на режим работы выпрямителя [9—11]. Хотя в выпрямителях слой CdS поликристаллический, тем не менее для установления закономерностей исследование монокристаллов более удобно. Что касается результатов в монокристаллах они, в основном, повторяются и в поликристаллах.

В данной работе исследовалось влияния рентгеновских лучей различного волнового состава и интенсивности, а также гамма лучей на электросопротивление CdS монокристаллов.

Для получения рентгеновских лучей использована установка с трубками, имеющими молибденовый, медный и железный антикатоды. Медицинская рентгеновская установка с вольфрамовой трубкой позволяла получение рентгеновских лучей, соответствующих

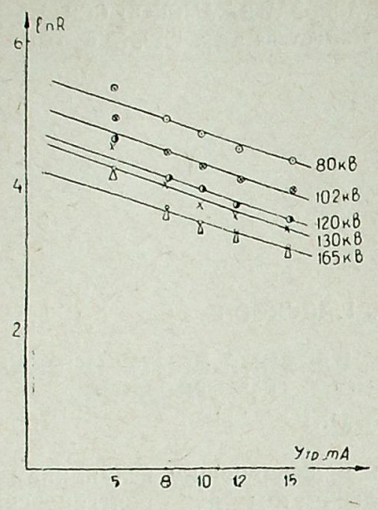



Рис. 1. W-излучение

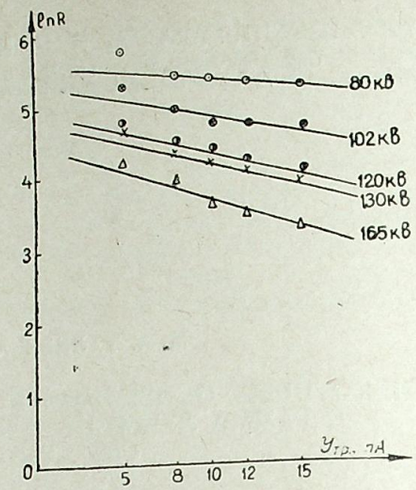



Рис. 2. W-излучение с Cu-фильтром 0,3 *мм*

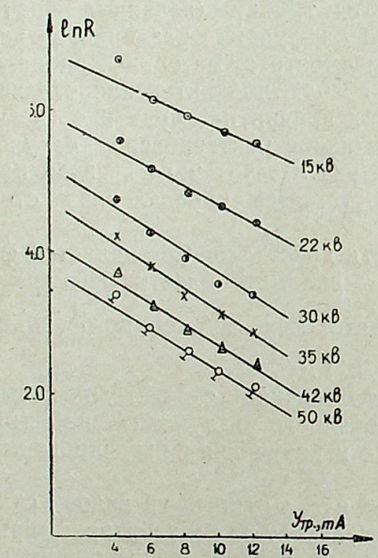



Рис. 3. Mo-изучение

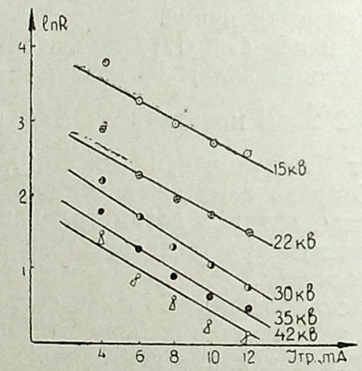



Рис. 4. Cu-излучение

большим значениям $U_{тр}$. Источником гамма лучей служил $Co^{60}$. Изменение интенсивности рентгеновского излучения осуществлялось путем изменения тока через рентгеновскую трубку ($J_{тр}$), а также изменением расстояния между окошком рентгеновской трубки и поверхностью образца. Изменением $U_{тр}$ меняли волновой состав, а также интенсивность рентгеновского излучения. Применением соответствующих фильтров, уменьшали общую интенсивность ренгеновского излучения. При этом также изменялся частично волновой состав



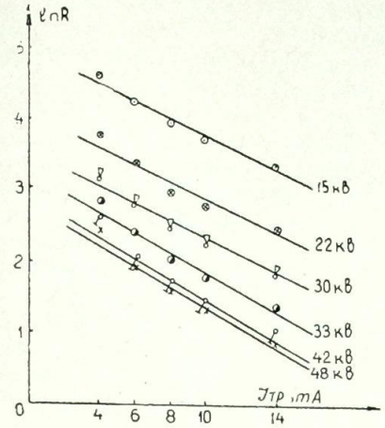



Рис. 5. Fe-излучение

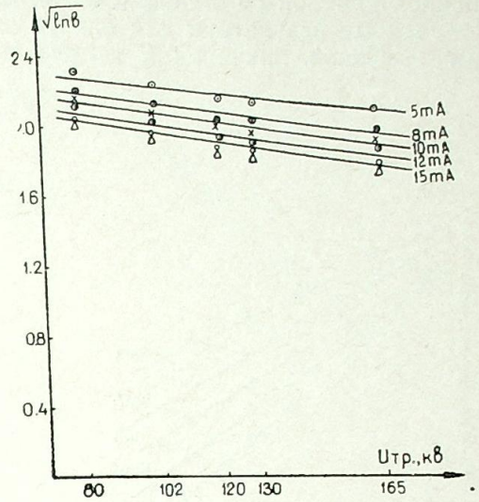



Рис. 6. W-излучение.

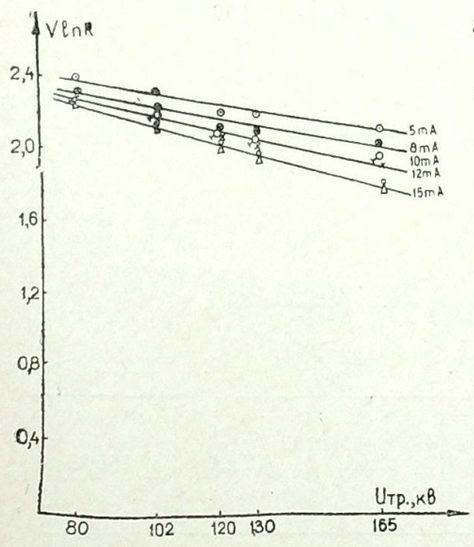



Рис. 7. W-излучение с Cu-фильтром 0,8 *мм*

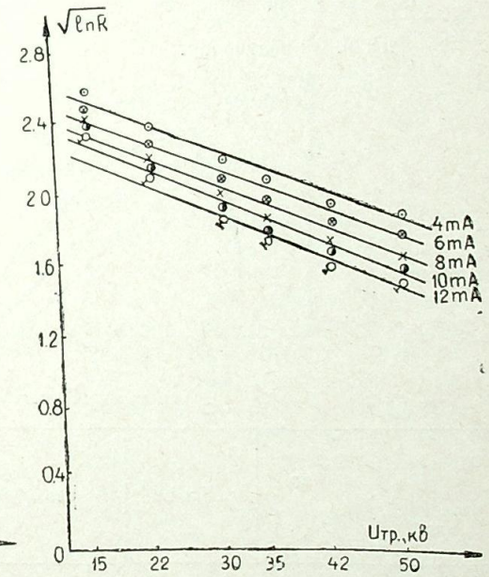



Рис. 8. Mo-излучение.

излучения за счет очень сильного поглощения фильтром определенного участка длиноволновой части сплошного излучения.

В данной работе критерием, определяющим чувствительность, служило изменение темнового сопротивления в зависимости от интенсивности и волнового состава действующего коротковолнового излучения. Сопротивление измерялось многопредельным сетевым мегометром.

Исследования проведены на 20 образцах, имеющих примерно одинак вые размеры. Во время опытов образцы находились в темном светонепроницаемом футляре. Мощность дозы определялась иониза-

ционной камерой со стенками из воздухоэквивалентного материала. Полученные результаты для одного из образцов (№ 7) приводятся в виде графиков. Значения $R$ везде в мегоомах.

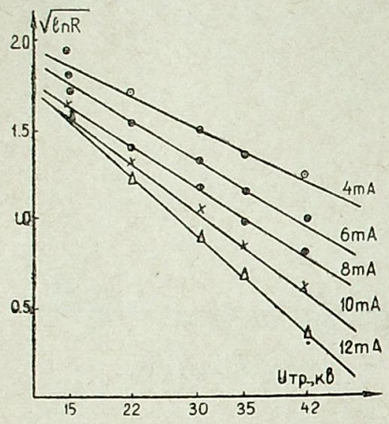



Рис. 9. Cu-излучение.

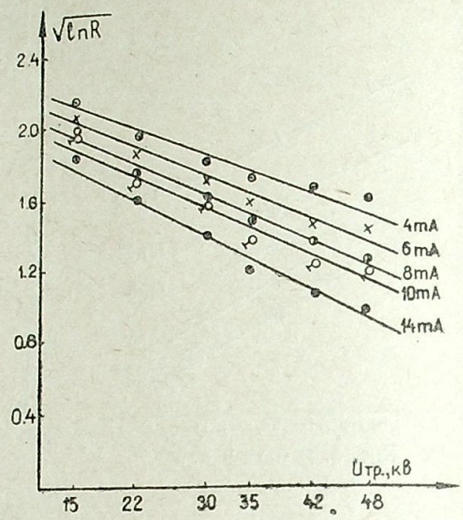



Рис. 10. Fe-излучение

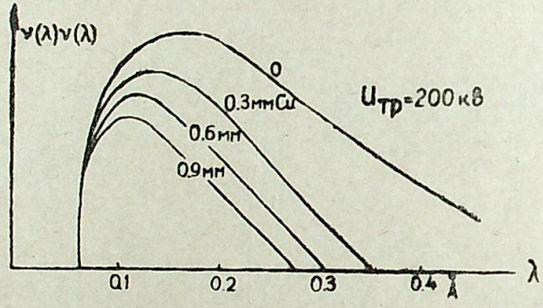



Рис. 11.

| $J_{тр}$ / $U_{тр}$ | 5mA | 8mA | 10mA | 12mA | 15mA |
|---|---|---|---|---|---|
| 80 кв | 3,6р/мин | 4 р/мин | 4,8 р/мин | 5,5 р/мин | 6 р/мин |
| 102 кв | 5,1″ „ | 7,2 „ | 7,6 „ | 8 „ | 10 „ |
| 120 кв | 9″ „ | 13 „ | 15 „ | 16 „ | 20 „ |
| 130 кв | 11,5″ „ | 16 „ | 18 „ | 22 „ | 26 „ |
| 165 кв | 19″ „ | 28 „ | 31 „ | 35 „ | 43 „ |

На рисунках 1—5 представлены зависимости $\ln R$ от тока через рентгеновскую трубку. Каждая прямая семейства соответствует постоянному значению ускоряющего напряжения. Зависимости $\sqrt{\ln R}$ в функции от ускоряющего напряжения для постоянных значений $J_{тр}$ приводятся на рисунке 6—10.



Сопоставление рисунков 1—6 соответственно с рисунками 2 и 7 показывает, что фильтрация вольфрамового излучения медью толщиной 0,8 *мм* смещает семейство прямых вверх, что обусловлено уменьшением общей интенсивности излучения (рис. 2 по [10]). На ход прямых влияет, очевидно, и изменение волнового состава излучения, обусловленное фильтрацией. Мощности доз при которых получены рисунки 2 и 7 приводятся в таблице.

На рис. 12 приводятся дозиметрические характеристики для четырех образцов, полученных от вольфрамового излучения при режиме работы трубки 165 *кв* 15 *мА*. В данном случае интенсивность излучения менялась расстоянием и в отличие от прежних результатов получены зависимости вида $\ln R \sim \ln \Phi$. Последнее, возможно, обусловлено фильтрацией излучения в воздухе.

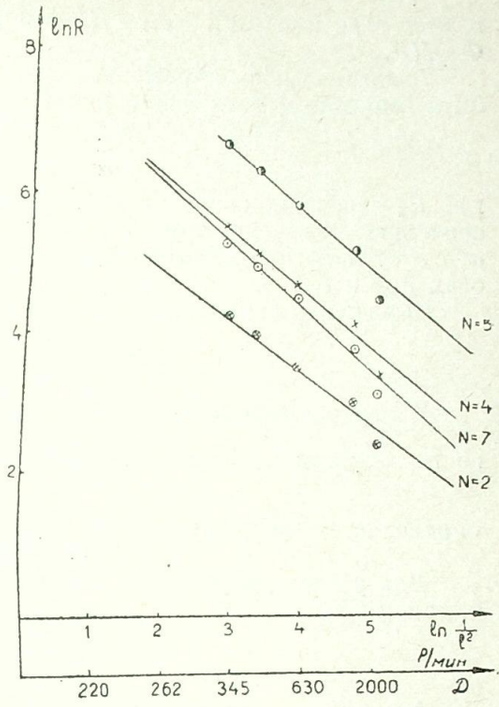



Рис. 12.

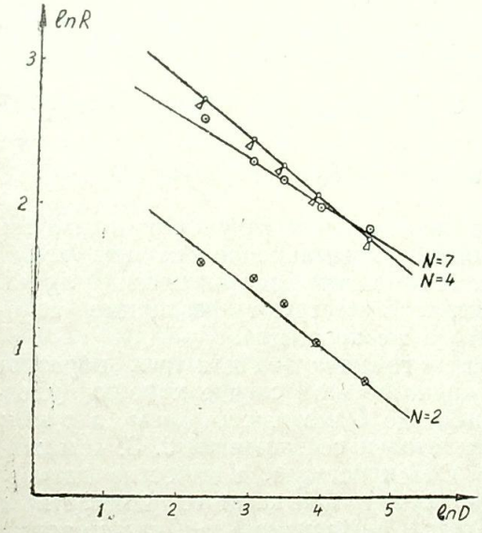



Рис. 13.

Из сопоставления рисунков 3, 4, 5 полученных соответственно для Mo ($Z=42$), Cu($Z=29$) и Fe($Z=26$) излучений на одинаковом расстоянии от окошка ренгеновской трубки и имеющие одинаковую мощность дозы, видно, что соотношение $\Phi \sim Z$, выражающее зависимость интенсивности рентгеновского излучения от порядкового номера анода рентгеновской трубки, не воспроизводится. Это в свою очередь подтверждается и рисунками 8, 9 и 10. Однако для всех рисунков 1—10, приняв $\ln R \sim \Phi$ (за исключением слабых интенсивностей) можно утверждать, что кривые с достаточной точностью воспроизводят изменения интенсивности рентгеновского излучения $\Phi \sim J_{тр}$ при задании $U_{тр.}$, и $\Phi \sim U^2_{тр}$ при заданном $J_{тр}$, так что в большинстве случаев полученные результаты хорошо описы-

ваются зависимостями $\ln R=f(J_{тр})$ и $\sqrt{\ln R}=f(U_{тр})$, указывающими на $\Phi\sim JU^2$.

Аналитическое выражение для зависимости $\ln R=f(J_{тр})$ может быть записано в следующем виде:

$$\frac{\ln R_x}{a}+\frac{J_x}{b}=1, \qquad (1)$$

где $R_x$—значение сопротивления данного образца, соответствующее значению тока через трубку $J_x$, при заданном напряжении на трубке; $a$ и $b$ отрезки, отсекаемые продолжениями прямых соответственно на осях $\ln R$ и $J_{тр}$.

Выражение (1) можно записать в следующем виде:

$$\ln R_x=a\left(1-\frac{J_x}{b}\right). \qquad (2)$$

В этом соотношении $a$—величина, определяющая чувствительность образца к рентгеновскому излучению, числовое значение $\frac{I_x}{b}$ определяется напряжением на трубке: $\frac{J_x}{b}\sim U_{тр}$.

Для кривых, выражающих зависимость $\ln R$ от мощности дозы $D$ будем иметь:

$$\ln R_x=a\left(1-\frac{D_x}{b}\right). \qquad (3)$$

Аналогичное выражение может быть записано для зависимостей вида $\sqrt{\ln R}=f(U_{тр})$:

$$\sqrt{\ln R_x}=a_1\left(1-\frac{U_x}{b_1}\right), \qquad (4)$$

где $a$ определяется чувствительностью образца; $R_x$—значение сопротивления, соответствующее напряжению на трубке $U_x$ при заданной силе тока через трубку; значение $\frac{U_x}{b_1}$ для каждой прямой семейства определяется значением $J_{тр}$, причем $\frac{U_x}{b_1}\sim J_{тр}$.

Сравнительные измерения по определению мощности дозы, выполненные одновременно с помощью ионизационной камеры и CdS кристаллов показали, что одинаковым дозам рентгеновских лучей, отличающихся волновым составом, соответствуют различные внутренние сопротивления одного и того же кристалла.

Данные полученные с помощью гамма лучей для трех образцов представлены на рис. 13. Как видно в этом случае хорошо удовлетворяется соотношение $\ln R\sim\ln D$, где $D$ мощность дозы в *р/мин.*

Исходя из полученных результатов и соотношений 2, 3, 4 можно заключить, что при применении CdS кристалла в качестве датчика дозиметра гамма и рентгеновских лучей для каждого конкретного случая и каждого датчика требуется индивидуальная градуировка. Нельзя расчитывать на „универсальность“ датчика при определении дозы излучений. Ибо чувствительность CdS датчика различна даже для одинаковых доз излучений различного волнового состава.

В заключение авторы выражают благодарность профессору Г. Б Абдуллаеву за обсуждение результатов.



ЛИТЕРАТУРА

1. Аглинцев К. К. Дозиметрия ионизирующих излучений. Гостехиздат, М., 1957.
2. Архангельский А. А., Воробьев И. В., Латышев Г. Д. Сб. фотоэлектрические и оптические явления в полупроводниках, Киев, 1959.
3. Ахвледиани З. Г., Конозенко И. Д., Устьянов В. И. Фотоэлектрические и оптические явления в полупроводниках, Киев, 1959.
4. Конозенко Н. Д., Устьянов В. И., Кедров В. П. ЖТФ, т. 28, вып. 7, 1958.
5. Рывкин С. М., Богомолов Л. П., Коноваленко Б., Матвеев С. А. Сб. Фотоэлектрические и оптические явления в полупроводниках Киев, 1959.
6. Свечников С. В., ЖТФ 1953, т. 23, вып. 6.
7. Свечников С. В. ЖТФ, 1956, т. 26, вып. 8.
8. Свечников С. В. ЖТФ, т. 22, вып. 8, 1952.
9. Талиби М. А., Абдуллаев Г. Б. „ДАН Азерб. ССР“, № 2, 1956.
10. Талиби М. А., Абдуллаев Г. Б. Сб. Фотоэлектрические и оптические явления в полупроводниках, Киев, 1959.
11. Талиби М. А. „Изв., АН Азерб. ССР“, сер. физико-математических и технических наук № 4, 1960.
12. Fronmeyer G. und Messner. *D.* Naturwiss. 40 (338) 1953.
13. Simon H. Ann. d. Phys. 12, 45—46 (1953).

М. Ә. Талиби, Ә. Һ. Јусифов

## Ренткен ва гамма шүаларынын CdS монокристалларынын електрик мүгавимәтинә тә'сиринин бә'зи хүсусијјәтләринә даир

ХҮЛАСӘ

CdS монокристалларынын ренткен вә гамма шүаларына јүксәк һәссаслыгы онлардан кичик өлчүлү дозиметрләр һазырламага имкан вермишдир. Бундан башга, CdS селен дүзләндиричи елементләриндән бир нөвүнә нязик тәбәгә шәклиндә дахилдир. Одур ки, селен дүзләндиричиси шүа тә'сири алтында ишләдикдә, онун тәркибиндәки CdS тәбәгәсинин һәссаслыгындан асылы олараг, параметрләри дәјишә биләр.

Һәмин ишдә мүхтәлиф интенсивли вә далга тәркибли волфрам, молибден, мис, дәмир анодлу боруларда алынмыш ренткен шүаларынын вә $Co^{60}$ изотопунун гамма шүаларынын тә'сири тәдгиг олунмушдур.

Ишдә алынан нәтичәләрә әсасән мүәјјән едилмишдир ки, CdS кристалындан ренткен вә гамма шүаларынын дозиметриндә истифадә етдикдә, һәр бир нүмунә үчүн тә'сир едән шүанын далга тәркибиндән асылы олараг, ајрыча дәрәчәләмә апармаг лазымдыр. Бу ондан ирәли кәлир ки, мүхтәлиф далга тәркибли ејни дозалы шүа ејни бир нүмунәнин дахили мүгавимәтинә мүхтәлиф тә'сир көстәрир, һәм дә һәссаслыг нүмунәдән-нүмунәјә дәјишир.

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-риjазиjjат вә техника елмләри серијасы, 1960, № 6

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1960, № 6

Г. М. ӘЛИЈЕВ, Б. Д. ӘЛИЈЕВ, И. К. КӘРИМОВ

# КАДМИУМ АШГАРЛЫ СЕЛЕНИН ИСТИЛИК КЕЧИРМӘСИНИН ТЕМПЕРАТУРДАН АСЫЛЫЛЫҒЫ

Јарымкечиричиләрдә истилиjин jајылмасы илә әлагәдар олан мәсәләләрин арашдырылмасы чох бөjүк әһәмиjjәтә маликдир. Хүсуси илә истиликкечирмәнин кимjәви тәркибдән, кристаллик гурулушдан, ашгарларын мигдарындан вә тәбиәтиндән, температур вә саирәдән асылылығыны өjрәнмәк мүһүм мәсәләләрдән биридир.

Акад. А. Ф. Иоффе вә онун шакирдләри бу истигамәтдә бир сыра ишләр көрмүшләр [1—4].

Бу мәгсәдлә биз селенин истилик кечирмәсинә кадмиум ашгарларынын вә температурун тә'сирини өjрәнмишик. Мүасир јарымкечириричиләр физикасы вә техникасында селенин физики хассәләрини бачарыгла идарә етмәк үчүн мәсәләнин бу шәкилдә гоjулушу олдугча әһәмиjjәтлидир.

Дикәр тәрәфдән селенин аморф вә кристаллик модификасиjаларыны чох асан әлдә етмәк мүмкүн олдуғундан вә онун физики хассәләрини ашгарларын мигдары вә тәбиәтиндән, температур вә башга амилләрдән асылылығыны өjрәнмәк мәгсәди илә селен ән jахшы тәдгигат обjекти һесаб едилир.

Селен чиһазларында селен даим мүхтәлиф металларла контактда олуб, она һалоген, галлиум, таллиум вә с. ашгарлар дахил едилир.

Селен дүзләндиричиләри вә фотоелементләриндә үст електрод олараг кадмиум елементи көтүрүлүр. Һәмин чиһазларын електрик вә термик формовкасы вә сонракы ишләмә просеси заманы үст електрод олан кадмиум елементи селен дахилинә диффузиja едәрәк CdSe бирләшмәсини әмәлә кәтирир вә нәтичәдә әкс истигамәтдә чохлу електрик мүгавимәтинә малик олан $p—n$ кечидинин jаранмасы илә нәтичәләнир. Селен јарымкечиричи елементинә дахил олан кәнар атомлар селенин вә селен чиһазларынын физики хассәләринә кәскин тә'сир едир.

Ашгарларын вә температурун селенин истилик кечирмәсинә тә'сиринә даир әдәбиjjатда чох аз мә'лумата раст кәлмәк олур.

Јухарыда көстәриләнләри нәзәрә алараг, аморф вә кристал селенин истилик кечирмәсини, онун температурдан асылылығыны вә истиликкечирмәjә кадмиум ашгарларынын тә'сирини өjрәнмәji гаршымызда әсас мәгсәд гоjмушуг.

Тәдгиг етдиjимиз селенин тәмизлиji 99,996% тәртибиндәдир.

Бу ишдә әсасән тәмиз аморф вә кристал селенин, һәмчинин тәркибиндә 0,065, 0,125, 0,25, 0,5 вә 1% Cd олан селен нүмунәләринин истилик кечирмәси өjрәнилмишдир. Тәдгиг едилән нүмунәләр ен-

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-рижазијјат вә техника елмләри сериjасы, 1960, № 6

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1960, № 6

Г. М. ӘЛИЈЕВ, Б. Д. ӘЛИЈЕВ, И. К. КӘРИМОВ

# КАДМИУМ АШГАРЛЫ СЕЛЕНИН ИСТИЛИК КЕЧИРМӘСИНИН ТЕМПЕРАТУРДАН АСЫЛЫЛЫҒЫ

Jарымкечиричиләрдә истилиjин jаjылмасы илә әлагәдар олан мәсәләләрин арашдырылмасы чох бөjүк әһәмиjjәтә маликдир. Хүсуси илә истиликкечирмәнин кимjәви тәркибдән, кристаллик гурулушдан, ашгарларын мигдарындан вә тәбиәтиндән, температур вә саирәдән асылылығыны өjрәнмәк мүһүм мәсәләләрдән биридир.

Акад. А. Ф. Иоффе вә онун шакирдләри бу истигамәтдә бир сыра ишләр көрмүшләр [1—4].

Бу мәгсәдлә биз селенин истилик кечирмәсинә кадмиум ашгарларының вә температурун тә'сирини өjрәнмишик. Мүасир jарымкечиричиләр физикасы вә техникасында селенин физики хассәләрини бачарыгла идарә етмәк үчүн мәсәләнин бу шәкилдә гоjулушу олдугча әһәмиjjәтлидир.

Дикәр тәрәфдән селенин аморф вә кристаллик модификасиjаларыны чох асан әлдә етмәк мүмкүн олдугундан вә онун физики хассәләрини ашгарларын мигдары вә тәбиәтиндән, температур вә башга амилләрдән асылылығыны өjрәнмәк мәгсәди илә селен ән jахшы тәдгигат обjекти һесаб едилир.

Селен чиһазларында селен даим мүхтәлиф металларла контактда олуб, она һалокен, галлиум, таллиум вә с. ашгарлар дахил едилир.

Селен дүзләндиричиләри вә фотоелементләриндә үст електрод олараг кадмиум елементи көтүрүлүр. Һәмин чиһазларын електрик вә термик формовкасы вә сонракы ишләмә просеси заманы үст електрод олан кадмиум елементи селен дахилинә диффузиjа едәрәк CdSe бирләшмәсини әмәлә кәтирир вә нәтичәдә әкс истигамәтдә чохлу електрик мүгавимәтинә малик олан $p—n$ кечидинин jаранмасы илә нәтичәләнир. Селен jарымкечиричи елементинә дахил олан кәнар атомлар селенин вә селен чиһазларынын физики хассәләринә кәскин тә'сир едир.

Ашгарларын вә температурун селенин истилик кечирмәсинә тә'сиринә даир әдәбиjjатда чох аз мә'лумата раст кәлмәк олур.

Jухарыда көстәриләнләри нәзәрә аларағ, аморф вә кристал селенин истилик кечирмәсини, онун температурдан асылылығыны вә истиликкечирмәjә кадмиум ашгарларынын тә'сирини өjрәнмәjи гаршымызда әсас мәгсәд гоjмушуг.

Тәдгиг етдиjимиз селенин тәмизлиjи 99,996% тәртибиндәдир.

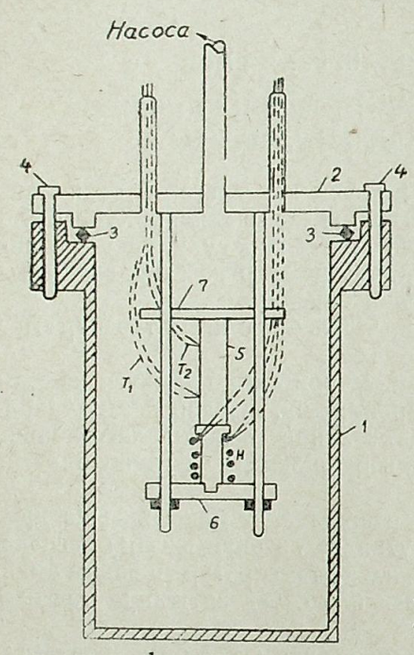
Бу ишдә әсасән тәмиз аморф вә кристал селенин, һәмчинин тәркибиндә 0,065, 0,125, 0,25, 0,5 вә 1% Cd олан селен нүмунәләринин истилик кечирмәси өjрәнилмишдир. Тәдгиг едилән нүмунәләр ен-

линдрик шәкилдә, отурачағынын диаметри 10 *мм*, һүндүрлүјү исә 8÷10 *мм* тәртибиндә олуб, ашағыдакы гајда үзрә һазырланмышдыр.

Селен вә кадмиуму тоз шәклиндә бир-биринә гарышдырыб сонра ампулаја долдурараг һавасы $10^{-4}$ *мм* чивә сүтуну тәзјигинә гәдәр сорулур. Бундан сонра гарышыг 321°С-дән јухары температурда гарышдырыларағ тәдричән әридилир.

Әридилмиш гарышыг сонрадан 215°С температурда 8 саат сахланылмагла кристаллашдырылыр. Аморф селен исә әринтини кәскин сојутмаг јолу илә әлдә едилмишдир.

Истиликкечирмә әмсалы 1-чи шәкилдәки гурғу васитәси илә стасионар үсулла өлчүлмүшдүр. Чиһаз, әсас е'тибары илә мис стәкандан ибарәт олуб (1), јухары һиссәсиндәки мис гапаг әсас стәкана винт васитәси илә бәркидилир (2), мис стәкан илә гапаг арасында јандырылмыш ромбшәкилли мис һалга (3) гојулур. Мис гапаг (2) әсас көвдәјә (1) винтләр (4) васитәси илә бәркидилир. Тәдгиг олунан нүмунә (5) гыздырычы соба (Н) илә сојудучу арасында јерләшдирилир. Температур градиенти јаратдығымыз соба (*Н*) әсас стәкандан изолјаторла (6) изолә едилмиш, сојудучу илә билаваситә стәкана бирләшдирилмишдир.



1-чи шәкил.

Истиликкечирмә әмсалы 84—373°К температур интервалында өлчүлмүшдүр.

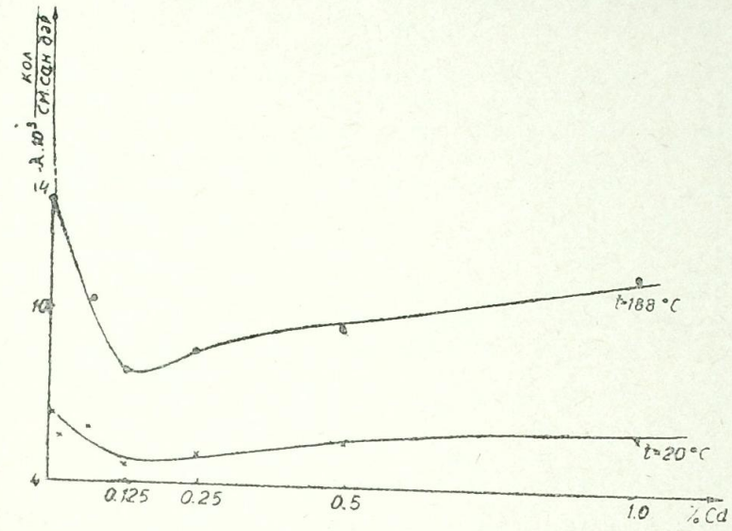
$T_1$ вә $T_2$ мис константын термоларлары васитәси илә нүмунәнин *h* һүндүрлүјүндәки температур градиенти өлчүлмүшдүр. Нүмунәдә јаранан температур градиенти вә гыздырычынын (*Н*) күчүнү тә'јин етмәк үчүн јүксәк мүгавимәтли „Р-375" типли потенсиометрдән истифадә едилмишдир.

Өлчмә заманы чиһазда һава $10^{-4}$ *мм* чивә сүтуну тәзјигинә гәдәр сорулмушдур. Отаг температурундан ашағы температурларда истиликкечирмә әмсалыны өлчмәк үчүн чиһаз маје азот, маје оксикен, маје оксикенлә етил спиртинин гарышығы, гуру буз вә әримәкдә олан бузун ичәрисинә дахил едилир. Отаг температурундан јухары температурларда исә чиһаз термостата јерләшдирилир.

2-чи шәкилдә—188°С вә 20°С температурларда селенин истилик кечирмәсинин кадмиум ашгарларынын мигдарындан асылылығы көстәрилмишдир. Һәр бир нөгтә үч тәчрүбәдән алынан нәтичәнин орта гиjмәтидир. 2-чи шәкилдән көрүнүр ки, тәмиз селенин истиликкечирмә әмсалы ән чох олуб, сонрадан кадмиум ашгарларынын мигдары 0,125%-ә гәдәр артдыгча азаларағ минимума ($7{,}81 \cdot 10^{-3}$ *кал/см.сан. дәр*) чатыр. Кадмиум ашгарларынын 0,125%-дән е'тибарән артмасы илә истиликкечирмә дә артыр, анчаг тәмиз селенин истиликкечирмә әмсалына чата билмир.

Ашағы температурларда (2—100°К) тәмиз селенин истәр аморф истәрсә дә кристал һалында истилик кечирмәсинә анчаг бир иш һәср олунмушдур [5]. Һәмин ишдә аморф селенин истиликкечирмә әмсалы үчүн 100°К-дә $0{,}33 \cdot 10^{-3}$ *кал/см. сан.дәр.*, кристал селен үчүн 84°К температурда $14 \cdot 10^{-3}$ *кал/см. сан. дәр.* олдуғу көстәрилмишдир.





2-чи шәкил. Кристал селенин истиликкечирмә әмсалынын кадмиум ашгарларынын мигдарындан асылылығы.

Апардығымыз тәчрүбәләрдән тәмиз аморф селен үчүн истиликкечирмә әмсалы 84°К-дә $1{,}45 \cdot 10^{-3}$ *кал/см. сан. дәр.* кристал селен үчүн $13{,}67—10^{-3}$ *кал/см. сан·дәг* олдуғу мүәјјән едилмишдир.

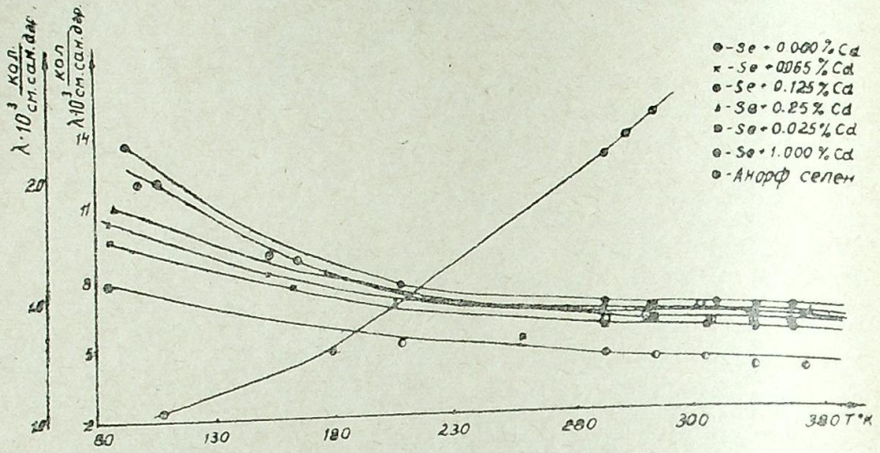
Јухарыда көстәрдијимиз ишдәки [5] истиликкечирмә әмсалы илә тапдығымыз истиликкечирмә әмсалы арасында олан мүәјјән фәрг селенин тәмизлик дәрәчәси илә әлагәдардыр. Һәмин ишдә [5] кристал селенин тәмизлији 99,999%, аморф селенин тәмизлији исә 99,9% олмушдур. Бундан башга, тәмизлији 99,996% олан селенин истилик кечирмәсинә хлор, бром вә јод ашгарларынын тә'сири тәдгиг едиләрәк көстәрилмишдир ки, истәр аморф вә истәрсә дә кристал селенин истилик кечирмәси һәмин ашгарларын мигдарынын артмасы илә азаларағ минимум гиjмәтә чатыр вә сонрадан ашгарларын артмасы илә истиликкечирмә дә артмаға башлајыр [6—9].

3-чү шәкилдә аморф кристал вә кадмиум ашгарлы селенин истиликкечирмә әмсалынын температурдан асылылығы көстәрилмишдир. 3-чү шәкилдән көрүнүр ки, температурун дүшмәси илә тәмиз вә елә чә дә кадмиум ашгары олан кристал селенин истилик кечирмәси артыр. Аморф селенин истилик кечирмәси исә әксинә олараг азалыр. Һәмчинин кадмиум ашгарлары јухары температура нисбәтән ашағы температурда селенин истилик кечирмәсинә даһа шиддәтли тә'сир едир.

84°К температурда тәмиз селенин аморф модификасијасынын истилик кечирмә әмсалы кристаллик модификасијасынын истиликкечирмә әмсалындан 9 дәфә фәрглидир.

Селендә истиликкечирмәнин електрон (дешик) һиссәси чох аз олдуғундан аморф вә елә чә дә кристал селендә кристаллашма дәрәчәсиндән вә ашгарларын мигдарындан асылы олараг истиликкечирмәнин дәјишмәси, әсас е'тибары илә, фононларын сәпилмә шәраити илә әлагәдардыр.

Аморф селендә атомлар зәнчири низамсыз пајланмышдыр. Кристал селендә исә мүәјјән гајдада микрокристал саһәләр јараныр ки, бунун нәтичәсиндә фононларын сәпилмә мәркәзләри олан дефектләрин сајы азалыр.




3-чү шәкил. Кадмиум ашгарлы селенин истиликкечирмә әмсалынын температурдан асылылығы. Сағдакы ордината охунда кристал селенин, солдакы ордината охунда исә аморф селенин истиликкечирмә әмсалынын гијмәтләри көстәрилмишдир.

Дефектләрин сајынын азалмасы сајәсиндә фононларын сәпилмә тезлији кичилмәклә орта сәрбәст јолун узунлуғу бөјүјүр вә нәтичәдә кристаллашма заманы истиликкечирмә дә артмаға башлајыр.

Газларын кинетик нәзәријјәсинә әсасән фонон газы үчүн истиликкечирмә әмсалы

$$\lambda = \frac{1}{3} c V \bar{l} \quad . \quad . \quad . \qquad (1)$$

дүстуру илә ифадә олунур.

$c$=1 *см*³ маддәнин истилик тутуму, $V$—фононларын сүр'әти, $\bar{l}$ исә орта сәрбәст јолун узунлуғудур.

Аморф чисимләрдә орта сәрбәст јолун узунлуғу олан $l$-и тәбии олараг молекуллар арасындакы мәсафәнин орта гијмәти көтүрмәк олар, бу молекуллар еластики далға чәбһәсини бөјүк бучаг алтында әкс етдирә билир. Аморф чисимләрдә сыхлығын истилик флуктасијасында баш верән сәпилмәјә икинчи дәрәчәли сәпилмә кими бахмаг олар. Аморф чисимләрин гурулушунда сыхлығын молекулјар бирчинсли олмамасы тәчрүби олараг температурдан асылы дејилдир. Буна көрә дә аморф чисимләрин истилик кечирмәси тәхмини олса да истилик тутуму илә мүтәнасиб олмалыдыр. Бу нәтичә шүшә үчүн, хүсусән ашағы температурда (истилик тутумунун температур илә шиддәтли артдығы заман) өзүнү јахшы доғрултмушдур. Она көрә дә белә нәтичәјә кәлмәк олар ки, температурун ашағы дүшмәси илә истилик кечирмәнин азалмасы истилик тутумунун азалмасы һесабына олур.

Аморф селендә фононларын сүр'әтини $1{,}5 \cdot 10^{-5}$ *см/сан* гәбул етмәк олар [5].

Биз 20°С-дә тәмизлији 99,996% олан аморф селен үчүн истиликкечирмә әмсалы $\lambda = 2{,}19 \cdot 10^{-3}$ *кал/см. сан. дәр.* гијмәтини алмышыг. Аморф селенин сыхлығы вә хүсуси истилик тутуму үјғун олараг $\rho =$ $= 4{,}3$ *г/см*³, $c = 0{,}1184$ *кал/г. дәр* [7]. $c\lambda$ вә $V$-нин гијмәтләрини (1) дүстурунда јазмагла фононларын орта сәрбәст јолунун узунлуғу үчүн $8{,}6 \cdot 10^{-8}$ *см* олдуғу тапылмышдыр.

Бу да әдәбијјатда көстәрилән гијмәтә ујғун кәлир [3]. Әдәбијјатда көстәрилир ки, шүшә үчүн фононларын орта сәрбәст јолунун узунлуғу $l \sim 7$—$10A$ тәртибиндә олмалыдыр.

Кристал чисимләр аморф чисимләрдән анчаг сәпмә мәркәзләринин башга тәбиәтли олмасы илә, башга сөзлә, орта сәрбәст јолун узунлуғунун ($l$) башга олмасы илә фәргләнир. Аморф вә кристал чисимләрдә истилијин јајылма механизми исә һәр икисиндә ејнидир. Кристал чисимләрдә фононларын сәрбәст јолунун узунлуғу гәфәсин дөврилијиндән 20—100 дәфә бөјүк ола биләр.

Кадмиум ашгарларынын селенин истилик кечирмәсинә тә'сирини јә'гин ки, ашағыдакы кими күман етмәк олар. Аз мигдарда кадмиум ашгарлары селендә атом шәклиндә пајланараг әлавә сәпилмә мәркәзләри јарадыр вә нәтичәдә истиликкечирмә дә азалыр. Кадмиум ашгарларынын мигдарыны 0,125% е'тибарән артырдыгда CdSe бирләшмәси әмәлә кәлмәјә башлајыр.

Бу һал гәфәсдә фононларын сәпилмә мәркәзләринин сајынын азалмасына сәбәб олур вә нәтичәдә истиликкечирмә артмаға башлајыр.

Температурун артмасы илә истәр тәмиз кристал селенин вә истәрсә дә кадмиум ашгары олан селенин истилик кечирмәси азалыр. Чүнки температур артдыгча фононларын фононларда сәпилмәси шиддәтләнир вә истиликкечирмә азалыр.



ӘДӘБИЈЈАТ

1. А. В. Иоффе, А. Ф. Иоффе. Изв. АН СССР, сер. физич., т. 20, № 1, 1956.
2. А. В. Иоффе, А. Ф. Иоффе. ДАН СССР, т. 97, № 5. 1954.
3. А. В. Иоффе, Физика полупроводников, Изв. АН СССР, М., 1957.
4. А. В. Иоффе, А. Д. Иоффе, ДАН СССР, 98, № 5, 1954.
5. G. K. White, S. B. Woods and M. T. Elford. Phys. Rev., 112, № 1, 1958.
6. Г. Б. Абдуллаев, А. А. Башшалиев. ЖТФ т. 27, в. 9, 1957.
7. Г. М. Алиев, Г. Б. Абдуллаев. ДАН СССР т. 116, № 4, 1957.
8. Г. Б. Абдуллаев и М. А. Алиев ДАН СССР, т. 114, № 5, 1957.
9. Г. М. Алиев, Г. Б. Абдуллаев. ДАН СССР т. 120, № 1, 1958.

Г. М. Алиев, Б. Д. Алиев, И. Г. Керимов

## Температурная зависимость теплопроводности селена с примесью кадмия

РЕЗЮМЕ

При изготовлении селеновых фотоэлементов и выпрямителей в качестве верхнего электрода наносится кадмий. В процессе электрической и термической формовок и при дальнейшей работе этих приборов вследствие диффузии образуются селениды, дающие в ряде случаев в контакте с селеном $p$—$n$ переход с большим электросопротивлением в запирающем направлении. Чужеродные атомы, проникающие в селен, существенным образом влияют на физические свойства селена и селеновых приборов.

Исходя из вышеизложенного, мы задались целью изучить теплопроводность аморфного, кристаллического селена, влияние на нее примеси кадмия и зависимость ее от температуры.

Применяемый селен имел чистоту 99,996%. Коэффициент теплопроводности определялся стационарным методом. Принципиальная

схема прибора, показана на рис. 1. Опыты проводились в интервале температур от 84 —до 373°К.

На рис. 2 представлены кривые, показывающие изменение коэффициента теплопроводности селена в зависимости от содержания примеси кадмия, полученные при—188°С и при 20°С, откуда видно, что селен без примеси кадмия имеет наибольшую теплопроводность. С увеличением содержания кадмия до 0,125% теплопроводность уменьшается, достигая минимума. Дальнейшее увеличение концентрации кадмия ведет к росту теплопроводности, приближаясь к первоначальному значению, но не достигает его.

На рис. 3 представлена температурная зависимость коэффициентов теплопроводности аморфного, кристаллического селена и селена с различным содержанием кадмия, откуда видно, что с понижением температуры теплопроводность кристаллического селена с примесью кадмия растет, тогда как теплопроводность аморфного селена уменьшается. Уменьшение теплопроводности с понижением температуры для аморфного селена, по-видимому, объясняется в основном уменьшением теплоемкости.

Влияние примеси кадмия на теплопроводность селена, вероятно объясняется тем, что при малых концентрациях кадмия, последний распределяется в виде атомов, создает дополнительные центры рассеяния фононов, что ведет к уменьшению теплопроводности. С увеличением же концентрации кадмия после 0,125% происходит образование молекулы CdSe. Это ведет к уменьшению числа рассеивающих центров фононов в решетке. Потому теплопроводность селена увеличивается.

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-рија зијјат вә техника елмләри серијасы, 1960, № 6

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1960, № 6

К. П. МАМЕДОВ

# РЕНТГЕНОГРАФИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРА СВЯЗИ АТОМОВ В КРИСТАЛЛАХ ТИПА АЛМАЗА

Основные свойства твердого тела (электрические, механические и др.) обусловлены характером и величиной силы связи атомов в кристалле. Этим, в частности, можно объяснить возросший интерес к изучению силы связи атомов, особенно за последнее время. Важность этого вопроса обусловлена также бурным развитием теории полупроводниковых кристаллов и полупроводниковой техники. Как известно, в основной группе полупроводниковых кристаллов связь носит гомополярный характер. Основным показателем полупроводниковых кристаллов является их электрическая характеристика и ее изменения от ряда факторов, что в первую очередь определяется характером связи. Таким образом, исследование направления и величины гомополярной связи в таких кристаллах позволит предсказать некоторые вопросы теории полупроводниковых кристаллов, в частности, может объяснить эффекты анизотропии электрических и других свойств кристаллов, обнаруженных экспериментально. Эти вопросы представляют значительный интерес также для общей теории твердого тела.

Все сказанное выше подчеркивает важность изучения направления и величины силы связи атомов в кристаллах типа алмаза, в частности в кристаллах кремния, чему посвящена предлагаемая работа.

Наряду с другими методами к изучению характера и величины силы связи атомов в кристалле применяется также метод рентгеноструктурного анализа, суть которого сводится к изучению распределения электронной плотности атомов в кристалле. Действительно, если будет найдено точное распределение электронной плотности отдельных атомов в элементарной ячейке кристалла, то помимо структуры кристалла можно выявить как характер, так и величину силы связи по взаимному перекрытию электронной плотности соседних атомов. Однако распределение электронной плотности атомов обычно получается основным методом расчета рентгеноструктурного анализа—выполнением суммирования трехмерного ряда Фурье или его двумерных проекций.

Полученные этим методом некоторые результаты по точному определению распределения электронной плотности атомов [1, 2, 15] сопряжены с существенными упрощениями и периодически обсуждаются [4, 10, 19]. Значительный интерес в этой связи представляет работа С. Т. Конобеевского [5], где отмечается, что даже в хорошо выполненных структурных работах, при наилучшем выборе координат атомов полного совпадения измеренных и вычисленных интенсивностей достигнуть не удается. Это отчасти может быть обусловлено

тем, что при самом вичислении структурного фактора не учитывается анизотропия атомного фактора. Прежде всего, анизотропия атомного фактора рассеяния рентгеновских лучей возникает вследствие анизотропии электронного распределение в атомах (или „формой“ атома) вызванной химической связью атомов. Химическая связь осуществляется внешними, валентными электронами и для атомов средних атомных номеров отношение валентных электронов к общему числу невелико. Ясно, что если электроны изолированных атомов представить линиями изоплотности, то некоторая „деформация“ линий изоплотности, соответствующей внешним электронам, обусловленная химической связью будет сравнительно слабым эффектом. Следовательно для обсуждения возможности обнаружения именно этого эффекта на основе выполнения суммирования Фурье ряда необходимо сопоставить порядок величины „деформации“ с возможностью Фурье синтеза в смысле точности. В работе [6] в части исследования анизотропии атомного фактора в кристалле Al было показано, что величина атомного фактора в направлениях [111] и [511] отличается ~5%, другими словами порядок „деформации“ в этом случае ~5%.

Теперь рассмотрим возможности Фурье синтеза.

Суммирование будет корректным, если сумма

$$\rho(xyz)=\frac{1}{V}\sum_{h\kappa l=0}^{\infty}|F_0(h\kappa l)|\cos 2\pi(hx+\kappa y+lz) \qquad (1)$$

выполняется при достаточно большом числе членов ряда и при достаточно точно измеренных из эксперимента $|F_0(h\kappa l)|$. Увеличение числа членов ряда требует применении большого набора монохроматического рентгеновского изучения $\lambda_i$, а определение точного $|F_0(h\kappa l)|$ из эксперимента требует учета помимо факторов поляризации также поглощения и экстинкции.

Практически в большинстве работ, в частности в работах [1, 2, 15], посвященных изучению „изменения“ изоплотных линий внешних электронов атомов не только не учитываются последние факторы, влияющие на интенсивность, но и само суммирование проводится при ограниченном числе членов ряда.

Практически вычисляется ограниченная сумма вида

$$\rho(xyz)=\frac{1}{V}\sum_{h\kappa l=0}^{HKL}|F_{эк}(h\kappa l)|\cos 2\pi(hx+\kappa y+lz), \qquad (2)$$

где $F_{эк}(h\kappa l)$—определяется из измеренных интенсивностей.

Ввиду того, что интенсивность отдельных интерференций определяется в лучшем случае с ошибкой порядка 5—10%, то можно писать

$$F_0(hxl)=F_{эксп.}(h\kappa l)\pm\Delta F(h\kappa l), \qquad (3)$$

где $\Delta F(h\kappa l)$—есть ошибка, допущенная при определении значения структурного фактора, входящего в суммирование. Величина ошибки $\Delta F(h\kappa l)$ обусловлена не только точностью измерения интенсивности. Эта величина порождается также при учете как поглощения и экстинкции, также и самим состоянием кристалла. Под состоянием кристалла имеется в виду степень мозаичности. Известно, что в случае идеального и идеально мозаичного кристалла связь между интенсивностью и структурным фактором иная и вообще в конкретном случае использование соотношения для идеально мозаичного кристалла строго необосновано.



В большинстве работ ни фактор полгощения, ни факторы экстинкции не учитываются (или учитываются достаточно грубо) и как правило кристалл предполагается идеально мозаичным. Естественно указанные обстоятельства еще больше увеличивают величину $\Delta F(h\kappa l)$. Если в (1) учесть выражение (3), то выражение истинной плотности электронов можно писать в виде:

$$\rho_0(xyz)=\frac{1}{V}\left\{\sum_{h\kappa l=0}^{HKL}F_{эксп.}(h\kappa l)\cos 2\pi(hx+\kappa y+lz)+\right.$$
$$+\sum_{h\kappa l=0}^{HKL}\pm|\Delta F(h\kappa l)|\cos 2\pi(hx+\kappa y+lz)+$$
$$\left.+\sum_{h\kappa l=H,K,L}^{\infty}F_{эке}(h\kappa l)\cos 2\pi(hx+\kappa y+lz)\right\}, \qquad (4)$$

где $H$, $K$, $L$—наибольшие индексы, до которых производится практическое суммирование.

С точки зрения оценки точности метода суммирования можно писать, что ошибка определения электронной плотности $\Delta\rho(xyz)$ в точке $xyz$ будет

$$\Delta\rho(xyz)=\rho_0(xyz)-\rho(xyz)=\left\{\sum_{h\kappa l=0}^{HKL}\pm|\Delta F(h\kappa l)|\cos 2\pi(hx+\kappa y+lz)+\right.$$
$$\left.+\sum_{h\kappa l=H,K,L}^{\infty}F_0(h\kappa l)\cos 2\pi(hx+\kappa y+lz)\right. . \qquad (5)$$

В случаях, когда речь идет об изучении химической связи атомов в кристаллах, следовательно, необходимо хотя бы приблизительно оценить величины (5) и сопоставить ее порядком ожидаемого эффекта деформации в области химической связи.

Хотя оценка последних двух сумм, входящих в (5), особенности первой суммы, практически весьма трудна, однако можно указать пределы величин, входящих в это суммы. В большинстве структурных работ, если величина $\Delta F(h\kappa l)$ доходит до 20—22%, то в отдельных, выполненных с большой точностью работах эта величина не бывает ниже 10%.

Вторая сумма в (5) будет убывать по мере роста $H$, $K$, $L$ величина этой суммы может быть оценена весьма приближенно для данного конкретного случая кристалла и индексов суммирования $H$, $K$, $L$. Во избежение влияния последней суммы в ряде работ [1, 2, 15] пользуются методом введения высокой расчетной температуры, подобно тому, что сделано в работе [3]. По-видимому такой метод не всегда является оправданным, к тому же не всякую температуру можно брать за расчетную. Действительно, как следует из результатов работы [9], посвященной выяснению влияния расчетной температуры, с повышениеи расчетной температуры электронная плотность вблизи узла решетки (около центра тяжести атома) снижается, в то время как в области между атомами плотность увеличивается. Это вполне ясно показывает, что расчетная температура, если возможно ее ввести, должна быть выбрана так, чтобы влияние ее не превышало эффекта „деформации“, обусловленного химической связью. В этой

связи некоторые объяснение причины получения качественно положительного результата в работе [3] по части алмаза можно видеть как в точности измерения интенсивностей интерференции, учета необходимых поправок и резонной температуры, введенной для расчета, так и тот факт, что гомополярная связь в алмазе самая сильная.

В заключение можно заметит, что в поисках химической связи, которая скажется в незначительных „деформациях" (~5—10%) внешней электронной оболочки, расчет $\rho(xyz)$ из ряда Фурье на основе неточно измеренных интенсивностей, да еще введением значительно высокой расчетной температурой далеко не оправдан.

К этому следует добавить что если даже путем тройного ряда достаточно точно рассчитано распределение электронной плотности в элементарной ячейке, то операция перехода от этого к индивидуальным атомом не является однозначной.

Все это требует поисков более чувствительных и объективных методов оценки „деформаций" внешних электронных оболочек, обусловленных химической связью атомов.

В этом направлении можно отметить ряд работ, в которых делается попытка вычисления плотности только внешних электронов в атомах путем использования разностных функций структурной амплитуды. В частности в работе Корхонена [18], посвященной исследованию деформации электронного облака ионов в ионных кристаллах типа NaCl о деформации судятся на основе зависимости $\Delta f = f_{\text{эксп.}} - f_{\text{теор}}$ от кристаллографического направления.

В работах Г. Карпентера, Н. Сироты и других [13, 17] посвященных поиску плотности электронов связи в алмазе и кремнии предлагается метод применения разностного ряда Фурье.

Принципиально в этих работах вычисляется $\Delta\rho(xyz) = \rho_{\text{эксп}}(xyz) - \rho_{\text{расч.}}(xyz)$, где $\rho_{\text{расч.}}(xyz)$ является сферически симметричной частью плотности атомов в решетке, которая задается определенным образом. Следует отметить что если функция $\rho_{\text{эксп.}}(xyz)$ вычисляется, как было указано выше, с ошибкой достаточно ощутимой по сравнению с искомой величиной деформации, то преимущество этого метода все еще не очень убедительно.

Один из методов оценки изменения, происходящего на внешнем электронном слое, предложенный С. Т. Конобеевским [8], заключается в сопоставлении интенсивности соответствующих парных интерференций, полученных на одной рентгенограмме. Этот метод, как известно, приводит к исследованию анизотропии атомного фактора рассеяния рентгеновских лучей в кристаллах. Действительно, если в результате химической связи атомов в кристалле возникшая „деформация" приводит к анизотропии электронного распределения атома $\rho^{(\vec{r})}$, то соответственно функция атомного фактора $f(H)$, выраженная в виде

$$f(\vec{H}) = \int_v \rho(\vec{r}) e^{2\pi i \vec{H}\vec{r}}\, dV \qquad (10)$$

также будет анизотропной. Следовательно, идя обратно, т. е. экспериментально изучая наличие, характер и направление анизотропии атомного фактора, можно установить соответствующую анизотропию в распределении электродной плотности [10] для атомов. Этим методом было показано наличие анизотропии электродной плотности атома Al в решетке Al [17]. Полученные экспериментальные результаты в этом случае могут быть сопоставлены с результатом расчета, сделанного



на модели, принятой исходя из разумных кристаллографических данных. В частности модель атома выбирается из предположения, что симметрия атома соответствуют симметрии его положения в решетке. Такое предположение, следующие из самых общих соображений позволяет рассчитать анизотропный фактор в случае, если положение атома (или соответственно форма атома) обладает сравнительно высокой симметрией. Коэффициенты анизотропии, входящие в выражение анизотропного атомного фактора определяется из эксперимента [11].

Может быть случай, когда анизотропия распределения электронной плотности атома настолько велика, или ярко выражена, что этот факт приводит к нарушению обычного закона погасания. Ясно, что наиболее сильной является гомополярная связь и она может обусловливать наиболее выраженную анизотропию. Действительно в случае алмаза, где наиболее сильная гомополярная связь и четвертная координация атомов углерода позволяет предполагать, что атомы можно представить в виде правильных тетраэдров. А последнее, как было показано [6, 11] вызывает нарушение закона обычного погасания и приводит к новому „закону погасания", выражающемуся в том, что из интерференций типа

$$\sum_{j=1}^{3} h_j = 4n+2 \qquad (11)$$

является запрещенными, т. е. у которых индексы содержат 4 или 0.

Было также показано, что из интенсивности интерференций типа (11), которые обусловлены анизотропной формой атома, можно рассчитать степень анизотропности.

Исходя из вышеизложенного следует, что в случае кристаллов алмазной структуры, в частности кремния о наличии и степени анизотропии формы атома можно судить по появлению и интенсивности интерференции типа (11). При этом надо обратить внимание на одно обстоятельство. Интенсивности этих характерных интерференций значительно меньше по сравнению с обычными интерференциями, а кристаллы кремния могут быть отнесены частично к идеальным. Последнее указывает на возможность возникновения так называемых динамических или вторичных интерференций, т. е. интерференций, вызванных не первичным излучением, а изучением, возникшим в результате другой интерференции. На возможность возникновения таких интерференций указывается также в работе [16].

Пользуясь обозначениями С. Т. Конобеевского возможность возникновения таких вторичных интерференций можно рассчитать следующим образом. Пусть кристалл поставлен так, что может вращаться вокруг оси $Q\,[q_1\ q_2\ q_3]$, перпендикулярно к подающему лучу, направление которого определяется вектором $S_0(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$ с компонентами по осям обратной решетки $\frac{\alpha_1}{\lambda}$, $\frac{\alpha_2}{\lambda}$ и $\frac{\alpha_3}{\lambda}$.

Тогда можно записать

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1 \\ \text{и}\quad &q_1\alpha_1+q_2\alpha_2+q_3\alpha_3=0 \end{aligned}\right\}. \qquad (12)$$

При таком положении кристалла, если узел обратной решетки, определяемый вектором $\vec{H}'(h_i')$ соответствует такой сильной интерфе-

ренции, что интерферировавшие от этого узла лучи вызывают вторичную интерференцию в направлении вектора $\vec{H}$, то последний будет как бы „ложным" максимумом. Ясно, что для того, чтобы имело место такое вторичное отражение, концы обоих векторов $\vec{H}'$ и $\vec{H}(h_i)$ должны лежать на данной сфере Эвальда. Как видно из рис. 1 в этом случае должны удовлетворяться следующие условия:

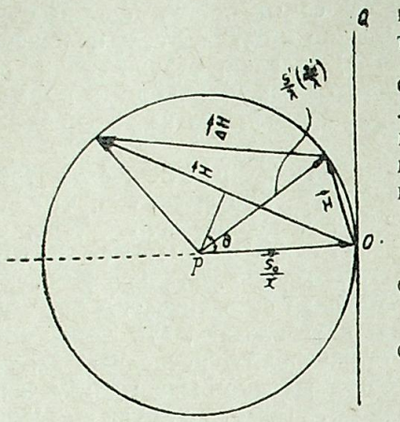



Рис. 1.

$$\cos(\vec{S}_0\vec{H}) = \frac{\vec{H}}{2} : \left|\frac{(S_0)}{\lambda}\right| = \frac{\lambda\sqrt{\Sigma h_i^2}}{2a}\ ; \quad (13)$$

с другой стороны, эта величина

$$\cos(\vec{S}_0\vec{H}) = \frac{\Sigma\alpha_i h_i}{\sqrt{\Sigma h_i^2}} \quad (13')$$

Из двух последних соотношений следует, что если узел находится на сфере Эвальда, то

$$\sum_{i=1}^{3}\alpha_i h_i = \frac{\lambda}{2a}\sum_{i=1}^{3}h_i^2. \quad (14)$$

Тоже самое можно писать и для производящего узла или его вектора $\vec{H}'(h_i')$

$$\frac{\lambda}{2a}\sum_{i=1}^{3}h_i'^2 = \sum_{i=1}^{3}\alpha_i h_i' \quad (15)$$

Таким образом для определения $\vec{S}_0(\alpha_i)$ можно пользоваться соотношениями (13) и (14). Найденные $\alpha_i$ могут удовлетворять (15) для какого-либо $H'(h_i')$ лишь в особых случаях, которые и являются случаями возможности появления вторичной интерференции. При этом вектор $\vec{H}'$ может быть только таким, что разностный вектор $\vec{H}-\vec{H}' = \Delta\vec{H}$ также удовлетворяет условие (15). Условие выполнения равенства (15) также зависит от значения $\frac{\lambda}{2a}$.

Для решетки типа алмаза, в частности в случае кремния производящая интерференция должна быть сильной. Следовательно

$$\Sigma h_i' \neq 4n+2 \text{ и } \Sigma(h_i - h_i') \neq 4n+2, \quad (16)$$

из которого видно, что все индексы $h_i'$ должны быть нечетными.

## Эксперимент

Исследованные кристаллы кремния предварительно имели форму правильной шестигранной пирамиды. Рентгенографически определено, что ось пирамиды совпадает с направлением [111].



Измерение интенсивности интерференций производилось на рентгено-дифрактометре УРС-50-И. При первоначальной форме кристалла учет влияния поглощения затруднителен. Ввиду того, что даже в случае сравнительно жесткого изучения (Mo $K_\alpha$) коэффициент поглощения в кремнии значителен, из кристаллов были изготовлены шарики диаметром порядка 0,5 *мм* по методу, предложенному в [8].

Затем, после предварительного травления, шарики были ориентированы методом Лауэ так, чтобы ось вращения образца совпала с направлением [110]. Такая установка кристалла позволяет на УРС-50-И исследовать все отражения от плоскостей данной зоны. Согласно схеме эксперимента (рис. 2) последовательно были записаны кривые интенсивности отдельных интерференций на электронном потенциометре ЭПП-09. Измерение интенсивности производилось с помощью узкого (шель 0,1 *мм*) пучка Mo $K_\alpha$ излучения, монохроматизированного путем отражения от плоского кристалла кварца (ширина щелей счетчика от 0,5 *мм*).

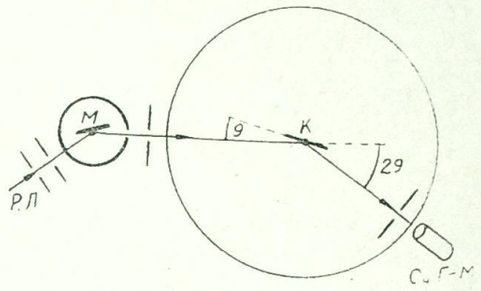



Рис. 2.

Интерференции были записаны при синхронном вращении образца и счетчика и при линейном участке счета счетчика (~ до 400 *им/сек*) режим работы трубки был 35 *кв* и 10 *ма*. Ограничение напряжения сверху имело важное значение для предотвращения возможности возникновения второго порядка от плоскости (111) в силу наличия в падающем на кристалл излучении длин волн $\lambda/2$ от сплошной части спектра.

При этих случаях полученные экспериментальные данные приведены в табл. 1.

*Таблица 1*

| *hkl* | Интенсивность | *hkl* | Интенсивность |
|---|---|---|---|
| 111 | 214 | 220 | 212,7 |
| 311 | 218 | 222 | 1,5 |
| 331 | 29,0 | 400 | 70,0 |
| 333 | 46,5 | 440 | 59,9 |
| 511 | 48,6 | 622 | Слабая 0,4 |

Таким образом на эксперименте из интерференции типа (11) обнаружены 222 и 622.

Экспериментальная часть подробно дана в [12].

Для выявления того, не являются ли эти интерференции вторичными (или динамичными) для данного расположения кристалла, можно проверить наличие производящих интерференций.

В данном случае $Q[110]$; $H_1$ $(2\bar{2}2)$; $H_2(22\bar{6})$; принимая $a = 5{,}417$ Å, а $\lambda = 0{,}71$ Å можно рассчитать $\alpha_i$.

Из соотношения (12) следует, что

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 &= -\alpha_2 \\ \alpha_3 &= \sqrt{1-2\alpha_1^2}\end{aligned}\right\}$$

а из соотношения (14) для интерференции 222 следует, что

$2\alpha+\sqrt{1-2\alpha^2}=0{,}393$ решение которого дает

$\alpha_1(1)=0{,}5285$; $\alpha_2(1)=-0{,}5285$; $\alpha_3(1)=0{,}6645$

$\alpha_1(2)=0{,}2665$; $\alpha(2)=0{,}2665$; $\alpha_3(2)=0{,}9263$.

Проанализируем случай $\alpha_i$ (1), т. е. $\alpha_1(1)=0{,}5285$; $\alpha_2(1)=-5285$; $\alpha_3(1)=0{,}6645$.

При этих условиях падения первичного пучка рентгеновских лучей, если есть производящие двойное отражение интерференции $H'(h'\kappa'l')$, должно удовлетворяться условие (15), т. е. $\alpha_1(h'_1-h'_2)+\alpha_3 h'_3=0{,}0655\sum_{i=1}^{3}h_i'^2$ или

$$\Sigma h_i'^2=\frac{\alpha_1(h'-h'_2)}{0{,}0655}+\frac{\alpha_3 h'_3}{0{,}0655}=S_1+S_2 \qquad (17)$$

По условию все $h'_i$ должны быть нечетными.

Задаваясь значениями $h'_i$ надо искать возможности наличия таких $h'_i$, чтобы удовлетворилось последнее соотношение. Значения $S_1$ и $S_2$ могут быть рассчитаны как функция целых чисел $h'$ $(h'=h'_1-h'_2)$ для $S_1$ и $h'=h'_3$ для $S_2$)

$$S_1=\frac{0{,}5285(h'_1-h'_2)}{0{,}0655}=8{,}068\,(h'_1-h'_2)$$

$$S_2=\frac{0{,}6645h'_3}{0{,}0655}=10{,}145h'_3$$

*Таблица 2*

| $h'$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 0 | 16,136 | 0 | 32,272 | 0 | 48,408 |
| $S_2$ | 10,145 | 0 | 30,435 | 0 | 50,725 | 0 |

Комбинируя 2-ю и 3-ю строчки табл. 2 можно получить цифры сумма которых в случае наличия двойного отражения будет равняться $\Sigma h_i'^2$; при этом, так как $h'$ может иметь два знака, то $S_1$ и $S_2$ тоже могут иметь два знака.

Попытаемся удовлетворить условию (16) подбором $h'_i$ из различных семейств $\{h'_1 h_2 h'_3\}$, а) {111} неудовлетворяет; {113} не удовлетворяет; из семейства {133} наиболее подходящая интерференция могла быть {133} $h'_1-h'_2=-2$; $h'_3=3$) но и в этом случае $S_1+S_2=-16{,}136+30{,}435=14\cdot 299$, в то время как $\Sigma h_i'^2=19$. Неудовлетворят также {115} и др.

Для значений $\alpha_i$ можно выбрать случай $\alpha_i$ (2).

В этом случае $S_1=\frac{-0{,}2665}{0{,}0655}(h'_1-h'_2)$;

$S_2=\frac{0{,}9263}{0{,}0655}h'_3$ и для различных индексов можно составить табл. 3.



*Таблица 3*

| $h_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 0 | —0,14 | 0 | —16,28 | 0 | 24, 42 |
| $S_2$ | 14,14 | 0 | 42,42 | 0 | 70,70 | 0 |

Как было указано выше сумма квадратов индексов, которые могли бы производить интерференции 222 по возрастающим значениям могут быть записаны в виде $\sum_{i=1}^{3}h_i'^2=3$; 11; 19; 17 и т. д.

Из табл. 3 следует, что если расположить по возрастающим значениям результаты возможных комбинаций попарных элементов 2-ой и 3-ей строки (т. е. сумму и разность), то получается: 2,14; 6,00; 10,28; 14,17; 18,00; 22,28; 26,14; 34,28; 42,42 и т. д.

Более близкими из этих двух рядов цифр являются 10,28; 18; 26,14. Цифра 10,28 соответствует случаю $(h'_1-h'_2)=-\bar{6}$; $h'_3=\bar{1}$; это может соответствовать интерференциям $33\bar{1}$ и $51\bar{1}$, но в этом случаев $\sum_{i=1}^{3}h_i'^2=19$ и 27. Случай 18 соответствует $(h'_1-h'_2=6$; $h'_3=3)$; что может быт в случае интерференции $3\bar{3}$ и $5\bar{1}\bar{3}$, при этом $\Sigma h_i'^2=27$ и 35; 26,14 получается при $(h'_1-h'_2)=4$; $h'_3=3$, что может быть в случаях интерференций $\bar{3}\bar{1}3$; $\bar{5}\bar{1}3$ при которых $\Sigma h_i'^2=19$ и 35. Таким образом ни одна из этих интерференций не удовлетворяет условию, (16) т. е. интерференция 222 от Si при Mo $K_\alpha$ излучении не может возникнуть как вторичное отражение от более сильных интерференций.

Подобный же анализ можно привести для интерференции $2\bar{2}6$. Согласно (12) и (14)

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1&=-\alpha_2\\ \alpha_3&=\sqrt{1-2\alpha^2}\\ 2\alpha+3\sqrt{1+2\alpha^2}&=1{,}44\end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

откуда следует, что

$\alpha_1(1)=0{,}707$; $\alpha_2(1)=-0{,}707$; $\alpha_3(1)=0{,}017$

$\alpha_1(2)=-455$, $\alpha_2(2)=0{,}445$; $\alpha_3(2)=0{,}778$.

*Таблица 4*

| $h^1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | — | 21,54 | — | 43,08 | — | 64,62 |
| $S_2$ | 0,26 | — | 0,78 | — | 1,30 | — |

Составим таблицу возможных $h'_i$, для которых должно удовлетворяться (16). В данном случае

$$S_1(1)=\frac{0{,}707(h_1'-h_2')}{0{,}0655}; \qquad S_2(1)=\frac{0{,}017h_3'}{0{,}0655}$$

$$S_1(1)=10{,}77\,(h_1'-h_2')$$

$$S_2(1)=0{,}26h_2'$$

Из табл. 4 видно, что комбинация попарных элементов 2-ой и 3-ей строки таблицы не дадут значения, удовлетворяющие условиям (16).

Для случая $\alpha_1$ (2)

$$S_1(2)=\frac{-0{,}445}{0{,}0655}; \qquad S_2(2)=\frac{0{,}777h_3'}{0{,}0655}$$

$$S_1(2)=-6{,}8(h_1'-h_2'); \qquad S_2(2)=11{,}85h_3'.$$

Тогда таблица примет следующий вид:

*Таблица 5*

| $h^1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | — | —13,6 | — | 27,2 | — | 40,8 |
| $S_2$ | 11,85 | — | 35,50 | — | 59,25 | — |

Комбинация элементов строк дает следующий ряд цифр:
1,75, 5,25; 8,35; 11,85; 18,45; 23,70; 25,45 и т. д.

Наиболее близкие к $\Sigma_1'^2$ является значения 11,85(11) и 18,45(12). Случай 11,85 может быть при интерференции 311, 131, 551 и т. д., для которых (16) не удовлетворяется; случай же 18,45 может быть при интерференциях $3\bar{3}5$ и $5\bar{1}5$, что также не удовлетворяет условию (16).

Таким образом можно заключить, что интерференция 226 от Si $MoK_\alpha$ измерении также не может возникнуть как вторичное отражение от других, более сильных отражений как динамическое отражение. Следовательно экспериментально обнаруженные „запрещенные" интерференции являются результатом анизотропии атомного фактора рассеяния.

В заключение хочется отметить, что эффект „деформации" электронного облака атомов в кристалле достаточно тонкий эффект и применение метода суммирования Фурье рядов в любой форме может значительно затушевывать этот эффект. Следовательно для поисков этого эффекта более рациональным кажется точное измерение интенсивности ряда интерференций на монокристаллах определения более точного значения атомных факторов рассеяния, особенно при малых значениях $\left(\frac{\sin\theta}{\lambda}\right)$ и сопоставления их с рассчитанными. Только при этом можно уловить наличие анизотропии атомного фактора рассеяния, на основе которого можно с большей уверенностью и непосредственно указать на деформацию электронного облака атомов в кристалле.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаев Н.В. и Агаева Д. Л. „Изв. АН СССР", отд. хим. наук, вып. 17, 273, 1948.
2. Агаев И. В. и Гусева Л. М. „Изв. АН СССР", отд. хим. наук, вып. 4 289, 1945.



3. Брилль Р., Гримм Х. и др. „Успехи химии" т. 9, 4, 413, 1940.
4. Китайгородский А. И. Nature 179, № 4556, 410, 1957.
5. Конобеевский С. Т. Кристаллография, т. 2. вып. 4, 447, 1957.
6. Конобеевский С. Т. и Мамедов К. П. ЖЭТФ. 21, 9, 953, 1951.
7. Конобеевский С. Т. ДАН СССР", нов. сер. т. 49, № 1,
8. Конобеевский С. Т. „Изв. АН СССР" сер. физ. хим. анализа. т. 19, стр. 19, 1949.
9. Крицкая В. К. и Ровинский Б. М. ЖЭТФ, 18, 9, 785, 1948.
10. Мамедов К. П. „ДАН Азерб. ССР", т. VIII, 79, 1952.
11. Мамедов К. П. Анизотропия атомного фактора в кубических кристаллах. Диссертация, МГУ, М., 1950.
12. Мамедов К. П. Кристаллография. 1 вып. 4, 426, 1959.
13. Сирота Н. Н., Олехнович Н. М., Шелег А. У. „ДАН СССР" т. 132, № 1, 160, 1960.
14. Шандор Э., Гадо П. Кристаллография, 1, 6, 729, 1956.
15. Шувалов Ю. Н. ЖТФ, т. 27, вып. 8, стр. 1871, 1957.
16. Яворский И. В. Кристаллография. 1 вып. 3, 287, 1956.
17. Carpenter G. Acta Crystallogr. v. 32, 2, 525, 1960.
18. Karhonen U. Suomalais. tiedeakat toimituks sar. A-1, № 221, 19, 1956.
19. Lonsdale K. Nature, 176, № 4565, 856, 1957.

К. П. Мәммәдов

## Алмаз типли кристалларда атомларын әлагә нөвүнүн ренткенографик тәдгиги

ХҮЛАСӘ

Бәрк чисимләрин әсас хассәләри (електрик, механики вә и. а.) онлары тәшкил едән атомларын әлагә нөвүндән вә бу әлагәнин күчүндән асылыдыр. Беләликлә, атомлар арасындакы әлагәнин кејфијјәт вә кәмијјәт нөгтеји-нәзәрдән өјрәнилмәси һәм елми, һәм тәчрүби, һәм дә техники чәһәтдән бөјүк әһәмијјәтә маликдир. Бу мәсәләләрә артан мараг бир дә јарымкечиричиләр физикасынын инкишафы илә әлагәдардыр. Мә'лум олдуғу кими, јарымкечиричиләрин әсас групунда атомлар арасында һомополјар әлагә нөвү үстүнлүк тәшкил едир. Одур ки, белә кристалларда әлагәнин вә онун истигамәтинин тә'јини кристал гурулушунун бә'зи нәзәри мәсәләләрини һәлл етмәјә көмәк едәр вә хүсусән бә'зи хассәләрин анизотроплуғуну изаһ едә биләр.

Тәгдим едилән мәгаләдә башга үсулларла јанашы ренткенографик үсулун әлагә өјрәнмә мәсәләсинә тәтбиг едилә билмәси мүзакирә едилмәклә, алмаз типли гурулуша малик олан силисиум кристалында мүшаһидә едилмиш „гадаған" интерференсијаларын атомда електрон сыхлығынын анизотроп пајланмасы илә әлагәдар олдуғу көстәрилмишдир. Бундан әлавә, мәгаләдә ренткенографик үсулла әлагә нөвүнүн тәдгигиндә истифадә едилән ики үсулун тәһлили вә мүгаjисәси верилир. Көстәрилир ки, әлагә өјрәнмәк нөгтеји-нәзәрдән билаваситә атом амилинин дәгиг тә'јини даһа әјани нәтичә верә биләр.

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазијјат вә техника елмләри серијасы, 1960, № 6

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1960, № 6

Л. М. ИМАНОВ, К. Э. ЗУЛЬФУГАРЗАДЕ

# ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ КОМПЛЕКСНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ХЛОРБЕНЗОЛА И БРОМБЕНЗОЛА НА ВОЛНЕ 11,5 *см*

## 1. Введение

Изучение аномальной дисперсии диэлектрической проницаемости полярных жидкостей и связанного с ней сильного поглощения электромагнитной энергии способствует выяснению механизма диэлектрической поляризации, давая, тем самым, ценные сведения о природе межмолекулярных сил.

Область аномальной дисперсии определяется временем релаксации $\tau$, которое характеризует процесс развития поляризации в диэлектрике при наложении внешнего поля и связано с частотой максимально поглощаемой волны—$\omega_m$ условием:

$$\omega_m \tau = 1. \tag{1}$$

Для большинства полярных жидкостей область аномальной дисперсии лежит в диапазоне микрорадиоволн, охватывая, как правило, интервал более чем 100-кратного изменения частоты $\omega$. Это обстоятельство вызывает значительные экспериментальные трудности ввиду отсутствия столь широкополосных измерительных установок. Между тем, как следует из соотношения (1) дисперсионную кривую можно изучить, варьируя время релаксации $\tau$ при постоянной частоте $\omega$. Согласно Дебаю [1], связавшему релаксационный процесс в жидкости с ее вязкостью, время релаксации $\tau$ выражается следующим образом:

$$\tau = \frac{4\pi\eta a^3}{\kappa T}, \tag{2}$$

где $\eta$—коэффициент внутреннего трения, $a$—радиус молекулы, $\kappa$—постоянная Больцмана, $T$—абсолютная температура.

Анализ формулы (2) показывает, что наиболее характерной величиной, определяющей изменение времени релаксации $\tau$, является температура $T$. Следовательно, дисперсионные явления можно изучить, снимая температурную зависимость комплексной диэлектрической проницаемости $\varepsilon^*$ на фиксированной частоте. Особенно ценными представляются низкотемпературные измерения, так как с понижением температуры вследствие роста времени релаксации происходит сдвиг области аномальной дисперсии в сторону более низких частот, что облегчает проведение эксперимента.

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазијјат вә техника елмләри серијасы, 1960, № 6

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1960, № 6

Л. М. ИМАНОВ, К. Э. ЗУЛЬФУГАРЗАДЕ

# ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ КОМПЛЕКСНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ХЛОРБЕНЗОЛА И БРОМБЕНЗОЛА НА ВОЛНЕ 11,5 *см*

## 1. Введение

Изучение аномальной дисперсии диэлектрической проницаемости полярных жидкостей и связанного с ней сильного поглощения электромагнитной энергии способствует выяснению механизма диэлектрической поляризации, давая, тем самым, ценные сведения о природе межмолекулярных сил.

Область аномальной дисперсии определяется временем релаксации $\tau$, которое характеризует процесс развития поляризации в диэлектрике при наложении внешнего поля и связано с частотой максимально поглощаемой волны—$\omega_m$ условием:

$$\omega_m \tau = 1. \tag{1}$$

Для большинства полярных жидкостей область аномальной дисперсии лежит в диапазоне микрорадиоволн, охватывая, как правило, интервал более чем 100-кратного изменения частоты $\omega$. Это обстоятельство вызывает значительные экспериментальные трудности ввиду отсутствия столь широкополосных измерительных установок. Между тем, как следует из соотношения (1) дисперсионную кривую можно изучить, варьируя время релаксации $\tau$ при постоянной частоте $\omega$. Согласно Дебаю [1], связавшему релаксационный процесс в жидкости с ее вязкостью, время релаксации $\tau$ выражается следующим образом:

$$\tau = \frac{4\pi\eta a^3}{\kappa T}, \tag{2}$$

где $\eta$—коэффициент внутреннего трения, $a$—радиус молекулы, $\kappa$—постоянная Больцмана, $T$—абсолютная температура.

Анализ формулы (2) показывает, что наиболее характерной величиной, определяющей изменение времени релаксации $\tau$, является температура $T$. Следовательно, дисперсионные явления можно изучить, снимая температурную зависимость комплексной диэлектрической проницаемости $\varepsilon^*$ на фиксированной частоте. Особенно ценными представляются низкотемпературные измерения, так как с понижением температуры вследствие роста времени релаксации происходит сдвиг области аномальной дисперсии в сторону более низких частот, что облегчает проведение эксперимента.

Таким образом, возникает насущная потребность в разработке методики низкотемпературных измерений комплексной диэлектрической проницаемости полярных жидкостей в микроволновом диапазоне.

До настоящего времени известно небольшое число работ в этом направлении, причем, большинство из них посвящено изучению диэлектриков с малыми и средними потерями.

В настоящей работе была применена новая модификация метода короткозамкнутой линии для изучения температурной зависимости $\varepsilon^*=\varepsilon'-i\varepsilon''$ хлорбензола и бромбензола на волне 11,50 *см* в интервале $+20^\circ \div -90^\circ$C.

Температурная зависимость диэлектрических коэффициентов указанных жидкостей изучалась в [12]. Однако в этой работе температурный интервал не охватывает весьма интересную область — область точки затвердевания.

## 2. Теория метода

В методе короткозамкнутой линии [10] используется связь между входным импедансом $Z_0$ и комплексной постоянной распространения $\gamma$ линии, заполненной диэлектриком. Поскольку $\gamma$, в свою очередь связана с комплексной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon^*$, то, измерив $Z_0$, можно найти величину $\varepsilon^*$.

Согласно теории длинных линий [6]

$$\gamma=\alpha+i\beta=i\omega(\varepsilon^*\mu^*)^{\frac{1}{2}}, \tag{3}$$

где $\alpha$—постоянная затухания, характеризующая уменьшение амплитуды волны, распространяющейся вдоль линии, $\beta$—фазовая постоянная, характеризующая изменение фазы той же волны, $\mu^*$—комплексная магнитная проницаемость.

Принимая $\mu^*=1$, получим:

$$\varepsilon^*=\varepsilon'-i\varepsilon''=-\left(\frac{\gamma\lambda_1}{2\pi}\right), \tag{4}$$

где $\lambda_1$—длина волны в воздушной части линии.

Величина $\gamma$ связана с входным импедансом $Z_0$ следующим образом [10]

$$\frac{th\gamma d}{\gamma d}=-i\frac{\lambda_1}{2\pi d}\cdot\frac{Z_0}{Z_1} \tag{5}$$

где $d$—толщина диэлектрика, $Z_1$—волновое сопротивление воздушной части линии.

Входной импеданс $Z_0$ выражается через экспериментально определимые коэффициентом бегучести $q=E_{\min}/E_{\max}$ ($E$ – напряженность электрического поля) и смещение узла $y_1$ стоячей волны, обусловленное введением в линию диэлектрика перед коротким замыканием:

$$Z_0=Z_1\frac{q-it\mathrm{g}\beta_0 y_1}{1-iq\mathrm{tg}\beta_0 y_1}, \tag{6}$$

где $\beta_0=\dfrac{2\pi}{\lambda_1}$.

Трансцендентное уравнение (5) решается графическим способом. Для этого оно обычно представляется в таком виде:

$$\frac{thTe^{i\tau}}{Te^{i\tau}}=Ce^{i\xi} \tag{7}$$



где $Te^{i\tau}$—полярная форма комплексной величины $\gamma d$,

$C$ и $\xi$—модуль и аргумент, соответственно, правой части уравнения (5).

Если введем обозначение $Z_0/Z_1=R+iX$, тогда из уравнения (6) получим:

$$\left.\begin{aligned} R&=\frac{q(1+\mathrm{tg}^2\beta_0 y_1)}{1+q^2\mathrm{tg}^2\beta_0 y_1}\\ X&=\frac{(q^2-1)\mathrm{tg}\beta_0 y_1}{1+q^2\mathrm{tg}^2\beta_0 y_1}\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Принимая во внимание (5) и (8) имеем:

$$\left.\begin{aligned} C&=\sqrt{A^2+B^2} & A&=\frac{\lambda_1}{2\pi d}X\\ \mathrm{tg}\xi&=\mathrm{arctg}\frac{B}{A}, \text{ где} & B&=\frac{\lambda_1}{2\pi d}R\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Определив из выражений (8) и (9) $C$ и $\xi$, из графического решения уравнения (7), приведенного в [9] находим $T$ и $\tau$.

Поскольку $Te^{i\tau}=d\gamma=d(\alpha+i\beta)$, то

$$\left.\begin{aligned} \alpha&=\frac{T\cos\tau}{d}\\ \beta&=\frac{T\sin\tau}{d}\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Имея в виду (4), для определения действительной и мнимой части комплексной диэлектрической проницаемости получим следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon'&=\left(\frac{\lambda_1}{2\pi}\right)^2(\beta^2-\alpha^2)\\ \varepsilon''&=\left(\frac{\lambda_1}{2\pi}\right)^2 2\alpha\beta\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Анализ метода показал [2], что в случае малых и средних потерь ($\mathrm{tg}\delta<0{,}1$), точные результаты достигаются при толщинах кратных нечетному числу четвертей длины волны в образце.

При больших потерях ($\mathrm{tg}\delta>0{,}1$) толщину образца приходится брать настолько малой, что она сама становится источником заметных погрешностей.

Другим недостатком является крайняя чувствительность детекторной части аппаратуры к температурным колебаниям, что серьезно затрудняет проведение температурных измерений. Оба эти недостатка удается устранить в новой модификации метода [13].

Суть этой модификации состоит в том, что производится трансформация входного импеданса заполненной диэлектриком короткозамкнутой линии в измерительную линию таким образом, что создаются оптимальные условия для измерений. Измеряя трансформированный импеданс по известному коэффициенту трансформации находится искомый входной импеданс линии, заполненной диэлектриком.

В качестве трансформатора может быть использован любой четырехполюсник, включенный между короткозамкнутой и измерительной линиями. Изготовив трансформатор из материала с возможно более низкой теплопроводностью, можно резко уменьшить теплообмен между охлаждаемой короткозамкнутой секцией и остальной частью аппаратуры.

Параметры трансформатора определяются по схеме, приведенной на рис. 1.

Согласно теореме трансформации [15] существуют два таких сечения $C$ и $D$ на входе и выходе четырехполюсника, между которыми четырехполюсник вместе с прилегающими отрезками линии образует идеальный трансформатор с коэффициентом трансформации $n$. Это означает, что если к выходу трансформатора присоединен неизвестный импеданс $Z_к$, то его величину можно определить измерив импеданс в измерительной линии на входе трансформатора $Z_и$:

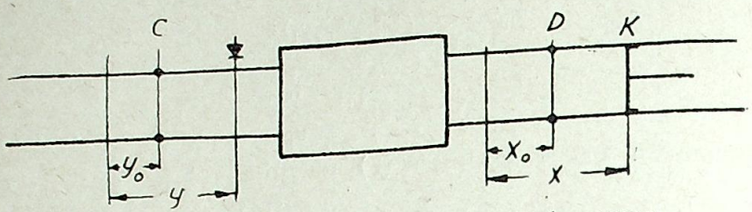



Рис. 1. Схема определения параметров трансформатора.

$$Z_к = \frac{Z_и}{n} \qquad (12)$$

Для определения коэффициента трансформации $n$ и положения входа и выхода трансформатора $y_0$ и $x_0$ снимают зависимость положения узла напряжения $y$ в измерительной линии от положения короткозамыкающего поршня $x$ в пустой короткозамкнутой секции. На основании полученных данных строят кривую $y=f(x)$ (рис. 2).

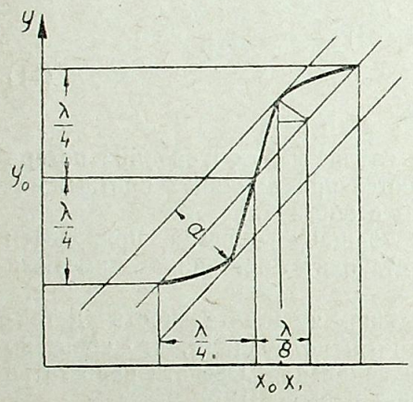



Рис. 2. Графическая зависимость функции $y=f(x)$.

Аналитически эта кривая выражается следующим образом [15]:

$$\mathrm{tg}\beta_0(y-y_0)=n\,\mathrm{tg}\beta_0(x-x_0) \qquad (13)$$

Координаты точки наибольшей крутизны $y=y_0$ и $x=x_0$ определяют вход и выход трансформатора. Величину $n$ точнее всего можно определить с помощью расстояния $a$ между двумя прямыми, ограничивающими кривую (13) и образующими с осями угол 45°. В точке $x_1$ $\frac{dy}{dx}=1$. Дифференцируя (13) и принимая во внимание соотношение (рис. 2)

$$x_1-x_0=\frac{\lambda}{8\gamma}-\frac{a\sqrt{2}}{4}$$

для определения $n$ получим формулу:

$$n=\left[\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}\left(\frac{\lambda}{4}-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\right]^2. \qquad (14)$$



Описанный трансформатор в виде четырехполюсника без потерь обладает некоторыми недостатками. В частности, нельзя менять коэффициент трансформации, кроме того, вход и выход трансформатора могут оказаться на неудобных для эксперимента местах. Эти затруднения устраняются путем добавления второй короткозамкнутой секции с поршнем (рис. 3).

В этом случае трансформатором является шестиполюсник без потерь. Его трансформирующие свойства можно определить, снимая зависимость $y=f(x)$ при фиксированном положении $z$ ($z$ определяет положение второго короткозамыкающего поршня).

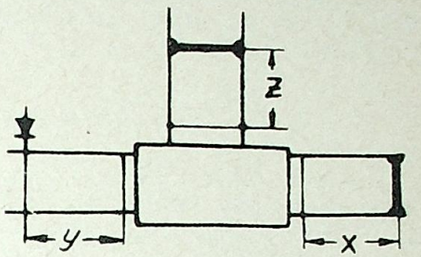



Рис. 3. Схема трансформатора в виде шестиполюсника.

При данном положении $z$ всю схему можно рассматривать как 4-полюсник. Другому положению $z$ будет, очевидно, соответствовать другой 4-полюсник. Иначе говоря, благодаря второй короткозамкнутой секции с подвижным поршнем оказывается возможным регулировать трансформацию.

Таким образом, использование теоремы трансформации для определения комплексной диэлектрической проницаемости сильно поглощающих веществ осуществляется следующим образом. Между измерительной линией и короткозамкнутой секцией включается трансформатор в виде шестиполюсника без потерь. Определяют согласно вышеописанному параметры трансформатора $n$, $x_0$ и $y_0$. Затем короткозамкнутая секция заполняется исследуемой жидкостью, высота столба которой устанавливается с помощью короткозамыкающего поршня. В измерительной линии определяют коэффициент бегучести $q$ и расстояние $y_1$ первого узла напряжения от входа трансформатора $y_0$. Дальнейший расчет ведется с помощью круговой диаграммы Вольперта—Смита [5]. Круговая диаграмма представляет собой два семейства ортогональных окружностей, изображающих значения активной и реактивной частей полного сопротивления, приведенных к волновому сопротивлению. На закрепленной в центре диаграммы подвижной линейке нанесены значения коэффициента бегучести. По периферии диаграммы отложены значения фазового угла в виде углов поворота радиус-вектора, вращающегося вокруг центра диаграммы. Один полный оборот радиус-вектора соответствует расстоянию вдоль линии, равному половине длины волны. Диаграммой пользуются следующим образом.

Вдоль периферии диаграммы проходят расстояние $y_1/\lambda_1$. Конец подвижной линейки устанавливают в найденной точке на периферии диаграммы. На линейке отмечают измеренное значение коэффициента бегучести $q$. Этой точке на диаграмме соответствует полное сопротивление $Z_и$ в измерительной линии на входе трансформатора. Деля $Z_и$ на трансформирующее число $n$, получают полное сопротивление на выходе трансформатора $Z_к^1$. Устанавливают на соответствующую точку подвижную линейку, после чего проходят по периферии диаграммы расстояние до входа короткозамкнутой секции и получают искомое входное сопротивление короткозамкнутой секции, заполненной диэлектриком.

Следует отметить, что использование круговой диаграммы значительно ускоряет процедуру вычислений. В частности исключаются довольно трудоемкие расчеты по формулам (8).

Определив из диаграммы $Z_0/Z_1=R+iX$, по формулам (9), (10) и (11) находят искомую комплексную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon^*=\varepsilon'-i\varepsilon''$.

### 3. Результаты измерения и обсуждение

На рис. 4 представлена блок-схема установки, работающей по вышеописанному методу. Из сети напряжение поступает через вариак (1) и феррорезонансный стабилизатор (2) на блок питания (3) генератора дециметровых волн (4), собранного на металлокерамическом триоде ГС-9Б по схеме с общей сеткой.

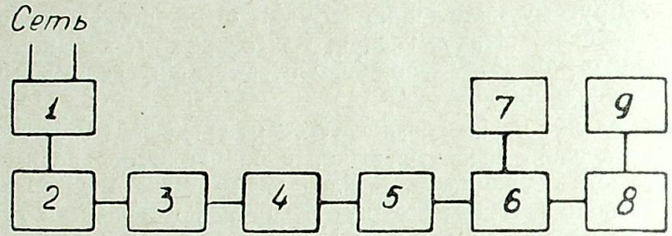



Рис. 4. Блок-схема установки.

Входной импеданс короткозамкнутой секции (9), заполняемой исследуемой жидкостью, преобразуется с помощью регулируемого трансформатора (8) в коаксиальную измерительную линию (6) с волновым сопротивлением 70 *ом*. Индикатором служит кремниевый детектор, на выходе которого включен прибор на 100 *μA*. Характеристика детектора—квадратичная.

Ввиду того, что при данном методе сопротивление нагрузки генератора изменяется в больших пределах, особое значение приобретает развязка генератора. С помощью развязывающего ослабителя (5) в систему вводится затухание около 20 *дб*.

Короткозамкнутая секция (9) является отрезком 70-омной коаксиальной линии длиной 12 *см*. Ее нижняя часть закрыта тефлоновой пробкой. Секция окружена металлической рубашкой, по которой пропускаются пары жидкого воздуха. Высота столба жидкости устанавливается с помощью короткозамыкающего поршня, положение плоскости короткого замыкания которого определяется с точностью 0,05 *мм*.

Регулируемый трансформатор (рис. 5) состоит из отрезка линии $T$, удлинителя $У$ и отрезка линии $P$ с подстраивающим поршнем. Длина отрезка линии $T$ 16 *см*, диаметр внешнего проводника 4 *мм*, внутреннего—0,8 *мм*. Этот коаксиальный переход окружен керамической трубкой, на которую намотана печь, мощностью порядка 5 *ватт*. Печь предварительно была проградуирована таким образом, чтобы охлаждение пустой секции (9) не вызывало смещения узла стоячей волны в измерительной линии. Это позволило устранить влияние охлаждения секции (9) на собственные параметры измерительной системы. Все токопроводящие поверхности линий и поршни посеребрены. Температура жидкости определялась термопарой медь-константан с точностью $\pm 0{,}5$°C.



Для испытания установки был проведен ряд контрольных измерений. Табл. 1 показывает воспроизводимость результатов при различной высоте $d$ столба жидкости на примере хлорбензола на волне 11,5 *см* при 20°C.

Разброс результатов различных измерений от среднего для $\varepsilon'$ составляет меньше 1%, а для $\varepsilon''$ меньше 4%.

В табл. 2 приведены результаты измерения нескольких полярных жидкостей на волнах 11,5 *см*, 12,5 *см* и 19,0 *см* при 20°C.

Сравнение с литературными данными показывает удовлетворительное согласие.

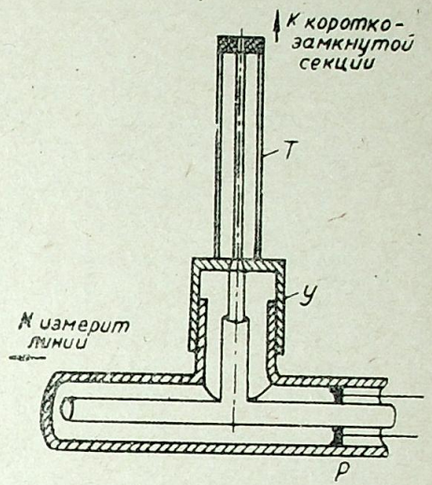



Рис. 5. Устройство трансформатора.

На описанной установке была изучена температурная зависимость комплексной диэлектрической проницаемости хлорбензола и бромбензола на волне 11,50 *см* в интервале от +20°C до −90°C.

*Таблица 1*

| $d$ | $\varepsilon'$ | $\varepsilon''$ |
|---|---|---|
| 1,28 | 5,58 | 0,63 |
| 1,50 | 5,60 | 0,62 |
| 3,00 | 5,59 | 0,66 |
| 3,42 | 5,58 | 0,64 |
| 3,76 | 5,57 | 0,64 |
| | 5,58 | 0,64 |

*Таблица 2*

| Вещество | $\lambda$, *см* | $\varepsilon^*=\varepsilon'-i\varepsilon''$ | |
|---|---|---|---|
| | | Измеренные | Литературные |
| н-бутиловый спирт | 19,0 | 4,10—*i*3,12 | 4,0 —*i*3,2 [3] |
| Хлорбензол | 19,0 | 5,65 – *i*0,42 | — |
| н-бутиловый спирт | 12,5 | 3,40—*i*2,22 | 3,6 —*i*2,6 [3] |
| Хлорбензол | 11,5 | 5,58—*i*0,64 | — |
| | 10,0 | — | 5,55—*i*0,66[8] |
| Бромбензол | 11,5 | 5,17—*i*0,82 | — |
| » | 11,0 | | 5,16—*i*0,87[8] |

Результаты даны в табл. 3 (в скобках указаны данные Поли и Ван-Эйка [12], измеренные на волне 10,0 *см*) и на рисунках 6 и 7.

*Таблица 3*

| t° C | Хлорбензол ε′ | Хлорбензол ε | t° C | Бромбензол ε′ | Бромбензол ε″ |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 5,58(5,55) | 0,64(0,69) | 20 | 5,17(5,09) | 0,82(0,85) |
| 15 | 5,60 | 0,68 | 15 | 5,19 | 0,87 |
| 10 | 5,68(5,65) | 0,73(0,79) | 10 | 5,22(5,13) | 0,93(0,96) |
| 5 | 5,74 | 0,78 | 5 | 5,27 | 1,01 |
| 0 | 5,80(5,74) | 0,85(0,89) | 0 | 5,31(5,17) | 1,09(1,13) |
| — 5 | 5,82 | 0,92 | −5 | 5,34 | 1,17 |
| —10 | 5,83 | 1,0 | —10 | 5,40 | 1,25 |
| —15 | 5,88 | 1,07 | —15 | 5,36 | 1,35 |
| —20 | 5,84 | 1,14 | —20 | 5,31 | 1,41 |
| —30 | 5,74 | 1,27 | —25 | 5,22 | 1,46 |
| —40 | 5,54 | 1,41 | —28 | 5,14 | 1,51 |
| —42 | 5,50 | 1,47 | —30 | 5,05 | 1,57 |
| —45 | 5,43 | 1,53 | —31 | 2,95 | 0,82 |
| —46 | 3,05 | 1,13 | —33 | 2,85 | 0,44 |
| —47 | 2,93 | 0,78 | —35 | 2,82 | 0,21 |
| —48 | 2,85 | 0,45 | —40 | 2,81 | 0,15 |
| —50 | 2,83 | 0,31 | —42 | 2,80 | 0,11 |
| —51 | 2,82 | 0,21 | —45 | 2,80 | 0,08 |
| —53 | 2,81 | 0,18 | —50 | 2,79 | 0,06 |
| —55 | 2,80 | 0,14 | —60 | 2,79 | 0,04 |
| —60 | 2,78 | 0,11 | —72 | 2,80 | 0,03 |
| —68 | 2.79 | 0,07 | —87 | 2,81 | 0,02 |
| —77 | 2,80 | 0,05 | | | |
| —89 | 2,80 | 0,04 | | | |

Как видно из табл. 3 и рисунков в точках плавления (—45°C для хлорбензола и —30,6°C для бромбензола) происходит резкое уменьшение диэлектрических коэффициентов [4], указывающее на наличие скачка времени релаксации τ.

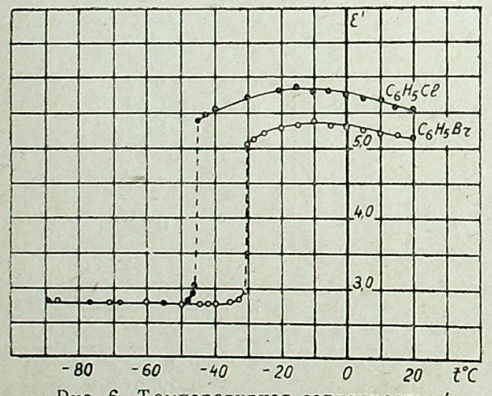


Рис. 6. Температурная зависимость ε′.

Таким образом при температуре затвердевания происходит упаковка молекул, резко ограничивающая их вращательную подвижность.

По измеренным значениям ε′ и ε″ можно определить величину времени диэлектрической релаксации.

В интервале температур от комнатной до температуры скачка вычисление производится по формуле:

$$\tau = \frac{1}{\omega}\,\frac{\varepsilon''}{\varepsilon' - \varepsilon_\infty}$$

Учитывая, что после скачка выполнится условие $\omega\tau \gg 1$ в дальнейшем исходим из соотношения:

$$\tau = \frac{1}{\omega}\,\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty}{\varepsilon''},$$



где ω—круговая частота приложенного поля, $\varepsilon_\infty$—диэлектрическая проницаемость при бесконечной частоте, $\varepsilon_0$—статическая диэлектрическая проницаемость.

Найденные значения времени релаксации для различных температур приведены в табл. 4 и графически представлены на рис. 8, где по оси ординат в логарифмической шкале отложено значение времени релаксации, а по оси абсцис—величина обратной абсолютной температуры.

Необходимые для расчета значения $\varepsilon_0$ были получены путем интерполяции данных, приведенных в работах [11] и [14].

Учитывая незначительное изменение $\varepsilon_\infty$ с температурой были приняты следующие значения: для хлорбензола—2,76 а для бромбензола—2,78.

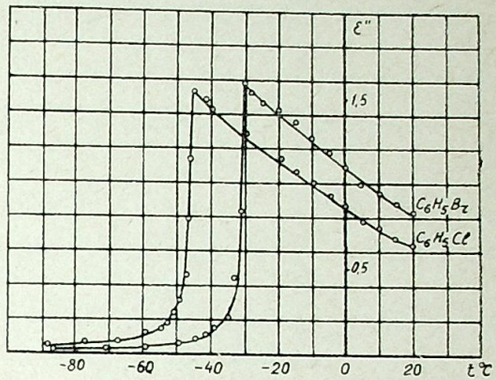


Рис. 7. Температурная зависимость ε″.

*Таблица 4*

| Хлорбензол t° C | Хлорбензол $\tau\times10^{10}$ сек | Хлорбензол ° C | Хлорбензол $\tau\times10^{10}$ сек | Бромбензол t° C | Бромбензол $\tau\times10^{10}$ сек | Бромбензол t° C | Бромбензол $\tau\times10^{10}$ сек |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 0,13 | —47 | 3,47 | 20 | 0,21 | —35 | 10,1 |
| 10 | 0,15 | —48 | 6,04 | 10 | 0,23 | —40 | 14,4 |
| 0 | 0,17 | —50 | 8,89 | 0 | 0,26 | —42 | 19,8 |
| —10 | 0,19 | —51 | 13,2 | —10 | 0,29 | —45 | 27,5 |
| —20 | 0,22 | —53 | 15,6 | —20 | 0,34 | —50 | 37,3 |
| —30 | 0,25 | —55 | 20,2 | —30 | 0,42 | —60 | 58,2 |
| —40 | 0,30 | —60 | 26,3 | —31 | 2,54 | —72 | 81,8 |
| —45 | 0,34 | —68 | 42,9 | —33 | 4,77 | | |
| —46 | 2,39 | | | | | | |

*Таблица 5*

| Вещество | $U\cdot10^{13}$ эрг | |
|---|---|---|
| | | Литературные [12] |
| Хлорбензол | 1,34 | 1,38 |
| Бромбензол | 1,42 | 1,43 |

Из табл. 4 видно что время релаксации, при переходе через точку плавления, резко возрастает (почти на один порядок). Следует отметить, что скорость изменения значения времени релаксации с температурой существенно зависит от скорости охлаждения. Приведенные здесь данные относятся к скорости 0,3—0,4 *гр/мин*.

Из наклона прямой, представляющей зависимость $\ln\tau$ от $1/T$ (рис. 8) были определены значения энергии активации молекул жидкого хлорбензола и бромбензола.

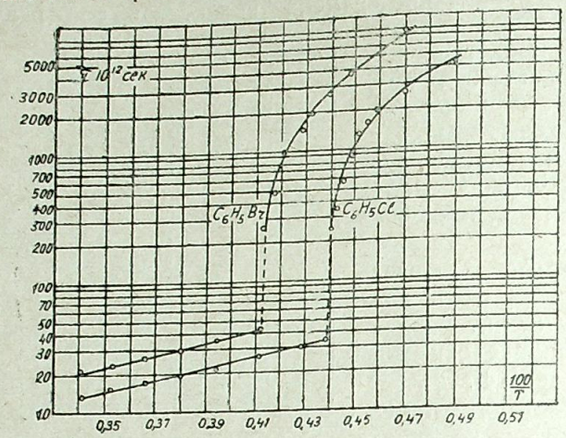



Рис. 8. Температурная зависимость времени диэлектрической релаксации

Полученные данные в табл. 5 сопоставляются с соответствующими данными из работы [12]. Как видно имеется довольно хорошее согласие.

Температурный ход $\tau$ показывает, что ниже температуры затвердевания нельзя межмолекулярное взаимодействие характеризовать одним определенным значением энергии активации молекул, ибо зависимость $\tau$ от $T$ выражается более сложным законом, чем $e^{u/kT}$.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описана модификация метода короткозамкнутой линии, предназначенная для измерения температурной зависимости комплексной диэлектрической проницаемости полярных жидкостей в диапазоне микроволн.

Модификация основана на трансформации входного сопротивления короткозамкнутой линии, заполненной исследуемой жидкостью. Собрана измерительная установка, работающая по принципу этой модификации.

Приведены данные температурной зависимости $\varepsilon^*$ хлорбензола и бромбензола в интервале $+20°C \div -90°C$ на волне 11,5 *см*.

При переходе через точку затвердевания указанных жидкостей обнаружен скачок $\varepsilon^*$. Определены значения времени релаксации во всем температурном интервале и величины энергии активации для молекул жидкого хлорбензола и бромбензола.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дебай П. Полярные молекулы, М., 1931.
2. Иманов Л. М. „Изв. АН Азерб. ССР", № 12, 1952.
3. Иманов Л. М. Аббасов Я. М. Тр. Ин-та физики АН Азерб. ССР, т. IX, 1958.
4. Иманов Л. М., Гаджиева Т. И. Уч. зап. АГУ № 1, 1959, стр. 67—71.
5. Линии передачи сантиметровых волн, т. 1, М 1952.
6. Рамо С., Уиннери Дж. Поля и волны в современной радиотехнике, М., 1948.
7. Сканави Г. И. Физика диэлектриков, М., 1949.
8. Glarum S. H. Rev. Sci Jnstr. 29, 1958, 11, 1016—1019.



9. Hippel A. R. Diel. mat. and appl. №-V., 1954.
10. Roberts A. R. Hippel, J. Appl. Physic 17, 1946, 610.
11. NBS circ. 514. Table of DC of Pure Li quids
12. Poley, J. P Eick. Appl. Sci Res B B. 6. 1957, 359—368.
13. Ruppersberg H. K. Z. angew. Physic. 9 1957, 9.
14. Smyth C. P. a. o. J. Amer. Chem. Soc. 72, 1950, 2071.
15. Weissfloch A. Schaltungstheorie und Messtechnik des Dezimeter und Zentimeterwellengebites, 1954.

Л. М. Иманов, К. Э. Зүлфүгарзадә

## 11,5 *см*-лик далғада хлорбензол вә бромбензолда комплекс диелектрик әмсалынын температур асылылығы

## ХҮЛАСӘ

Мәгалә хлорбензол вә бромбензолун комплекс диелектрик әмсалынын һәгиги вә хә,али һиссәләринин 11,5 *см* узунлуглу електромагнит далғасында $+20 \div -90°C$ интервалында температур асылылығынын өјрәнилмәсинә һәср едилмишдир.

Һәр ики маддә үчүн $\varepsilon'$ вә $\varepsilon''$ донма температурундан кечәркән сычрајышла дәјишмәси мүшаһидә олунмушдур ки, бу да релаксасија вахтынын сонлу сычрајышы илә әлагәдардыр.

Релаксасија вахтынын мүхтәлиф температурдакы гиjмәтләри һесабланмыш вә бу асылылығын графики ифадәсиндән активләшмә енержиләри тә'jин едилмишдир.

Өлчүләр дестиметрлик далғаларда ишләнилән гыса гапанмыш коаксионал хәтт үсулунун jени модификасијасына әсасән jығылмыш гурғуда апарылмышдыр.

Бу үсул полjар мајеләри дисперсија областында тәдгиг етмәк үчүн ән әлверишли үсуллардан биридир.

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазијјат вә техника елмләри серијасы, 1960, № 6

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1960, № 6

И. Э. ИБРАГИМОВ

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ ЛИНИИ 35 и 110 *кв* С УСТРОЙСТВОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО ВКЛЮЧЕННЫХ КОНДЕНСАТОРОВ

До последнего времени развитие энергетической промышленности происходило несколько односторонне. Основное внимание уделялось сооружению электрических станций, на строительство электрических сетей выделялось меньше средств, и поэтому развитие сетей отставало от развития мощностей электрических станций. Это обстоятельство приводит в основном к следующему.

Во-первых, введенные мощности на электрических станциях не могут быть использованы немедленно, что несколько тормозит развитие народного хозяйства, с одной стороны, и консервирует на некоторое время значительные средства, затраченные на сооружение станций, с другой.

Во-вторых, в неразвитых в достаточной степени сетях электроэнергия, подаваемая потребителям, имеет низкое качество. Известно, что одним из определяющих качество электроэнергии факторов является поддержание величины напряжения на нормальном уровне. В неразвитых сетях уровень напряжения часто выходит за допустимые пределы.

В-третьих, неразвитые в достаточной степени сети имеют низкие экономические показатели; в таких сетях происходят большие потери мощности и энергии, что снижает коэффициент полезного действия передачи электроэнергии.

В настоящее время в Советском Союзе идет огромное электросетевое строительство для ликвидации сложившейся диспропорции между мощностями источников электроэнергии и электрическими сетями, а также для дальнейшего общего развития электрификации страны. В частности, в Азербайджане в настоящее время строится большое количество линий высокого и низкого напряжений и подстанций.

При составлении перспективных планов развития электрификации, в частности электрических сетей, а также при составлении плановых или проектных заданий на строительство электрических сетей, планирующим и проектным организациям бывает нужно знать предварительно, по каким линиям и при каком напряжении можно передавать на данное расстояние заданную мощность при известных других ее параметрах.

Известно, что передача заданной мощности при различных протяженностях линии, коэффициентах мощности нагрузки, числах часов

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-рија зијјат вә техника елмләри серијасы, 1960, № 6

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1960, № 6

И. Э. ИБРАГИМОВ

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ ЛИНИИ 35 и 110 *кв* С УСТРОЙСТВОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО ВКЛЮЧЕННЫХ КОНДЕНСАТОРОВ

До последнего времени развитие энергетической промышленности происходило несколько односторонне. Основное внимание уделялось сооружению электрических станций, на строительство электрических сетей выделялось меньше средств, и поэтому развитие сетей отставало от развития мощностей электрических станций. Это обстоятельство приводит в основном к следующему.

Во-первых, введенные мощности на электрических станциях не могут быть использованы немедленно, что несколько тормозит развитие народного хозяйства, с одной стороны, и консервирует на некоторое время значительные средства, затраченные на сооружение станций, с другой.

Во-вторых, в неразвитых в достаточной степени сетях электроэнергия, подаваемая потребителям, имеет низкое качество. Известно, что одним из определяющих качество электроэнергии факторов является поддержание величины напряжения на нормальном уровне. В неразвитых сетях уровень напряжения часто выходит за допустимые пределы.

В-третьих, неразвитые в достаточной степени сети имеют низкие экономические показатели; в таких сетях происходят большие потери мощности и энергии, что снижает коэффициент полезного действия передачи электроэнергии.

В настоящее время в Советском Союзе идет огромное электросетевое строительство для ликвидации сложившейся диспропорции между мощностями источников электроэнергии и электрическими сетями, а также для дальнейшего общего развития электрификации страны. В частности, в Азербайджане в настоящее время строится большое количество линий высокого и низкого напряжений и подстанций.

При составлении перспективных планов развития электрификации, в частности электрических сетей, а также при составлении плановых или проектных заданий на строительство электрических сетей, планирующим и проектным организациям бывает нужно знать предварительно, по каким линиям и при каком напряжении можно передавать на данное расстояние заданную мощность при известных других ее параметрах.

Известно, что передача заданной мощности при различных протяженностях линии, коэффициентах мощности нагрузки, числах часов

использования максимальной нагрузки и т. д. может осуществляться при различных напряжениях сети и марках проводов. В литературе в настоящее время отсутствуют таблицы или кривые, с помощью которых можно было бы получить параметры электрических линий для передачи данной мощности с ее другими известными параметрами на данное расстояние.

Пропускная способность линий может быть существенно увеличена применением устройств последовательно включенных конденсаторов (ПК). За границей этот способ увеличения пропускной способности линий нашел достаточно широкое применение. Установки ПК применяются в сетях средних и высоких напряжений США, Швеции и ряда других стран.

Следует указать, что установки ПК могут быть применены также для регулирования напряжения в местных сетях и для достижения наиболее экономичного распределения потоков мощностей в замкнутых электрических сетях. С целью регулирования напряжения установка ПК в Советском Союзе впервые была применена в 1958 г. в электрических сетях 6 *кв* нефтяной промышленности Азербайджана [2].

В настоящее время в литературе отсутствуют, как и для обычных линий без устройства ПК, данные (таблицы или кривые), с помощью которых можно было бы установить параметры линий, снабженных устройством ПК для передачи данной мощности при заданных условиях передачи и степени компенсации индуктивного сопротивления линии.

В связи с этим Госплан республики рекомендовал заняться исследованием пропускной способности линий 35 и 110 *кв* с устройством ПК и без него, и составить таблицы или кривые, с помощью которых можно было бы выбрать параметры линий для передачи данной мощности при известных ее других параметрах.

В настоящей статье дан расчет передаваемых мощностей линий 35 и 110 *кв*[1] с устройством ПК в зависимости от протяженности линии, марки провода, коэффициента мощности нагрузок, продолжительности использования максимальной нагрузки и степени компенсации индуктивного сопротивления линий. Разумеется, варианты со степенью компенсации индуктивного сопротивления равной нулю соответствуют случаю линий без ПК. Результаты работ представлены в виде удобных таблиц и кривых для практического использования.

Пропускная способность линий зависит от ряда технических и экономических факторов. Сюда входят нагрев проводов, уровень напряжения, статическая и динамическая устойчивость, потеря энергии и мощности и т. д. В статье пропускная способность линий найдена из условия наименьших годовых эксплуатационных расходов с учетом создания нормального уровня напряжения у потребителей.

При определении пропускной способности линий по экономической плотности тока $j_{эк}$ отпадает необходимость проверки на нагрев проводов, так как для рассматриваемых марок проводов токи нагрузки, определяемые $j_{эк}$, меньше допустимых токов, найденных из условия нагрева проводов.

В настоящей работе рассматривается передача мощности только по радиальным линиям, где может возникать в основном вопрос устойчивости узла нагрузки. Выяснение устойчивости узла нагрузки представляет специальный вопрос и он здесь не рассматривается.

[1] Аналогичный расчет произведен автором и для линий 6 *кв*



## 1. Определение максимальных передаваемых мощностей линий 35 и 110 *кв* по экономической плотности тока

Передача мощности по линиям происходит с минимальными годовыми эксплуатационными расходами при плотности тока в линии, равной $j_{эк}$. При определении пропускной способности линии по $j_{эк}$ были взяты за основу последние утвержденные ее значения для воздушных линий с медными и алюминиевыми (или сталеалюминиевыми) проводами для различных значений числа часов использования максимальной нагрузки $T$ [2].

Величина полной передаваемой мощности из условия минимальных годовых эксплуатационных расходов $W_э$ составляет:

$$W_э = \sqrt{3}\, U j_{эк} S, \qquad (1)$$

где $S$—сечение провода линии,

$U$—напряжение передачи, которое в расчетах далее принимается равным номинальному напряжению сети, $U = U_н$.

Значения $j_{эк}$ определены для линий без устройства ПК, и они для линий с ПК могут несколько отличаться от утвержденных ее значений. Так например, это имеет место для линий с ПК, питающих морские нефтепромыслы [3]. Однако изменение $j_{эк}$ для линий на суше из-за применения ПК незначительно и поэтому им пренебрегаем.

В таблицах 1 и 2 приведены максимальные передаваемые мощности линий 35 *кв*, определенные по $j_{эк}$ для марок проводов М-50÷М-120 и АС-50÷АС-120 (и А-50÷А-120), рассчитанные по выражению (1).

*Таблица 1*

| $T$, *ч* | $\cos\varphi$ | М-50 | | М-70 | | М-95 | | М-120 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $W_э$, *Мва* | $P_э$, *Мвт* | $W_э$, *Мва* | $P_э$, *Мвт* | $W_э$, *Мва* | $P_э$, *Мвт* | $W_э$, *Мва* | $P_э$, *Мвт* |
| $1000 < T \leqslant 3000$ | 0,6 | 7,6 | 4,6 | 10,6 | 6,4 | 14,4 | 8,6 | 18,1 | 10,9 |
| | 0,7 | | 5,3 | | 7,4 | | 10,1 | | 12,7 |
| | 0,8 | | 6,1 | | 8,5 | | 11,5 | | 14,5 |
| | 0,9 | | 6,8 | | 9,5 | | 13,0 | | 16,3 |
| | 0,95 | | 7,2 | | 10,1 | | 13,7 | | 17,2 |
| $3000 < T \leqslant 5000$ | 0,6 | 6,3 | 3,8 | 8,9 | 5,3 | 12,1 | 7,2 | 15,1 | 9,1 |
| | 0,7 | | 4,4 | | 6,2 | | 8,4 | | 10,6 |
| | 0,8 | | 5,0 | | 7,1 | | 9,7 | | 12,1 |
| | 0,9 | | 5,7 | | 8,0 | | 10,9 | | 13,6 |
| | 0,95 | | 6,0 | | 8,5 | | 11,5 | | 14,3 |
| $5000 < T \leqslant 8760$ | 0,6 | 5,4 | 3,2 | 7,6 | 4,6 | 10,3 | 6,2 | 13,1 | 7,8 |
| | 0,7 | | 3,8 | | 5,3 | | 7,2 | | 9,2 |
| | 0,8 | | 4,3 | | 6,1 | | 8,2 | | 10,5 |
| | 0,9 | | 4,9 | | 6,8 | | 9,2 | | 11,8 |
| | 0,95 | | 5,1 | | 7,2 | | 9,8 | | 12,4 |

*Таблица 2*

| $T$, ч | cos φ | AC-50 A-50 | | AC-70 A-70 | | AC-95 A-95 | | AC-120 A-120 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $W_э$, *Мва* | $P_э$, *Мвт* | $W_э$, *Мва* | $P_э$, *Мвт* | $W_э$, *Мва* | $P_э$, *Мвт* | $W_э$, *Мва* | $P_э$, *Мвт* |
| $1000 < T \leqslant 3000$ | 0,6 | 3,9 | 2,3 | 5,5 | 3,3 | 7,6 | 4,6 | 9,1 | 5,5 |
| | 0,7 | | 2,7 | | 3,8 | | 5,3 | | 6,4 |
| | 0,8 | | 3,1 | | 4,4 | | 6,1 | | 7,3 |
| | 0,9 | | 3,5 | | 4,9 | | 6,8 | | 8,2 |
| | 0,95 | | 3,7 | | 5,2 | | 7,2 | | 8,6 |
| $3000 < T \leqslant 5000$ | 0,6 | 3,3 | 2,0 | 4,7 | 2,8 | 6,3 | 3,8 | 8,0 | 4,8 |
| | 0,7 | | 2,3 | | 3,3 | | 4,4 | | 5,6 |
| | 0,8 | | 2,6 | | 3,8 | | 5,0 | | 6,4 |
| | 0,9 | | 3,0 | | 4,2 | | 5,7 | | 7,2 |
| | 0,95 | | 3,1 | | 4,5 | | 6,0 | | 7,6 |
| $5000 < T \leqslant 8760$ | 0,6 | 3,0 | 1,8 | 4,2 | 2,5 | 5,7 | 3,4 | 7,3 | 4,4 |
| | 0,7 | | 2,1 | | 2,9 | | 4,0 | | 5,1 |
| | 0,8 | | 2,4 | | 3,4 | | 4,6 | | 5,8 |
| | 0,9 | | 2,7 | | 3,8 | | 5,1 | | 6,6 |
| | 0,95 | | 2,9 | | 4,0 | | 5,4 | | 7,0 |

*Таблица 3*

| $T$, ч | cos φ | M-70 | | M-95 | | M-120 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $W_э$, *Мва* | $P_э$, *Мвт* | $W_э$, *Мва* | $P_э$, *Мвт* | $W_э$, *Мва* | $P_э$, *Мвт* |
| $1000 < T \leqslant 3000$ | 0,6 | 33,2 | 19,9 | 45,0 | 27,0 | 57,0 | 34,2 |
| | 0,7 | | 23,2 | | 31,5 | | 39,9 |
| | 0,8 | | 26,6 | | 36,0 | | 45,6 |
| | 0,9 | | 29,9 | | 40,5 | | 51,3 |
| | 0,95 | | 31,6 | | 42,7 | | 54,1 |
| $3000 < T \leqslant 5000$ | 0,6 | 28,0 | 16,8 | 36,0 | 22,8 | 47,6 | 28,5 |
| | 0,7 | | 19,6 | | 26,6 | | 33,2 |
| | 0,8 | | 22,4 | | 30,4 | | 38,0 |
| | 0,9 | | 25,2 | | 34,2 | | 42,7 |
| | 0,95 | | 26,6 | | 36,0 | | 45,0 |
| $5000 < T \leqslant 8760$ | 0,6 | 24,0 | 14,4 | 32,5 | 19,5 | 41,1 | 24,6 |
| | 0,7 | | 16,8 | | 22,5 | | 28,8 |
| | 0,8 | | 19,2 | | 26,0 | | 32,9 |
| | 0,9 | | 21,6 | | 29,2 | | 37,0 |
| | 0,95 | | 22,8 | | 30,9 | | 39,0 |



*Таблица 4*

| $T$, ч | cos φ | AC-70 и A-70 | | AC-95 и A-95 | | AC-120 и A-120 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $W_э$, *Мва* | $P_э$, *Мвт* | $W_э$, *Мва* | $P_э$, *Мвт* | $W_э$, *Мва* | $P_э$, *Мвт* |
| $1000 < T \leqslant 3000$ | 0,6 | 17,1 | 10,2 | 23,8 | 14,3 | 28,5 | 17,1 |
| | 0,7 | | 12,0 | | 16,7 | | 20,0 |
| | 0,8 | | 13,7 | | 19,0 | | 22,8 |
| | 0,9 | | 15,4 | | 21,4 | | 25,6 |
| | 0,95 | | 16,2 | | 22,6 | | 27,0 |
| $3000 < T \leqslant 5000$ | 0,6 | 14,6 | 8,7 | 20,0 | 12,0 | 25,0 | 15,0 |
| | 0,7 | | 10,2 | | 14,0 | | 17,5 |
| | 0,8 | | 11,7 | | 16,0 | | 20,0 |
| | 0,9 | | 13,1 | | 18,0 | | 22,6 |
| | 0,95 | | 13,9 | | 19,0 | | 23,7 |
| $5000 < T \leqslant 8760$ | 0,6 | 13,3 | 8,0 | 18,0 | 10,8 | 22,8 | 13,7 |
| | 0,7 | | 9,3 | | 12,6 | | 16,0 |
| | 0,8 | | 10,6 | | 14,4 | | 18,2 |
| | 0,9 | | 12,0 | | 16,2 | | 20,5 |
| | 0,95 | | 12,6 | | 17,1 | | 21,6 |

С точки зрения потерь на корону минимальные сечения проводов линий 110 *кв* следующие: М-70, АС-70 и А-95 [1]. Однако, учитывая, что в некоторых случаях можно допустить применение провода марки А-70 в линиях 110 *кв*, а также учитывая, что максимальная передаваемая мощность линий с проводом А-70 такая же, что и для линий с проводом АС-70, то в соответствующих таблицах рядом с маркой провода АС-70 указывается и провод марки А-70.

В таблицах 3 и 4 приведены значения максимальных передаваемых мощностей по $j_{эк}$ линий 110 *кв* для марки проводов М-70 ÷ М-120 и АС-70 ÷ АС-120 (и А-70 ÷ А-120).

## 2. Определение максимальных передаваемых мощностей линий 35 и 110 *кв* из условия сохранения нормального уровня напряжения у потребителей

Значение максимальных передаваемых мощностей линий существенно зависит от применения различных способов регулирования напряжения. В данной работе рассматривается возможность увеличения пропускной способности линии только с помощью ПК. Поэтому определение максимальных передаваемых мощностей из условия сохранения нормального уровня напряжения у потребителей может быть произведено по потере напряжения в линии.

В расчетах потерь напряжения в линиях 35 *кв* распределенность параметров линии не учитывается. В таких линиях, особенно когда они выполнены воздушными, активные и реактивные проводимости очень незначительны и поэтому в расчетах ими пренебрегают. В расчетах очень протяженных линий 35 *кв* в некоторых случаях приходится учитывать емкостную мощность самой линии, однако и в этих случаях они могут быть объединены с нагрузками, и поэтому схема замещения таких линий может быть упрощена и представлена

как последовательно включенные активное и индуктивное сопротивления линии. При наличии устройства ПК в схеме замещения последовательно включается дополнительно емкостное сопротивление ПК

Для линии с устройством ПК при нагрузке в конце линии $\dot{W}=P-jQ$ связь между напряжением начала и конца линии выражается:

$$\dot{U}_1=U_2+\frac{PR+Q(X-X_c)}{U_2}+j\frac{P(X-X_c)-QR}{U_2}, \qquad (2)$$

где $U_1$ и $U_2$—напряжения начала и конца линии,

$R$ и $X$—активное и индуктивное сопротивления линии,

$X_c$—емкостное сопротивление ПК.

Обозначив степень компенсации индуктивного сопротивления через $\kappa=\frac{X_c}{X}$ и учитывая, что $Q=P\operatorname{tg}\varphi$, $R=r_0 l$ и $X=x_0 l$, можем написать:

$$\dot{U}_1=U_2+\frac{Pl[r_0+x_0(1-\kappa)\operatorname{tg}\varphi]}{U_2}+j\frac{Pl[x_0(1-\kappa)-r_0\operatorname{tg}\varphi]}{U_2}. \qquad (3)$$

Следует указать, что при $X_c=0$ или $\kappa=0$ выражения (2) и (3) превращаются в уравнения связи между напряжениями начала и конца линии для обычной линии без устройства ПК.

Уравнение (3) может быть преобразовано по $Pl$ к следующему квадратному уравнению:

$$A(Pl)^2+2B(Pl)+C=0, \qquad (4)$$

где $Pl$—передаваемый момент мощности линии,

$$A=\frac{r_0^2+x_0^2(1-\kappa)^2}{\cos^2\varphi},$$

$$B=[r_0+x_0(1-\kappa)\operatorname{tg}\varphi]\,U_2^2=\frac{U_2^2}{\cos\varphi}[r_0\cos\varphi+x_0(1-\kappa)\sin\varphi],$$

$$C=U_2^4-U_1^2U_2^2.$$

Решение уравнения (4) дает:

$$Pl=\frac{-B+\sqrt{B^2-AC}}{A}. \qquad (5)$$

Действительное и положительное значение $Pl$ имеет место только при положительном знаке перед корнем, так как коэффициент $C$ всегда отрицателен и коэффициент $B$ при обычных степенях компенсации $\kappa\leqslant 1$ получается положительным (следует указать, что и при $1<\kappa\leqslant 1{,}2-1{,}3$ обычно удовлетворяется $|x_0(1-\kappa)\operatorname{tg}\varphi|<r_0$, вследствие чего коэффициент $B$ получается положительным и в этом случае).

В расчете передаваемых мощностей местных сетей пренебрежение поперечной составляющей падения напряжения $\delta U$ не приводит к существенной ошибке. Если пренебречь этой составляющей, то $Pl$ можно определить по более простому выражению:

$$Pl=\frac{U_2(U_1-U_2)}{r_0+(1-\kappa)x_0\operatorname{tg}\varphi}=\frac{U_2\Delta U_{доп}}{r_0+(1-\kappa)x_0\operatorname{tg}\varphi}, \qquad (6)$$

где $\Delta U_{доп}$—допускаемое значение потери напряжения.



Передаваемый момент полной мощности линии равен:

$$Wl=\frac{U_2\Delta U_{доп}}{r_0\cos\varphi+(1-\kappa)x_0\sin\varphi}. \qquad (7)$$

Итак, для линий 35 *кв* различных сечений, коэффициентов мощности нагрузок, допускаемых перепадов напряжений и с различными степенями компенсации по выражениям (5)—(7) могут быть определены значения $Pl$ и $Wl$, а также значения $P$ или $W$ для известного значения протяженности линии $l$. В частном случае при $\kappa=0$ значения $Pl$ и $Wl$, найденные по этим выражениям, относятся к линиям без ПК.

Перейдем к определению максимальных передаваемых моментов мощностей (и передаваемых мощностей) линий 110 *кв* по потере напряжения.

Известно, что в расчетах воздушных линий неучет распределенности параметров дает ощутимую погрешность при длине линии свыше 300 *км*. Так как в нашем случае протяженность линий не превышает 300 *км*, при определении $Pl$ и $Wl$, а также $P=f(l)$ параметры линии приняты как сосредоточенные.

Следует указать, что определение $Pl$ или $Wl$ из основных уравнений линий, учитывающих распределенность параметров, довольно сложно. Учет распределенности параметров с достаточной точностью прост при расчете подобных сетей по $\Pi$-образной схеме замещения. При этом для получения значений параметров схемы замещения с учетом распределенности параметров линии необходимо умножить действительные сопротивления и проводимости линии на поправочные коэффициенты. В случае необходимости учета распределенности параметров для линий, у которых явление короны не происходит, необходимо значения активного, индуктивного сопротивления и реактивную проводимость 1 *км* линии $r_0$, $x_0$, $b_0$, входящие в выражения (3)—(7), умножить на следующие поправочные коэффициенты:

$$\kappa_r=1-\frac{l^2}{3}x_0 b_0,\quad \kappa_x=1-\frac{l^2}{6}\left(x_0 b_0-r_0^2\frac{b_0}{x_0}\right),\quad \kappa_b=0{,}5\frac{3+\kappa_r}{1+\kappa_r}.$$

Так как значения $Pl$ и $Wl$ определялись для сечений М-70 и АС-70 и выше, при которых явление короны не имеет места, то активная проводимость линий может быть принята равной нулю. Что касается емкостной проводимости или же емкостной нагрузки самой линии, то она может быть объединена с нагрузкой. При этом действительный $\cos\varphi$ нагрузки будет отличаться от расчетного $\cos\varphi_р$. Действительный $\cos\varphi$ нагрузки, определяемый из выражения $\operatorname{tg}\varphi=\frac{Q}{P}$, может быть найден из расчетного:

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}\varphi_р+\frac{1}{2}\frac{Q_л}{P}, \qquad (8)$$

где $Q_л$—емкостная мощность самой линии, $Q_л=U^2 b_0 l$.

Выведенные выражения (3)—(7) для линий 35 *кв* можно использовать также и для линий 110 *кв*, но в этих выражениях $\cos\varphi$ представляет собой расчетный $\cos\varphi_р$, а действительное значение $\cos\varphi$ нагрузки при необходимости должно быть определено по выражению (8).

Значение $Pl$, найденное по выражению (5) для линии одного напряжения, может быть пересчитано для линии другого напряжения. Если пренебречь влиянием расстояния между проводами на опорах на индуктивность линии, ввиду небольшой разницы в значениях $x_0$ для линий 110 и 35 *кв*, то коэффициент $A$ для линий 110 *кв* будет таким же, как для линии 35 *кв*, т. е. этот коэффициент от напряжения линии почти не зависит. При этом же допущении выражение коэффициента $B$ может быть переписано так:

$$B = [r_0 + x_0 (1 - \kappa) \operatorname{tg} \varphi] U_2^2 = B_1 U_2^2.$$

Если допустимая потеря напряжения в процентах при обоих напряжениях принимается одинаковой, тогда можно написать, что $U_1 = mU_2$, где $m = \text{const}$. При этом коэффициент $C$ будет иметь вид:

$$C = U_2^4 - m^2 U_2^4 = (1 - m^2) U_2^4 = C_1 U_2^4, \text{ где } 1 - m^2 = C_1 = \text{const}.$$

Подставляя значения коэффициентов $B$ и $C$ в выражение (5), получим:

$$Pl = U_2^2 \frac{-B_1 + \sqrt{B_1^2 - AC_1}}{A}.$$

Для линий 35 и 110 *кв*, при одних и тех же сечениях проводов, значениях $\cos\varphi$ и потери напряжения в процентах, дробь $\frac{-B_1 + \sqrt{B_1^2 - AC_1}}{A}$ приблизительно одинакова.

Для линии 110 *кв* $Pl$ составляет:

$$(Pl)_{110} = U_{2\,(110)}^2 \frac{-B_1 + \sqrt{B_1^2 - AC_1}}{A}.$$

Аналогично для линии 35 *кв* можно написать:

$$(Pl)_{35} = U_{2\,(35)}^2 \frac{-B_1 + \sqrt{B_1^2 - AC_1}}{A},$$

Тогда

$$(Pl)_{110} = (Pl)_{35} \frac{U_{2\,(110)}^2}{U_{2\,(35)}^2}.$$

Таким образом, найденные значения $Pl$ и $Wl$ для линий 35 *кв* могут быть пересчитаны для линий 110 *кв*. При этом действительные значения $\cos\varphi$ нагрузки должны быть определены по $\cos\varphi_р$ выражением (8). Так как для обычных нагрузок $Q$ имеет всегда индуктивный характер, а $Q_д$—всегда емкостной характер, то три прочих равных условиях действительный $\cos\varphi$ нагрузки всегда несколько меньше расчетного $\cos\varphi_р$.

Для определения передаваемых моментов мощностей необходимо задаться допустимым значением потери напряжения $\Delta U_{доп}$. В правильно запроектированных и эксплуатирующихся сетях напряжение в начале линии в режиме максимальных нагрузок должно быть 1,05 от номинального напряжения сети $U_н$. Учитывая, что на трансформаторах имеется ответвление—5%, в некоторых случаях на практике допускаются потери напряжения на линии до 10%. В таком случае напряжение в конце линии будет составлять 0,95 $U_н$. Кроме того, в ненормальных режимах, в том числе в аварийных режимах, нагрузка на линии может быть увеличена, в результате чего потеря напряжения возрастает, при этом потеря напряжения может быть допущена также до 10%.



По этим соображениям максимальные передаваемые мощности определены для двух случаев: для нормального режима, когда $U_1 = 1{,}05\ U_н$ и $U_2 = U_н$, т. е. $\Delta U_{доп} = 5\%$, и для ненормального режима, когда $U_1 = 1{,}05\ U_н$ и $U_2 = 0{,}95\ U_н$, т. е. $\Delta U_{доп} = 10\%$.

Однако в сложных сетях в режиме максимальных нагрузок не всегда удается поддержать в начале линии напряжение, равное $1{,}05\ U_н$. Это может иметь место, например, при отсутствии встречного регулирования напряжения, или если из-за наличия близкорасположенных нагрузок на питающей подстанции или станции установлены трансформаторы со вторичным напряжением в холостом ходу трансформатора $1{,}05\ U_н$ вместо $1{,}1\ U_н$; в нагрузочном режиме трансформатора напряжение на шинах подстанции или станции будет ниже $1{,}05\ U_н$ вследствие потери напряжения в самом трансформаторе. Поэтому необходимо определить значения передаваемых мощностей и для случаев, когда в начале линии напряжение меньше $1{,}05\ U_н$.

Варианты передачи при напряжении в начале линии $U_1 = U_н$ являются, вообще говоря, технически ненормальными, однако, учитывая, что на практике такие случаи встречаются довольно часто, и в этом режиме можно доставить потребителям некоторое количество качественной электрической энергии, используя ответвление трансформатора—5%, эти режимы должны быть рассмотрены. Значение напряжения в конце линии ограничивается качеством энергии и минимальное его значение может быть принято, по вышеуказанной причине, равным $0{,}95\ U_н$. В этом режиме перепад напряжения так же, как в нормальном режиме, составляет 5%.

Однако при $U_1 = U_н$ и $U_2 = 0{,}95\ U_н$ передаваемая мощность и передаваемый момент мощности будут меньше, чем в нормальном режиме, когда $U_1 = 1{,}05\ U_н$ и $U_2 = U_н$, хотя в обоих режимах перепад напряжения одинаков и составляет 5%. При неучете $\delta U$ передаваемая мощность в первом случае будет на 5% меньше передаваемой мощности нормального режима, так как при прочих равных условиях значения $Pl$ и $Wl$, как видно из выражений (6) и (7), прямо пропорциональны значению $U_2$, и уменьшение $U_2$ на 5% вызывает уменьшение $Pl$ и $Wl$ также на 5%.

Учитывая, что значения $Pl$ и $Wl$ нормального режима достаточно мало отличаются от $Pl$ и $Wl$ режима, когда $U_1 = U_н$ и $U_2 = 0{,}95\ U_н$, нет необходимости определять значения этих величин для последнего режима; в случае необходимости могут быть использованы для этого с небольшой погрешностью значения $Pl$ и $Wl$ нормального режима.

Работа произведена для линий с одной нагрузкой на конце. Проведение этой работы и получение конкретных данных для линий с несколькими нагрузками вдоль линии представляет значительные трудности, так как большое разнообразие размещения нагрузок вдоль линии по числу и величине нагрузок и по расстоянию между нагрузками увеличивало бы очень сильно число вариантов и вызвало бы большие затруднения при использовании составленных таблиц и крывых. Однако следует указать, что результаты этой работы могут быть использованы и для линии с несколькими нагрузками. Для этого линию с несколькими нагрузками необходимо привести к линии с одной нагрузкой, перенеся промежуточные нагрузки на конец линии известными методами теории расчета электрических сетей и объединив их в одну нагрузку [1].

### 3. Произведенные расчеты и анализ их результатов

Были расчитаны $Pl$ и $Wl$ для линий 35 *кв* с проводами марки М-50÷М-120 и АС-50÷АС-120 (а также А-50÷А-120) при значениях $\cos\varphi = 0{,}6 \div 0{,}95$.

Расчет для степени компенсации $\kappa = 0$ и потери напряжения $\Delta U_{доп} = 10\%$ проводился с учетом $\delta U$ и без нее. Сравнение результатов расчетов показало, что пренебрежение $\delta U$ не вызывает существенной ошибки, в то время как неучет $\delta U$ сильно упрощает расчет. При применении ПК ($\kappa \neq 0$) погрешность расчета от неучета $\delta U$ еще меньше, поэтому значения $Pl$ и $Wl$ для линий с ПК определялись только без учета $\delta U$. При этом условия $Pl$ и $Wl$ найдены для $\Delta U_{доп} = 5$ и 10% и $\kappa = 0{,}25$, 0,5, 0,75 и 1,0. На рис. 1 в качестве примера[2] показаны кривые $Pl = f(\kappa)$ для линий 35 и 110 *кв* с проводами АС-70 при $\Delta U_{доп} = 10\%$ и $\delta U = 0$.

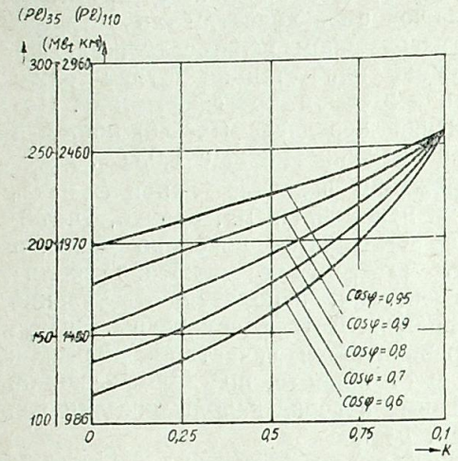



Рис. 1.

Для коротких линий ограничивающим фактором пропускной способности линий является допускаемое значение экономической плотности тока. Для таких линий, точнее для линий таких длин, у которых максимальная передаваемая мощность по потере напряжения больше, чем по экономической плотности тока, рассмотрение увеличения пропускной способности применением ПК лишено смысла.

Значение протяженности линии, при котором передаваемая мощность по экономической плотности тока равна передаваемой мощности по потерям напряжения, можем назвать критической длиной линии $l_{кр}$. Значения $l_{кр}$ легко определить, разделив значения $Wl$ или $Pl$, найденные из условия потери напряжения, на соответствующие значения передаваемых мощностей $W_э$ или $P_э$ из табл. 2 и 3, определенных по экономической плотности тока. Применение ПК для увеличения пропускной способности линии имеет практическое значение именно при длине линии более $l_{кр}$. Для всех рассмотренных вариантов были определены значения $l_{кр}$.

Далее были определены значения $P$ в зависимости от $l$ для вышеуказанных марок проводов, $\cos\varphi$ и $\kappa$. Эти расчеты были произведены без учета $\delta U$ при $\Delta U_{доп} = 10\%$ и $l = l_{кр} \div 100$ *км* с интервалами 20 *км* при 3-х значениях $T$. На рис. 2 в качестве примера показаны кривые $P = f(l)$ для воздушной линии 35 *кв* с проводами М-50 при $\Delta U_{доп} = 10\%$, $\delta U = 0$ и $\kappa = 0{,}5$

По линиям длиной до $l_{кр}$ могут быть максимально переданы мощности, определяемые по $j_{эк}$; значения этих передаваемых мощностей от потери напряжения не зависят. При длинах линии больше $l_{кр}$ основным фактором, ограничивающим пропускную способность линии,

[2] Результаты этих и последующих расчетов в виде таблиц и кривых имеются в отчете автора за 1959 г. в ЭНИН АН Азерб. ССР.



является потеря напряжения. Поэтому для линий с протяженностями более $l_{кр}$ с увеличением длины линии уменьшается значение передаваемой мощности.

При применении устройства ПК уменьшение передаваемой мощности с увеличением протяженности линии происходит в значительно меньшей степени, причем ограничение передаваемой мощности по потере напряжения при этом тем меньше, чем больше $\kappa$. Другими словами, при прочих равных условиях, с увеличением $\kappa$ возрастает значение $l_{кр}$, т. е. увеличивается возможность передачи максимальной передаваемой мощности по $j_{эк}$ на большее расстояние.

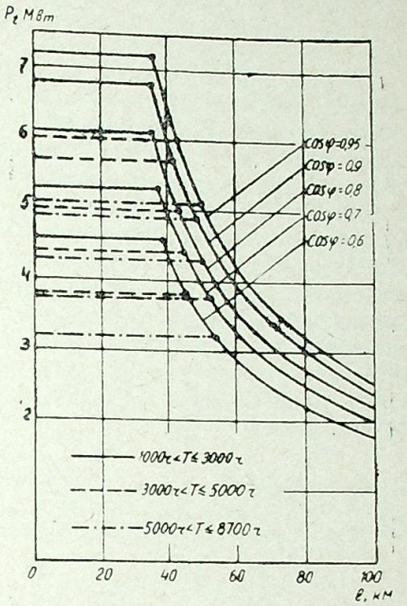



Рис. 2.

Для линий 35 *кв* с медными проводами сказанное видно из сравнения данных расчета. Например, для линий 35 *кв* с проводами марок М-50 и М-70 при $\cos\varphi = 0{,}8$ $1000ч < T \leqslant 3000ч$, $\Delta U_{доп} = 10\%$, $\delta U = 0$ значения $l_{кр}$ в зависимости от $\kappa$ приведены в табл. 5.

Из таблицы видно, что с увеличением $\kappa$ значения $l_{кр}$ возрастают, причем с увеличением $\kappa$ для линии с проводами большего сечения $l_{кр}$ увеличивается быстрее, чем для линии с меньшими сечениями проводов. В рассматриваемом примере при изменении $\kappa$ от нуля до единицы для линии 35 *кв* с проводами марки М-70 $l_{кр}$ увеличивается более чем в 2 раза, а для линии с проводами М-50 меньше 1,8 раза.

*Таблица 5*

| $\kappa$ | | 0 | 0,25 | 0,5 | 0,75 | 1,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $l_{кр}$, *км* | М-50 | 28 | 31 | 35 | 41 | 49 |
| | М-70 | 24 | 27 | 32 | 38 | 49 |

Это означает, что при прочих равных условиях для линий с большими сечениями проводов ПК более эффективно, чем для линий с меньшими сечениями проводов. Сказанное объясняется тем, что для линий с малыми сечениями проводов потеря напряжения на активных сопротивлениях составляет значительную долю от общей потери напряжения и поэтому эффективность применения ПК при этом меньше, чем для линий с более крупными сечениями проводов.

При длинах линий больше $l_{кр}$, когда основным ограничивающим фактором пропускной способности линии является потеря напряжения, с увеличением $\kappa$, при прочих одинаковых условиях, возрастает значение передаваемой мощности. Например, для линий 35 *кв* с проводами АС-50 и АС-95 при $\cos\varphi = 0{,}8$, $\Delta U_{доп} = 10\%$, $\delta U = 0$, $T = 1000 \div 8760ч$ и при $l = 80$ *км* $> l_{кр}$ величина $P$ зависит от $\kappa$ следующим образом (см. табл. 6).

*Таблица 6*

| $\kappa$ | | 0 | 0,25 | 0,5 | 0,75 | 1,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$, *Мвт* | АС-50 | 1,5 | 1,7 | 1,9 | 2,1 | 2,3 |
| | АС-95 | 2,3 | 2,6 | 3,0 | 3,6 | 4,4 |

Как видно из табл. 6, с увеличением $\kappa$ максимальная передаваемая мощность возрастает и приближается к своему предельному значению—к значению передаваемой мощности по $j_{эк.}$. Из этой таблицы также видно, что при возрастании $\kappa$ увеличение максимальной передаваемой мощности происходит в большей мере для АС-95, чем для АС-50. О большей эффективности ПК при больших сечениях проводов и о причине ее сказано выше.

На эффективность применения ПК оказывает существенное влияние так же величина cos $\varphi$ нагрузки, причем при более низких значениях cos $\varphi$ эффективность применения ПК больше, чем при более высоких значениях cos $\varphi$ нагрузки. Сказанное видно из табл. 6. В этой таблице дана зависимость $P=f(\kappa)$ для линий 35 *кв* с проводами М-70 при длине линии 60 *км* и $\Delta U_{доп}=10\%$, $\delta U=0$ при двух значениях cos $\varphi$ нагрузки.

*Таблица 7*

| $\kappa$ | | 0 | 0,25 | 0,5 | 0,75 | 1,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$, *Мвт* | cos $\varphi$=0,7 | 2,8 | 3,3 | 4,0 | 5,1 | 6,9 |
| | cos $\varphi$=0,9 | 4,1 | 4,6 | 5,1 | 5,9 | 6,9 |

Как видно из табл. 7, от возрастания $\kappa$ передаваемая мощность при cos $\varphi$=0,7 растет быстрее, чем при cos $\varphi$=0,9. В рассмотренном случае при cos $\varphi$=0,7 и изменении $\kappa$ от нуля до единицы $P$ увеличивается примерно в 2,5 раза, а при cos $\varphi$=0,9 примерно в 1,7 раза.

Влияние cos $\varphi$ на эффективность применения ПК может быть показано также зависимостями $l_{кр}=f(\kappa)$ при различных значениях cos$\varphi$. В табл. 8 дана зависимость $l_{кр}=f(\kappa)$ Для линии 35 *кв* с проводами АС-70 при $\Delta U_{доп}=10\%$ и $\delta U=0$ при двух значениях cos$\varphi$.

*Таблица 8*

| $\kappa$ | | 0 | 0,25 | 0,5 | 0,75 | 1,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $l_{кр}$, *км* | cos$\varphi$=0,7 | 36 | 41 | 47 | 56 | 68 |
| | cos$\varphi$=0,9 | 37 | 40 | 43 | 47 | 53 |

Из табл. 8 видно что с увеличением $\kappa$ значение $l_{кр}$ при низких cos$\varphi$ растет быстрее, чем при высоких cos$\varphi$. Так например, при изменении $\kappa$ от нуля до единицы при cos$\varphi$=0,7 значение $l_{кр}$ возрастает в 1,9 раза, а при cos$\varphi$=0,9 только в 1,4 раза.

Большая эффективность ПК при более низких cos$\varphi$ объясняется следующим. При низких значениях cos $\varphi$, при прочих одинаковых условиях, потеря напряжения в индуктивном сопротивлении $\Delta U_L$ составляет значительную долю от общей потери напряжения $\Delta U$, а при высоких значениях cos$\varphi$ доля $\Delta U_L$ будет меньше. При



применении ПК $\Delta U_L$ снижается из-за уменьшения общего реактивного сопротивления сети. Поэтому с применением ПК уменьшение $\Delta U_L$ будет иметь большее значение при низких cos $\varphi$, когда $\Delta U_L$ составляет большую долю от $\Delta U$.

Были определены также значения максимальных передаваемых моментов мощностей $Wl$ и $Pl$ линий 110*кв*. Значения $Wl$ и $Pl$ были рассчитаны для линий с различными сечениями проводов (М-70÷÷М-120, АС-70÷АС-120) при $\Delta U_{доп}=10\%$ ($\delta U=0$), $\kappa=0\div1{,}0$ и расчетного коэффициента мощности cos $\varphi_р=0{,}6\div0{,}95$.

Определение значения $Wl$ и $Pl$ исходя из cos$\varphi$ нагрузок представляет значительные трудности, так как в зависимости от длины линии емкостная мощность самой линии меняется; поэтому легче определить $Wl$ и $Pl$ для заданных значений коэффициента мощности потока мощности в линии с учетом половины емкостной мощности линии, т. е. расчетных cos $\mu_р$, а затем для конкретной длины линий, определив емкостную мощность самой линии, вычислить по выражению (8) значение cos $\varphi$ нагрузки.

Были определены также для линий 110 *кв* значения $P$ в зависимости от $l$ для вышеуказанных марок проводов, cos $\varphi_р$ и $\kappa$. Эти расчеты были произведены для $\Delta U_{доп}=10\%$ ($\delta U=0$) и протяженности линии от $l_{кр}$ до 175÷300 *км*; разумеется, с увеличением $\kappa$ максимальная рассматриваемая протяженность возрастает. Расчеты произведены для трех общепринятых интервалов значений $T$.

Влияние степени компенсации, сечения проводов, коэффициента мощности нагрузки на величины передаваемых активных мощностей и на значения критических длин линий для линий 110 *кв* такое же, как и для линий 35 *кв*.

## ВЫВОДЫ

1. Передаваемая мощность линий не должна превышать мощности, соответствующей экономической плотности тока. Из этого условия определены максимальные передаваемые мощности линий $W_э$ и $P_э$. Значения $W_э$ и $P_э$ определены для линий 35 *кв* с марками проводов от М-50 до М-120, а также от А-50 и АС-50 до А-120 и АС-120 при значениях продолжительности использования максимальной нагрузки $1000ч<T\leqslant2000ч$, $3000ч<T\leqslant5000ч$, $5000ч<T\leqslant8760ч$ для cos$\varphi$-0,6÷0,95. Аналогичные расчеты произведены и для линий 110 *кв* с проводами марки от М-70 до М-120 и от АС-70 до АС-120.

2. Другим фактором, ограничивающим передаваемую мощность, является уровень напряжения у потребителей. Из этого условия были определены максимальные передаваемые моменты мощностей $Wl$ и $Pl$ для линий 35 и 110 *кв* в зависимости от допускаемых значений потерь напряжения для вышеуказанных марок проводов значений cos $\varphi$ и $\kappa$.

Значения $Wl$ и $Pl$ были определены с учетом и без учета поперечной составляющей падения напряжения $\delta U$. Расчеты показывают, что пренебрежение $\delta U$ не вызывает существенной ошибки, в то же время неучет $\delta U$ сильно упрощает расчет.

3. С учетом экономических плотностей тока и минимальных допустимых уровней напряжений у потребителей были определены величины максимальных активных передаваемых мощностей $P$ линий 35 и 110 *кв* в зависимости от протяженности линий, марки провода, cos$\varphi$ и $\kappa$ при допускаемой потере напряжения 10%, но без учета $\delta U$. Значения $P$ определены для линий 35 *кв* протяженностями от $l=l_{кр}$ до $l=100$ *км* с интервалами 20 *км*. Здесь под $l_{кр}$ понимается длина

линии, при которой передаваемая мощность по экономической плотности тока равна передаваемой мощности по потере напряжения.

Значения $P$ для линий 110 *кв* были определены исходя из значений $\cos\varphi_p$. Для конкретной линии по $\cos\varphi_p$ легко найти $\cos\varphi$ нагрузки, используя выражение (8).

4. Анализ результатов расчетов показывает, что применение ПК более эффективно при больших сечениях проводов и более низких значениях $\cos\varphi$ нагрузки, чем при малых сечениях проводов и высоких значениях $\cos\varphi$ нагрузки.

5. Используя составленные таблицы и кривые, легко получить параметры линий с устройством ПК и без него для заданной передаваемой мощности при известных других ее параметрах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глазунов А. А. Электрические сети и системы, 1954.
2. Ибрагимов И. Э., Бабаев М. А., Петросян А. Н. Применение последовательных конденсаторов в нефтепромысловых сетях 6 *кв*. Промышленная энергетика, №9, 1960.
3. Ибрагимов И. Э. Еще раз о вопросе экономики применения последовательных конденсаторов. Энергетический бюллетень № 8, 1956.
4. Правила устройства электроустановок, раздел 1,1957.

И. Э. Ибраһимов

## Ардычыл гошулмуш конденсаторлар гурулушу илә тәчһиз едилмиш 35 вә 110 *кв* кәркинликли хәтләрин өтүрмә күчүнүн тә'јини

ХҮЛАСӘ

Електрикләшдирмәнин перспектив инкишаф планларыны тәртиб етдикдә планлашдырычы органлара вә електрик шәбәкәләрини лаһијә едән тәшкилатлара мә'лум күчләри өтүрмәк үчүн һансы параметрли електрик хәтләринин сечилмәси кими бир мәсәләни һәлл етмәк лазым кәлир. Белә бир мәсәләни һәлл едәркән, онлар һәр бир конкрет һал үчүн хүсуси һесаблама ишләри апармалы олурлар, чүнки һазырда әдәбијјатда кәркинлик, күч әмсалы, максимал јүкүн истифадәедилмә мүддәти мә'лум олан күчү мүәјјән мәсафәјә өтүрмәк үчүн һансы параметрли хәтти сечмәкдән өтрү тәртиб едилмиш һазыр чәдвәл вә әјриләр јохдур.

Хәттин өтүрмә күчүнү ардычыл гошулмуш конденсаторлар гурулушундан истифадә етмәклә артырмаг олар. Белә гурулушла тәчһиз едилмиш хәтләрин өтүрмә күчләри һаггында да әдәбијјатда һазыр конкрет материал јохдур.

Мәгаләдә, Азәрбајчан Дөвләт план комисијасынын тәклифи илә ардычыл гошулмуш конденсаторлар гурулушу илә тәчһиз едилмиш вә едилмәмиш 35 вә 110 *кв* кәркинликли хәтләрин өтүрмә күчүнүн тә'јини үзрә апарылмыш ишләрин нәтичәләри шәрһ едилир. Көстәрилән хәтләрин өтүрмә күчләри ики тәләбин өдәнилмәси шәртләри әсасында һесабланмышдыр. Тәләбләрин биринчиси иллик истисмар хәрчләринин минимал олмасы, икинчиси исә гәбуледичиләрин сыхачларында кәркинлијин нормал сәвијјәдә сахланылмасыдыр.

Биринчи тәләбин өдәнилмәси шәртинә әсасән ен кәсикләри 50 $мм^2$-дән 120 $мм^2$-ә гәдәр олан 35 *кв* вә ен кәсикләри 70 $мм^2$-дән 120 $мм^2$-ә гәдәр олан 110 *кв* кәркинликли М, АС вә А маркалы мәфтилли хәтләрлә өтүрүлә биләчәк үмуми вә актив күчләр ($W_э$ вә $P_э$) максимал



јүкүн истифадәедилмә мүддәтинин гәбул едилмиш үч гијмәти үчүн апарылмыш һесабламанын нәтичәләри 1, 2, 3 вә 4-чү чәдвәлләрдә верилмишдир.

Икинчи шәртә әсасән өтүрмә күчләрини тә'јин етмәк үчүн (5)—(7) һесаб тәнликләри чыхарылмыш вә һәмин ифадәләр васитәси илә әввәлнун мә'лум гијмәтләри үчүн өтүрмә күчләринин өзләри ($P$) һесабланмышдыр.

35 *кв* кәркинликли хәтләрин өтүрмә күчү моментләри вә өтүрмә күчләринин өзләринин һесабланмасы јухарыда көстәрилән ен кәсикләри мәтин компенсасијалашма дәрәчәсинин 0; 0,25; 0,75 вә 1,0 гијмәтләри, күч әмсалынын 0,6; 0,7; 0,8; 0,9 вә 0,95 гијмәтләри үчүн апарылмышдыр. Һәмин һесаблама ишләри 110 *кв* кәркинликли хәтләр үчүн дә едилмишдир.

Өтүрмә күчүнүн һесабланмасында гыса хәтләр үчүн әсас мәһдудлашдырычы амил биринчи, нисбәтән узун хәтләр үчүн исә икинчи шәртдир. Демәли, хәтт узунлуғунун елә бир критик гијмәти ($l_{кр}$) вардыр ки, о һалда һәр ики шәртә көрә һесабланмыш өтүрмә күчүнүн гијмәти ејни олур. Хәттин узунлуғу јалныз $l_{кр}$-дән артыг олдугда, өтүрмә күчүнү артырмаг мәгсәди илә ардычыл гошулмуш конденсаторлар гурулушундан истифадә етмәјин практики әһәмијјәти вардыр. Һесабланмыш вариантлар үчүн $l_{кр}$-ин гијмәтләри тә'јин едилмишдир.

Апарылмыш һесаблама көстәрир ки, кәркинлик дүшкүсүнүн енинә мүрәккәбсини нәзәрә алмадыгда өтүрмә күчүнүн тә'јин едилмиш гијмәтиндә алынан хәта кифајәт гәдәр кичик олур вә һесаблама чох асанлашыр.

Һесаблама нәтичәләринин анализи көстәрир ки, хәттин өтүрмә күчүнүн артмасына ардычыл гошулмуш конденсаторларын тә'сири јүкүн күч әмсалынын кичик вә мәфтилләрин ен кәсикләринин бөјүк гијмәтләриндә даһа чох олур.

Апарылмыш һесаблама нәтичәләри асан истифадә едилә биләчәк чәдвәл вә әјриләр шәклиндә ишләнмишдир. Бу чәдвәл вә әјриләрдән истифадә едәрәк, мә'лум күчү өтүрмәк үчүн хәттин парамертләрини сечмәк мүмкүндүр.

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазијјат вә техника елмләри серијасы, 1960, № 6

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1960, № 6

Я. М. НАЗИЕВ, И. Ф. ГОЛУБЕВ

# РАСЧЕТНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ БИКАЛОРИМЕТРОВ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Бикалориметры (плоский, цилиндрический и шаровой) успешно применяются для определения теплопроводности порошкообразных, сыпучих и зернистых материалов [4], а в последнее время и для определения теплопроводности жидкостей и газов [2,7].

Имеются простые расчетные формулы теплопроводности, применительно для практической цели, для плоского и шарового бикалориметров. Эти формулы позволяют использовать готовые табулированные значения расчетных критериев, которые намного облегчают вычисление. Однако вышеизложенное нельзя отнести к цилиндрическому бикалориметру. Из-за математической трудности имеющемуся сложному уравнению этого бикалориметра не придан вид, пригодный для практических расчетов. В уравнение входят величины, которые в свою очередь содержат определяемый коэффициент теплопроводности. Кроме того, полученное уравнение не дает возможности обобщить и объединить уравнения всех указанных трех бикалориметров.

В настоящей работе имеющемуся строгому уравнению для цилиндрического бикалориметра придается более простой вид и делается попытка для вывода общей расчетной формулы бикалориметров. Во всех случаях при выводе уравнений теплопроводности предполагается, что:

1) теплопроводность металлического ядра чрезмерно большая по сравнению с теплопроводностью испытываемого слоя, и поэтому распределение температуры в ядре равномерное;

2) охлаждение двухсоставного тела происходит при граничном условии первого рода;

3) отсутствует температурный скачок на пограничной поверхности между ядром и исследуемым слоем;

4) тепло передается только через исследуемый слой и только теплопроводностью.

Общий принцип вывода уравнения теплопроводности заключается в том, что совместно решаются уравнения температурного поля ядра и слоя.

Уравнение для симметричного плоского бикалориметра, в случае когда теплоемокость металлического ядра значительно превышает теплоемкость исследуемого слоя, имеет вид [9].

$$\lambda = \frac{c'\gamma' hm\delta}{Б_{\text{п}}}, \qquad (1)$$

где

$$Б_п = \frac{3Ж_п}{3Ж_п + 1}, \qquad Ж_п = \frac{C'}{C};$$

$c'$—удельная теплоемкость ядра,
$\gamma'$—удельный вес ядра,
$h$—половина толщины ядра,
$m$—темп охлаждения составного плоского тела,
$\delta$—толщина исследуемого вещества,
$C'$—общая теплоемкость ядра,
$C$—общая теплоемкость слоя.

Если исследуемое вещество имеет малый удельный вес, например газы, то с незначительной погрешностью принимают $Б_п=1$. Тогда вместе (1) имеем

$$\lambda = c'\gamma' h m \delta. \tag{1a}$$

Для составного шара уравнение теплопроводности следующее [6].

$$\lambda = \frac{\kappa c'\gamma' R_1 m \delta}{3Б_ш}, \tag{2}$$

где

$$Б_ш = \frac{3_ш Ж}{3Ж_ш + k}, \qquad Ж_ш = \frac{1 + k + k^2}{3k} \cdot \frac{C'}{C}; \tag{2'}$$

$R_1$—радиус шарового ядра,
$k$—отношение радиусов ядра и составного шара.

Когда вещество имеет малый удельный вес формула (2) упрощается, так как $Б_ш=1$.

$$\lambda = k \frac{c'\gamma' R_1 m \delta}{3}. \tag{2a}$$

В обобщенном виде можно написать общую для обоих бикалориметров формулу уже приводимую в [4].

$$\lambda = \frac{k Ф m \delta}{Б}, \tag{3}$$

где $Ф = \frac{C'}{F'}$

$F'$—охлаждаемая поверхность ядра. Для плоского бикалориметра отношение радиусов $k=1$.

Для газов, при $Б=1$

$$\lambda = k Ф m \delta \tag{3a}$$

Для цилиндрического бикалориметра расчетное уравнение сложнее, так как в них входят бесселевы функции, которые затрудняют получение упрощенной формулы.

Кондратьев [5] и Чудновский [10] получили следующее точное решение

$$\lambda = \frac{R_1 c'\gamma' m}{2} \cdot \frac{J_0(\mu R_1) Y_0(\mu R_2) - J_0(\mu R_2) Y_0(\mu R_1)}{\mu [J_1(\mu R_1) Y_0(\mu R_2) - J_0(\mu R_2) Y_1(\mu R_1)}, \tag{4}$$

где $\mu = \sqrt{\frac{m}{a}}$,

$a$—температуропроводность исследуемого вещества,
$J_n$ и $Y_n$—бесселевы функции первого и второго рода порядка $n(n=0; 1)$.



Казанский [3], преобразовав и исключив функции Бесселя из уравнения (4), получил

$$\lambda = \frac{R_1 c'\gamma' m \delta}{2} \cdot \frac{\left[1 - \frac{1}{2}\frac{\delta}{R_1} + \frac{1}{3}\left(\frac{\delta}{R_1}\right)^2 - \frac{r^3}{6}\right]}{1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{\delta}{R_1}\right) r^2}, \tag{5}$$

где $r=\mu\delta$.

Уравнение (5) получается с помощью разложения бесселевых функций в степенной ряд, в котором берутся только первые четыре члена. Следовательно, точность уравнения (5) будет зависеть от того, насколько быстро убывают члены ряда. При малых значениях $(r)$ ряд быстро сходится и это уравнение дает большую точность.

При $r \to 0$, т. е. когда испытываемое вещество имеет малый удельный вес.

$$\lambda = \frac{R_1 c'\gamma' m \delta}{2} \left[1 - \frac{1}{2}\frac{\delta}{R_1} + \frac{1}{3}\left(\frac{\delta}{R_1}\right)^2\right]. \tag{5a}$$

Общими недостатками уравнений (4) и (5) являются громоздкость, что требует большой затраты времени на вычисление, и необходимость при расчетах задаваться значениями коэффициента температуропроводности $a$, который для большинства веществ неизвестен.

Используя свойства разложения функций Бесселя [1] при малых значениях аргумента из (4) можно получить простую формулу для вычисления теплопроводности газов или веществ с малым удельным весом.

При $\mu \to 0$ (т. е. $\gamma \to 0$) для числителя имеем

$$\lim_{\mu \to 0} [J_0(\mu R_1) Y_0(\mu R_2) - J_0(\mu R_2) Y_0(\mu R_1)] =$$

$$= \left[ -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\eta \mu R_2} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\eta \mu R_1} \right]_{\mu=0} = \frac{2}{\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}, \tag{6}$$

и для знаменателя

$$\lim_{\mu \to 0} \{\mu [J_1(\mu R_1) Y_0(\mu R_2) - J_0(\mu R_2) Y_1(\mu R_1)]\} =$$

$$= \left[ \mu \frac{2}{\pi \mu R_1} \right]_{\mu=0} = \frac{2}{\pi R_1}, \tag{7}$$

где $\ln\eta = C$—постоянная Эйлера.

Подставляя значения из (6) и (7) в (4) получим

$$\lambda = \frac{R_1 c'\gamma' m}{2} R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}, \tag{8}$$

или

$$\lambda = Ф m R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}. \tag{9}$$

Вводя постоянную, зависящую только от радиусов

$$\kappa = \frac{R_1}{R_2 - R_1} \ln \frac{R_2}{R_1}, \tag{10}$$

где $R_2 - R_1 = \delta$
получим уравнение (3а).

Если введем понятие „расчетной поверхности“ [8], то для шара

$$k=\frac{R_1}{R_2}=\frac{F'}{F_{\text{рас}}}, \tag{11 а}$$

для цилиндра

$$k=\frac{R_1}{\delta}\ln\frac{R_2}{R_1}\frac{F'}{F_{\text{рас}}}, \tag{11 б}$$

для пластины

$$k=1=\frac{F'}{F_{\text{рас}}}. \tag{11 в}$$

Таким образом получаем единую формулу для $k$ и поэтому уравнение (3 а) можно написать в виде

$$\lambda=\Phi_{\text{рас}}m\delta, \tag{12}$$

где

$$\Phi_{\text{рас}}=\frac{C'}{F_{\text{рас}}}. \tag{12а}$$

Преимущество этой формулы перед (3а) состоит в том, что это уравнение можно применять не только для плоского, шарового и цилиндрического бикалориметров, но и для бикалориметров любой геометрической формы.

В уравнении (12а) $F_{\text{рас}}$ определяется:

для плоского бикалориметра

$$F_{\text{рас}}=\frac{F'+F''}{2},\quad (F'=F'') \tag{13 а}$$

для цилиндрического

$$F_{\text{рас}}=\frac{F''-F'}{\ln\frac{F''}{F'}}, \tag{13 б}$$

для шарового

$$F_{\text{рас}}=\sqrt{F'\cdot F''}, \tag{13 в}$$

где $F'$—поверхность ядра (пластины, цилиндра, шара и др.),

$F''$—поверхность составного тела (внешняя поверхность исследуемого слоя).

Если $F_{\text{рас}}$ близко к $F'$, то для цилиндра имеем

$$k=\frac{F'}{F_{\text{рас}}}=\frac{R_1}{R_{\text{ср}}} \tag{10 а}$$

Упрощение уравнения (4) для случая $\mu\gg0$ не представилось возможным из-за математической трудности. Однако нам удалось установить, что уравнение (3) с достаточной точностью пригодно и для цилиндрического бикалориметра при $\mu\gg0$, если только значение ($k$) берется при этом по уравнению (10) (значение $Б$ и $Ж$ вычисляется по формулам (2′)).

Тогда

$$\lambda=\frac{R'c'\gamma'm}{2Б_{\text{ц}}}R_1\ln\frac{R_2}{R_1}, \tag{14}$$

или

$$\lambda=\frac{\Phi m}{Б_{\text{ц}}}R_1\ln\frac{R_2}{R_1}. \tag{14 а}$$



Уравнение (14) дает такую же точность, как и (1) и (2). В то же время погрешность этого уравнения при больших зазорах ($\delta$) несколько меньше погрешности (5).

Итак общее уравнение теплопроводности для бикалориметров любой формы будет иметь вид

$$\lambda=\frac{\Phi_{\text{рас}}\cdot m\delta}{Б} \tag{15}$$

Этим уравнением удобно пользоваться, так как зависимость $Б=f(Ж)$ в виде графика и таблицы уже даны в [6].

Вычисления показывают, что например для воздуха при атмосферном давлении погрешность уравнения (8) по отношению уравнения (4) не превышает 0,1%, а погрешность уравнения (14) для воздуха и жидкого октана не превышает 0,2%, если при этом $R_2$=6,5 *мм* и $\delta$=0,7÷0,23 *мм*.

Следует отметить, что при вычислении $\lambda$ по уравнению (14) требуется знать объемную теплоемкость исследуемого вещества ($c\gamma$). Однако зависимость $Б=f(Ж)$ такова, что большая ошибка в определении величины ($c\gamma$) вызывает при вычислении величины $Б$ незначительную ошибку. Например ошибка в 10%, допущенная при оценке ($c\gamma$) для случая жидкого октана при $\delta$=0,7 и 0,23 *мм* и $R_2$=6,5 *мм*, обусловливает погрешность в значениях $Б$ соответственно 0,36 и 0,12%.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. 1, ИЛ, 1949.
2. Данилова Г. Н. Холодильная техника, № 2, 1951.
3. Казанский М. Ф. Наукові записки. т. 6, физ.-мат. серія № 3, Київ, 1948, КДПИ.
4. Кондратьев Г. М. Регулярный тепловой режим. Госиздтехтеоретлит., М., 1954.
5. Кондратьев Г. М. Сб. трудов ВНИИМ, вып. 5(50), 1941.
6. Кондратьев Г. М. „Изв. АН СССР“, технич. сер., № 4, 1950.
7. Левин Г. М. Приборы и техника эксперимента. № 1. 1958.
8. Михеев М. А. Основы теплопередачи. Госэнергоизд., М.—Л. 1956.
9. Симонов Г. Б. ЖТФ, 23, вып. 8,. 1953.
10. Чудновский А. Ф., ЖТФ, 16, вып. 2, 1946.


Ј. М. Назијев, И. Ф. Голубев

## Ихтијари шәкилдә олан бикалориметрләр үчүн һесаблама тәнлији

### ХҮЛАСӘ


Мәгаләдә

1) чох дүрүст, лакин мүрәккәб тәнлик (4) әсасында силиндрик бикалориметр үчүн истиликкечирмәнин садәләшдирилмиш һесаблама тәнликләри (9), (14а) алынмышдыр;

2) пис истилик кечиричиләрин (тозшәкилли, дәнәвәр, мәсамәли, сәпәләнән маддәләрин, маје вә газларын) истиликкечирмә әмсалыны тә'јин етмәк үчүн истәнилән шәкилдә олан бикалориметрләрин ваһид тәнлији (15) верилмишдир.

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазиҹҹат вә техника елмләри серијасы, 1960, № 6

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1960, № 6

А. Ә. ШӘМСИЈЕВ

# ГАЗЫЛАН ГУЈУДА КАВЕРНА ӘМӘЛӘКӘЛМӘ СӘБӘБИ ҺАГГЫНДА

ССРИ-нин бә'зи рајонларында кил лајларыны газыб кечәркән гујунун дивары нда каверна әмәлә кәлир. Бу һадисә хүсуси илә јујучу маје сифәти илә су тәтбиг етдикдә даһа интенсив олур вә хүсуси чәкиси 1,25—1,30 $г/см^3$ олан килли мәһлула кечдикдә кавернанын әмәлә кәлмәси азалыр.

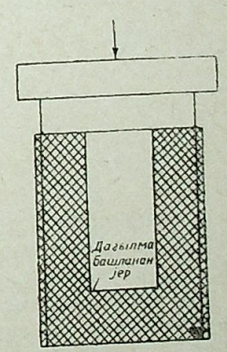
Белә чәтинликләрин сәбәбини бә'зи мүтәхәссисләр килин су мүһитиндә шишмәси илә изаһ едирләр. Белә мүлаһизәләрә сәбәб одур ки, гујуда каверна бирдән-бирә јох, мүәјјән вахт кечдикдә әмәлә кәлир вә бу вахт чох олдугча кавернанын өлчүләри дә бөјүк олур.

Әдәбиҹҹатда көстәрилмишдир ки, [2, 3] гују шәраитиндә сүхур онда пластик деформасија әмәлә кәлмә гәдәр шишмәк имканына малик дејилдир. Белә ликлә, көстәрилән чәтинликләрин сәбәбини килин шишмәсиндә көрмәк дүз олмазды.

Тәчрүбәдән мә'лумдур ки, гују дивары нын учулмасы ким и һадисә гујунун дивары ндан башлајараг јухарыја доғру јајылыр.

Бу мәгаләдә бахылан гују дивары нын кенишләнмәси һадисәси дә гују зонасындан башлајараг, јухарыја доғру јајылыр вә газыманын сүр'әти аз олдугча кавернанын өлчүләри дә бөјүк олур.

Јухарыда көстәрилә нләрдән ајдын олур ки, кавернанын әмәлә кәлмәсинин сәбәби гујудиби зонасында әмәлә кәлән кәркинлик вәзиҹҹәтидир. Хүсуси илә бу кәркинлик вәзиҹҹәти гујудиби чевrәси боју кәскин олмалыдыр, чүнки бура кәркинликләр консентрасијасы зонасыдыр. Доғрудан да гујудиби чевrәси мүстәвидән силиндрик сәтһ кечид олдуғу үчүн бурада кәркинлик консентрасијасы әмсалы гују дивары ндакына нисбәтән бөјүк олачагдыр вә бу сәбәбдән гују дивары нын мөһкәмлији бу јердән позулмаға башлајачагдыр.




Гујудиби зонасында кәркинликләрин пајланма ганунуну нәзәри олараг өјрәнмәк көрүнүр һазырда бөјүк чәтинликләрә раст кәлир. Буна көрә гују дивары нын һарадан дағылмаға башладығыны өјрәнмәк мәгсәди илә ашағыдакы тәчрүбә апарылмышдыр.

Кил хәкәси дибсиз полад силиндр ичәрисиндә мүәјјән мөһкәмлијә гәдәр сыхылмышдыр. Алынан күтләнин ичәрисиндә исә сонрадан силиндрик дәлик ачылмышдыр вә бундан сонра алынмыш нүмунә шагули истигамәтдә гују дивары нын мөһкәмлији позулана гәдәр сыхылмышдыр. Бу заман нүмунә јан тәрәфә

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазијјат вә техника елмләри серијасы, 1960, № 6

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1960, № 6

А. Ә. ШӘМСИЈЕВ

# ГАЗЫЛАН ГУЈУДА КАВЕРНА ӘМӘЛӘКӘЛМӘ СӘБӘБИ ҺАГГЫНДА

ССРИ-нин бә'зи рајонларында кил лајларыны газыб кечәркән гујунун дивары нда каверна әмәлә кәлир. Бу һадисә хүсуси илә ҹујучу маје сифәти илә су тәтбиг етдикдә даһа интенсив олур вә хүсуси чәкиси 1,25—1,30 $г/см^3$ олан килли мәһлула кечдикдә кавернанын әмәлә кәлмәси азалыр.

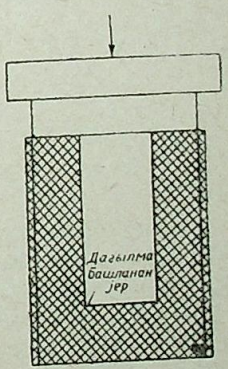
Белә чәтинликләрин сәбәбини бә'зи мүтәхәссисләр килин су мүһитиндә шишмәси илә изаһ едирләр. Белә мүлаһизәләрә сәбәб одур ки, гујуда каверна бирдән-бирә јох, мүәјјән вахт кечдикдә әмәлә кәлир вә бу вахт чох олдугча кавернанын өлчүләри дә бөјүк олур.

Әдәбијјатда көстәрилмишдир ки, [2, 3] гују шәраитиндә сүхур онда пластик деформасија әмәлә кәләнә гәдәр шишмәк имканына малик дејилдир. Беләликлә, көстәрилән чәтинликләрин сәбәбини килин шишмәсиндә көрмәк дүз олмазды.

Тәчрүбәдән мә'лумдур ки, гују дивары нын учулмасы кими һадисә гујунун дивары ндан башлајараг јухары ја доғру ја јылыр.

Бу мәгаләдә бахылан гују дивары нын кенишләнмәси һадисәси дә гују зонасындан башлајараг, јухары ја доғру ја јылыр вә газыманын сүр'әти аз олдугча кавернанын өлчүләри дә бөјүк олур.

Јухарыда көстәрилән ләрдән ајдын олур ки, кавернанын әмәлә кәлмәсинин сәбәби гујудиби зонасында әмәлә кәлән кәркинлик вәзијјәтидир. Хүсуси илә бу кәркинлик вәзијјәти гујудиби чевр әси боју кәскин олмалыдыр, чүнки бура кәркинликләр консентрасијасы зонасыдыр. Доғрудан да гујудиби чевр әси мүстәвидән силиндрик сәтһ кечид олдуғу үчүн бурада кәркинлик консентрасијасы әмсалы гују дивары ндакына нисбәтән бөјүк олачагдыр вә бу сәбәбдән гују дивары нын мөһкәмлији бу јердән позулмаға башлајачагдыр.




Гујудиби зонасында кәркинликләрин ја ланма ганунуну нәзәри олараг өјрәнмәк көрүнүр һагында бөјүк чәтинликләрә раст кәлир. Буна көрә гују дивары нын һарадан дағылмаға башладығыны өјрәнмәк мәгсәди илә ашағыдакы тәчрүбә апарылмышдыр.

Кил хәкәси дибсиз полад силиндр ичәрисиндә мүәјјән мөһкәмлијә гәдәр сыхылмышдыр. Алынан күтләнин ичәрисиндә исә сонрадан силиндрик дәлик ачылмышдыр вә бундан сонра алынмыш нүмунә шагули истигамәтдә гују дивары нын мөһкәмлији позулана гәдәр сыхылмышдыр. Бу заман нүмунә јан тәрәфә

кенишләнмәк истәркән полад силиндрин мүгавиматинә раст кәлир ки, бу да гуjу шәраитиндә сүхурларын jан тәзjигинә уjғун кәлир.

Тәчрүбәләр көстәрди ки, гуjу диварынын мөһкәмлиjинин позулмасы һәмишә гуjудиби чеврәсиндән башлаjыр вә сонралар шагули jүкүн артмасы илә гуjу дивары боjу jухары галхыр вә шагули jүкүн мүәjjән гиjмәтиндә jүкүн дивары тамамы илә учараг гуjунун лүләсини долдурур.

Геjд етмәк лазымдыр ки, гуjунун дивары учан заман гуjудибинин мәркәз һиссәси өзүнүн әввәлки вәзиjjәтини сахлаjыр.

Даjанмалар заманы каверна өлчүсүнүн гуjунун радиусу истигамәтиндә бөjүмәси, һәм дә бу һадисәнин гуjудиби зонасында баш вермәси гуjуларын газылмасы заманы мүшаһидә едилир. Бу көстәрир ки, кәркинликләрин консентрасиjасы нәтичәсиндә гуjу диварынын дағылмасы гуjудиби чеврәсиндән башлаjыр вә каверна әмәлә кәлән jерләрдән jухары гуjунун дивары вә даjаныглығыны һәлә итирмәмиш олур.

Беләликлә, каверна әмәләкәлмә сәбәбләринин тәһлили вә апарылмыш тәчрүбәләрдән ишағыдакы нәтичәләрә кәлирик:

1. Бә'зи нефт рajонларында газыма заманы кил лаjларында каверна әмәлә кәлмәсинин сәбәби гуjудиби чеврәси боjу кәркинликләрин консентрасиjасыдыр ки, гуjу диварынын даjаныглығынын позулмасы бурадан башлаjыр.

2. Гуjудиби чох мүддәт ejни jердә галдыгда кавернанын өлчүләри бөjүк олур.

3. Каверна еластик деформасиja һүдудунда дағылан килләри газыдыгда әмәлә кәлир. Бөjүк пластик деформасиja нәтичәсиндә дағылмаjан килләрдә каверна да әмәлә кәлмир.

4. Белә чәтинликләрлә мүвафиг хүсуси чәкиси олан jуjучу маje тәтбиг етмәклә мүбаризә етмәк олар.

5. Гуjу дибинин тез дәринләшдирилмәси гуjуну чәтинлиjә раст кәлмәдән кичик хүсуси чәкиси олан jуjучу маje илә дә газымаға имкан верир. Лакин бу заман гуjу диварынын гуjудибиндән jухары һиссәси өз даjаныглығыны итирмәмәлидир.

ӘДӘБИjjАТ

1. В. Ю. Вадецкий. Коэффицент обвалообразования и его применение. Труды Института нефти АН СССР, „Нефтепромысловое дело" №9, Изд. АН СССР.
2. А. А. Шамсиев. Обвалы пород при бурении нефтяных и газовых скважин. Азнефтеиздат, 1955.
3. А. А. Шамсиев. Об увлажнении глинистых пород на стенках скважин. АНХ, № 6, 1960.

А. А. Шамсиев

## О причине кавернообразования в бурящейся скважине

РЕЗЮМЕ

При прохождении бурением глинистых пород в некоторых районах образуются каверны, которые осложняют процесс бурения и цементировки скважины.

Существует много мнений относительно причины образования каверны, наиболее распространенным из которых является то, что причиной кавернообразования является набухание глин.

В статье показывается, что глины, слагающие стенки скважины, не имеют возможности набухать и поэтому нельзя согласиться с указанным выше мнением.



Образование каверны объясняется напряженным состоянием контура забоя скважины. Так как теоретическое определение этого напряженного состояния не возможно, вопрос образования каверны изучался экспериментальным путем.

Опыты показали, что разрушение стенок скважины всегда начинается с контура забоя и распространяется до стволу наверх.

Таким образом при бурении в зоне образования каверны кроме применения промывочной жидкости соответствующего удельного веса необходимо принять меры для быстрого углубления забоя.

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазијјат вә техника елмләри серијасы, 1960, № 6

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1960, № 6

М. А. АБДИНОВ

# УСТАНОВКА ДЛЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ СИЛЫ СЦЕПЛЕНИЯ ЦЕМЕНТНОГО КАМНЯ СО СТЕНКАМИ СКВАЖИНЫ С УЧЕТОМ ТЕМПЕРАТУРЫ И ДАВЛЕНИЯ

Как известно, сила сцепления (контакта) цементного камня со стенками является одним из важных факторов, определяющих качество цементировки нефтяных и газовых скважин. Однако, этот фактор по сравнению с другими, которые подвергались изучению в лабораториях различных исследовательских институтов, можно сказать, не был исследован с учетом тех реальных условий в которых цементный раствор, затвердевая, соприкасается со стенками скважины. Говоря другими словами, в этих исследованиях не учитывались ни совместное влияние температуры и давления на силу сцепления цементного камня со стенками скважины, ни влияние различных физико-механических свойств глинистых корок. Необходимость изучения указанного вопроса приобретает еще большее значение в связи с цементировкой сверхглубоких скважин, в которых значения температуры и давления доходят до значительных величин.

В свете изложенного, для исследования влияния указанных выше факторов на характер сцепления цементного камня со стенками скважины, нами предложена экспериментальная установка (рис. 1).

Установка состоит из следующих основных узлов:

Корпус (2) с флянцами (верхними и нижними крышками), в который помещается образец породы, слагающей стенки скважины, выполненный в виде цилиндрической втулки длиной 150 *мм* (наружный диаметр выбирается исходя из пористости, проницаемости пород, не более 20—30 *мм*). Внутри образца породы плотно устанавливается патрубок с отверстиями—фильтр (3). К верхней крышке подводится трубка (10) высокого давления, внутренним диаметром 10—12 *мм*. В нижней крышке имеется конусный зумпф для стока фильтрата, который образуется в процессе проведения опытов. Корпус вместе с подготовленным к опыту образцом породы помещается в ванну (1), представляющую собой емкость, в которой поддерживается заданная температура воды с помощью терморегулятора.

Для создания в корпусе необходимого давления служит ручной винтовой масляный насос (12), соединенный с корпусом посредством трубки (10), в которой находится глинистый раствор. Разделение масла и глинистого раствора осуществляется при помощи специального разделителя (11). Установка оснащена необходи мыми приборами для контроля испытаний (регулятор температуры, реле, манометр и др.).

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазијјат вә техника елмләри серијасы, 1960, № 6

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1960, № 6

М. А. АБДИНОВ

# УСТАНОВКА ДЛЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ СИЛЫ СЦЕПЛЕНИЯ ЦЕМЕНТНОГО КАМНЯ СО СТЕНКАМИ СКВАЖИНЫ С УЧЕТОМ ТЕМПЕРАТУРЫ И ДАВЛЕНИЯ

Как известно, сила сцепления (контакта) цементного камня со стенками является одним из важных факторов, определяющих качество цементировки нефтяных и газовых скважин. Однако, этот фактор по сравнению с другими, которые подвергались изучению в лабораториях различных исследовательских институтов, можно сказать, не был исследован с учетом тех реальных условий в которых цементный раствор, затвердевая, соприкасается со стенками скважины. Говоря другими словами, в этих исследованиях не учитывались ни совместное влияние температуры и давления на силу сцепления цементного камня со стенками скважины, ни влияние различных физико-механических свойств глинистых корок. Необходимость изучения указанного вопроса приобретает еще большее значение в связи с цементировкой сверхглубоких скважин, в которых значения температуры и давления доходят до значительных величин.

В свете изложенного, для исследования влияния указанных выше акторов на характер сцепления цементного камня со стенками скважины, нами предложена экспериментальная установка (рис. 1).

Установка состоит из следующих основных узлов:

Корпус (2) с флянцами (верхними и нижними крышками), в который помещается образец породы, слагающей стенки скважины, выполненный в виде цилиндрической втулки длиной 150 *мм* (наружный диаметр выбирается исходя из пористости, проницаемости пород, не более 20—30 *мм*). Внутри образца породы плотно устанавливается патрубок с отверстиями—фильтр (3). К верхней крышке подводится трубка (10) высокого давления, внутренним диаметром 10—12 *мм*. В нижней крышке имеется конусный зумпф для стока фильтрата, который образуется в процессе проведения опытов. Корпус вместе с подготовленным к опыту образцом породы помещается в ванну (1), представляющую собой емкость, в которой поддерживается заданная температура воды с помощью терморегулятора.

Для создания в корпусе необходимого давления служит ручной винтовой масляный насос (12), соединенный с корпусом посредством трубки (10), в которой находится глинистый раствор. Разделение масла и глинистого раствора осуществляется при помощи специального разделителя (11). Установка оснащена необходи мыми приборами для контроля испытаний (регулятор температуры, реле, манометр и др.).

Методика проведения опытов на установке заключается в следующем.

В корпус (2) помещается образец горной породы указанной выше формы, внутри которой заранее устанавливается металлический фильтр (3). Затем полость корпуса заполняется определенным глини-

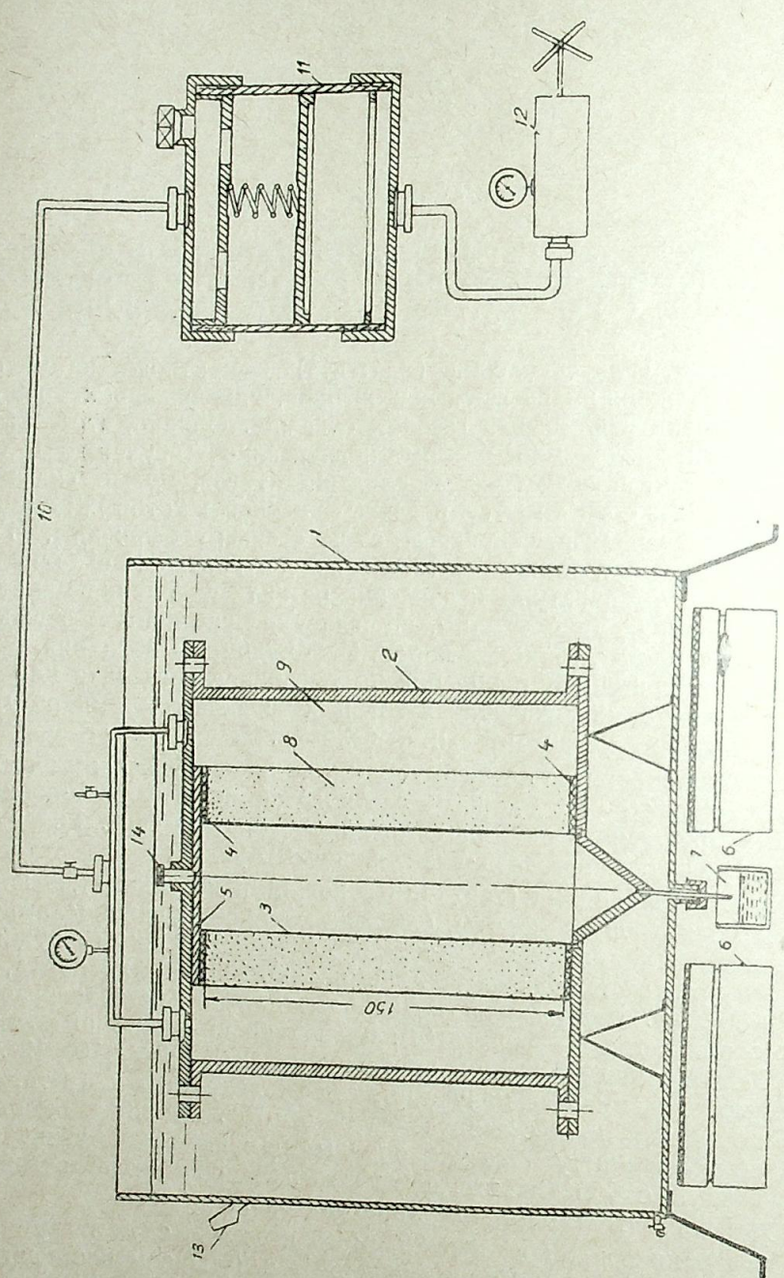



Рис. 1.

*1*—ванна; *2*—корпус; *3*—фильтр; *4*—прокладка; *5*—шайба; *6*—электроплиты; *7*—сосуд для фильтрата; *8*—порода; *9*—полость корпуса; *10*—трубка; *11*—разделитель; *12*—ручной масляной винтовой насос; *13*—гнездо для установки терморегулятора; *14*—нажимной винт.

стым раствором, после чего устанавливается верхняя крышка и затягивается болтами (при этом нажимной винт (14) находится в верхнем положении). После этой операции, с целью создания надежной

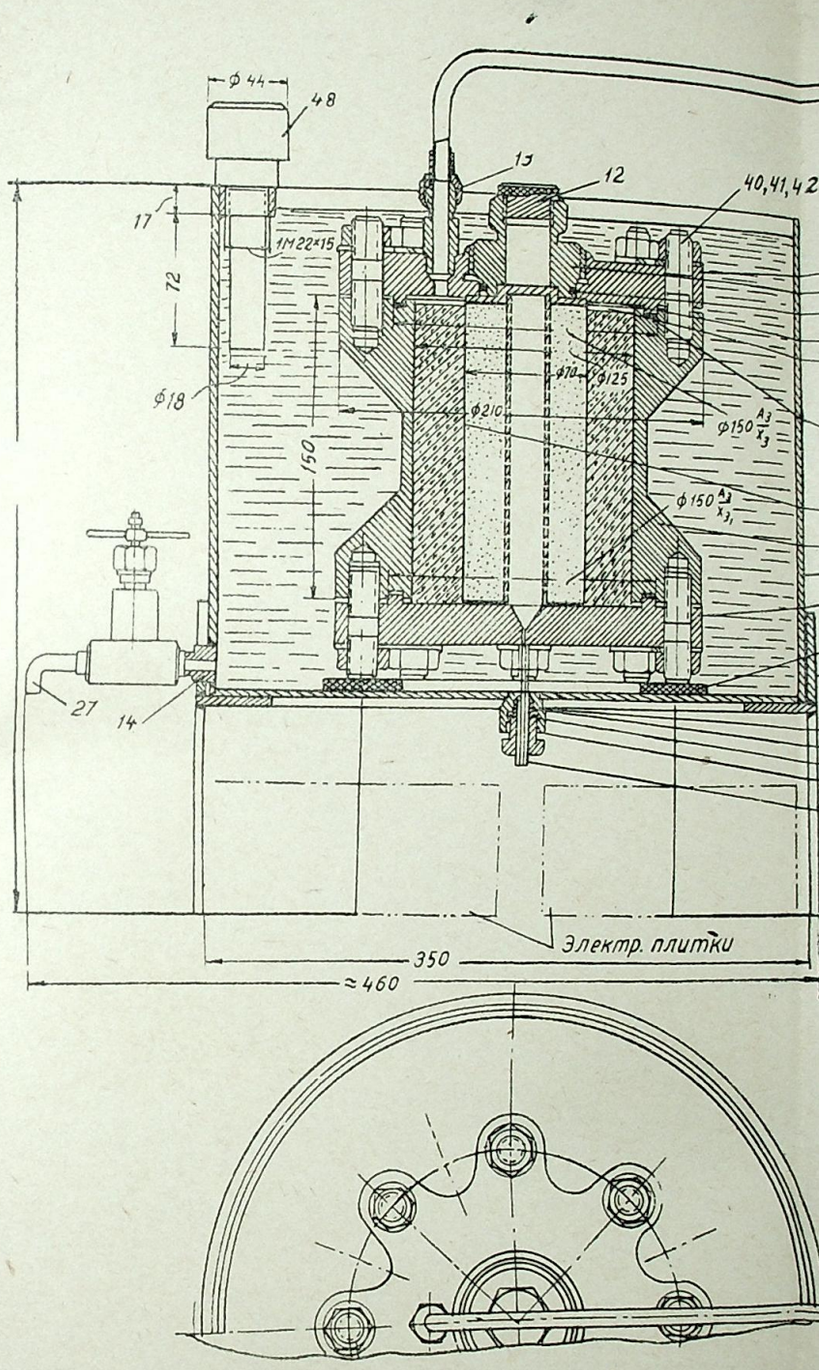



Рис. 3.

*1*—ванна; *2*—основание; *3*—подставка; *4*—винт нажимной; *5*—кольцо уплотнителя; *6*—шайба; *12, 29*—пробка; *13, 14*—штуцер; *15*—специальная гайка; *16*—образец породы; *17* винт; *18, 39*—*21*—корпус разделителя; *22*—поршень; *23*—кольцо ниппеля; *24*—подушка; *25, 27*—угольник; *33*—уплотнение; *34, 35*—трубка; *37*—накидная гайка; *38*—ниппель; *40*—шплинка; *41, 44*—га*48*—температурное реле; *49*-

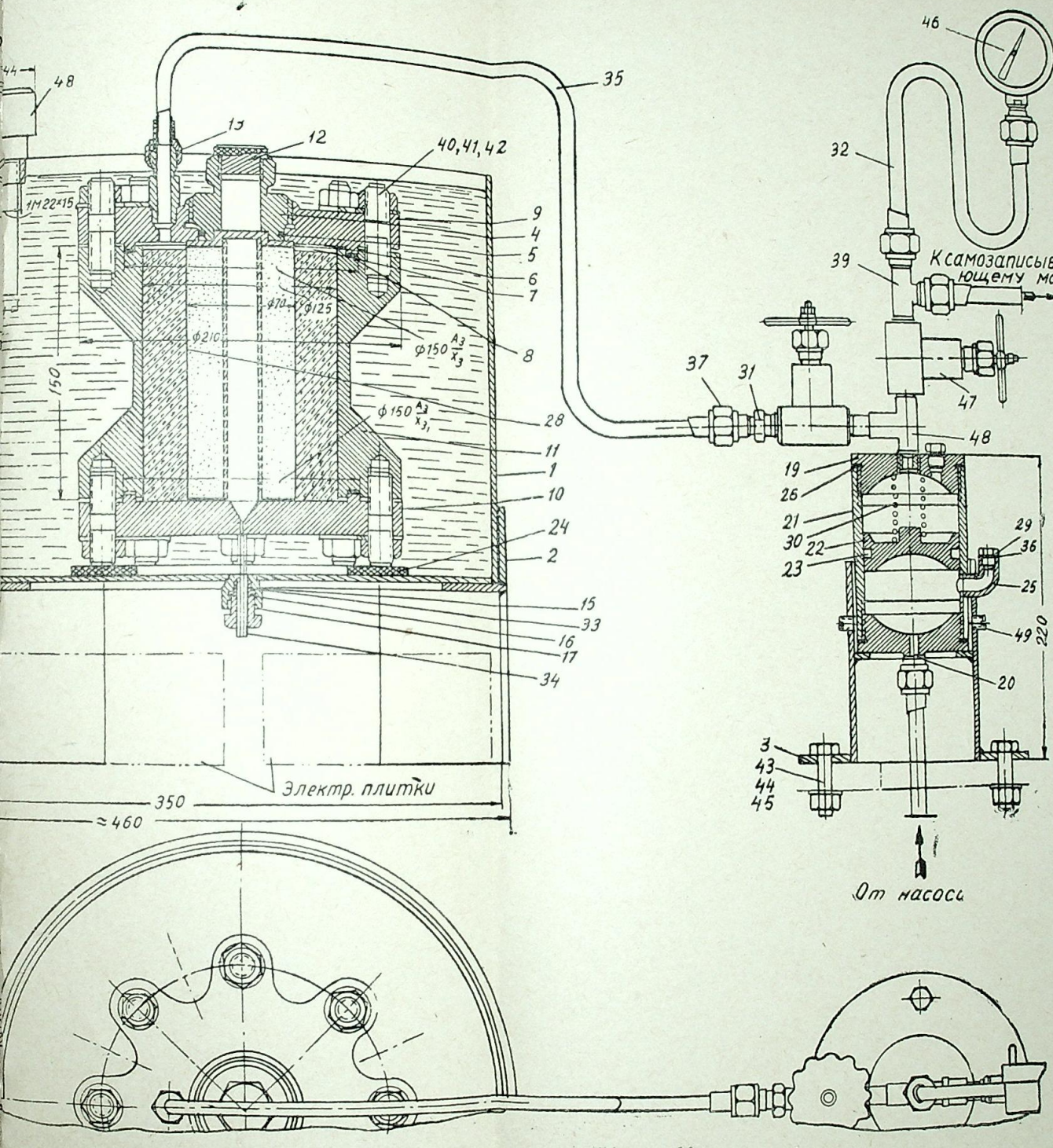



Рис. 3.

...е; 3—подставка; 4—винт нажимной; 5—кольцо уплотнителя; 6—шайба; 7, 8, 26, 36—прокладка; 9—крышка верхняя; 10—крышка нижняя; 11—корпус, ...штуцер; 15—специальная гайка; 16—образец породы; 17 винт; 18, 39—тройник; 19—верхняя крышка разделителя; 20—нижняя крышка разделителя; ...я; 22—поршень; 23—кольцо ниппеля; 24—подушка; 25, 27—угольник; 28—фильтр; 30—пружина; 31—ниппель проходной; 32—трубка разделителя; ...6—трубка; 37—накидная гайка; 38—ниппель; 40—шпилька; 41, 44—гайка; 42—пружинная шайба; 43—болт; 45—шайба; 46—манометр; 47—кран; 48—температурное реле; 49—винт.

герметичности между крышками корпуса и горной породой поджимается специальный нажимной винт (14). Затем заполненная глинистым раствором трубка (10) соединяется с верхней крышкой и собранный корпус устанавливается в ванну с водой, которая подогревается электрическими плитками до заданной температуры, поддерживаемая терморегулятором.

По достижении заданной температуры, при помощи ручного винтового масляного насоса (12) (нижний объем разделителя предварительно заполняется маслом) создается желаемое давление на жидкость в корпусе (2). Этим же насосом производится регулирование заданного давления в процессе проведения опытов.

После истечения определенного времени, достаточного для образования глинистой корки на образцах породы (об этом можно судить по прекращению выделения фильтрата) корпус извлекается из ванны и находящийся в нем глинистый раствор заменяется определенным цементным раствором, повторяется операция герметизации и корпус снова устанавливается в ванну. При этом в разделителе и трубке (10) находится глинистый раствор, посредством которого, при помощи ручного винтового масляного насоса, на поверхность цементного раствора, при соответствующей температуре, передается заданное давление.

После окончания твердения цементного раствора, время которого определяется в соответствии с существующими на производстве нормами времени, которое дается для твердения цемента обсадных колонн, при заданном давлении и температуре, корпус извлекается из ванны и верхняя и нижняя крышки разъединяются. Затем корпус вместе с породой и затвердевшим цементом устанавливаются на гидравлический пресс (рис. 2), на котором давление создается до тех пор, пока не происходит сдвига всего образца породы вместе с фильтром. При этом фиксируется величина давления $P$, при котором произошел сдвиг образца породы по отношению к кольцевому цементному камню.

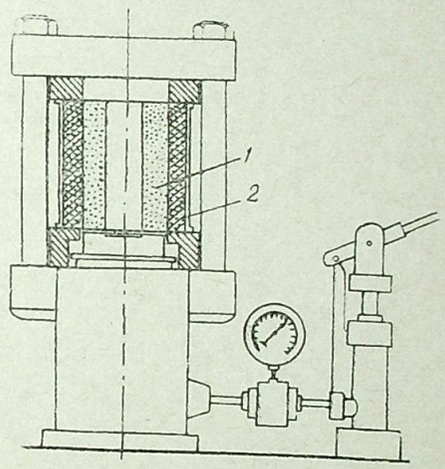



Рис. 2.
*1*—образец породы; *2*—цементный камень

Зная длину образца породы $l$, его диаметра $d$, по которому произошел сдвиг, диаметра поршня пресса $D$ и величину давления $P$, при котором произошел сдвиг, определяем силу сцепления (контакта) $\sigma$ цементного камня с породой из выражения

$$\sigma = \frac{D^2 P}{4dl}.$$

На базе схемы установки (рис. 1) проектировались ее рабочие чертежи, общий вид которой представлен на рис. 3.

герметичности между крышками корпуса и горной породой поджимается специальный нажимной винт (14). Затем заполненная глинистым раствором трубка (10) соединяется с верхней крышкой и собранный корпус устанавливается в ванну с водой, которая подогревается электрическими плитками до заданной температуры, поддерживаемая терморегулятором.

По достижении заданной температуры, при помощи ручного винтового масляного насоса (12) (нижний объем разделителя предварительно заполняется маслом) создается желаемое давление на жидкость в корпусе (2). Этим же насосом производится регулирование заданного давления в процессе проведения опытов.

После истечения определенного времени, достаточного для образования глинистой корки на образцах породы (об этом можно судить по прекращению выделения фильтрата) корпус извлекается из ванны и находящийся в нем глинистый раствор заменяется определенным цементным раствором, повторяется операция герметизации и корпус снова устанавливается в ванну. При этом в разделителе и трубке (10) находится глинистый раствор, посредством которого, при помощи ручного винтового масляного насоса, на поверхность цементного раствора, при соответствующей температуре, передается заданное давление.

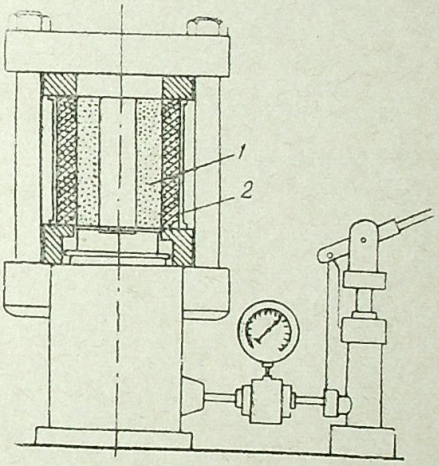



Рис. 2.
*1*—образец породы; *2*—цементный камень

После окончания твердения цементного раствора, время которого определяется в соответствии с существующими на производстве нормами времени, которое дается для твердения цемента обсадных колонн, при заданном давлении и температуре, корпус извлекается из ванны и верхняя и нижняя крышки разъединяются. Затем корпус вместе с породой и затвердевшим цементом устанавливаются на гидравлический пресс (рис. 2), на котором давление создается до тех пор, пока не происходит сдвига всего образца породы вместе с фильтром. При этом фиксируется величина давления $P$, при котором произошел сдвиг образца породы по отношению к кольцевому цементному камню.

Зная длину образца породы $l$, его диаметра $d$, по которому произошел сдвиг, диаметра поршня пресса $D$ и величину давления $P$, при котором произошел сдвиг, определяем силу сцепления (контакта) $\sigma$ цементного камня с породой из выражения

$$\sigma = \frac{D^2 P}{4dl}.$$

На базе схемы установки (рис. 1) проектировались ее рабочие чертежи, общий вид которой представлен на рис. 3.

М. А. Абдинов

## Температур вә тәзјиги нәзәрә алмагла дашлашмыш семент күтләсинин гују дивары илә кип бирләшмәси күввәсинин експериментал тә'јини үчүн гурғу

ХҮЛАСӘ

Мә'лумдур ки, гујунун сементләнмәси кејфијјәтинә тә'сир едән амилләрдән бири онун һәлгәви фәсасында долашмыш семент күтләсинин гују дивары илә кип бирләшмәсидир. Буна бахмајараг, гујуда олан температур вә тәзјигин дашлашмыш семент күтләсинин гују дивары илә кип бирләшмәси күввәсинә тә'сири мәсәләси индијә кими өјрәнилмәмишдир. Мәгаләдә бу мәсәләнин өјрәнилмәси үчүн лазым олан експериментал гурғу вә ондан истифадә едилмәси методу верилмишдир. Һәмин гурғуда гујунун сементләнмәси заманы гујуда олан бүтүн шәраити јаратмаг мүмкүндүр.

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазијјат вә техника елмләри серијасы, 1960, № 6

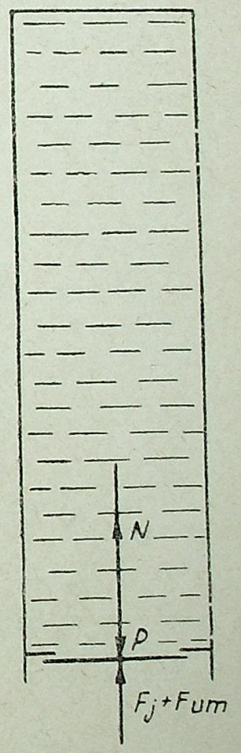
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1960, № 6

А. Ә. ШӘМСИЈЕВ, Н. Б. БАБАЈЕВ, Г. М. ФИНКЕЛШТЕЈН

## ГОРУЈУЧУ КӘМӘРИН ГУЈУЈА БУРАХЫЛМАСЫ ЗАМАНЫ ӘЗИЛМӘСИ СӘБӘБЛӘРИНДӘН БИРИ ҺАГГЫНДА

Чох вахт горујучу кәмәри гујуја бурахаркән, тә'лиматда көстәрилән бүтүн көстәришләрә әмәл едилмәсинә бахмајараг, онун әзилмәси һадисәси баш верир. Белә һалларда мә'дән ишчиләри бу һадисәни боруларын кејфијјәтсиз һазырланмасында көрүрләр.

Лакин кәмәрин гујуја бурахылмасы режими дә онун әзилмәсинә сәбәб ола биләр. Мә'лум олдуғу кими, нөвбәти бору бағландыгдан сонра бүтүн кәмәр гујуја бурахылыр. Илк дөврдә бурахылма әмәлијјаты артан һәрәкәтлә, ахыра јахын исә азалан һәрәкәтлә баш верир.




Бору кәмәрини гујуја бурахаркән һәлгәви фәзада дөвран јаратмаг вә кәмәрин ағырлығыны гисмән азалтмаг мәгсәди илә кәмәрдә әкс клапан гојулур, кәмәрин әзилмәмәси үчүн исә вахташыры онун ичәриси јујучу маје илә долдурулур. Бу һалда әкс клапан јајын, кәмәрин дахилиндә вә харичиндә олан маје сәвијјәләринин фәрги вә һәлгәви фәзадакы тәзјиг иткиләри нәтичәсиндә бағлы олур.

Көстәриләнләрдән башга клапана дахилдән маје күтләсинин әталәт күввәси тә'сир едир.

Ендирмәнин ахырына јахын кәмәр тормозландығы үчүн о азалан һәрәкәтлә гујуја бурахылыр. Бу һәрәкәтин тә'чилини $W$ адландыраг, ајдындыр ки, тә'чилин истигамәти кәмәрин һәрәкәт истигамәтинин әксинә олачагдыр.

Бу һалда кәмәрин ичәрисиндә олан маје күтләсинин клапана тә'сири ашағыдакы тәнликдән тапылыр:

$$N-P=\frac{P}{g}W=0 \qquad (1)$$

бурада: $N$ — клапанын реаксија күввәси,
$P$ — кәмәрдә олан мајенин чәкиси,
$g$ — јерин чазибә тә'чилидир.

Јухарыдакы тәнликдән

$$N=P+P\frac{W}{g} \text{ алырыг.} \qquad (2)$$

(2) ифадәсиндән көрүндүјү кими, $W$ чох олдугча, јә'ни кәмәрин тормозланма мүддәти аз олдугча кәмәрдәки мајенин дә клапана тә'сири бөјүк олур.

Демәли:

$$R=-N\geqslant F_j+F_{um}+P_1 \qquad (3)$$

олдугда клапан ачылачагдыр.

Бурада: $F_j$—јајын еластик гүввәси,

$F_{um}$—һәлгәви фәзадакы иткиләр нәтичәсиндә клапана тә'сир едән гүввәдир.

$R$-ин гиjмәтини (2) ифадәсиндә јеринә јазсаг

$$-P-P\frac{W}{g}\geqslant F_j+F_{um}+P_1 \text{ аларыг.}$$

$P=P_1$, јә'ни кәмәрин дахилиндә вә харичиндәки маје сәвиjjәсини бәрабәр гәбул етсәк

$$W=-\frac{(F_j+F_{um}+2P)g}{P} \text{ аларыг.} \qquad (4)$$

Кәмәри ендирәркән тормозлама заманы әмәлә кәлән тә'чил (4) бәрабәрлиjиндән артыг олдугда клапан ачылыр вә кәмәрин ичәрисиндә олан мајенин бир һиссәси гуjуја ахыр. Мајенин ахмасы (3) бәрабәрсизлиji бәрабәрлиjә чевриләнә гәдәр давам едәчәкдир.

Фәрз едәк ки, тормозланмаја гәдәр кәмәр $v_0$ сүр'әти илә ендирилирди, тормозланма мүддәти исә $t$-jә бәрабәрдир, онда ендирмәнин сабит $W_1$ тәчили илә баш вердиjини гәбул етсәк

$$W_1=\frac{v_0}{t}$$

аларыг.

$$W_1\geqslant W=-\frac{(F_j+F_{um}+2P)g}{P}$$

олдугда клапан о гәдәр мүддәт ачыг олачаг ки, һәлгәви фәзада маје сәвиjjәси елә $h$ һүндүрлүjүнә гәдәр азалсын ки, ашағыдакы бәрабәрлик е'тибарлы олсун:

$$P'\frac{W_1}{g}=P\frac{W}{g}$$

вә ја

$$P'=\frac{W}{W_1}P$$

Әкәр $W_1=2W$ олса, онда $P'=\frac{P}{2}$ олар, јә'ни клапан кәмәрин ичәрисиндәки мајенин јарысы ахана гәдәр ачыг олар.

Бә'зи һалларда тормозланма нәтичәсиндә кәмәрин ичәрисиндәки мајенин сәвиjjәси о гәдәр азалыр ки, кәмәр

$$P_x=\frac{H-h}{10}\gamma$$

харичи тәзjигин нәтичәсиндә әзилә биләр.

Бурада: $H$—клапанын бурахылма дәринлиjидир. $F_{um}$-и тә'jин едәркән тормозланма мүддәтиндә һәлгәви фәзада маје сәрфинин дәjишән кәмиjjәт олдуғуну вә ашағыдакы кими тапылдығыны нәзәрә алмаг



лазымдыр. Тормозланма заманы кәмәр ашағыдакы мигдар мајени сыхышдырыр:

$$Q=\omega v_0-\omega Wt$$

Бурада: $\omega$—борунун ичәрисинин ен кәсиjинин саһәсидир.

Мә'лум олдуғу кими, һәлгәви фәзадакы тәзjиг иткиси ашағыдакы ифадәдән тапылыр:

$$P_{um}=aQ^2H\gamma=a\omega^3(v_0-Wt)^2H\gamma$$

Бурадан

$$F_{um}=P_{um}\cdot\omega=a\omega^3(v_0-Wt)^2H\gamma$$

Онда (4) ифадәси ашағыдакы шәкли алыр:

$$W\geqslant-[F_j=aH\gamma\omega^3(v_0-Wt)^2+2P]\frac{g}{P} \qquad (5)$$

Беләликлә, ендирмә заманы клапан ачылмамаг үчүн тормозланма мүддәти дә ендирмә тә'чили (5) тәнлиjинә табе олмалыдыр.

Горуjучу кәмәрин мүәjjән ганун үзрә дәjишән тә'чил илә ендирилмәси тәчрүбәдә чох чәтинлик төрәдәрди вә хүсуси автомат гурғулар тәләб едәрди, бундан әлавә, белә ендирмә әмәлиjjаты чох ләнк оларды. Она көрә кәмәрин ендирмә заманы әзилмәсинин габағыны алмаг үчүн елә автоматик ишләjән клапанлардан истифадә етмәк лазымдыр ки, онлар кәмәр ичәрисиндә олан маје сәвиjjәсини сабит сахласын.

А. А. Шамсиев, Н. Б. Бабаев, Г. М. Финкельштейн

## Об одной причине смятия обсадных колонн при спуске их в скважину

РЕЗЮМЕ

В некоторых случаях при спуске обсадных колонн в скважину и при соблюдении всех положений инструкции происходит их смятие.

В статье показывается, что явление связано с режимом спуска колонны, так что при спуске колонны с большой скоростью и при резком торможении обратный клапан открывается и часть жидкости, находящейся в скважине перетекает в кольцевое пространство. При этом уровень жидкости в колонне может настолько снизиться, что она под действием наружного давления сомнется, что встречается на практике.

Для предупреждения явления смятия колонны в процессе ее спуска в скважину рекомендуется применять такие автоматические клапаны, которые поддержали бы уровень жидкости в колонне на заданной высоте.

В статье дан также расчет условия, при котором может открываться обратный клапан.

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-рија зиј јат вә техника елмләри серијасы, 1960, № 6

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1960, № 6

О. Д. АЛЕКПЕРОВ

# СИФОННЫЕ УСТАНОВКИ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГИДРОСМЕСЕЙ

К настоящему времени работами ряда исследователей как в СССР, так и за рубежом установлено, что единственным методом изучения явления переноса твердых тяжелых частиц жидкостью, приводящим к реально могущим быть использованным зависимостям, является метод экспериментальный. Теория пока что здесь почти бессильна. Имеющаяся диффузионная теория пригодна лишь для потоков, переносящих мельчайшие твердые частицы при чрезвычайно малой их концентрации в потоке; эти условия делают диффузионную теорию непригодной для решения обычных для практики случаев движения гидросмесей.

Более перспективна гравитационная теория, разрабатываемая член-корр. АН СССР М. А. Великановым, но и она нуждается для своего полного завершения и подтверждения в многочисленных экспериментальных данных. Имеется также еще ряд теоретических попыток решить эту задачу, но все они упираются в непреодолимое пока препятствие, нуждаются в дополнительных опытных коэффициентах. Несмотря на продолжающиеся попытки теоретического решения задачи, безсильность одной лишь теории была давно осознана. Следствием этого явились крупные экспериментальные исследования, среди которых наиболее выдающимися по тщательности подготовки и проведения являются исследования А. П. Юфина, В. С. Кнороза, Г. Н. Роера и др. По мере увеличения запросов практики увеличивалось число все новых экспериментов. Роль эксперимента увеличивалась, а сам эксперимент непрерывно совершенствовался. Уделом же теории так и остался лишь качественный анализ явлений переноса частиц жидкостью.

Мы поставили своей целью изучение движения смеси жидкости и речных наносов в сифоне, представляющем последовательное соединение в одном целом прямолинейных и криволинейных участков, в частности, нами изучается сифон с вертикальной восходящей и наклонной нисходящей ветвями, соединенных между собою плавным закруглением; входная часть сифона представляет собою плавное колено. Таким образом, возникает задача изучения движения гидросмеси в четырех различных элементах, в каждом из которых движение происходит совершенно своеобразно и требует самостоятельного изучения. Отводя, со своей стороны, теоретическому методу область качественного анализа, мы решили вести исследование поставленной задачи методом тщательно подготовленного и широко поставленного эксперимента. Приняв эту точку зрения, мы обратились к научной лите-

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазијјат вә техника елмләри серијасы, 1960, № 6

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1960, № 6

О. Д. АЛЕКПЕРОВ

# СИФОННЫЕ УСТАНОВКИ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГИДРОСМЕСЕЙ

К настоящему времени работами ряда исследователей как в СССР, так и за рубежом установлено, что единственным методом изучения явления переноса твердых тяжелых частиц жидкостью, приводящим к реально могущим быть использованным зависимостям, является метод экспериментальный. Теория пока что здесь почти бессильна. Имеющаяся диффузионная теория пригодна лишь для потоков, переносящих мельчайшие твердые частицы при чрезвычайно малой их концентрации в потоке; эти условия делают диффузионную теорию непригодной для решения обычных для практики случаев движения гидросмесей.

Более перспективна гравитационная теория, разрабатываемая член-корр. АН СССР М. А. Великановым, но и она нуждается для своего полного завершения и подтверждения в многочисленных экспериментальных данных. Имеется также еще ряд теоретических попыток решить эту задачу, но все они упираются в непреодолимое пока препятствие, нуждаются в дополнительных опытных коэффициентах. Несмотря на продолжающиеся попытки теоретического решения задачи, безсильность одной лишь теории была давно осознана. Следствием этого явились крупные экспериментальные исследования, среди которых наиболее выдающимися по тщательности подготовки и проведения являются исследования А. П. Юфина, В. С. Кнороза, Г. Н. Роера и др. По мере увеличения запросов практики увеличивалось число все новых экспериментов. Роль эксперимента увеличивалась, а сам эксперимент непрерывно совершенствовался. Уделом же теории так и остался лишь качественный анализ явлений переноса частиц жидкостью.

Мы поставили своей целью изучение движения смеси жидкости и речных наносов в сифоне, представляющем последовательное соединение в одном целом прямолинейных и криволинейных участков, в частности, нами изучается сифон с вертикальной восходящей и наклонной нисходящей ветвями, соединенных между собою плавным закруглением; входная часть сифона представляет собою плавное колено. Таким образом, возникает задача изучения движения гидросмеси в четырех различных элементах, в каждом из которых движение происходит совершенно своеобразно и требует самостоятельного изучения. Отводя, со своей стороны, теоретическому методу область качественного анализа, мы решили вести исследование поставленной задачи методом тщательно подготовленного и широко поставленного эксперимента. Приняв эту точку зрения, мы обратились к научной лите-

ратуре и установили, что экспериментальным изучением движений гидросмеси по восходящим и нисходящим трубам, а также поворотам в вертикальной плоскости занималось лишь несколько авторов, число которых значительно меньше числа авторов, занимавшихся изучением движения гидросмеси в горизонтальных трубах. В интересующей нас области мы можем назвать лишь работы проф. А. П. Юфина, проф. М. А. Дементьева, проф. R. Durand'a и канд. технич. наук В. В. Длоугого

В отношении восходящего вертикального потока гидросмеси, а также нисходящего, можно считать достаточной точностью, что потеря напора на трение при движении гидросмесей, состоящих из мелких песчаных частиц, при условии большой относительно скорости движения такая же, что и при движении одной лишь воды, при той же скорости, а действительный удельный вес гидросмеси с той же точностью может быть приравнен к расходному удельному весу. Однако это решение действительно для ограниченных случаев. Указанное решение пригодно лишь для мелких песчаных фракций при скоростях движения не менее 3 *м/сек*. Следует признать, что такая скорость является не экономичной из-за больших потерь напора на турбулентное перемешивание в движущемся потоке. По крайней мере 3,0—3,5 *м/сек* можно считать верхним переделом для скоростей потока в сифоне. Практически же приемлемым является скорость порядка 2,0—2,5 *м/сек*, а для этих скоростей указанный выше гидравлический метод расчета не годится. Таким образом и здесь задача еще не разрешена в полной мере.

Для частиц же более крупных вовсе отсутствуют какие-либо опыты с речными наносами или с частицами, близкими к ним по удельному весу (2,65 $т/м^3$), помимо опытов, Woster'a с каменным углем, удельный вес которого значительно меньше и равен приблизительно 1,4 $т/м^3$. До сего времени опыты с наносами крупнее чем 5—10 *мм* не производились. В отношении нисходящего потока вопрос стоит не столь остро, но и здесь не все изучено полностью. Существует мнение, что твердые частицы действуют ускоряюще на нисходящий поток, однако количественные зависимости получены лишь для песчаных фракций. Для этих условий установлено то же положение, что и для восходящего потока.

В отношении движения гидросмеси на поворотах в вертикальной плоскости имеются лишь опыты А. П. Юфина, проведенные с песчаными фракциями. Движение гидросмеси на повороте, соединяющем восходящий и нисходящий поток, вовсе не исследовано.

Таким образом, имеющиеся экспериментальные исследования пригодны для ограниченных случаев движения гидросмеси в составных частях сифона.

Нас интересуют условия движения гидросмесей с крупностью частиц примерно до 75 *мм*, при умеренных скоростях движения, не свыше 3,5 *м/сек*. Для изучения таких условий нами предприняты экспериментальные исследования.

В настоящей статье описываются экспериментальные установки для изучения движения гидросмесей в сифонах, сконструированные автором в гидротехнической лаборатории Энергетического института АН Азербайджанской ССР. При конструировании установок использован опыт предшествующих исследователей, некоторые же вопросы решены по-новому. Созданы две установки: малая—для исследования влияния размера живого сечения на суммарные потери напора при движении гидросмеси и большая,—позволяющая определять значение действительного удельного веса и потерю напора на трение в отдельных частях сифона: поворотах, восходящей и нисходящей ветвях при протекании гидросмеси.



Значительное число опытов на обеих установках уже проведено. Полученные результаты послужат содержанием последующих статей автора.

Установки для исследования движения гидросмеси в сифоне были спроектированы и сооружены исходя из следующего:

1. Возможности создания на установке условий, близких к практическим (натурным).

Выполнение этого требования желательно при всех исследованиях с однородными жидкостями. В проводимых же исследованиях, ввиду неизученности критериев подобия для неоднородных жидкостей (гидросмесей) выполнение указанного требования является необходимым условием для получения, могущих быть практически используемыми, данных.

2. Возможности создания достаточно широкого диапазона изменения параметров, определяющих условия движения.

3. Обеспечения установившегося режима движения исследуемых гидросмесей.

4. Возможности измерения всех параметров, необходимых для составления расчетных формул.

5. Надежности и достаточной точности измерительных приспособлений.

6. Возможности непосредственного наблюдения за движением гидросмеси в наиболее характерных местах.

Одновременное соблюдение указанных требований является гарантией доброкачественности экспериментов.

Проектируя установку мы не имели перед собой примера подобных же исследований. Однако смогли воспользоваться, частично, опытом исследователей изучающих движение гидросмесей в трубах. Некоторые же вопросы конструирования и экспериментирования были разработаны в процессе проводимых исследований.

## I. Малая экспериментальная установка

Для исследования влияния размера живого сечения сифона на суммарные потери напора была сконструирована установка, содержащая следующие части.

1. Исследуемые сифоны. Конструкция одного из сифонов дана на рис. 1 с различными живыми сечениями. Имелось три сифона с сечениями: $0{,}15\ м \times 0{,}15\ м = 0{,}0225\ м^2$, $0{,}13\ м \times 0{,}13\ м = 0{,}0169\ м^2$, $0{,}11 \times 0{,}11 = 0{,}0121\ м^2$.

Высота сифонов, исчисляемая как расстояние между центрами входного сечения в горловине является одинаковой и равна одному метру. Одинаковыми являются также длина нисходящей ветви, равная 1,4 *м*, и центральный радиус входного поворота и поворота в горловине— $R_0 = 0{,}175$ *м*. Сифон с площадью живого сечения, равной 0,0225 $м^2$ имеет прозрачные боковые стенки на участке от входного сечения до конца поворота в горловине.

2. Бак-смеситель.

3. Бункер с тарельчатым питателем, служащим для подачи исследуемых наносов.

4. Отстойник для задержания исследуемых наносов по выходу их из сифона.

5. Бак для сглаживания пульсаций подаваемых расходов воды с площадью зеркала 12 $м^2$. Уровень воды в баке-смесителе и отстойнике определяется пьезометрами. Расход воды измеряется треугольным водосливом, помещенным после отстойника.

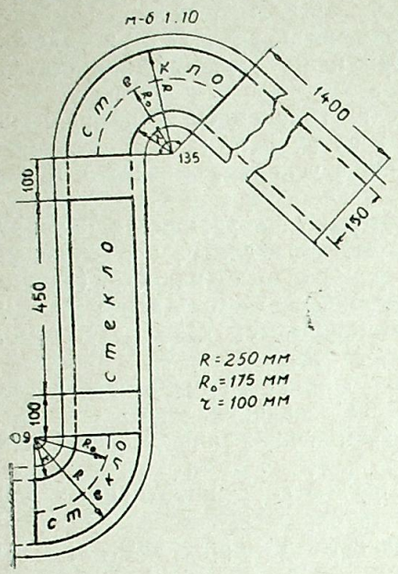



Рис. 1.

## II. Большая экспериментальная установка

Малая установка позволяла изучить лишь влияние размера живого сечения на суммарную потерю напора. Это ограничение является следствием недостаточности длин восходящей и нисходящей ветвей сифонов малой установки. Поэтому была сконструирована вторая, большая, установка, в которой длина восходящей и нисходящей ветвей была увеличена и доведена соответственно до 8,4 и 8,56, против 0,65 и 1,40—на малой установке. Указанные длины ветвей сифона на большой установке обеспечивают возможность устройства стабилизирующих участков в местах примыкания ветвей к поворотам, а также позволяют иметь достаточную протяженность измерительных участков, что, принимая во внимание относительную малость дополнительных потерь на трение при протекании гидросмесей (особенно при мелких и средних фракциях), является необходимым. Большая установка состоит в основном из тех же частей, что и малая, однако размеры этих частей соответственно увеличены. Существенное же различие между ними заключается в самих исследуемых сифонах и вопросах, которые возможно изучить на них. Ниже описываются составные части большой установки.

1. Сифон имеет живое сечение квадратной формы размером 0,15×0,15 $м$, $\omega$=0,0225 $м^2$.

Для непосредственного наблюдения за характером движения твердых частиц, противоположные стенки входного поворота, поворота в горловине начального и конечного участков восходящей ветви длиной соответственно 0,90 $м$ и 0,70 $м$ и конечного участка нисходящей ветви длиной 0,45 $м$ устроены из органического стекла.

Восходящая ветвь сифона установлена вертикально, а нисходящая—под углом 45° к горизонту.

Выбранные направления ветвей объясняются такими соображениями:

а) для восходящей ветви вертикальное положение наиболее целесообразно, так как при этом по сравнению с каким-либо наклонным положением длина ее является наименьшей, а распределение концентрации по сечению равномерным, что обусловливает наименьшие потери напора.

б) для нисходящей ветви сифонов-наносоудалителей вертикальное положение по конструктивным и энергетическим соображениям в большинстве случаев практики не может быть рекомендуемо. Чаще всего ей придается наклонное положение, близкое к углу 45°.



На восходящей ветви расположен участок для измерения потерь напора. Длина участка равна 6,47 $м$. До и после измерительного участка предусмотрены стабилизирующие участки длиной соответственно 1,50 $м$, что составляет примерно девять поперечных размеров трубы-сифона, и 0,52 $м$, благодаря чему поток на измерительном участке имеет неискаженную эпюру скорости.

Расположенный на нисходящей ветви измерительный участок имеет длину 5,82 $м$. Перед ним расположен стабилизирующий участок длиной 1,58 $м$. Сифон был изготовлен из листовой стали толщиной 2,5 $мм$ при помощи электросварки. Оба закругления (входное с центральным углом 90° и закругление в горловине) имеют одинаковые радиусы.

2. Бункер с тарельчатым питанием предназначен для равномерной непрерывной подачи твердой фракции. Объем бункера равен 45 $м^3$, что позволяет иметь достаточную длительность каждого опыта. Корпус бункера призматический, а днище пирамидальное, заканчивающееся круглым выпускным отверстием. При конструировании бункера, особенно важно правильно выбрать угол наклона стенок днища и размер выпускного отверстия. При недостаточных размерах и угле наклона возможны сводообразования и заторы.

При решении указанных вопросов учтены рекомендации [2], в результате чего были приняты диаметр выпускного отверстия, равный 0,30 $м$ и угол наклона стенок днища 50° к горизонту.

Из существующих типов питателей для подачи зернистых материалов нами был выбран наиболее совершенный по равномерности подачи питатель тарельчатого типа.

Этот питатель состоит из вращающегося на вертикальном валу плоской тарелки, на которой установлен телескопический патрубок. Высыпающийся из бункера зернистый материал располагается на тарелке в виде усеченного конуса.

При вращении тарелки часть материала снимается ножом и ссыпается по наклонной плоскости и направляющей трубе ко входному сечению сифона.

Передача вращения от электродвигателя к вертикальному валу осуществлена посредством редуктора.

Размеры и конструкция питателя были разработаны применительно к проводимым исследованиям.

Регулировка количества материала, подаваемого в единицу времени производилась различными путями: изменениями числа оборотов тарелки, положений ножа и телескопического патрубка. Диаметр тарелки равен 1,20 $м$. Диаметр телескопического патрубка 0,60 $м$.

Для вращения тарелки используется асинхронный двигатель трехфазного тока N 0,6 $квт$.

Загрузка бункера производится при помощи электрической лебедки.

3. Бак-смеситель выполнен в виде емкости, высотой 5 $м$, поперечное сечение его в нижней части до высоты 1,4 $м$ равно 1×1,70 $м^2$, а выше поперечное сечение имеет размер 1×1 $м$.

Подвод воды к нему осуществлен трубой $d$=8″, под уровень. Для подвода твердой фракции непосредственно ко входному сечению сифона в баке, в смесителе установлена направляющая труба.

4. Остойник для задержания твердой фракции имеет следующие размеры: длина 4 *м*, ширина 1,5 *м*. Расстояние между дном остойника и выходным сечением сифона равно 1 *м*.

5. Емкость для уменьшения пульсации расходов, подаваемых насосом, с поверхностью зеркала 12 $м^2$.

### Измерительные приспособления

Измерение расходов воды производилось треугольным водосливом с углом 90°, расположенным в конце остойника. Измерение напора на водосливе производилось мерной иглой. Измерение давлений в сечениях сифона производилось водяными пьезометрами. Измерение вакуума производится *U*-образным вакуумметром, одним коленом

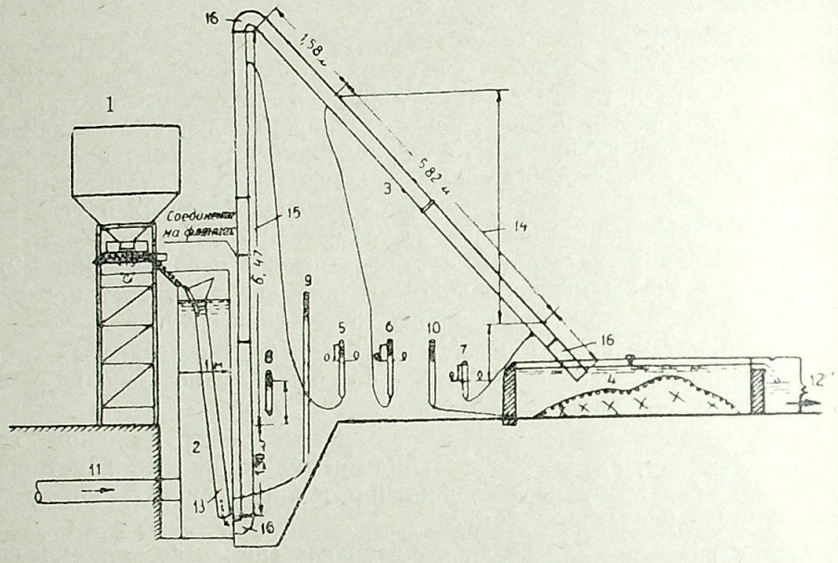



Рис. 2. Схема экспериментальной установки

*1*—бункер с тарельчатым питателем; *2*—бак-смеситель; *3*—сифон; *4*—отстойник; *5, 6, 7*,—вакуумметры; *8, 9, 10*—пьезометры; *11*—подвод воды; *12*—чрезмерный водослив в циркуляционный бассейн; *13*—направляющая труба; *14*—измерительный участок на нисходящей ветви; *15*—измерительный участок на восходящей ветви; *16*—прозрачные участки.

которого является соединительная вакуум-трубка, а другим—стеклянная трубка, закрепленная в вертикальном положении и снабженная металлической линейкой. Рабочей жидкостью вакуумметров является дистиллированная вода. Для уменьшения пульсации уровня в стеклянной трубке в соединительные шланги включались трубки с внутренним диаметром 1 *мм*, длиной—7 *см*. Отверстия для отбора давлений имеют одинаковые размер и формулу краев, обращенных к потоку. Показания пьезометров и вакуумметров выведены на общий щит. Присоединение этой аппаратуры показано на рис. 2.

### Техника проведения экспериментов

*Малая экспериментальная установка*

1. Заполнением бака-смесителя и остойника водой, полость сифона изолируется от атмосферы; сифон заряжается; выдерживается время, в течение которого достигается установившийся режим протекания чистой воды.



2. Снимается разность между уровнями в баке-смесителе и остойнике.

3. Определяется расход воды при помощи измерительного водослива.

4. Включается питатель.

5. После установления режима движения гидросмеси, вновь снимается разность между уровнями в баке-смесителе и остойнике.

*Большая экспериментальная установка*

1. Заполняется бак-смеситель и остойник, полость сифона изолируется от атмосферы.

2. Осуществляется зарядка сифона, для чего используется вакуум-насос. После того, как сифон оказывается заряженным подводится некоторый расход жидкости.

3. Выдерживается время, в течение которого режим движения на установке становится установившимся. Наступление этого момента тщательно контролируется измерительными приборами.

4. Производится включение пьезометров и вакуумметров и выжидается время, в течение которого происходит стабилизация их показаний, которые затем снимаются.

5. Включается питатель, испытываемые частицы подводятся направляющей трубой ко входу в сифон и увлекаемые потоком проносятся в отстойник, в котором задерживаются. При протекании гидросмеси показания приборов получают приращения. Запись приращенных значений производится после того, как они окончательно стабилизируются. Этот момент особо тщательно контролируется.

6. Производится мгновенное одновременное закрытие входного и выходного сечений сифона падающими тяжелыми щитами. Одновременно прекращается подача воды и останавливается питатель. Вода из установки удаляется, твердые частицы задержанные в сифоне, в восходящий и нисходящей ветвях, раздельно извлекаются и определяется их вес.

7. Твердые частицы, задержанные в остойнике, извлекаются, определяется их вес.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алекперов О. Д. „Изв. АН Азерб. ССР № 5, 1960“
2. Алферов К. В. Бункеры, затворы и питатели, 1956. Машгиз.
3. Великанов М. А. Динамика русловых потоков. М., 1956.
4. Дементьев М. А. Гидротехническое строительство, № 9, 1953.
5. Длоугий В. Б. Кандидатская диссертация. 1955.
6. Кнороз В. С. „Изв. ВНИИГ“, т. 30, 1940.
7. Роер Г. Н. „Изв. АН СССР“, № 8, 1939.
8. Юфин А. П. Напорный гидротранспорт, Госэнергоиздат 1950.
9. Durond R. La Houille Blonche, № A, 1953.

О. Д. Әләкбәров

### Һидрогарышыгларын (су вә чај чөкүнтүләри) һәрәкәтинин өјрәнилмәси үчүн сифон гурғуларына даир

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә һидрогарышыгларын һәрәкәтинин өјрәнилмәси үчүн сифон гурғусундан бәһс олунур. Бу гурғуларын конструктивләшдирилмәсинин әсасыны гојан принсипләр көстәрилир. Ики гурғу—кичик вә бөјүк гурғулар гурулмушдур. Мүхтәлиф ен кәсикли 3 сифондан

ибарәт кичик гурғу чанлы ен кәсијин басғыдан иткијә олан тә'сирини өјрәнмәк үчүндүр. Сифонун һүндүрлүјү 8,30 *м* олан бөјүк гурғу ајры-ајры сифон елементләриндән олан басғы иткисини вә һидрогарышығын һәгиги хүсуси чәкисини өјрәнмәк үчүндүр. Һәр ики гурғуда сәрф дөјүнтүсүнү азалтмаг үчүн чән гојулмушдур. Јохланыласы чөкүнтү-ләри, гыфда долма дәринлијиндән асылы олмајараг мүнтәзәм вә арасы-кәсилмәдән гурғуја вермәк үчүн бошгабшәкилли гидаландырычы тәт-биг олунмушдур.

Мүәјјән характер јерләрдә сифонун јан диварлары шүшәдәндир.

Тәчрүбәләр ашағыдакы ардычыллыгда апарылмышдыр:

1. Сифон долдурулур;
2. Һәрәкәт режими тә'јин олунур;
3. Пјезометр вә вакуумметрләрдән көстәричиләр көтүрүлүр, су-јун сәрфи тә'јин олунур;
4. Гидаландырычы ишә салыныр;
5. Һидрогарышығын сифон дахилиндә һәрәкәти гәрарлашмыш һәрәкәт шәклинә дүшмә мүддәти көзләнилир;
6. Чиһазларда олан дәјишикликләр гејд олунур;
7. Тәчрүбәнин ахырында сифонун кириши вә чыхышы бағланыр;
8. Бәрк чисим (чөкүнтүләр) чыхардылыб онун чәкиси тә'јин олу-нур.

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазијјат вә техника елмләри серијасы, 1960, № 6

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1960, № 6

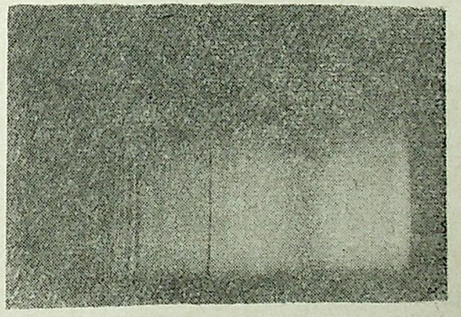
М. КЕРИМБЕКОВ

# ДРОЖАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ СОЛНЕЧНОГО КРАЯ В РАЗЛИЧНЫХ ДЛИНАХ ВОЛН

С помощью кинематографирования спектра солнечного края изучено дрожание в различных длинах волн с целью выявления и количественной оценки возможного различия в амплитуде и фазе дрожания.

Наблюдения велись во II (кассегреновском) фокусе горизонтального солнечного телескопа в Пулкове при различных зенитных расстояниях Солнца и в моменты хороших изображений. Входное отверстие телескопа было задиафрагмировано до 25 *см*. Изображение Солнца фокусировалось на щели спектрографа, а спектр получался в кадровом окне кинокамеры, соединенной со спектрографом посредством переходной части, которая позволяла производить тонкую фокусировку и, по мере надобности, быструю замену камеры окуляром.

Использованный в работе стеклянный спектрограф обладает линейной дисперсией 215 А/*мм* и теоретической разрешающей силой 6200 (для $\lambda$=4861 Å). Диапазон длин волн 3900—6600 Å. Полный раствор щели—0,4 *мм*. Кинематографирование производилось с помощью специальной камеры. Частота съемки менялась от 4 до 24 *колебания/сек* (соответственно выдержки составляли от 1/8 до 1/48 *сек*). Киносъемка производилась на панхроматической пленке типа Т-10 и ортохроматической РФ-3, которые при выбранном нами светофильтре давали равномерную плотность почернения вдоль всего спектра (см. рисунок).



Спектрограмма края Солнца.
Масштаб: 1 *мм*—1″, 1.

Качественный просмотр полученных фильмов показывает, что дрожания края диска Солнца происходит одинаково во всех длинах волн, в частности замыкания края во всех длинах волн одновременное и не зависит от высоты Солнца. Прежде чем сравнивать амплитуды колебаний (количественно) в различных частях спектра, отметим, что колебание края диска Солнца содержит в себе высокочастотные компоненты, частота которых достигает величины в $10^3$ *герц*,

В виду этого для определения амплитуды колебаний мы воспользуемся методом, предложенным В. А. Кратом и Т. В. Крат [2]. Необходимое условия для его применения—наличие большого числа колебаний при использованных нами частотах съемки, очевидно выполнялось. Сущность метода заключается в том, что если делать фотометрические разрезы поперек края диска Солнца, то распределение интенсивности в них можно представить в виде: $J(x)=\frac{1}{2}[1-F(ax)]$, где $F(ax)$—интеграл вероятности, причем:

$$F(ax)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}=\int_0^{ah} e^{-x^2}dx,$$

где $h$—высота над краем диска. Положение края ($h=0$) соответствует яркости 1/2. Яркость диска на близком расстоянии от края принята за 1. То обстоятельство, что данный метод не учитывает явления потемнения к краю диска, приводит к не большой систематической ошибке в определении положения края диска, которая практически постоянна в видимом участке спектра. Расчеты показывают, что если измерения ведутся с точностью до 0″.1, то с величиной этой ошибки мы можем не считаться.

При $J(h_1)=1/4$ мы отсчитываем высоту $h_1$ от $h=0$, отсюда: $J(h_1)=\frac{1}{2}[1-F(ax)]=\frac{1}{4}$ или $F(ah_1)=1/2$. По таблице интегралов вероятности находим $ah_1$, которое соответствует $F(ah_1)=1/2$, так как $h_1$ известно, то отсюда находим $a$—амплитуды дрожания. При помощи этого метода нами вычислены амплитуды колебания для двух участков спектра (из фильма, снятого 14/VIII—1959 г. в $05^h\ 00^m UT$, высота Солнца $H_\odot=10°$) с $\lambda_1=3968$ Å[линия $H(Ca)^+$] и $\lambda_2=5500$ Å, причем длина волны последнего участка определена по дисперсионной кривой. Для этого делались отсчеты на микрофотометре МФ-2 поперек направления дисперсии и, как указано выше, поперек края через интервалы в 0,1 *мм*. Размер фотометрируемого участка на негативе—0,1×0,1 *мм*. Интенсивности определялись по двум характеристическим кривым, соответствующим $\lambda_1$ и $\lambda_2$. В табл. 1 приводятся средние значения из трех серий измерений интенсивностей $\frac{J_1}{J_\Phi}$ и $\frac{J_2}{J_\Phi}$, где индексы 1 и 2 соответствуют $\lambda_1$ и $\lambda_2$. В 4-й строке табл. 1 приведены значения высот, отсчитываемых от края диска (положительным считается направление от центра диска к краю). Из таблицы следует (при условии равенства $F=(ah_1)=\frac{1}{2}$), что $h_1=0,8$ *мм*, а $ah_1=0,5$ *мм* и $a_1=a_2=2″,7$, т. е. амплитуда колебаний не меняется в зависимости от длины волны на участке спектра от $\lambda_1=3900$ Å до $\lambda_2=5500$ Å.

Для установления изменения фазы в зависимости от λ рассмотрим следующие фильмы.

Фильм 1 снят 9/V 1960 г. в $11^h\ 30^m UT$, $H_\odot=43°$. Частота съемки—24 *колебания/сек*. Ширина щели спектрографа—0,1 *мм*. В результате фотометрирования вышеописанным способом установлено, что колебания края в выбранных нами двух длинах волн ($\lambda_1=3963$ Å и



*Таблица 1*

| № | $\frac{J_1}{J_\Phi}$ | $\frac{J_2}{J_\Phi}$ | *h*, *мм* |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 5 | 3,0 | −0,6 |
| 2 | 3,5 | 3,0 | 0,5 |
| 3 | 3,3 | 2,8 | 0,4 |
| 4 | 3,2 | 2,4 | 0,3 |
| 5 | 3,0 | 2,1 | 0,2 |
| 6 | 2,4 | 1,8 | 0,1 |
| 7 | 1,8 | 1,5 | 0,0 |
| 8 | 1,4 | 1,5 | +0,1 |
| 9 | 1,3 | 1,4 | 0,2 |
| 10 | 1,2 | 1,2 | 0,3 |
| 11 | 1,2 | 1,1 | 0,4 |
| 12 | 1,1 | 1,0 | 0,5 |
| 13 | 1,1 | 1,0 | 0,6 |
| 14 | 1,0 | 1,0 | 0,7 |
| 15 | 1,0 | 1,0 | 0,8 |

*Таблица 2*

| № точки | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Время, *сек* | 00 | 0,04 | 0,08 | 0,12 | 0,16 | 0,36 | 0,40 | 0,76 | 0,84 |
| Величина отклонения для $\lambda_1=3963$Å | +1″,3 | +0′,7 | +0″,7 | −0″,7 | −0″,7 | +0″,3 | +0″,3 | −0″,3 | −0″,4 |
| Величина отклонения для $\lambda_2=5200$Å | +1″,3 | +0″,7 | +0,″7 | −0″,7 | −0″,7 | 0″,0 | 0″,0 | −0″,3 | −0″,3 |

*Таблица 3*

| № точки | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Время, *сек* | 0,40 | 0,48 | 0,52 | 0,5 | 0,68 | 0,72 | 0,76 | 0,80 | 0,84 | 0,88 |
| Величина отклонения для $\lambda_1$ | 1″,1 | −0,″4 | +0″,7 | −0″,3 | −0″,1 | −1″,3 | −0″,2 | +1″,2 | +1″,4 | −0″,1 |
| для $\lambda_2$ | 1″,1 | −0″,4 | +0″,8 | −0″,4 | −0″,1 | −1″,0 | −0″,2 | +1″,3 | +1″,6 | −0″,1 |
| для $\lambda_3$ | 1″,1 | −0″,4 | +0″,8 | −0″,4 | −0″,1 | −1,″0 | −0″,3 | +1″,3 | +1″,6 | −0″,1 |

$\lambda_2=5200$ Å) одинаковы по фазе. Величины отдельных отклонений точки края ($h=0$) от среднего значения приведены в табл. 2.

Фильм 2 снят 22/V 1960 г. в $14^h\ 30^m UT$, $H_\odot=52°$, частота съемки—24 *колебания/сек*. Ширина щели спектрографа 0,1 *мм*. Колебания точки края для рассмотренных выше длин волн $\lambda_1$, $\lambda_2$ и кроме того $\lambda_3=6500$ Å и в этом случае независимо от λ (табл. 3).

Таким образом, нами не обнаружена какая-либо зависимость дрожания изображения от длины волны. Ввиду того, что коэффициент

преломления в земной атмосфере зависит от $\lambda$, следовало ожидать, что амплитуда дрожания будет функцией $\lambda$, но, как показывают наблюдения, сами колебания по всему спектру происходят синхронно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крат В. А. Тр. Совещания по исследованию мерцания звезд. М., 18—20 июня 1958.
2. Крат В. А. и Крат Т. В. Изв. ГАО, №153, 1955.

М. Кәримбәјов

## Күнәш әкси кәнарынын мүхтәлиф далға узунлугларында титрәмәси

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә мүәллиф Пулководакы үфүги Күнәш телескопунун кассегрен фокусунда Күнәш әкси кәнарынын титрәмәсини кинематографија үсулу илә апардығы тәдгигатын нәтичәсини верир. Мәгсәд Күнәш әкси кәнарынын титрәмәсини мүхтәлиф далға узунлугларында тәдгиг етмәкдән ибарәт олмушдур. Алынмыш мүшаһидә материалларынын тәдгиги әсасында мүәллиф бу нәтичәјә кәлмишдир ки, титрәмәнин амплитуда вә фазасы далға узунлуғундан асылы дејилдир.



1960-чы ИЛДӘ «АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ» ЖУРНАЛЫНДА (ФИЗИКА-РИЈАЗИЈЈАТ ВӘ ТЕХНИКА ЕЛМЛӘРИ СЕРИЈАСЫ) ДӘРЧ ОЛУНМУШ МӘГАЛӘЛӘРИ КӨСТӘРИЧИСИ.

Абдинов М. А. Температур вә тәзјиги нәзәрә алмагла дашлашмыш семент күтләсинин гују дивары илә кип бирләшмәси гүввәсинин експериментал тә'јини үчүн гурғу. № 6, сәһ. 155.

Абдуллајев Һ. Б., Әлијев Г. М., Антонов В. Б., Башшалијев Ә. А., Гулијев А. З., Нәсиров Ј. Н. Тәбии галенитин вә халкопиритин истилик вә електрик хассәләринин тәдгиги. № 2, сәһ. 49.

Абдуллајев Һ. Б., Нани Р. Һ., Нәсиров Ј. Н. Тәбии кобалтинин истилик вә електрик хассәләринин тәдгиги № 3, сәһ. 55.

Абдуллајев Һ. Б., Бәкиров М. Ј., Гасымов Р. Б., Нәсиров Ј. Н. Селен фотоелементләриндә *p—n* кечидин әмәлә кәлмәси вә арашдырылмасы. № 4, сәһ. 65.

Абдуллајев Һ. Б., Гасымов Р. Б., Бәкиров М. Ј., Нәсиров Ј. Н. Истилијә давамлы селен фотоелементләри № 5, сәһ. 79.

Абдуллајев Һ. Б., Бәкиров М. Ј., Гасымов Р. Б., Нәсиров Ј. Н. CdO, CdS, CdSe вә CdTe тәбәгәли селен фотоелементләри. № 6, сәһ. 77.

Ағајев А. И. Нефт туллантыларындан су сызылмасынын гаршысыны алан бир материал кими истифадә едилмәси. № 1, сәһ. 91.

Антсиферов В. С. Зәрбә далғалы бирөлчүлү гурунтун һәрәкәти һаггында, № 5, сәһ. 19.

Ахундова Г. В., Дарчија Ш. Улдуз әксләри кејфијјәтинин визуал мүшаһидә методикасы һаггында. № 3, сәһ. 129.

Бағбанлы Ә. А. Нефтчыхарма мә'луматларынын истифадә олунмасына даир. № 1, сәһ. 121.

Бағыров М. Ә., Вечхајзер Г. В. Нефтвермәни артырмаг мәгсәдилә нефт лајына електротермики тә'сир. № 2, сәһ. 123.

Бајасанов Д. Б. Газын сәрф вә тәзјигини теле өлчән веричинин кинематик схеминин графоаналитик һесабы. № 1, сәһ. 57.

Ваһабов Р. М. Ири дәнәли материалларын сүзкәч хүсусијјәтинин тәдгиги № 4, сәһ. 133.

Ваһабов М. Ј. Сакит чај сујунда гатышыг тәбии лилләрин чөкмәси. № 5, сәһ. 99.

Вәкилов Ш. И. Потенсиал нәзәријјәсинин үчөлчүлү бир сәрһәд мәсәләси һаггында. № 4, сәһ. 19.

Гасымов Ә. Ф., Мећдијев В. М. Ики өзлү мајенин шагулу даирәви бору кәмәриндә јанашы һәрәкәтинә даир. № 5, сәһ. 131.

Гәдимов Ј. Б., Листенгартен Б. А. Импулс дөврәләри нәзәријјәсинин нефт гујулары газымасындакы електрик интигалынын тәдгиги үчүн тәтбиги № 3, сәһ. 73.

Гәдиров Н. Б. Сүрүшмә јастыгларындан ахыб кечән јағ тәбәгәсиндә тәзјигләрин пајланмасы мәсәләсинә даир. № 5, сәһ. 45.

Гәнбәров Һ. С. Газлы маје һәрәкәтинин тәнликләр системи һәллинин бир максимум вә минимум теореми һаггында. № 4 сәһ. 47.

Гулијев К. Һ., Мәһәррәмов Ј. М. Су вә су бухарынын газ-дизел мүһәррикинин истилик просеси параметрләринә тә'сиринин нәзәри тәдгиги. № 4, сәһ. 103.

Гулијев М. А. Електрик модели васитәси илә торпаг бәнддән сујун сүзүлмәсинин тәдгиги. № 1, сәһ. 31.

Гурбанов С. Һ., Һәсәнов Г. Т. Гују дивары на һидродинамик тәзјигин дәјишмәсинә даир. № 5, сәһ. 61.

Дадашова Т. Д. Бирчинсли олмајан лајда маје вә газын гәрарлашмамыш һәрәкәтинин автомодел һәлли. № 1, сәһ. 105.

Дадашов Ч. Р. Автомобилин сүр'әтләндирилмә һәрәкәтинин експериментал тәдгиги үсулу һаггында. № 3, сәһ. 107.

Әләкбәров О. Д. Чөкүнтүтәмизләјән сифонларын тәтбиги мәсәләсинә даир. № 5, сәһ. 119.

Әләкбәров О. Д. Һидрогарышыгларын (су вә чај чөкүнтүләри) һәрәкәтинин өјрәнилмәси үчүн сифон гурғуларына даир. № 6, сәһ. 163.

Әлијев Н. Ә., Мәһәррәмова Ф. Г. Дәликачан стан башлыгларының истилик-кечирмә әмсалларының иш просесиндә дәјишмәсинин тәдгиги. № 1, сәһ. 41.

Әлијев Б. Д., Абдуллајев Һ. Б., Әлијев Г. М. Селенин електрик хассәсинә бисмут ашгарларынын тә'сири. № 2, сәһ. 57.

Әлизадә А. С. Азәрбајчан ССР-дә гасырға һадисәләринин комплекс тәдгигинин тәшкили. № 2, сәһ. 101.

Әлијев М. И., Ахундова С. А. Таллиумун селенин физики хассәләринә тә'сиринин тәдгиги. № 3, сәһ. 47.

Әлизадә А. С., Јесман В. И. Азәрбајчанын күләк енеркијасы еһтијатлары вә онларын халг тәсәррүфатында истифадә едилмәси. № 3, сәһ. 83.

Әлијев Ф. С. Һилберт операторлу тәнликләр үчүн Коши мәсәләси. № 4, сәһ. 3.

Әлијев О. Х. М. Сүрүшмәјә мүгавимәт көстәрмәјән еластик јарымфазанын сәрбәст сәтһиндән бирәлчүлү сферик далғаларын ин'икасы. № 2, сәһ. 35.

Әлијев О. Х. М. Еластики мүһитдә сферик зәрбә далғаларынын јајылмасы вә сәрбәст сәрһәддән әкс олунмасы. № 4, сәһ. 35.

Әлијев Б. Д., Әлијев Г. М. Селенин истиликкечирмә вә електриккечирмәсинә кадмиум ашгарларынын тә'сири. № 5, сәһ. 85.

Әлијев Г. М., Әлијев Б. Д., Кәримов И. К. Кадмиум ашгарлы селенин истилик кечирмәсинин температурдан асылылығы. № 6, сәһ. 99.

Әликишибәјова Т. М. Күчдән дүшмүш нефт лајларына онларын дахилиндә јанғы очағы јаратмагла алынан истилик васитәсилә тә'сир едилмәси. № 2, сәһ. 167.

Әмәнзадә Ј. Ә. Охлары бир-бириниң үзәринә дүшмәјән даирәви бошлуглу, квадрат ен кәсикли призматик брусун бурулмасында јерли кәркинликләр. № 1, сәһ. 11.

Әмирханова Ч. Х. InSb бирләшмәсиндә термо вә галваномагнит еффектләр. № 1, сәһ. 45.

Әфәндијев Һ. Ә., Казинетс М. М. Cu—Se системиндә фаза әмәләкәлмә просесләринин електронографик тәдгиги № 5, сәһ. 91.

Заманов Т. А. Динамик системләрин хәтти фазалара јерләшдирилмәси. № 5, сәһ. 35.

Ибраһимов И. Ә. Ардычыл гошулмуш конденсаторлар гурулушу илә тәчһиз едилмиш 35 вә 110 *кв* кәркинликли хәтләрин өтүрмә күчүнүн тә'јини. № 6, сәһ. 129.

Иманов Л. М., Зүлфүгарзадә К. Ә. 11,5 *см*-лик далғада хлорбензол вә бромбензолда комплекс диелектрик әмсалынын температур асылылығы. № 6, сәһ. 117.

Исмајылов Һ. Ч. Үчфазлы асинхрон мүһәррикинин конденсатор мүһәррики режиминдә ишләмәси. № 5, сәһ. 113.

Јагубов С. Ј. Банах фәзасында симметрик операторларын өз-өзүнә гошма кенишләнмәләри һаггында. № 3, сәһ. 7.

Јусифова В. Д. Үфиги вә манил конденсаторларын харичи сәтһи үзәриндә бензол бухарынын конденсләшмә заманы истилик вермә просесинин тәдгиги. № 1, сәһ. 83.

Кәримбәјов М. Б. Күнәш әксинин титрәмәсинин Шамахы рәсәдханасында мүшаһидәси. № 4, сәһ. 97.

Кәримбәјов М. Күнәш әкси кәнарының мүхтәлиф далға узунлугларында титрәмәси. № 6, сәһ. 171.

Кәримов К. Ә. Бөјүк деформасијаларда дартылан зәрбә диаграмының тә'јин үсулу. № 3, сәһ. 23.

Крат В. А., Султанов Һ. Ф., Сорин С. И. Азәрбајчанын астроиглимининн өјрәнилмәси вә Шамахы астрофизика рәсәдханасының тикилмәси үчүн јер сечилмәси саһәсиндә апарылмыш експедисија ишләри һаггында № 3, сәһ. 151.

Күлмәммәдов И. И. Асинхрон мүһәррикин индуктив мүгавимәтинин тә'јин едилмәси. № 3, сәһ. 121.

Күлмәммәдов И. И. Автоматик идарәетмә заманы асинхрон мүһәррикин ишәсалма реостаты пилләләринин вә чевиркәч моментинин тә'јини № 5, сәһ. 109.

Манафлы Е. И., Талиби М. Ә. Азәрбајчан ССР әразиси јатагларындан көтүрүлмүш галенитин бә'зи хассәләринә даир. № 6, сәһ. 69.

Мәммәдјаров О. С. Нисбәтән узун електрик верилиш хәтләринин кечирмә габилијјәтинин артырылмасы һаггында. № 2, сәһ. 133.

Мәммәдјаров О. С. Ганалы шәбәкәләрдә күчләрин игтисади пајланмасының тәнзимчи трансформаторларла әлдә едилмәси. № 3, сәһ. 113.

Мәммәдов И. А. Калибрләрдә јајма просесиндә металларын пластик ахмасы. № 6, сәһ. 21.

Мәммәдов К. П. Алмаз типли кристалларда атомларын әлагә нөвүнүн рентгенографик тәдгиги. № 6, сәһ. 105.

Мәммәдов Ш. Н., Мухтаров Һ. Һ. Дамартипли јатагларын ишләнилмәсиндә филизин кичик диаметрли лагымларла сәмәрәли гопарылмасы. № 2, сәһ. 141.

Мәммәдов Н. М. Енли астаналы суашыранын сәрф әмсалынын аралыг дајагларын планда јерләшдирилмәсиндән асылы олараг дәјишмәси. № 3, сәһ. 93.

Мәммәдов Ч. Суашыранлар үзәриндә ахымын һидравлик режим мәсәләсинә даир. №1. сәһ. 67.

Мәммәдов Ч. Ә. Тәчрүбә профилли суашыранларын субурахма габилијјәти. № 4, сәһ. 139.

Мәммәдов (Хәјјами) Г. М. Мәхсуси функсијаја көрә бир асимптотик ајрылма һаггында. № 1, сәһ. 3.

Мәммәдов Г. М. (Хәјјами). $l_1$ фәзасында мәһдуд бир нечә матриса һаггында. № 5, сәһ. 57.

Мәммәдов Г. (Хәјјами) IX—XV әсрләрдә јахын вә орта шәрг ријазијјаты һаггында. № 6, сәһ. 31.



Мирзәјева Л. М. Боруларда икифазалы (газ вә бәрк маддә) ахынын һидродинамик стабилләшмәси һаггында. № 4, сәһ. 113.

Мустафајев Г. Ә. Һоломорф функсијалар чүтүнә тә'сир едән оператор һаггында. № 4, сәһ. 51.

Назијев Ј. М., Голубјев И. Ф. Ихтијари шәкилдә олан бикалориметрләр үчүн һесаблама тәнлији. № 6, сәһ. 145.

Нәбибәјов Ч. К. Машын тә'сирләндиричиси илә тәчһиз едилән синхрон генераторларын фаз компаундлашдырылмасы. № 3, сәһ. 99.

Нәсиров Н. Һидрокен вә метан газларынын азот 4-оксидлә јанмасында бә'зи мәсәләләр. № 2, сәһ. 65.

Нәчәфов Г. Ә. Бир синиф хәтти олмајан интеграл тәнликләр системи һәллинин будагланма нөгтәси. № 3, сәһ. 15.

Новрузов Ә. Ә. Икинчи тәртибли хәтти еллиптик тәнлик үчүн бә'зи кејфијјәт теоремләри һаггында № 5, сәһ. 39.

Өмәрова А. М. Газыма боруларынын автоматик енмә әмәлијјатынын тәнзими системиндә кечид просесләринин тәдгиги. № 1, сәһ. 97.

Расизадә Ј. М. Сементләмә просесиндә гују диварына тә'сир едән һидродинамик тәзјигин дәјишмәси һаггында. № 1, сәһ. 113.

Рәһманов П. А. Сәлт мүһитдә еластики телә енинә зәрбәнин арашдырылмасы. № 5, сәһ. 3.

Рәһманов П. Ә. Сәлт мүһитдә еластики телә енинә зәрбәнин арашдырылмасы. № 6, сәһ 37.

Сәмәдова С. А. Гејри-хәтти ади диференсиал тәнликләр системинин дөврі лимит режиминин варлығы. № 2, сәһ. 27.

Султанов Ә. М., Хәлилов Ә. Х. Бә'зи поликристаллик кристаллофосфорларда ишығвермәнин сөнмә гануларының осциллографик фосфороскоп васитәсилә тәдгиги. № 3, сәһ. 31.

Султанов Б. И. Өзлүлү-пластик мајеләрин мәсамәли мүһитдә сүзүлмәси һаггында. № 5, сәһ. 125.

Сүлејманов Н. М. Хүсуси төрәмәли сонсуз диференсиал тәнликләр системи үчүн Коши мәсәләси һәллинин Шилов мә'насында параболик системләр һалы үчүн арашдырылмасы. № 4, сәһ. 55.

Талиби М. Ә. Бөјүк сүр'әтли електронларын CdS—Se вә CdSe+Se *p—n* кечидләринә тә'сириндән ЕһГ-нин јаранмасы. № 4, сәһ. 79.

Талиби М. Ә. Јусифов Ә. Һ. Ренткен вә гамма шүаларының CdS монокристалларының електрик мүгавимәтинә тә'сининин бә'зи хүсусијјәтләринә даир. № 6, сәһ. 91.

Топчубашов М. А. Хасмәммәдов Ф. И. Нәсибов З. Һ. Типик атмосфер нефтајырма гурғулары борулу собаларының температур режиминин автоматик тәнзим едилмәси. № 2, сәһ. 155.

Фунтаков В. Н. $(0, \infty)$ јарымохда өз-өзүнә гошма олмајан ихтијари чүт тәртибли диференсиал операторун мәхсуси функсијаларына көрә ајрылышы һаггында. № 6, сәһ. 3.

Хәлилов Ә. Х., Султанов Һ. Ә. Молекулларын сүн'и истигамәтләнмиш назик тәбәгәләрдә удманын дихроизминин тәдгиги. № 1, сәһ. 35.

Хәлилов Ә. Х. Исајев Ф. К. Поликристаллик CdS јарымкечиричисинин фотоелектрик һәссаслығының спектрал пајланмасының конденсатор методу илә тәдгиги. № 2, сәһ. 75.

Хәлилов Ә. Х., Рзајева С. З. Молекуллараралы гаршылыглы тә'сирин карбонидрокенләрин комбинасијалы сәпилмә хәтләринин интенсивлијинә тә'сири. № 2, сәһ. 79.

Хәлилов Ә. Х., Салајев Е. Ј. Бә'зи чохактиваторлу гәләви һалокен кристаллофосфорларын термошуаланмасының тәдгиги. № 3, сәһ 39.

Хәлилов Ә. Х., Султанов Һ. Ә. Молекулларын јарымкечиричи кристалларын сәтһиндә адсорбсијасының кристалларын диффуз әксетдирмә спектрләринә тә'сири. № 3, сәһ. 59.

Хәлилов Ә. Х., Мәммәдов Ә. П. Ренткен шуалары илә һәјәчанландырылмыш бә'зи NaCl—фосфорларын термошуаланмасының тәдгиги. № 5, сәһ. 73.

Хәлилов Ә. Х., Әлијева Т. Ч. Бә'зи KCl кристаллофосфорларының термошуаланмасының тәдгиги, № 6, сәһ. 85.

Хроника. № 2, сәһ. 179.

Хроника. № 3, сәһ. 161.

Һачыјев С. Ә. *К*-мезонларының парчаланмасына даир. № 4, сәһ. 73.

Һәбибзадә Ә. Ш. Бир үмумиләшмиш Һилберт мәсәләси һаггында. № 2, сәһ. 19.

Һәсәнов Ә. М. Газлы нефтин сүзүлмәсинә даир. № 5, сәһ. 29.

Һүсејнов Ф. Һ. Асинхрон мүһәррикләрин ишчи характеристикаларының гурулмасы мәсәләсинә даир. № 1, сәһ. 73.

Һүсејнов Ф. Һ. Һачыјев Т. Н. Енержи-систем јүкүнүн статик вә динамик характеристикалары. №2, сәһ. 107.

Һүсејнов Р. Ә., Һүсејнов М. Ч., Һәсәнәлизадә Ә. Һ., Һүсејнов Г. И., Мәликов Һ. О., Авакова Л. М. БКИ вә БӘИ дөврүндә Азәрбајчан ССР Елмләр Академијасы Астрофизика бөлмәсинин астрономија стансијасында мүшаһидә олунмуш хромосфер алышмаларына даир мә'лумат. № 3, сәһ. 143.

Һүсејнов Н. Г., Туров Е. А. Маргансла бир нечә азот групу елементләри бирләшмәләринин магнит хассәләриндәки хүсусијјәтләринә даир. № 4, сәһ. 85.

Һүсејнов Р. Ә. 29 март 1960-чы ил хромосфер алышмасы вә бу алышманын күнәш ләкәләри групу илә әлагәси һаггында. № 5, сәһ 137.

Һүсејнбәјова. А. М. Чухур потенсиаллы мәсәләләрдә мәхсусу функсијалар вә мәхсуси әдәдләрин асимптотик тәфриги. № 6, сәһ. 49.

Чавадов М. Һ. Икитәртибли һиперболик типли дифференсиал тәнликләри үчүн

гојулмуш гарышыг мәсәләнин үмумиләшмиш функсијалар синфиндә һәлли. № 3, сәһ. 3.

Чәфәров Ә. С. *n*-һармоник функсијаларын бә'зи хассәләри һаггында. № 2, сәһ. 3.

Чуварлы Ч. М., Әбдүррәһманов. М. И. Шәбәкәнин номинал кәркинлији вә конфигурасијасынын јерләбирләшдиричи арасыкәсилән гөвсләрдән әмәлә кәлән ифрат кәркинликләрә тә'сири. № 2, сәһ. 85.

Чуварлы Ч. М. Чәфәрова М. М. Изољаторларын үзәриндәки шеһ дамлаларынын бухарланма заманына тач һадисәсинин тә'сири. № 2, сәһ. 95.

Чуварлы Ч. М., Мухарскаја Л. А Трансформатор јағы—нафтен туршуларының натриум сабунлары системинин електрик хассәләринә сәтһи актив маддәләрин әлавә олунмасынын тә'сири. № 3, сәһ. 65.

Чуварлы Ч. М., Климова Н. В., Мәликова Т. Ә. Коалессенсија просесиндә емулсијанын електрик кечиричилији. № 4, сәһ. 125.

Шәмсијев А. Ә. Газылан гујуда каверна әмәләкәлмә сәбәби һаггында. № 6, сәһ. 151.

Шәмсијев А. Ә. Бабајев Н. Б., Финкелштејн Г. М. Горујучу кәмәрин гујуда бурахылмасы заманы әзилмәси сәбәбләриндән бири һаггында. № 6, сәһ. 159.

# УКАЗАТЕЛЬ

## УКАЗАТЕЛЬ

## ОПУБЛИКОВАННЫХ СТАТЕЙ В «ИЗВЕСТИЯХ» АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР (СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК) ЗА 1960 ГОД

Абдинов М. А. Установка для экспериментального определения силы сцепления цементного камня со стенками скважины с учетом температуры и давления, № 6, стр. 155.

Абдуллаев Г. В., Алиев Г. И., Антонов В. Б., Башшалиев А. А., Кулиев А. З., Насиров Я. Н. Исследование тепловых и электрических свойств природного галенита и халькопирита, № 2, стр. 49.

Абдуллаев Г. Б., Бакиров М. Я., Гасымов Р. Б., Насиров Я. Н. Исследование образования р-п перехода в селеновых фотоэлементах, № 4, стр. 65.

Абдуллаев Г. Б., Бакиров М. Я., Гасымов Р. Б., Насиров Я. Н. Селеновые фотоэлемены со слоями CdO, CdS, CdSe и CdTe, № 6, стр. 77.

Абдуллаев Г. Б., Гасымов Р. Б., Бакиров М. Я., Насиров Я. Н. Термоустойчивые селеновые фотоэлементы, № 5, стр. 79.

Абдуллаев Г. Б., Нани Р. Х., Насиров Я. Н. Исследование тепловых и электрических свойств природного кобальтина, № 3, стр. 55.

Агаев А. И. Использование нефтяных отходов в качестве противофильтрационного материала, № 1, стр. 91.

Алекперов О. Д. К вопросу применения сифона в качестве наносоудалителя, № 5, стр. 119.

Алекперов О. Д. Сифонные установки для изучения движения гидросмесей, № 6, стр. 163.

Алиев О-Х. М. Отражение одномерных сферических волн от свободной поверхности упругого полупространства, не сопротивляющегося сдвигу, № 2, стр. 35.

Алиев О-Х. М. Распространение и отражение от свободной границы сферических ударных волн в упругой среде, № 4, стр. 35.

Алиев Ф. С. Задача Коши для уравнения с оператором Гильберта, № 4, стр. 3.

Алиев Б. Д., Абдуллаев Г. Б., Алиев Г. М. Электрические свойства селена с примесью висмута, № 2, стр. 57.

Алиев Б. Д., Алиев Г. М. О влиянии примеси кадмия на теплопроводность и электропроводность селена, № 5, стр. 85.

Алиев Г. М., Алиев Б. Д., Керимов И. Г. Температурная зависимость теплопроводности селена с примесью кадмия, № 6, стр. 99.

Алиев М. И., Ахундова С. А. Исследование влияния таллия на физические свойства селена, № 3, стр. 47.

Алиев Н. А., Магеррамова Ф. Г., Исследование изменения коэффициента теплопроводности оправ прошивного стана в процессе работы, № 1, стр. 41.

Ализаде А. С. Постановка комплексного исследования грозовых процессов в Азербайджанской ССР, № 2, стр. 101.

Ализаде А .С., Есьман В. А. Ветроэнергетические ресурсы Азербайджана и пути их использования в народном хозяйстве, № 3, стр. 83.

Аликишибекова Т. М. Тепловое воздействие на истощенные нефтеносные пласты методом создания фронта горения в них, № 2, стр. 167.

Аменздаде Ю. А. Местные напряжения при кручении призматического бруса квадратного сечения с круглым насосным отверстием, № 1, стр. 11.

Амирханова Д. Х. Термо- и гальваномагнитные эффекты в антимониде индия, № 1, стр. 45.

Анциферов В. С. Одномерные движения грунта с ударными волнами, № 5, стр. 19.

Ахундова Г. В., Дарчия Ш. К. методике визуальных наблюдений качества изображений звезд, № 3, стр. 129.

Багбанлы Э. А. О возможности использования данных о добыче нефти, № 1, стр. 121.

Багиров М. А., Вечхайзер Г. В. Электротермическое воздействие на нефтя-

ные пласты в целях интенсификации нефтеотдачи, № 2, стр. 123.

Баясанов Д. Б. Графо-аналитический расчет кинематической схемы телеизмерительного датчика давления и расхода газа, № 1, стр. 57.

Вагабов Р. М. Исследование фильтрационных свойств крупно-зернистых материалов, № 4, стр. 133.

Вагабов М. Ю. Выпадение смеси естественных наносов в стоячей воде, № 5, стр. 99.

Векилов Ш. И. Об одной трехмерной граничной задаче теории потенциала, № 4, стр. 19.

Габибзаде А. Ш. Обобщенная задача Гильберта, № 2, стр. 19.

Гаджиев С. А. К распаду $K_{e\mu 3}$ мезонов, № 4, стр. 73.

Гасанов А. М. К теории фильтрации газированной нефти, № 5, стр. 29.

Гулиев М. А. Исследование фильтрации воды через земляную плотину на электрической модели, № 1, стр. 31.

Гурбанов С. Г., Гасанов Г. Т. Об изменении давления на стенки скважины, № 5, стр. 61.

Гусейнбекова А. М. Асимптотическое разложение собственных функций и собственных значений в задачах с потенциальными ямами, № 6, стр. 49.

Гусейнов Ф. Г. К вопросу построения рабочих характеристик асинхронных двигателей, № 1, стр. 73.

Гусейнов Р. Э. Хромосферная вспышка 29 марта 1960 г. и о ее связи с группой солнечных пятен, № 5, стр. 137.

Гусейнов Р. Э., Гусейнов М. Дж. Гасанализаде А. Г., Гусейнов К. И., Меликов Г. О., Авакова Л. М. Данные о хромосферных вспышках, наблюдавшихся на астрономической станции Сектора астрофизики Академии наук Азербайджанской ССР за период МГГ и МГС, № 3, стр. 143.

Гусейнов Ф. Г., Гаджиев Т. Н. Статические и динамические характеристики нагрузки энергосистем, № 2, стр. 107.

Гусейнов Н. Г., Туров Е. А. К вопросу об особенностях магнитных свойств некоторых соединений марганца с элементами подгруппы азота, № 4, стр. 85.

Гюльмамедов И. И. Определение индуктивного сопротивления асинхронного двигателя, № 3, стр. 121.

Гюльмамедов И. И. Определение момента переключения ступеней пускового реостата асинхронного двигателя при автоматическом управлении, № 5, стр. 109.

Дадашев Д. Р. К методике экспериментального исследования разгона автомобиля, № 3, стр. 107.

Дадашева Т. Д. Автомодельные решения задач о нестационарной фильтрации жидкости и газа в неоднородных по проницаемости пластах, № 1, стр. 105.

Джавадов М. Г. Решение смешанной задачи для общего гиперболического уравнения второго порядка в классе обобщенных функций, № 3, стр. 3.

Джафаров А. С. О некоторых свойствах n-гармонических функций, № 2, стр. 3.

Джуварлы Ч. М., Абдурахманов М. И. Влияние номинального напряжения и конфигурации сети на перенапряжения от перемежающихся заземляющих дуг в сети с изолированной нейтралью, № 2, стр. 85.

Джуварлы Ч. М., Джафарова М. М. Влияние короны на время испарения капель росы на поверхности изоляторов, № 2, стр. 95.

Джуварлы Ч. М., Мухарская Л. А. Влияние поверхностно-активных добавок на электрические свойства системы натриевые мыла нафтеновых кислот—трансформаторное масло, № 3, стр. 65.

Джуварлы Ч. М., Климова Н. В., Меликова Т. А. Электропроводность эмульсии в процессе ее разрушения, № 4, стр. 125.

Заманов Т. А. О вложимости динамических систем в линейные пространства, № 5, стр. 35.

Ибрагимов И. Э. Определение пропускной способности линий 35 и 110 кв. с устройством последовательно включенных конденсаторов, № 6, стр. 129.

Иманов Л. М., Зульфугарзаде К. Э. Температурная зависимость комплексной диэлектрической проницаемости хлорбензола и бромбензола на волне 11,5 см., № 6, стр. 117.

Исмайлов И. Д. Работа трехфазного асинхронного двигателя в режиме конденсаторного, № 5, стр. 113.

Кадиров Н. В. К вопросу о распределении давлений в слое масла протекающего через подшипники скольжения, № 5, стр. 45.

Кадымов Я. Б., Листенгартен Б. А. Применение теории импульсных цепей для исследования электропривода бурения нефтяных скважин, № 3, стр. 73.

Камбаров Г. С. Об одной теореме максимума и минимума для решения системы уравнения газированной жидкости, № 4, стр. 47.

Касимов А. Ф., Мехтиев В. М. Об одном случае раздельного движения двух вязких жидкостей в вертикальной колонне круглых труб, № 5, стр. 131.

Керимбеков М. Б. Наблюдения дрожаний изображения Солнца в Шемахинской обсерватории, № 4, стр. 97.

Керимбеков М. Дрожание изображения солнечного края в различных длинах волн, № 6, стр. 171.

Керимов К. А. Методика определения ударной диаграммы растяжений при больших деформациях, № 3, стр. 23.

Крат В. А., Султанов Г. Ф., Сорин С. И. Об экспедиционных работах по обследованию астроклимата Азербайджана и выборе места строительства Шемахинской астрофизической обсерватории, № 3, стр. 151.

Кулиев К. Г., Магерамов Е. М. Теоретическое исследование влияния воды и водяных паров на параметры теплового процесса газодизельного двигателя, № 4, стр. 103.



Мамедов Дж. К вопросу гидравлического режима потока на водосливных плотинах, № 1, стр. 67.

Мамедов К. М. (Хайями). Об одном асимптотическом разложении по собственным функциям, № 1, стр. 3.

Мамедов К. М. (Хайями). О математике Ближнего и Среднего Востока IX—XV вв. № 6, стр. 31.

Мамедов К. Т. (Хайями). О некоторых органических матрицах в $l_1$, № 5, стр. 57.

Мамедов И. А. Пластическое течение металла при прокате в калибрах, № 6, стр. 21.

Мамедов К. П. Рентгенографическое исследование характера связи атомов в кристаллах типа алмаза, № 6, стр. 105.

Мамедов Н. М. Изменение коэффициента расхода водослива с широким порогом в зависимости от планового расположения бычков, № 3, стр. 93.

Мамедов Д. А. Определение пропускной способности водослива практического профиля, № 4, стр. 139.

Мамедов Ш. Н., Мухтаров Г. Г. Эффективная отбойка руды шпурами уменьшенного диаметра при разработке жильных месторождений, № 2, стр. 141.

Мамедъяров О. С. О повышении пропускной способности протяженных линий передач, № 2, стр. 133.

Мамедъяров О. С. Достижение экономического распределения мощностей в замкнутых сетях с помощью трансформаторов с поперечным регулированием напряжения, № 3, стр. 113.

Манафли Э. Т., Талиби М. А. О некоторых свойствах природного галенита месторождений Азербайджанской ССР, № 6, стр. 69.

Мирзоева Л. М. О гидродинамической стабилизации двухфазного потока (газ — твердое вещество) в трубах, № 4, стр. 113.

Мустафаев К. А. Об одном операторе, действующем на пару голоморфных функций, № 4, стр. 51.

Набибеков Ч. К. Фазовое компаундирование синхронных генераторов с машинным возбудителем, № 3, стр. 99.

Наджафов К. А. Точки разветвления решений одной системы нелинейных интегральных уравнений, № 3, стр. 15.

Назиев Я. М., Голубев И. Ф. Расчетное уравнение для бикалориметров произвольной формы, № 6, стр. 145.

Насиров Я. Н. О некоторых вопросах горения смесей водорода и метана с двуокисью азота, № 2, стр. 65.

Новрузов А. А. О некоторых качественных теоремах для линейного эллиптического уравнения второго порядка, № 5, стр. 39.

Омарова А. М. Исследование переходных процессов в системе автоматического регулирования спуска бурильного инструмента, № 1, стр. 97.

Раси-Заде Я. М. Об изменении гидродинамического давления на стенки скважины в процессе цементировки, № 1, стр. 113.

Рахманов П. А. Исследования поперечного удара по гибкой нити, находящейся в сплошной среде, № 5, стр. 3.

Рахманов П. А. Исследования поперечного удара по гибкой нити, находящейся в сплошной среде (большие деформации), № 6, стр. 37.

Самедова С. А. Существование периодического предельного режима нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, № 2, стр. 27.

Сулейманов Н. М. Исследование решения задачи Коши для бесконечной системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных в классе обобщенных функций в случае параболических по Шилову системе № 4, стр. 55.

Султанов Б. И. О фильтрации вязкопластичных жидкостей в пористой среде, № 5, стр. 125.

Султанов А. М., Халилов А. Х. Исследования законов затухания люминесценции некоторых поликристаллических кристаллофосфоров осциллографическим методом, № 3, стр. 31.

Талиби М. А. О возникновении ЭДС при бомбардировке быстрыми электронами p—n переходов SdS—Se, CdSe—Se, № 4, стр. 79.

Талиби М. А., Юсифов А. Г. О некоторых особенностях влияния рентгеновских- и гамма лучей на электросопротивление CdS кристаллов, № 6, стр. 91.

Топчибашев М. А., Хасмамедов Ф. И., Насибов З. Г. Автоматическое регулирование температурного режима типовой трубчатой печи с взаимосвязанными цепями, содержащими распределенные параметры, № 2, стр. 155.

Фунтаков В. Н. О разложении по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператора произвольного четного поорядка на полуоси $(0, \infty)$, № 6, стр. 3.

Халилов А. Х., Алиева Т. Д. Исследование термовысвечивания некоторых KCl-кристаллофосфоров, № 6, стр. 85.

Халилов А. Х., Исаев Ф. К. Исследование спектрального распределения фотоэлектрической чувствительности поликристаллического полупроводника конденсаторным методом, № 2, стр. 75.

Халилов А. Х., Мамедов А. П. Исследование термовысвечивания некоторых NaCl-фосфоров, возбужденных рентгеновскими лучами, № 5, стр. 73.

Халилов А. Х., Рзаева С. З. Влияние межмолекулярного взаимодействия на интенсивность линий комбинационного рассеяния света углеводородов, № 2, стр. 79.

Халилов А. Х., Салаев Э. Ю. Исследование термовысвечивания некоторых полиактивированных щелочно-галоидных кристаллофосфоров, № 3, стр. 39.

Халилов А. Х., Султанов Г. А. Влияние адсорбции молекул на поверхности полупроводниковых кристаллов на спектры

диффузного отражения кристаллов, № 3, стр. 59.

Халилов А. Х., Султанов Г. А. Исследование дихроизма поглощения тонких слоев с искусственно ориентированными молекулами, № 1 стр. 35.

Хроника, № 2, стр. 179.

Хроника, № 3, стр. 161.

Шамсиев А. А. О причине кавернообразования в бурящейся скважине, № 6, стр. 151.

Шамсиев А. А., Бабаев Н. Б., Финкельштейн Г. М. Об одной причине смятия обсадных колонн при спуске их в скважину, № 6, стр. 159.

Эфендиев Г. А., Казинец М. М. Электронографическое исследование процессов фазообразования в системе Cu—Se, № 5, стр. 91.

Юсуфова В. Д. Исследование процесса теплоотдачи при конденсации бензола на наружной поверхности горизонтального и наклонного концентрата, № 1, стр. 83.

Якубов С. Я. О самосопряженных расширениях симметричного оператора в банаховом пространстве, № 3, стр. 7.

## МҮНДӘРИЧАТ

В. Н. Фунтаков. ( 0, ∞) јарымохда өз-өзүнә гошма олмајан ихтијари чүт тәртибли диференсиал операторун мәхсуси функсијаларына көрә ајрылышы һаггында . . . . . 3

И. А. Мәммәдов. Қалибрләрдә јајма просесиндә металларын пластик ахмасы . . . . . 21

Г. Мәммәдов (Хәјјами) XI—XV әсрләрдә јахын вә орта шәрг ријазијјаты һаггында . . . . . 31

П. Ә. Рәһманов. Сәлт мүһитдә еластики телә енинә зәрбәнин арашдырылмасы . . . . . 37

А. М. Һүсејнбәјова. Чухур потенсиаллы мәсәләләрдә мәхсуси функсијалар вә мәхсуси әдәдләрин асимптотик тәфриги . . . . . 49

Е. И. Манафлы, М. Ә. Талиби. Азәрбајҹан ССР әразиси јатагларындан көтүрүлмүш галенитин бә'зи хассәләринә даир . . . . . 69

Һ. Б. Абдуллајев, М. Ј. Бәкиров, Р. Б. Гасымов, Ј. Н. Нәсиров. CdO, CdS, CdSe вә CdTe тәбәгәли селен фотоелементләри . . . . . 77

Ә. Х. Хәлилов, Т. Ч. Әлијева. Бә'зи KCl кристаллофосфорларынын термошүаланмасынын тәдгиги . . . . . 85

М. Ә. Талиби, Ә. Һ. Јусифов. Рентген вә гамма шүаларынын CdS монокристалларынын електрик мүгавимәтинә тә'сиринин бә'зи хүсусијјәтләринә даир . . . . . 91

Г. М. Әлијев, Б. Д. Әлијев, И. К. Қәримов. Қадмиум ашғарлы селенин истилик кечирмәсинин температурдан асылылығы . . . . . 99

К. П. Мәммәдов. Алмаз типли кристалларда атомларын әлагә нөвүнүн рентгенографик тәдгиги . . . . . 105

Л. М. Иманов, К. Ә. Зүлфүгарзадә. 11,5 *см*-лик далғада хлорбензол вә бромбензолда комплекс диелектрик әмсалынын температур асылылығы . . 117

И. Ә. Ибраһимов. Ардычыл гошулмуш конденсаторлар гурулушу илә тәчһиз едилмиш 35 вә 110 *кв* қәркинликли хәтләрин өтүрмә күчүнүн тә'јини . 129

Ј. М. Назијев, И. Ф. Голубев. Ихтијари шәкилдә олан бикалориметрләр үчүн һесаблама тәнлији . . . . . 145

А. Ә. Шәмсијев. Газылан гујуда каверна әмәләкәлмә сәбәби һаггында 151

М. А. Абдинов. Температур вә тәзјиги нәзәрә алмагла дашлашмыш семент күтләсинин гују дивары илә кип бирләшмәси гүввәсинин експериментал тә'јини үчүн гурғу . . . . . 155

А. Ә. Шәмсијев, Н. Б. Бабајев, Г. М. Финкелштејн. Горујучу кәмәрин гујуда бурахылмасы заманы әзилмәси сәбәбләриндән бири һаггында . 159

О. Д. Әләкбәров. Һидрогарышыгларын (су вә чај чөкүнтүләри) һәрәкәтинин өјрәнилмәси үчүн сифон гурғуларына даир . . . . . 163

М. Қәримбәјов. Күнәш әкси кәнарынын мүхтәлиф далға узунлугларында титрәмәси . . . . . 171

1960-чы илдә чыхмыш мәгаләләрин көстәричиси . . . . . 175

## СОДЕРЖАНИЕ


В. Н. Фунтаков. О разложении по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператора произвольного четного порядка на полуоси $(0, \infty)$ . . . . . 3

И. А. Мамедов. Пластическое течение металла при прокате в калибрах . 21

К. М. Мамедов (Хайями). О математике Ближнего и Среднего Востока IX—XV вв. . . . . 31

П. А. Рахманов. Исследования поперечного удара по гибкой нити, находящейся в сплошной среде (большие деформации) . . . . . 37

А. М. Гусейнбекова. Асимптотическое разложение собственных функций и собственных значений в задачах с потенциальными ямами . . . . . 49

Э. И. Манафли, М. А. Талиби. О некоторых свойствах природного галенита месторождений Азербайджанской ССР . . . . . 69

Г. Б. Абдуллаев, М. Я. Бакиров, Р. Б. Гасымов, Я. Н. Насиров. Селеновые фотоэлементы со слоями CdO, CdS, CdSe и CdTe . . . . . 77

А. Х. Халилов, Т. Д. Алиева. Исследование термовысечивания некоторых KCl- кристаллофосфоров . . . . . 85

М. А. Талиби, А. Г. Юсифов. О некоторых особенностях влияния рентгеновских и гамма лучей на электросопротивление CdS кристаллов . . . 91

Г. М. Алиев, Б. Д. Алиев, И. Г. Керимов. Температурная зависимость теплопроводности селена с примесью кадмия . . . . . 99

К. П. Мамедов. Рентгенографическое исследование характера связи атомов в кристаллах типа алмаза . . . . . 105

Л. М. Иманов, К. Э. Зульфугарзаде. Температурная зависимость комплексной диэлектрической проницаемости хлорбензола и бромбензола на волне 11,5 см . . . . . 117

И. Э. Ибрагимов. Определение пропускной способности линий 35 и 110 кв с устройством последовательно включенных конденсаторов . . . . . 129

Я. М. Назиев, И. Ф. Голубев. Расчетное уравнение для бикалориметров произвольной формы . . . . . 145

А. А. Шамсиев. О причине кавернообразования в бурящейся скважине . 151

М. А. Абдинов. Установка для экспериментального определения силы сцепления цементного камня со стенками скважины с учетом температуры и давления . . . . . 155

А. А. Шамсиев, Н. Б. Бабаев, Г. М. Финкельштейн. Об одной причине смятия обсадных колонн при спуске их в скважину . . . . . 159

О. Д. Алекперов. Сифонные установки для изучения движения гидросмесей 163

М. Керимбеков. Дрожание изображения солнечного края в различных длинах волн . . . . . 171

Указатель статей за 1960 г. . . . . 175



Чапа имзаланмыш 14/II-1961-чи ил. Кағыз форматы $70\times108^{1}/_{16}$. Кағыз вәрәги 5,75
Чап вәрәги 15,75. ФГ 12117. Сифариш 545. Тираж 780.

Азәрбајчан ССР Мәдәнијјәт Назирлијинин «Гызыл Шәрг» мәтбәәси.
Бакы, Һәзи Асланов күчәси, 80.