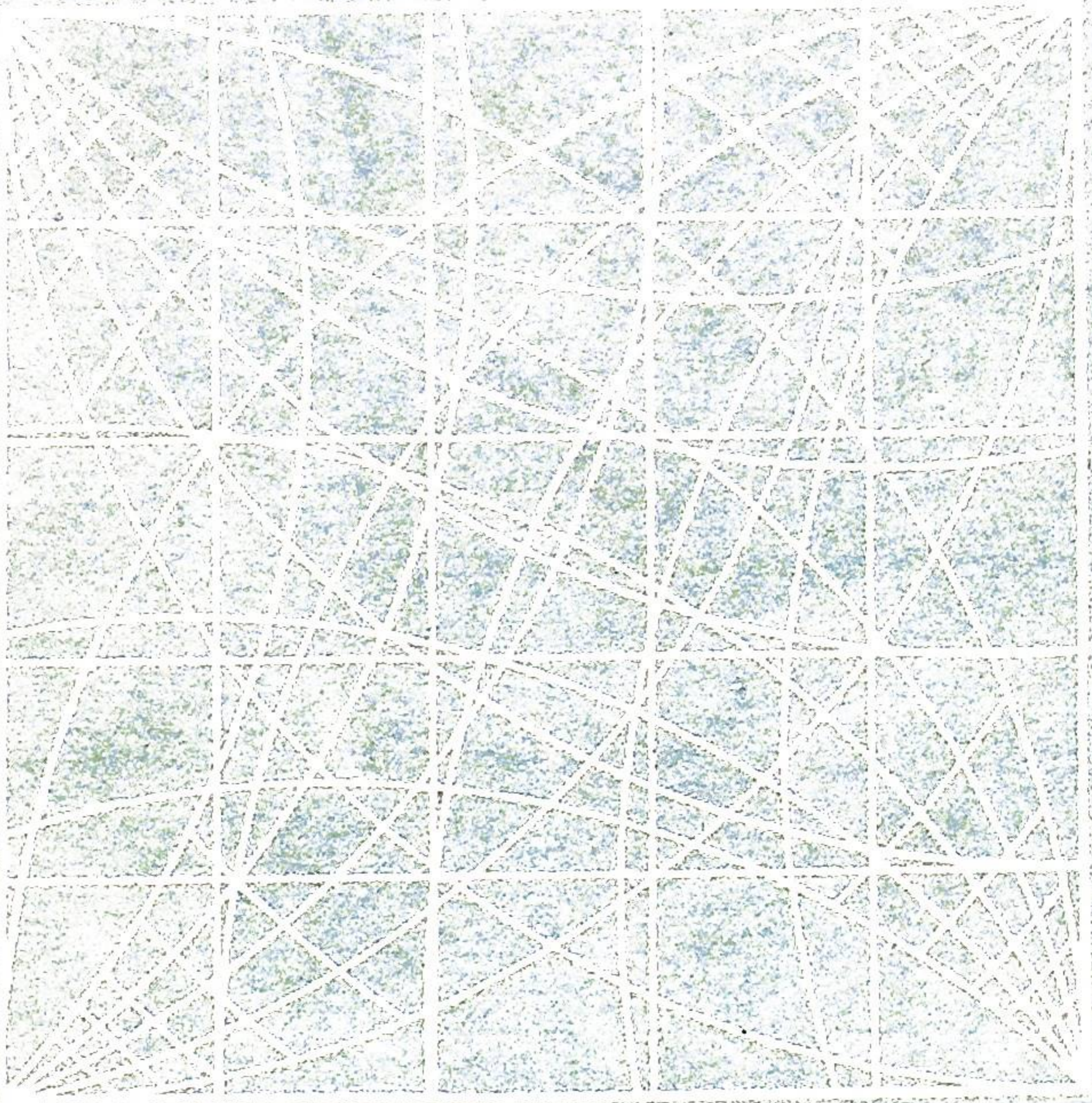


П-151

138



СЫЖЫНКА 1894

П-151

Российская академия наук
Уральское отделение
Коми научный центр

**КВАНТОВЫЕ ГРУППЫ,
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ**

(Труды Коми научного центра УрО Российской АН, № 138)

Сыктывкар 1994

КВАНТОВЫЕ ГРУППЫ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ / Коллектив авторов. — Сыктывкар, 1994. — 88 с. (Труды Коми научного центра УрО Российской АН, № 138).

В сборнике представлены результаты исследований сотрудников Отдела математики. С помощью дуальных чисел освещаются контракции (предельные переходы) представлений группы $SU(2)$, реализуемых в пространствах функций, а также описываются контракции квантовых унитарных групп. На основе дифференциальных уравнений строятся математические модели распространения приливных волн на мелководье и в устьях рек, изучается поведение решений неконсервативных автономных систем. Рассматривается задача адаптивного управления линейным дискретным объектом при наличии аддитивных и мультипликативных детерминированных возмущений. Предлагается метод построения бутстреп оценок спектральной плотности гауссовских стационарных последовательностей.

Под ред. Н.А.Громова

Рецензент

к.ф.-м.н. И.Н.Абрамовский



ПНЗ 920

ISBN 5-7691-0453-8

© Коми научный центр УрО Российской АН, 1994

КОНТРАКЦИИ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ $SU(2)$

Н.А.Громов

Цель настоящей работы — дать единое описание хорошо известных неприводимых представлений специальной унитарной группы $SU(2)$, псевдоунитарной группы $SU(1, 1) \cong QU(2)$ и контрактированной группы $M(2)$, реализуемых в пространствах функций, заданных на окружности. Группа $SU(2)$ локально изоморфна группе вращений $SO(3)$, а группа $M(2)$ локально изоморфна группе движений евклидовой плоскости, и Н.А.Громов называет ее евклидовой группой. Метод основан на использовании дуальных чисел и дается их краткое описание.

1. Дуальные числа и их матричные представления

Дуальные числа (известные в англоязычной литературе также как числа Штуди, который в работе [13] предложил это название) были введены в прошлом веке [10] и могут быть описаны как числа вида

$$z = x + iy, \quad x, y \in R, \quad (1)$$

где дуальная единица $i \neq 0$ (греческая буква йота) является нильпотентной $i^2 = 0$. Два дуальных числа $z = x + iy$ и $z_1 = x_1 + iy_1$ равны, если равны их вещественные и дуальные части

$$z = z_1 \Leftrightarrow x = x_1, \quad y = y_1. \quad (2)$$

Сумма и разность дуальных чисел равна

$$z \pm z_1 = x \pm x_1 + i(y \pm y_1), \quad (3)$$

а умножение определяется с учетом свойства нильпотентности дуальной единицы

$$zz_1 = xx_1 + \iota(xy_1 + yx_1). \quad (4)$$

Дуальное число $\bar{z} = x - \iota y$ называется сопряженным числу $z = x + \iota y$. Операция деления определена только на дуальные числа с ненулевой вещественной частью

$$\frac{z}{z_1} = \frac{z\bar{z}_1}{z_1\bar{z}_1} = \frac{x}{x_1} + \iota \frac{yx_1 - xy_1}{x_1^2}, \quad x_1 \neq 0. \quad (5)$$

Из определения (2) равенства дуальных чисел: числа ιa и ιb равны, если $a = b$, следует, что дуальную единицу можно сокращать, т.е. $\iota/\iota = 1$. Отсюда вытекает возможность деления одного чисто дуального числа (с нулевой вещественной частью) на другое чисто дуальное число: $\iota y/\iota y_1 = y/y_1$.

Функции от дуальных переменных определяются своим разложением в ряд Тейлора, например,

$$f(z, z_1) = f(x, x_1) + \iota \left(y \frac{\partial f(x, x_1)}{\partial x} + y_1 \frac{\partial f(x, x_1)}{\partial x_1} \right), \quad (6)$$

в котором в силу свойства дуальной единицы $\iota^2 = 0$ обращаются в ноль члены второго и более высокого порядков. Из соотношения (6) следует, что функция от дуальных переменных полностью определяется своей вещественной частью $f(x, x_1)$, равной той же функции, взятой от вещественных частей переменных. Отсюда легко выводится [5], что в области дуальных чисел сохраняются все алгебраические тождества, справедливые над полем вещественных чисел, а также дифференциальное и интегральное исчисления.

С алгебраической точки зрения множество дуальных чисел образует коммутативное кольцо. Существует два представления этого кольца матрицами размера 2×2 : с вещественными и дуальными элементами. Рассмотрим матрицы J и J' вида

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J' = \begin{pmatrix} 0 & \iota \\ \iota & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

квадраты которых равны нулю: $J^2 = J'^2 = 0$. Поставим в соответствие дуальному числу $z = x + \iota y$ матрицы Z и Z' вида

$$Z = xE + yJ = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}, \quad Z' = xE + yJ' = \begin{pmatrix} x & \iota y \\ \iota y & x \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где E — единичная матрица. Ясно, что по матрице Z (или Z') вида (8) всегда можно построить (и только одно) дуальное число $z = x + \iota y$, т.е. соответствие взаимно однозначно.

Легко проверить, что сложение и вычитание дуальных чисел моделируется сложением и вычитанием матриц вида Z (или Z'), а умножение представляется умножением матриц

$$ZZ_1 = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx_1 & 0 \\ yx_1 + xy_1 & xx_1 \end{pmatrix},$$

$$Z'Z'_1 = \begin{pmatrix} x & \iota y \\ \iota y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & \iota y_1 \\ \iota y_1 & x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx_1 & \iota(yx_1 + xy_1) \\ \iota(yx_1 + xy_1) & xx_1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Сопряженному числу $\bar{z} = x - \iota y$ отвечает сопряженная матрица $\bar{Z} = xE - yJ$ (или $\bar{Z}' = xE - yJ'$). Произведение матрицы Z (или Z') на сопряженную пропорционально единичной матрице

$$Z\bar{Z} = x^2E = E \cdot \det Z, \quad Z'\bar{Z}' = x^2E = E \cdot \det Z'. \quad (10)$$

Матрицы, обратные к (8), пропорциональны сопряженным

$$Z_1^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{x_1^2} \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix} = (\det Z_1)^{-1} \bar{Z}_1,$$

$$Z'_1{}^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & \iota y_1 \\ \iota y_1 & x_1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{x_1^2} \begin{pmatrix} x_1 & -\iota y_1 \\ -\iota y_1 & x_1 \end{pmatrix} = (\det Z'_1)^{-1} \bar{Z}'_1. \quad (11)$$

Деление дуальных чисел $z/z_1 = z \cdot z_1^{-1}$, когда оно определено, представляется с помощью умножения на обратную матрицу

$$ZZ_1^{-1} = (\det Z_1)^{-1} Z\bar{Z}_1 = \frac{1}{x_1^2} \begin{pmatrix} xx_1 & 0 \\ x_1y - xy_1 & xx_1 \end{pmatrix},$$

$$Z'Z'_1{}^{-1} = (\det Z'_1)^{-1} Z'\bar{Z}'_1 = \frac{1}{x_1^2} \begin{pmatrix} xx_1 & \iota(x_1y - xy_1) \\ \iota(x_1y - xy_1) & xx_1 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Итак, мы показали, что коммутативное кольцо дуальных чисел изоморфно коммутативному кольцу треугольных матриц Z вида (8) с вещественными элементами и коммутативному кольцу матриц Z' вида (8), недиагональные элементы которых являются чисто дуальными числами.

Дуальные числа использовались казанским ученым А.П.Котельниковым для описания винтового исчисления в механике [6], немецким геометром Э.Штуди при построении геометрической теории

винтов [13]. Более современное изложение винтового исчисления можно найти в монографии [4], а его связь с кватернионами и применение последних в геометрии, механике и физике — в монографии [1]. Описание дуальных чисел и функций дуального переменного содержится в книге Д.Н.Зейлигера [5]. Московские геометры Б.А.Розенфельд и И.М.Яглом систематически применяли дуальные числа для описания движений в неевклидовых геометриях [8],[9].

Важный шаг в развитии этого направления сделал Р.И.Пименов, который в работе [7] предложил рассматривать разные дуальные единицы. Каждая дуальная единица $\iota_k \neq 0$, $k = 1, 2, \dots, n$ нильпотентна $\iota_k^2 = 0$ и разные дуальные единицы удовлетворяют коммутативному закону умножения: $\iota_k \iota_m = \iota_m \iota_k \neq 0$, $k \neq m$ (в этом состоит их отличие от антикоммутативных грассмановых чисел, для которых $\xi_k \xi_m = \xi_m \xi_k \neq 0$, $k \neq m$, $\xi_k^2 = 0$). Деление вещественного или комплексного числа на чисто дуальное число не определено, однако одинаковые (с одним и тем же индексом) дуальные единицы можно сокращать: $\iota_k / \iota_k = 1$ (но не ι_k / ι_m , $k \neq m$, такие операции не определены). Дуальные числа являются адекватным математическим инструментом для описания многомерных контракций (предельных переходов) классических и квантовых групп [1].

2. Контракция и аналитическое продолжение группы вращений $SO(2)$

Прежде чем перейти к описанию унитарных групп, мы рассмотрим простейший случай группы вращений $SO(2)$ евклидовой плоскости. Определим преобразование ψ евклидовой плоскости R_2 , заключающееся в умножении координаты x_1 на параметр j , а именно:

$$\begin{aligned} \psi: R_2 &\longrightarrow R_2(j) \\ \psi x_0^* &= x_0, \quad \psi x_1^* = j x_1, \end{aligned} \quad (13)$$

где x_0^*, x_1^* есть декартовы координаты на R_2 ; x_0, x_1 — декартовы координаты на плоскости $R_2(j)$, параметр $j = 1, \iota, i$.

Отображение (13) переводит евклидову плоскость R_2 в плоскость $R_2(j)$, геометрия которой определяется метрикой $x^2(j) = x_0^2 + j x_1^2$. Легко видеть, что $R_2(j = i)$ есть плоскость Минковского, а $R_2(j = \iota)$ — плоскость Галилея. Наша основная идея состоит в том, что преобразование геометрий (13) индуцирует преобразование соответствующих групп движений, их алгебр и представлений. Покажем, как получить эти преобразования.

Вращение на евклидовой плоскости на угол φ^- , $x^- = g(\varphi^-)x^-$ вида

$$\begin{aligned} x_0^- &= x_0^- \cos \varphi^- - x_1^- \sin \varphi^-, \\ x_1^- &= x_0^- \sin \varphi^- + x_1^- \cos \varphi^-, \end{aligned} \quad (14)$$

при преобразовании (13) переходит в

$$\begin{aligned} x_0^- &= x_0 \cos j\varphi - j x_1 \sin j\varphi, \\ j x_1^- &= x_0 \sin j\varphi + j x_1 \cos j\varphi. \end{aligned} \quad (15)$$

(Мероопределение углов на евклидовой плоскости определяется отношением x_1^-/x_0^- , которое при отображении (13) переходит в $j x_1/x_0$, т.е. углы преобразуются по закону $\psi\varphi^- = j\varphi$, что и учтено в (15)). В матричном виде (15) записывается следующим образом:

$$\psi x^- = \begin{pmatrix} \cos j\varphi & -\sin j\varphi \\ \sin j\varphi & \cos j\varphi \end{pmatrix} \psi x = \tilde{g}(\varphi; j) \psi x, \quad \psi x = \begin{pmatrix} x_0 \\ j x_1 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Поделив обе части второго уравнения в (15) на параметр j , получим описание вращения на плоскости $R_2(j)$ на угол φ , $x^- = g(\varphi; j)x^-$ в виде

$$\begin{aligned} x_0^- &= x_0 \cos j\varphi - x_1 j \sin j\varphi, \\ x_1^- &= x_0 j^{-1} \sin j\varphi + x_1 \cos j\varphi \end{aligned} \quad (17)$$

или в матричной форме

$$x^- = \begin{pmatrix} \cos j\varphi & -j \sin j\varphi \\ j^{-1} \sin j\varphi & \cos j\varphi \end{pmatrix}, \quad x = g(\varphi; j)x. \quad (18)$$

Преобразования (17),(18) действуют на вещественные декартовы координаты плоскости $R_2(j)$ и образуют группу, которую мы обозначим $SO(2; j)$. Учитывая, что $\cos \iota\varphi = 1$, $\sin \iota\varphi = \iota\varphi$, легко видеть, что преобразования из группы $SO(2; \iota)$ есть преобразования Галилея, а преобразования из группы $SO(2; i)$ есть преобразования Лоренца, если интерпретировать x_0 как временную, а x_1 как пространственную координату. Область задания группового параметра $\varphi = \Phi(j)$ такова: $\Phi(1) = (-\pi/2, \pi/2)$, $\Phi(\iota) = \Phi(i) = R$.

Конечное вращение (18) связано с генератором вращения $X(j)$ соотношением: $g(\varphi; j) = \exp(\varphi X(j))$. Генератор $X(j)$ получается из генератора $X^- = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ вращений (14) на евклидовой плоскости с помощью преобразования

$$X(j) = j X^-(-) = j \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -j^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Здесь $X^-(-)$ есть сингулярно преобразованный в смысле Вигнера-Иненю [11] генератор, а параметр j при дуальном значении $j = \iota$ играет роль стремящегося к нулю параметра в контракции Вигнера-Иненю. При мнимом значении $j = i$ имеем аналитическое продолжение вещественного группового параметра $\psi\varphi^- = i\varphi$ в область чисто мнимых значений, что переводит компактную группу вращений $SO(2)$ в некомпактную псевдоортогональную группу $SO(2; i) = SO(1, 1)$.

Групповые элементы вида (18) и преобразования генераторов типа (19) используются при изучении групп движений пространств с постоянной кривизной (пространств Кэли-Клейна), при описании контракций и аналитических продолжений представлений классических алгебр (ортогональных и унитарных) в базисе Гельфанда-Цетлина [1]. Если же мы рассматриваем представление группы вращений $SO(2)$ в некотором пространстве функций, заданных на евклидовой плоскости $f(x_0^-, x_1^-) : R_2 \rightarrow R$, скажем операторами $T_\lambda(g(\varphi^-))f(x^-) = f(g(\varphi^-)x^-)$, то при отображении (13) получаем функции $f(\psi x^-) = f(x_0, jx_1)$, зависящие от именованных координат x_0 и jx_1 , которые преобразуются при вращениях согласно (15), (16). Поэтому для представлений в пространстве функций, зависящих от именованных координат плоскости $R_2(j)$, группа $SO(2; j)$ реализуется матрицами $\tilde{g}(\varphi; j)$ вида (16), т.е. $T_\lambda(\tilde{g}(\varphi; j))f(\psi x^-) = f(\tilde{g}(\varphi; j)\psi x^-)$.

Конечное вращение $\tilde{g}(\varphi; j)$ связано с генератором вращения $\tilde{X}(j)$ соотношением: $\tilde{g}(\varphi; j) = \exp(\varphi \tilde{X}(j))$. Генератор $\tilde{X}(j)$ получается из генератора X^- вращений (14) на евклидовой плоскости с помощью преобразования

$$\tilde{X}(j) = jX^- = j \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

В частности, при дуальном значении параметра $j = \iota$ группа Галилея $SO(2; \iota)$ и её алгебра Ли реализуются матрицами с дуальными элементами

$$\tilde{g}(\varphi; \iota) = \begin{pmatrix} 1 & -\iota\varphi \\ \iota\varphi & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{X}(\iota) = \begin{pmatrix} 0 & -\iota \\ \iota & 0 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Заметим, что $\det \tilde{g}(\varphi; j) = 1$ при любом значении параметра j .

3. Унитарные группы Кэли-Клейна $SU(2; j)$

Отображение

$$\psi : C_2 \rightarrow C_2(j) \quad (22)$$

$$\psi z_0^* = z_0, \quad \psi z_1^* = jz_1, \quad j = 1, \iota, i,$$

где z_0^*, z_1^* есть комплексные декартовы координаты двумерного комплексного пространства C_2 , z_0, z_1 - комплексные декартовы координаты в пространстве $C_2(j)$, преобразует билинейную форму $(z^*, z^*) = |z_0^*|^2 + |z_1^*|^2$ пространства C_2 в билинейную форму

$$(z, z) = |z_0|^2 + j^2 |z_1|^2. \quad (23)$$

Множество преобразований пространства $C_2(j)$, оставляющих инвариантной форму (23), образует унитарную группу Кэли-Клейна $SU(2; j)$. Если группа $SU(2; j)$ действует на координаты z_0, z_1 , то ее элементы есть матрицы вида

$$g(j) = \begin{pmatrix} \alpha & -j^2 \bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \det g(j) = |\alpha|^2 + j^2 |\beta|^2 = 1, \quad (24)$$

$\alpha, \beta \in C$, черта обозначает комплексное сопряжение. Здесь нас интересует другая реализация группы $SU(2; j)$, аналогичная (16), т.е. когда группа действует на именованные координаты z_0, jz_1 пространства $C_2(j)$. В этом случае элементами группы $SU(2; j)$ являются матрицы вида

$$\tilde{g}(j) = \begin{pmatrix} \alpha & -j \bar{\beta} \\ j\beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \det \tilde{g}(j) = |\alpha|^2 + j^2 |\beta|^2 = 1. \quad (25)$$

Отображение (22) индуцирует преобразование хорошо известных генераторов L_k^* , $k = 1, 2, 3$ специальной унитарной группы $SU(2)$ в генераторы $\tilde{L}_k(j)$ группы $SU(2; j)$, аналогичное (20), а именно:

$$\tilde{L}_1(j) = jL_1^* = \frac{i}{2}j \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{L}_2(j) = jL_2^* = \frac{1}{2}j \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{L}_3(j) = L_3^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Эти генераторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\tilde{L}_1, \tilde{L}_2] = j^2 \tilde{L}_3, \quad [\tilde{L}_2, \tilde{L}_3] = \tilde{L}_1, \quad [\tilde{L}_3, \tilde{L}_1] = \tilde{L}_2. \quad (27)$$

Преобразование (22) при $j = \iota$ порождает контракцию Вигнера-Иненю [11] группы $SU(2)$ в евклидову группу $SU(2; \iota) \equiv M(2)$, а при $j = i$ — аналитическое продолжение компактной группы $SU(2)$ в некомпактную псевдоунитарную группу $SU(2; i) \equiv SU(1, 1)$.

Генераторам $\tilde{L}_k(j)$ отвечают однопараметрические подгруппы вида

$$\begin{aligned} \tilde{g}_1(r; j) &= \exp r \tilde{L}_1(j) = \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2} jr & i \sin \frac{1}{2} jr \\ i \sin \frac{1}{2} jr & \cos \frac{1}{2} jr \end{pmatrix}, \\ \tilde{g}_2(s; j) &= \exp s \tilde{L}_2(j) = \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2} js & -\sin \frac{1}{2} js \\ \sin \frac{1}{2} js & \cos \frac{1}{2} js \end{pmatrix}, \\ \tilde{g}_3(w; j) &= \exp w \tilde{L}_3(j) = \begin{pmatrix} e^{iw/2} & 0 \\ 0 & e^{-iw/2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (28)$$

а общему элементу $L = r \tilde{L}_1 + s \tilde{L}_2 + w \tilde{L}_3$ алгебры $su(2; j)$ отвечает конечное преобразование из группы $SU(2; j)$ вида

$$\tilde{g}(\zeta, w; j) = \exp L = \begin{pmatrix} \cos \frac{v}{2} + i \frac{w}{v} \sin \frac{v}{2} & -j \frac{\zeta}{v} \sin \frac{v}{2} \\ j \frac{\zeta}{v} \sin \frac{v}{2} & \cos \frac{v}{2} - i \frac{w}{v} \sin \frac{v}{2} \end{pmatrix},$$

$$v^2(j) = w^2 + j^2 |\zeta|^2, \quad \zeta = s + ir. \quad (29)$$

В параметризации Эйлера [2] преобразования из группы $SU(2; j)$ записываются в виде

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\varphi, \theta, w; j) &= \tilde{g}_3(\varphi; j) \tilde{g}_1(\theta; j) \tilde{g}_3(w; j) = \\ &= \begin{pmatrix} e^{i \frac{w+\varphi}{2}} \cos j \frac{\theta}{2} & e^{-i \frac{w-\varphi}{2}} i \sin j \frac{\theta}{2} \\ e^{i \frac{w-\varphi}{2}} i \sin j \frac{\theta}{2} & e^{-i \frac{w+\varphi}{2}} \cos j \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (30)$$

где групповые параметры — углы Эйлера — изменяются в пределах

$$0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -2\pi \leq w \leq 2\pi, \quad \theta \in \Theta(j) = \begin{cases} (0, \pi), & j = 1 \\ (0, \infty), & j = \iota \\ (-\infty, 0), & j = i. \end{cases} \quad (31)$$

Отметим, что при $j = 1$ матрицы $\tilde{g}(\varphi, \theta, w; j)$ совпадают с матрицами (1.1.3-4), гл. III в [2], при $j = i$ совпадают с матрицами (1.3.4-5), гл. VI в [2], а при $j = \iota$ дают описание евклидовой группы $SU(2; \iota)$ через углы Эйлера.

4. Представления групп $SU(2; j)$

Пусть $H(j) = -f(e^{it})$ — есть пространство бесконечно дифференцируемых, квадратично интегрируемых функций на окружности. Зададим операторы представления, отвечающие матрицам (25) из группы $SU(2; j)$, формулой

$$T_\lambda(\tilde{g}(j))f(e^{it}) = (\alpha + j\beta e^{-it})^{\frac{\lambda}{j}} (\bar{\alpha} - j\bar{\beta} e^{it})^{\frac{\lambda}{j}} f\left(\frac{\alpha e^{it} + j\beta}{\bar{\alpha} - j\bar{\beta} e^{it}}\right). \quad (32)$$

При $j = 1$ эти операторы совпадают с операторами (2.1.10), гл. III в [2], если положить $\lambda = l = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$ и следовательно, описывают неприводимые представления группы $SU(2)$, если ограничить пространство $H(1)$ до конечномерного подпространства $H_l = -\Phi(e^{it}) = \sum_{k=-l}^l a_k e^{ikt}$ — тригонометрических многочленов. При $j = i$ операторы (32) совпадают с операторами (2.2.5), гл. VI в [2], если $\lambda = C$ и описывают неприводимые представления группы $SU(2; i) = SU(1, 1)$, которые унитарны при $\lambda = -\frac{i}{2} - \rho$, $\rho = R$ (первая основная серия). Положим $j = \iota$ в (32) и учтем ограничение (25) на групповые параметры, которое в этом случае имеет вид $\alpha^2 = 1$, т.е. $\alpha = e^{iw/2}$, $\beta = C$. Тогда (32) переписется следующим образом:

$$\begin{aligned} T_\lambda(\tilde{g}(\iota))f(e^{it}) &= \\ &= [1 + \iota 2i \operatorname{Im}(\beta) e^{-i(t+w/2)}]^{\frac{\lambda}{\iota}} f(e^{i(t+w)} (1 + \iota 2 \operatorname{Re}(\beta) e^{-i(t+w/2)})). \end{aligned} \quad (33)$$

Учитывая, что $(1 + \iota a)^{\frac{\lambda}{\iota}} = \exp -\frac{\lambda}{\iota} \ln(1 + \iota a) = \exp -\frac{\lambda}{\iota} \ln a = \exp -\lambda a$, $f(a + \iota b) = f(a) + \iota b f'(a)$ и отбрасывая в (33) дуальные слагаемые, получаем для операторов представления евклидовой группы $SU(2; \iota)$ выражение

$$T_\lambda(\tilde{g}(\iota))f(e^{it}) = e^{2i\lambda\beta \cos(t+p+w/2)} f(e^{i(t+w)}), \quad (34)$$

где $\arg \beta = -p + \pi/2$. Заменим групповые параметры w, β на новые групповые параметры $-w, a, b$ по правилу: $\beta = i\zeta \exp iw/2$, где $\zeta = a + ib$, $|\zeta| = r$, $\arg \zeta = \varphi$; тогда (34) запишется в виде

$$T_\lambda(\tilde{g}(\iota))f(e^{it}) = e^{2i\lambda r \cos(t-\varphi)} f(e^{i(t-w)}), \quad (35)$$

что при $2i\lambda = R$ совпадает с операторами неприводимого представления евклидовой группы $M(2)$ (сравни с (2.1.3) в [2]). Поскольку последние унитарны при $R = i\rho$, ρ — вещественное число, то операторы (35) унитарны при вещественных значениях λ .

Итак, формула (32) дает единое описание операторов неприводимых представлений трех групп $SU(2)$, $SU(1, 1)$ и группы $SU(2; \iota)$,

$\tilde{g}_1(0, \theta_1, 0)\tilde{g}_2(\varphi_2, \theta_2, 0)$ находим выражение параметров Эйлера φ, θ, ω через параметры $\theta_1, \theta_2, \varphi_2$ в виде

$$\begin{aligned} \cos j\theta &= \cos j\theta_1 \cos j\theta_2 - \sin j\theta_1 \sin j\theta_2 \cos \varphi_2, \\ e^{i\varphi} &= (\sin j\theta)^{-1} [\sin j\theta_1 \cos j\theta_2 + \cos j\theta_1 \sin j\theta_2 \cos \varphi + i \sin j\theta_2 \sin \varphi_2], \\ e^{i(\varphi+\omega)/2} &= \left(\cos j\frac{\theta}{2}\right)^{-1} \left[\cos j\frac{\theta_1}{2} \cos j\frac{\theta_2}{2} e^{i\varphi_2/2} - \sin j\frac{\theta_1}{2} \sin j\frac{\theta_2}{2} e^{-i\varphi_2/2}\right], \\ \frac{1}{j^2} \sin^2 j\theta &= \frac{1}{j^2} \sin^2 j\theta_1 + \frac{1}{j^2} \sin^2 j\theta_2 - \frac{1}{j^2} \sin^2 j\theta_1 \sin^2 j\theta_2 (1 + \cos^2 \varphi_2) + \\ &+ \frac{1}{2j^2} \sin 2j\theta_1 \sin 2j\theta_2 \cos \varphi_2. \end{aligned} \quad (41)$$

Поскольку при $j = \iota$ функция $\cos \iota\theta = 1$, то первая формула в (41) вырождается в тождество $1 \equiv 1$, поэтому мы ее переписали в эквивалентном виде с помощью синусов (последняя формула в (41)). При $j = 1$ формулы (41) совпадают с формулами (4.1.6), гл. III в [2], при $j = i$ совпадают с формулами (4.1.4), гл. VI в [2], а при $j = \iota$ принимают вид

$$\theta^2 = \theta_1^2 + \theta_2^2 + 2\theta_1\theta_2 \cos \varphi_2, \quad e^{i\varphi} = \frac{1}{\theta} (\theta_1 + \theta_2 e^{i\varphi_2}), \quad e^{i(\varphi+\omega)/2} = e^{i\varphi_2/2} \quad (42)$$

и совпадают с формулами (4.1.2), гл. IV в [2]. Для операторов представления имеем $T_\lambda(\tilde{g}) = T_\lambda(\tilde{g}_1)T_\lambda(\tilde{g}_2)$, что дает следующее соотношение для матричных элементов

$$D_{mn}^\lambda(\tilde{g}(\varphi, \theta, \omega)) = \sum_k D_{mk}^\lambda(\tilde{g}_1(0, \theta_1, 0)) D_{kn}^\lambda(\tilde{g}_2(\varphi_2, \theta_2, 0)), \quad (43)$$

где суммирование по k ведется от $-\lambda$ до λ при $j = 1$ и от $-\infty$ до ∞ при $j = \iota, i$. Учитывая, что согласно (38)

$$\begin{aligned} D_{mk}^\lambda(\tilde{g}_1) &= P_{mk}^\lambda(\theta_1; j), \\ D_{kn}^\lambda(\tilde{g}_2) &= e^{-ik\varphi_2} P_{kn}^\lambda(\theta_2; j), \\ D_{mn}^\lambda(\tilde{g}) &= e^{-i(m\varphi+n\omega)} P_{mn}^\lambda(\theta; j), \end{aligned} \quad (44)$$

получаем теорему сложения для функций $P_{mn}^\lambda(\theta; j)$ в виде

$$e^{-i(m\varphi+n\omega)} P_{mn}^\lambda(\theta; j) = \sum_k e^{-ik\varphi_2} P_{mk}^\lambda(\theta_1; j) P_{kn}^\lambda(\theta_2; j). \quad (45)$$

Это выражение при $j = 1$ совпадает с теоремой сложения (4.1.7), гл. III в [2] для полиномов Якоби, а при $j = i$ совпадает с теоремой

сложения (4.1.6), гл. VI в [2] для функций Якоби. При $j = \iota$, с учетом соотношения (40), формула (45) принимает вид

$$e^{in\varphi} J_n(\lambda\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\varphi_2} J_{n-k}(\lambda\theta_1) J_k(\lambda\theta_2), \quad (46)$$

где параметры θ, φ связаны с параметрами $\theta_1, \theta_2, \varphi_2$ формулами (42), и дает теорему сложения для функций Бесселя (4.1.3), гл. IV в [2].

Аналогично можно записать в едином виде и другие свойства матричных элементов, например, выражение производящей функции для матричных элементов $P_{mn}^\lambda(\theta; j)$. Из соотношения (39) и формул преобразования Фурье следует равенство

$$\begin{aligned} F(\theta, e^{-it}; j) &= \\ &\equiv C_n^\lambda(j) \left(\cos j\frac{\theta}{2} + e^{-it} i \sin j\frac{\theta}{2}\right)^{\lambda-n} \left(\cos j\frac{\theta}{2} + e^{it} i \sin j\frac{\theta}{2}\right)^{\lambda+n} e^{-int} = \\ &= \sum_m P_{mn}^\lambda(\theta; j) C_m^\lambda(j) e^{-imt}, \end{aligned} \quad (47)$$

где суммирование по m ведется от $-\lambda$ до λ при $j = 1$ и от $-\infty$ до ∞ при $j = \iota, i$, а коэффициенты $C_m^\lambda(j)$ определены ранее. Формула (47) показывает, что $F(\theta, e^{-it}; j)$ является производящей функцией для $P_{mn}^\lambda(\theta; j)$. Вводя переменную $w = e^{it}$ при $j = 1$, получаем из (47) формулу, совпадающую с выражением (5.1.3), гл. III в [2] для производящей функции многочленов Якоби $P_{mn}^l(\cos \theta)$. При $j = i$, обозначая $z = e^{-it}$, получаем из (47) формулу (4.6.2), гл. VI в [2] описывающую производящую функцию для функций Якоби $P_{mn}^\lambda(\cosh \theta)$. При $j = \iota$ равенство (47) дает выражение (4.5.2), гл. IV в [2] производящей функции для функций Бесселя.

Выводы

Таким образом, единое описание групп $SU(2; j)$ с помощью параметра j , чисто мнимое значение которого отвечает аналитическому продолжению по групповым параметрам компактной классической специальной унитарной группы $SU(2)$ в некомпактную псевдоунитарную группу $SU(2; i) = SU(1, 1)$, а чисто дуальное значение отвечает контракции группы $SU(2)$ в неоднородную унитарную группу $SU(2; \iota) = e^T U(1)$, порождает единое описание (32) операторов представлений и матричных элементов (34) этих операторов. Матричные элементы (36) операторов, отвечающих подгруппе $\tilde{g}_1(\theta; j)$, при $j = 1$ дают многочлены Якоби $P_{mn}^l(\cos \theta)$, аналитическое продолжение которых (при $j = i$), т.е. $l = \lambda - C, \theta = i\theta$,

приводит к функции Якоби $P_{mn}^{\lambda}(\cosh \theta)$. Контракция группы $SU(2)$ в группу $SU(2; \iota)$ индуцирует предельный переход между матричными элементами — специальными функциями математической физики, а именно: многочлены Якоби $P_{mn}^l(\cos \theta)$ переходят в функцию Бесселя $J_{n-m}(\lambda \theta)$ (сравни [2], гл. IV, § 7, п. 2, где рассмотрен предельный переход $P_{mn}^l(\cos \frac{r}{l}) \rightarrow J_{n-m}(r)$ при $l \rightarrow \infty$). Свойства специальных функций, имеющие групповую природу, такие, как теорема сложения (46), производящая функция (47) и, очевидно, другие свойства также допускают единое описание.

Отдельного исследования для каждой конкретной группы требует, однако, выяснение свойств, определяемых глобальным строением группы, таких, как выбор пространств, в которых описанные представления неприводимы, а также нахождение тех значений параметров λ , характеризующих представления, при которых эти представления группы унитарны.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-011-16180).

ЛИТЕРАТУРА

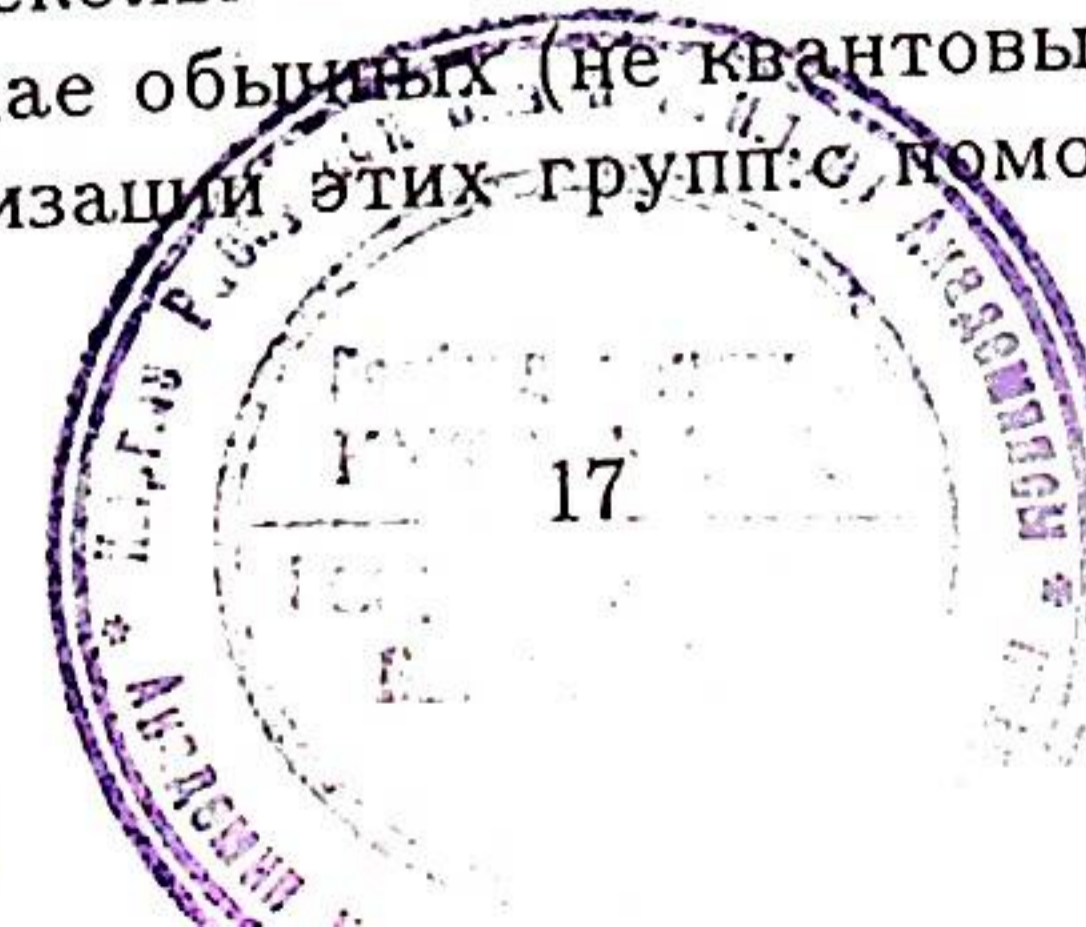
1. Березин А. В., Курочкин Ю. А., Толкачев Е. А. Кватернионы в релятивистской физике. — Минск: Наука и техника, 1989.
2. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. — М.: Наука, 1965.
3. Громов Н. А. Контракции и аналитические продолжения классических групп. Единый подход. — Сыктывкар, 1990.
4. Диментберг Ф. М. Винтовое исчисление. — М.: Наука, 1965.
5. Зейлигер Д. Н. Комплексная линейчатая геометрия. — М.-Л.: ГТТИ, 1934.
6. Котельников А. П. Винтовое исчисление и некоторые приложения его к геометрии и механике. — Казань, 1895.
7. Пименов Р. И. Единая аксиоматика пространств с максимальной группой движений // Литовский матем. сб. — 1965. — Т. 5. № 3. — С. 457-486.
8. Розенфельд Б. А. Неевклидова геометрия. — М.: Гостехиздат, 1955.
9. Яглом М. И. Принцип относительности Галилея и неевклидовы геометрии. — М.: Наука, 1969.
10. Clifford W. K. Preliminary Sketch of Biquaternions // Proc. Lond. Math. Soc. — 1873. — V. IV.
11. Inonu E., Wigner E. P. On the contraction of groups and their representations // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1953. — V. 39. — P. 510-524.
12. Perroud M. The fundamental invariants of inhomogeneous classical groups // J. Math. Phys. — 1983. — V. 24. N 6. — P. 1381-1391.
13. Study E. Geometrie der Dynamen. — Leipzig: 1901, 1903.

СТРУКТУРА КЭЛИ-КЛЕЙНА НА КВАНТОВЫХ УНИТАРНЫХ ГРУППАХ

Н. А. Громов, И. В. Костяков

Введение

Квантовые группы и алгебры получают все большую популярность. В теоретической физике они связываются с точно решаемыми моделями статистической механики и интегрируемыми теориями поля. С математической точки зрения они представляют собой алгебры Хопфа и являются деформациями универсальных обертывающих алгебр алгебр Ли. Систематическое описание квантовых простых групп и алгебр Ли дано в [3]. В данной работе мы предлагаем способ описания некомпактных и неполупростых квантовых унитарных групп. Известно, что группы движений пространств Кэли-Клейна, среди которых есть некомпактные и неполупростые, можно описать единым образом [1], вводя в ортогональную группу $SO(n+1)$ набор параметров $\mathbf{j} : j_r = 1, \iota, \iota_r$; $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \dots, j_n)$, где $\iota_r \iota_m = \iota_r \iota_m \neq 0, m \neq r, \iota_r^2 = 0$. Полученный таким образом набор групп обозначают $SO(n+1; \mathbf{j})$, а операцию введения многомерного параметра \mathbf{j} мы будем называть введением структуры Кэли-Клейна на группе. При $j = \iota, \iota$ имеем соответственно многомерные обобщения унитарного трюка Вейля и контракции Вигнера-Иненю. Аналогично структура Кэли-Клейна вводится на унитарных группах. Определяя структуру Кэли-Клейна на квантовой группе, мы получаем описание нескольких квантовых некомпактных и неполупростых групп. В случае обычных (не квантовых) групп Кэли-Клейна возможны две реализации этих групп с помощью комплексных ма-



триц и с помощью матриц, часть элементов которых могут быть дуальными числами [2]. Первая из них связана с изучением групп движений в соответствующих пространствах Кэли-Клейна. Квантовый аналог этого представления изучен в работе [4]. Реализация же групп Кэли-Клейна дуальными матрицами возникает при контракции их функциональных представлений [2]. В настоящей работе мы рассматриваем квантовый аналог этой второй ситуации. Работа организована следующим образом. В части 2 мы определяем общие формулы для квантовой унитарной группы со структурой Кэли-Клейна $SU_q(n+1; \mathbf{j})$. В части 3 подробно рассмотрен случай $SU_q(2; \mathbf{j})$ и показано, что группа $SU_q(2; \iota)$ есть квантовая евклидова группа $E_q(2)$. В части 4 приведены формулы для группы $SU_q(3; \mathbf{j})$ и описаны три контракции $\mathbf{j} = (1; \iota_2)$, $\mathbf{j} = (\iota_1, 1)$, $\mathbf{j} = (\iota_1, \iota_2)$.

Структура Кэли-Клейна

Пусть R_q матрица имеет стандартный для групп серии A_n вид [3]

$$R_q = q \sum_{i=0}^n e_{ii} \otimes e_{ii} + \sum_{i,j=0}^n \sum_{i \neq j} e_{ii} \otimes e_{jj} + (q - q^{-1}) \sum_{i,j=0}^n \sum_{i > j} e_{ij} \otimes e_{ji} \quad (1)$$

$$(e_{ij})_{km} = \delta_{ik} \delta_{jm}, \quad i, j, k, m = 0, 1, \dots, n.$$

Некоммутативные элементы матрицы U определим формулами

$$u_{kk} = t_{kk}, \quad u_{km} = J_{km} t_{km}; \quad k \neq m,$$

$$J_{km} = \prod_{r=k}^m j_r, \quad k < m, \quad J_{mk} = J_{km}, \quad j_r = 1, \iota_r, i. \quad (2)$$

Коумножение определяется обычным образом

$$\Delta(u_{ij}) = \sum_{k=1}^n u_{ik} \otimes u_{kj}. \quad (3)$$

Коммутационные соотношения задаются уравнениями Янга-Бакстера

$$R_q U_1 U_2 = U_2 U_1 R_q, \quad U_1 = U \otimes I, \quad U_2 = I \otimes U. \quad (4)$$

Коединица и антипод задаются соотношениями $\epsilon(U) = I$, $S(U) = U^{-1}$. Квантовый детерминант имеет вид

$$\det U = \sum_{\sigma \in \text{Sym}(n+1)} (-q)^{l(\sigma)} U_{0\sigma_0} \dots U_{i-1\sigma_{i-1}} U_{i+1\sigma_{i+1}} \dots U_{n\sigma_n}, \quad (5)$$

где $l(\sigma)$ - четность подстановки σ . Накладывая условие $\det_q U = 1$ и вводя инволюцию * формулой $U_{ij}^* = S(U_{ji})$, получим квантовую унитарную группу Кэли-Клейна $SU_q(n+1; \mathbf{j})$, $\mathbf{j} = (j_1 \dots j_n)$, задаваемую соотношениями $UU^* = U^*U = I$, где t обозначает транспонирование. На квантовом пространстве $z_0 = x_0$, $z_i = J_{0i} x_i$, $w_0 = y_0$, $w_i = J_{0i} y_i$, $i = 0, 1, \dots, n$ с антиинволюцией $x_i = y_i^*$ и соотношениями $x_k x_m = q x_m x_k$, $y_i y_j = q^{-1} y_j y_i$ действие δ группы $SU_q(n+1; \mathbf{j})$ сохраняет эрмитову квадратичную форму

$$\delta z = U \otimes z, \quad \delta(z^* z) = 1 \otimes z^* z, \quad (6)$$

$$z^* z = z_1^* z_1 + z_2^* z_2 + \dots + z_n^* z_n.$$

Выбирая значения $j = i, \iota$, мы получаем соответственно псевдоэрмитовы либо вырожденные формы.

Двумерная унитарная группа $SU_q(2; \mathbf{j})$

Конкретные формулы для группы $SU_q(2; \mathbf{j})$ выглядят следующим образом, $\lambda = q - q^{-1}$:

$$R_q = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} t_{00} & jt_{01} \\ jt_{10} & t_{11} \end{pmatrix},$$

$$S(U) = \begin{pmatrix} t_{11} & -jq^{-1}t_{01} \\ -jqt_{10} & t_{00} \end{pmatrix}, \quad U^* = \begin{pmatrix} t_{11} & -jqt_{10} \\ -jq^{-1}t_{01} & t_{00} \end{pmatrix},$$

$$\det_q U = t_{00}t_{11} - j^2qt_{01}t_{10} = t_{11}t_{00} - j^2q^{-1}t_{10}t_{01} = 1.$$

Коммутационные соотношения для элементов U - матрицы имеют

вид

$$t_{10}t_{11} = qt_{11}t_{10}, \quad t_{00}t_{10} = qt_{10}t_{00},$$

$$t_{00}t_{01} = qt_{01}t_{00}, \quad t_{01}t_{11} = qt_{11}t_{01},$$

$$t_{01}t_{10} = t_{10}t_{01}, \quad t_{00}t_{11} = t_{11}t_{00} = 1,$$

а коумножение равно

$$\Delta(t_{00}) = t_{00} \otimes t_{00} + j^2 t_{01} \otimes t_{10},$$

$$\Delta(t_{11}) = t_{11} \otimes t_{11} + j^2 t_{10} \otimes t_{01}, \quad (7)$$

$$\Delta(t_{01}) = t_{00} \otimes t_{01} + t_{01} \otimes t_{11},$$

$$\Delta(t_{10}) = t_{10} \otimes t_{00} + t_{11} \otimes t_{10}.$$

При $j = i$ получаем формулы для группы $SU_q(1, 1)$. При $j = \iota$ имеем формулы для контрактированной $SU_q(2)$ группы, совпадающие

с найденной недавно [5] контракцией $SU_q(2)$ в евклидову квантовую группу $E_q(2)$. Отметим, что в [5] контракция осуществлялась предельным переходом $\alpha \rightarrow 0$, а T -матрица имела вид

$$\begin{pmatrix} t_{00} & \alpha t_{01} \\ \alpha t_{10} & t_{11} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

что вполне согласуется с нашими формулами.

Трехмерная унитарная группа $SU_q(3; j)$

R -матрица и матрица U имеют вид

$$R_q = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} t_{00} & j_1 t_{01} & j_1 j_2 t_{02} \\ j_1 t_{10} & t_{11} & j_2 t_{12} \\ j_1 j_2 t_{20} & j_2 t_{21} & t_{22} \end{pmatrix},$$

$$\det U = t_{00} t_{11} t_{22} + j_1^2 j_2^2 t_{01} t_{12} t_{20} + j_1^2 j_2^2 t_{02} t_{10} t_{21} - q(j_1^2 t_{01} t_{10} t_{22} + j_2^2 t_{00} t_{12} t_{21} + j_1^2 j_2^2 t_{02} t_{11} t_{20}) = 1.$$

Антипод выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} t_{11} t_{22} - j_2^2 t_{12} t_{21} & j_1(j_2^2 t_{02} t_{21} - q^{-1} t_{01} t_{22}) & j_1 j_2(q^{-2} t_{01} t_{12} - q^{-1} t_{02} t_{11}) \\ j_1(j_2^2 q^2 t_{12} t_{20} - q t_{10} t_{22}) & t_{00} t_{22} - j_1^2 j_2^2 q t_{02} t_{20} & j_2(j_1^2 t_{02} t_{10} - q^{-1} t_{00} t_{12}) \\ j_1 j_2(q^2 t_{10} t_{21} - q^3 t_{11} t_{20}) & j_2(j_1^2 q^2 t_{01} t_{20} - q t_{00} t_{21}) & t_{00} t_{11} - j_1^2 q t_{01} t_{10} \end{pmatrix}$$

Инволюция определяется соотношением $U^* = S(U)^t$. Коммутационные соотношения для матричных элементов матрицы U удобно разделить на три группы.

Соотношения типа $AB=qBA$:

$$\begin{aligned} t_{00} t_{01} &= q t_{01} t_{00}, & t_{01} t_{02} &= q t_{02} t_{01}, & t_{00} t_{02} &= q t_{02} t_{00}, \\ t_{10} t_{11} &= q t_{11} t_{10}, & t_{11} t_{12} &= q t_{12} t_{11}, & t_{10} t_{12} &= q t_{12} t_{10}, \\ t_{20} t_{21} &= q t_{21} t_{20}, & t_{21} t_{22} &= q t_{22} t_{21}, & t_{20} t_{22} &= q t_{22} t_{20}, \\ t_{00} t_{10} &= q t_{10} t_{00}, & t_{10} t_{20} &= q t_{20} t_{10}, & t_{00} t_{20} &= q t_{20} t_{00}, \\ t_{01} t_{11} &= q t_{11} t_{01}, & t_{11} t_{21} &= q t_{21} t_{11}, & t_{01} t_{21} &= q t_{21} t_{01}, \\ t_{02} t_{12} &= q t_{12} t_{02}, & t_{12} t_{22} &= q t_{22} t_{12}, & t_{02} t_{22} &= q t_{22} t_{02}. \end{aligned}$$

Коммутирующие матричные элементы:

$$\begin{aligned} t_{02} t_{11} &= t_{11} t_{02}, & t_{01} t_{20} &= t_{20} t_{01}, & t_{10} t_{02} &= t_{02} t_{10}, \\ t_{11} t_{20} &= t_{20} t_{11}, & t_{20} t_{12} &= t_{12} t_{20}, & t_{02} t_{21} &= t_{21} t_{02}. \end{aligned}$$

Соотношения типа $AB = BA + j^2 \lambda - CD$:

$$\begin{aligned} t_{01} t_{11} &= t_{11} t_{00} + j_1^2 \lambda t_{10} t_{01}, & t_{00} t_{12} &= t_{12} t_{00} + j_1^2 \lambda t_{10} t_{02}, \\ t_{11} t_{22} &= t_{22} t_{11} + j_2^2 \lambda t_{21} t_{12}, & t_{10} t_{22} &= t_{22} t_{10} + j_2^2 \lambda t_{20} t_{12}, \\ t_{00} t_{22} &= t_{22} t_{00} + j_1^2 j_2^2 \lambda t_{20} t_{02}, & t_{00} t_{21} &= t_{21} t_{00} + j_1^2 \lambda t_{20} t_{01}, \\ t_{01} t_{12} &= t_{12} t_{01} + \lambda t_{11} t_{02}, & t_{01} t_{22} &= t_{22} t_{01} + j_2^2 \lambda t_{21} t_{02}, \\ t_{10} t_{21} &= t_{21} t_{10} + \lambda t_{20} t_{11}, & & & & \end{aligned}$$

Коумножение (4) имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta(t_{00}) &= t_{00} \otimes t_{00} + j_1^2 t_{01} \otimes t_{10} + j_1^2 j_2^2 t_{02} \otimes t_{20}, \\ \Delta(t_{01}) &= t_{00} \otimes t_{01} + j_1 t_{01} \otimes t_{11} + j_2^2 t_{02} \otimes t_{21}, \\ \Delta(t_{02}) &= t_{00} \otimes t_{02} + t_{01} \otimes t_{12} + t_{02} \otimes t_{22}, \\ \Delta(t_{10}) &= t_{10} \otimes t_{00} + t_{11} \otimes t_{10} + j_2^2 t_{12} \otimes t_{20}, \\ \Delta(t_{22}) &= j_1^2 t_{10} \otimes t_{01} + t_{11} \otimes t_{11} + j_2^2 t_{12} \otimes t_{21}, \\ \Delta(t_{12}) &= j_1^2 t_{10} \otimes t_{02} + t_{11} \otimes t_{12} + t_{12} \otimes t_{22}, \\ \Delta(t_{20}) &= t_{20} \otimes t_{00} + t_{21} \otimes t_{10} + t_{22} \otimes t_{20}, \\ \Delta(t_{21}) &= j_1^2 t_{20} \otimes t_{01} + t_{21} \otimes t_{11} + t_{22} \otimes t_{21}, \\ \Delta(t_{22}) &= j_1^2 j_2^2 t_{20} \otimes t_{02} + j_2^2 t_{21} \otimes t_{12} + t_{22} \otimes t_{22}. \end{aligned}$$

Ниже приведены коммутационные соотношения, коумножения и антипод для трех случаев контракций.

1. Контракция по первому параметру: $j_1 = 1, j_2 = 1$.

Коммутационные соотношения

$$\begin{aligned} t_{00} t_{11} &= t_{22} t_{11}, & t_{00} t_{12} &= t_{12} t_{00}, \\ t_{11} t_{22} &= t_{22} t_{11} + \lambda t_{21} t_{12}, & t_{10} t_{22} &= t_{22} t_{10} + \lambda t_{20} t_{12}, \\ t_{00} t_{22} &= t_{22} t_{00}, & t_{00} t_{21} &= t_{21} t_{00}, \\ t_{01} t_{12} &= t_{12} t_{01} + \lambda t_{11} t_{02}, & t_{01} t_{22} &= t_{22} t_{01} + \lambda t_{21} t_{02}, \\ t_{10} t_{21} &= t_{21} t_{10} + \lambda t_{20} t_{11}. & & & & \end{aligned}$$

Коумножение

$$\begin{aligned} \Delta(t_{00}) &= t_{00} \otimes t_{00}, \\ \Delta(t_{01}) &= t_{00} \otimes t_{01} + t_{01} \otimes t_{11} + t_{02} \otimes t_{21}, \\ \Delta(t_{02}) &= t_{00} \otimes t_{02} + t_{01} \otimes t_{12} + t_{02} \otimes t_{22}, \\ \Delta(t_{10}) &= t_{10} \otimes t_{00} + t_{11} \otimes t_{10} + t_{12} \otimes t_{20}, \\ \Delta(t_{11}) &= t_{11} \otimes t_{11} + t_{12} \otimes t_{21}, \\ \Delta(t_{12}) &= t_{11} \otimes t_{12} + t_{12} \otimes t_{22}, \\ \Delta(t_{20}) &= t_{20} \otimes t_{00} + t_{21} \otimes t_{10} + t_{22} \otimes t_{20}, \\ \Delta(t_{21}) &= t_{21} \otimes t_{11} + t_{22} \otimes t_{21}, \\ \Delta(t_{22}) &= t_{22} \otimes t_{22} + t_{22} \otimes t_{22}. \end{aligned}$$

Антипод

$$\begin{pmatrix} t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21} & \iota_1(t_{02}t_{21} - q^{-1}t_{01}t_{22}) & \iota_1(q^{-2}t_{01}t_{12} - q^{-1}t_{02}t_{11}) \\ \iota_1(q^2t_{12}t_{20} - qt_{10}t_{22}) & t_{00}t_{22} & -q^{-1}t_{00}t_{12} \\ \iota_1(q^2t_{10}t_{21} - q^3t_{11}t_{20}) & -qt_{00}t_{21} & t_{00}t_{11} \end{pmatrix}$$

2. Контракция по второму параметру: $j_1 = 1, j_2 = \iota_2$.
Комутиационные соотношения.

$$\begin{aligned} t_{00}t_{11} &= t_{11}t_{00} + \lambda t_{10}t_{01}, & t_{00}t_{12} &= t_{12}t_{00} + \lambda t_{10}t_{02}, \\ t_{11}t_{22} &= t_{22}t_{11}, & t_{10}t_{22} &= t_{22}t_{12}, \\ t_{00}t_{22} &= t_{22}t_{00}, & t_{00}t_{21} &= t_{21}t_{00} + \lambda t_{20}t_{01}, \\ t_{01}t_{12} &= t_{12}t_{01} + \lambda t_{11}t_{02}, & t_{01}t_{22} &= t_{22}t_{01}, \\ t_{10}t_{21} &= t_{21}t_{10} + \lambda t_{20}t_{11}. \end{aligned}$$

Коумножение.

$$\begin{aligned} \Delta(t_{00}) &= t_{00} \otimes t_{00} + t_{01} \otimes t_{10}, \\ \Delta(t_{01}) &= t_{00} \otimes t_{01} + t_{01} \otimes t_{11}, \\ \Delta(t_{02}) &= t_{00} \otimes t_{02} + t_{01} \otimes t_{12} + t_{02} \otimes t_{22}, \\ \Delta(t_{10}) &= t_{10} \otimes t_{00} + t_{11} \otimes t_{10}, \\ \Delta(t_{11}) &= t_{10} \otimes t_{01} + t_{11} \otimes t_{11}, \\ \Delta(t_{12}) &= t_{10} \otimes t_{02} + t_{11} \otimes t_{12} + t_{12} \otimes t_{22}, \\ \Delta(t_{20}) &= t_{20} \otimes t_{00} + t_{21} \otimes t_{10} + t_{22} \otimes t_{20}, \\ \Delta(t_{21}) &= t_{20} \otimes t_{01} + t_{21} \otimes t_{11} + t_{22} \otimes t_{21}, \\ \Delta(t_{22}) &= t_{22} \otimes t_{22}. \end{aligned}$$

Антипод

$$\begin{pmatrix} t_{11}t_{22} & -q^{-1}t_{01}t_{22} & \iota_2(q^{-2}t_{01}t_{12} - q^{-1}t_{02}t_{11}) \\ -qt_{10}t_{22} & t_{00}t_{22} & \iota_2(t_{02}t_{10} - q^{-1}t_{00}t_{12}) \\ \iota_2(q^2t_{10}t_{21} - q^3t_{11}t_{20}) & \iota_2(q^2t_{01}t_{20} - qt_{00}t_{21}) & t_{00}t_{11} - qt_{01}t_{10} \end{pmatrix}$$

3. Двумерная контракция по обоим параметрам: $j_1 = \iota_1, j_2 = \iota_2$.
Комутиационные соотношения

$$\begin{aligned} t_{00}t_{11} &= t_{11}t_{00} + \lambda t_{10}t_{01}, & t_{00}t_{12} &= t_{12}t_{00}, \\ t_{11}t_{22} &= t_{22}t_{11}, & t_{10}t_{22} &= t_{22}t_{10}, \\ t_{00}t_{22} &= t_{22}t_{00}, & t_{00}t_{21} &= t_{21}t_{00}, \\ t_{01}t_{12} &= t_{12}t_{01} + \lambda t_{11}t_{02}, & t_{01}t_{22} &= t_{22}t_{01}, \\ t_{10}t_{21} &= t_{21}t_{10} + \lambda t_{20}t_{11}. \end{aligned}$$

Коумножение

$$\begin{aligned} \Delta(t_{00}) &= t_{00} \otimes t_{00}, \\ \Delta(t_{11}) &= t_{11} \otimes t_{11}, \\ \Delta(t_{22}) &= t_{22} \otimes t_{22}, \\ \Delta(t_{01}) &= t_{00} \otimes t_{01} + t_{01} \otimes t_{11}, \\ \Delta(t_{10}) &= t_{10} \otimes t_{00} + t_{11} \otimes t_{10}, \\ \Delta(t_{12}) &= t_{11} \otimes t_{12} + t_{12} \otimes t_{12}, \\ \Delta(t_{21}) &= t_{21} \otimes t_{11} + t_{22} \otimes t_{21}, \\ \Delta(t_{02}) &= t_{00} \otimes t_{02} + t_{01} \otimes t_{12} + t_{02} \otimes t_{22}, \\ \Delta(t_{20}) &= t_{20} \otimes t_{00} + t_{21} \otimes t_{10} + t_{22} \otimes t_{20}. \end{aligned}$$

Антипод

$$\begin{pmatrix} t_{11}t_{22} & -\iota_1(q^{-1}t_{01}t_{22}) & \iota_1\iota_2(q^{-2}t_{01}t_{12} - q^{-1}t_{02}t_{11}) \\ -\iota_1(qt_{10}t_{22}) & t_{00}t_{22} & -\iota_2(q^{-1}t_{00}t_{12}) \\ \iota_1\iota_2(q^2t_{10}t_{21} - q^3t_{11}t_{20}) & -\iota_2(qt_{00}t_{21}) & t_{00}t_{11} \end{pmatrix}$$

Резюме

Описанный метод введения структуры Кэли-Клейна на квантовых унитарных группах дает весьма легкий рецепт описания некоторых неполупростых некомпактных квантовых групп. Отметим, что структура Кэли-Клейна технически наиболее легко вводится на унитарных квантовых группах. В случае ортогональных групп появляются вычислительные проблемы. Мы рассмотрим эти вопросы в следующей работе. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-011-16180).

ЛИТЕРАТУРА

1. Громов Н.А. Контракции и аналитические продолжения классических групп: единый подход.—Сыктывкар, 1990.

2. Громов Н.А. Контракции и аналитические продолжения представлений группы $SU(2)$. Наст. сборник.—С.3-16.
 3. Решетихин Н.Ю., Тахтаджян Л.А., Фадеев Л.Д. Квантование групп и алгебр Ли // Алгебра и анализ, 1989.—N1—С. 178-206.
 4. Gromov N. The matrix quantum unitary Cayley-Klein groups // J.Phys.A: Math.Gen., 26(1993) L5-L8
 5. Schupp P., Watts P., Zumino B., The two-dimensional quantum Euclidean algebra // Lett. Math. Phys. 24, 141, 1992.

ЧАСТИЧНОЕ УСРЕДНЕНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ РЕЗОНАНСА В СИСТЕМАХ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ, БЛИЗКИХ К ИНТЕГРИРУЕМЫМ ГАМИЛЬТОНОВЫМ

А.А.Карабанов

Постановка задачи

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q}(p, q) + \varepsilon \Phi(p, q), \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p}(p, q) + \varepsilon \Gamma(p, q), \end{aligned} \quad (1)$$

$$p = (p_1, p_2), \quad q = (q_1, q_2)$$

с гладкой правой частью, близкую ($0 < \varepsilon \ll 1$) к интегрируемой гамильтоновой системе с двумя степенями свободы:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q}(p, q), \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p}(p, q). \end{aligned} \quad (2)$$

Будем предполагать, что система (2) нелинейна и задана в некоторой связной области $D \subset \mathbb{R}^4$, целиком заполненной торами Лиувилля. В области D удобно перейти к переменным "действие-угол":

$I = (I_1, I_2)$, $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ и переписать систему (1) в виде

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \varepsilon F(I, \theta), \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega(I) + \varepsilon G(I, \theta), \end{aligned} \quad (3)$$

где ω , F , G — гладкие, 2π -периодические по θ функции, заданные на прямом произведении компактной односвязной области $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ и двумерного тора. При этом (в силу каноничности переменных I, θ) имеют место формулы:

$$\begin{aligned} F &= \left(\frac{\partial q}{\partial \theta} \right)^T \Phi - \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right)^T \Gamma, \\ G &= - \left(\frac{\partial q}{\partial I} \right)^T \Phi + \left(\frac{\partial p}{\partial I} \right)^T \Gamma, \\ \omega &= \frac{\partial H}{\partial I}. \end{aligned} \quad (4)$$

Из формул (4) следует, в частности, что дивергенция векторного поля системы (3) равна дивергенции векторного поля системы (1). Будем предполагать, что последняя не равна тождественно нулю.

Говорят, что в системе (3) возможен резонанс $r \in \mathbb{Q}$, если в области Δ существуют решения уравнения

$$\omega_1(I) + r\omega_2(I) = 0, \quad (5)$$

где ω_1, ω_2 — элементы вектора ω .

Поскольку система (2) нелинейна, уравнение (5) определяет в области Δ гладкую кривую, которую называют резонансной. Резонансные кривые, соответствующие различным r , всюду плотно заполняют область Δ . Последнее обстоятельство значительно усложняет вопрос о глобальном поведении решений системы (3). Связано это с расходимостью асимптотических методов теории возмущений. В частности, усреднение системы (3) по θ приводит, вообще говоря, к неверным результатам (см. [1]).

Настоящая работа касается применения к системе (3) метода частичного усреднения [2], который оказался весьма эффективным при исследовании резонансов в периодических системах, близких к двумерным гамильтоновым (или в системах с полутора степенями свободы [3]). Полученная ниже частично усредненная система будет задана в малой окрестности резонанса, т.е. на множестве $\omega_1(I) + r\omega_2(I) \sim \mu = \sqrt{\varepsilon}$ при фиксированном r .

Частичное усреднение в окрестности выделенного резонанса

Зафиксируем кривую (5), соответствующую резонансу r . Пусть $I = I^0(\lambda)$ — гладко-параметрическое задание указанной кривой. Введем в рассмотрение нормальный и касательный векторы

$$\begin{aligned} N(\lambda) &= \frac{d(\omega_1 + r\omega_2)}{dI}(I^0(\lambda)), \\ T(\lambda) &= \frac{dI^0}{d\lambda}(I^0(\lambda)) \end{aligned}$$

и сделаем в системе (3) замену:

$$\begin{aligned} I &= I^0(\lambda) + \mu h \eta(\lambda), \\ \theta_1 &= \varphi - r\beta, \\ \theta_2 &= \beta, \end{aligned}$$

где $\eta(\lambda) = \|N(\lambda)\|^{-2} N(\lambda)$.

Как нетрудно видеть, величина μh пропорциональна отклонению точки I от резонансной кривой. В переменных $h, \lambda, \varphi, \beta$ получим:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \mu f_N(\lambda, \varphi, \beta) + \mu^2 a(\lambda, \varphi, \beta) h + O(\mu^3), \\ \frac{d\lambda}{dt} &= \mu^2 f_T(\lambda, \varphi, \beta) + O(\mu^3), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \mu h + \mu^2 [b(\lambda) h^2 + g(\lambda, \varphi, \beta)] + O(\mu^3), \\ \frac{d\beta}{dt} &= \omega_0(\lambda) + \mu c(\lambda) h + O(\mu^2), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} f_N &= \langle N(\lambda), F(I^0(\lambda), \varphi - r\beta, \beta) \rangle, \\ f_T &= \|T(\lambda)\|^{-2} \langle T(\lambda), F(I^0(\lambda), \varphi - r\beta, \beta) \rangle, \\ a &= \|\eta(\lambda)\|^{-2} \left\langle \eta(\lambda), \frac{dF}{dI}(I^0(\lambda), \varphi - r\beta, \beta) \eta(\lambda) - \frac{d\eta}{d\lambda}(\lambda) f_T \right\rangle, \\ b &= \frac{1}{2} \left\langle \frac{d^2(\omega_1 + r\omega_2)}{dI^2}(I^0(\lambda)) \eta(\lambda), \eta(\lambda) \right\rangle, \\ g &= G_1(I^0(\lambda), \varphi - r\beta, \beta) + r G_2(I^0(\lambda), \varphi - r\beta, \beta), \\ \omega_0 &= \omega_2(I^0(\lambda)), \\ c &= \left\langle \frac{d\omega_2}{dI}(I^0(\lambda)), \eta(\lambda) \right\rangle \end{aligned}$$

(здесь $(,)$ — скалярное произведение в \mathbf{R}^2).

Система (6) одночастотная. Ее правые части периодичны по β с периодом $2\pi s_1$, где s_1 — знаменатель резонанса. Разложив функции f_N, f_T, a, g в ряды Фурье по β

$$f_N = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f_N^{(n)}(\lambda, \varphi) e^{in\beta/s_1}, \quad f_T = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f_T^{(n)}(\lambda, \varphi) e^{in\beta/s_1},$$

$$a = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a^{(n)}(\lambda, \varphi) e^{in\beta/s_1}, \quad g = \sum_{n \in \mathbf{Z}} g^{(n)}(\lambda, \varphi) e^{in\beta/s_1},$$

сделаем в системе (6) замену:

$$u = h + \mu \xi_1(\lambda, \varphi, \beta) + \mu^2 \zeta(\lambda, \varphi, \beta) h,$$

$$v = \varphi + \mu^2 \xi_2(\lambda, \varphi, \beta),$$

$$\sigma = \lambda + \mu^2 \xi_3(\lambda, \varphi, \beta),$$

где

$$\xi_1 = \frac{is_1}{\omega_0} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} f_N^{(n)} e^{in\beta/s_1},$$

$$\zeta = \frac{is_1}{\omega_0} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \left[a^{(n)} + \frac{is_1}{n\omega_0} \frac{\partial f_N^{(n)}}{\partial \varphi} - \frac{1}{\omega_0} f_N^{(n)} c \right] e^{in\beta/s_1},$$

$$\xi_3 = \frac{is_1}{\omega_0} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} f_T^{(n)} e^{in\beta/s_1},$$

$$\xi_2 = \frac{is_1}{\omega_0} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \left[g^{(n)} - \frac{is_1}{n\omega_0} f_N^{(n)} \right] e^{in\beta/s_1}.$$

После замены приходим к системе

$$\frac{du}{dt} = \mu f_N^{(0)}(\sigma, v) + \mu^2 a^{(0)}(\sigma, v) u + O(\mu^3),$$

$$\frac{dv}{dt} = \mu u + \mu^2 [b(\sigma) u^2 + g^{(0)}(\sigma, v)] + O(\mu^3),$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \mu^2 f_T^{(0)}(\sigma, v) + O(\mu^3),$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \omega_0(\sigma) + \mu c(\sigma) u + O(\mu^2),$$
(7)

которая с точностью до выписанных слагаемых совпадает с результатом усреднения системы (6) по β . Сохраняя в системе (7) только выписанные слагаемые и отбрасывая последнее уравнение, получим

систему

$$\frac{du}{dt} = \mu f_N^{(0)}(\sigma, v) + \mu^2 a^{(0)}(\sigma, v) u,$$

$$\frac{dv}{dt} = \mu u + \mu^2 [b(\sigma) u^2 + g^{(0)}(\sigma, v)],$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \mu^2 f_T^{(0)}(\sigma, v).$$
(8)

Следуя [2], систему (8) будем называть частично усредненной.

Некоторые свойства системы (8)

Пусть $X(\theta)$ — произвольная гладкая, 2π -периодическая по θ функция. Имеем:

$$X = \sum_{k_1, k_2 \in \mathbf{Z}} X^{(k_1, k_2)} e^{i(k_1 \theta_1 + k_2 \theta_2)} =$$

$$= \sum_{k_1, k_2 \in \mathbf{Z}} X^{(k_1, k_2)} e^{ik_1 \varphi} e^{i(k_2 - r k_1) \beta}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi s_1} \int_0^{2\pi s_1} X(\theta) d\beta = \sum_{n \in \mathbf{Z}} X^{(ns_1, ns_2)} e^{ins_1 \varphi},$$

где s_2 — числитель резонанса. Таким образом

$$f_N^{(0)} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \langle N(\sigma), F^{(ns_1, ns_2)}(I^0(\sigma)) \rangle e^{ins_1 v},$$

$$f_T^{(0)} = \|\tau(\sigma)\|^{-2} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \langle T(\sigma), F^{(ns_1, ns_2)}(I^0(\sigma)) \rangle e^{ins_1 v},$$

$$a^{(0)} = \|\eta(\sigma)\|^{-2} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \left\langle \eta(\sigma), \frac{dF^{(ns_1, ns_2)}}{dI}(I^0(\sigma)) \eta(\sigma) \right\rangle e^{ins_1 v} -$$

$$- \|\eta(\sigma)\|^{-2} \left\langle \eta(\sigma), \frac{d\eta}{d\lambda}(\sigma) \right\rangle f_T^{(0)},$$

$$g^{(0)} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \left[G_1^{(ns_1, ns_2)}(I^0(\sigma)) + r G_2^{(ns_1, ns_2)}(I^0(\sigma)) \right] e^{ins_1 v}.$$

Тем самым правые части (8) либо вовсе не зависят от v , либо периодичны по v с наименьшим периодом $2\pi/s_1$. Первая ситуация имеет место, если правые части (3) не содержат гармоник с номерами

$(ns_1, ns_2), n \neq 0$. Вторая — если такие гармоники имеются. Во втором случае резонанс r будем называть основным, в первом случае — неосновным.

Фазовым пространством системы (8) естественно считать прямое произведение плоскости (u, σ) и окружности $v = v \pmod{2\pi/s_1}$.

В случае неосновного резонанса система (8) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= f_N^{(0)}(\sigma) + \mu a^{(0)}(\sigma) u, \\ \frac{dv}{d\tau} &= u + \mu [b(\sigma) u^2 + g^{(0)}(\sigma)], \\ \frac{d\sigma}{d\tau} &= \mu f_T^{(0)}(\sigma), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\tau = \mu t$, т.е. совпадает с полностью усредненной [2]. Первое и третье уравнения системы (9) не зависят от второго и образуют систему на плоскости. Тем самым легко доказывается

Теорема 1. Пусть резонанс r — неосновной. Тогда 1) если уравнение

$$f_N^{(0)}(\sigma) = f_T^{(0)}(\sigma) \quad (10)$$

не имеет вещественных решений, то как положительные, так и отрицательные полутраектории системы (9) за время $\tau \sim 1$ покидают любую ограниченную область ее фазового пространства; 2) если $\sigma = \sigma_0$ — вещественное решение уравнения (10) такое, что

$$a^{(0)}(\sigma_0) \frac{\partial f_T^{(0)}}{\partial \sigma}(\sigma_0) > 0,$$

то в фазовом пространстве системы (9) существует область, заполненная траекториями, либо при $\tau \rightarrow +\infty$, либо при $\tau \rightarrow -\infty$, стремящимися к циклу $u = 0, \sigma = \sigma_0$; при этом, если $g^{(0)}(\sigma_0) = 0$, то на указанном цикле имеется положение равновесия системы (9).

Пусть теперь резонанс r — основной. В этом случае система (8) совпадает с системой (9) лишь после усреднения по v . Относительно свойств системы (8) в случае основного резонанса ограничимся следующим. Обозначим через $\bar{f}_N(\sigma)$ среднее функции $f_N^{(0)}(\sigma, v)$ по v .

Определение. Будем говорить, что система (3): 1) проходит через резонанс r , если

$$|\bar{f}_N(\sigma)| > \max_v |f_N^{(0)}(\sigma, v) - \bar{f}_N(\sigma)|$$

для любого σ ; 2) частично проходит через резонанс r , если

$$0 < |\bar{f}_N(\sigma)| < \max_v |f_N^{(0)}(\sigma, v) - \bar{f}_N(\sigma)|$$

хотя бы при одном значении σ ; 3) не проходит через резонанс r , если $\bar{f}_N(\sigma) \equiv 0$.

Заменяя время t на время τ , перепишем систему (8) в виде

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= f_N^{(0)}(\sigma, v) + \mu a^{(0)}(\sigma, v) u, \\ \frac{dv}{d\tau} &= u + \mu [b(\sigma) u^2 + g^{(0)}(\sigma, v)], \\ \frac{d\sigma}{d\tau} &= \mu f_T^{(0)}(\sigma, v). \end{aligned} \quad (11)$$

Теорема 2. 1) Если система (3) проходит через резонанс r , то для любого $d > 0$ и для любого решения системы (11) такого, что $|u(0)| \leq d$, найдется $\tau_0 \sim 1$ такое, что $|u(\pm\tau_0)| > 2d$; 2) если система (3) частично проходит через резонанс r , то для любого $d > 0$ существуют решения системы (11) такие, что $|u(0)| \leq d, |u(\pm\tau_0)| > 2d$, и существуют решения системы (11) такие, что $|u(\tau)| < 2d, -\tau_0 \mu^{-1} < \tau < \tau_0 \mu^{-1}$, при некотором $\tau_0 \sim 1$; 3) если система (3) не проходит через резонанс r , то найдется $d > 0$ такое, что для любого решения системы (11) из неравенства $|u(0)| \leq d$, будет следовать неравенство $|u(\tau)| < 2d, -\tau_0 \mu^{-1} < \tau < \tau_0 \mu^{-1}$, при некотором $\tau_0 \sim 1$.

Доказательство. Система нулевого приближения к системе (11) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= f_N^{(0)}(\sigma, v), \\ \frac{dv}{d\tau} &= u, \\ \frac{d\sigma}{d\tau} &= 0, \end{aligned}$$

ее траектории лежат на инвариантных цилиндрах $C(\sigma)$, каждый из которых определяется условием $\sigma = const$, и представляют собой траектории гамильтоновой системы

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= f_N^{(0)}(\sigma, v), \\ \frac{dv}{d\tau} &= u, \end{aligned} \quad (12)$$

зависящей от σ как от параметра. Поскольку система (12) эквивалентна уравнению маятникового типа с крутящим моментом $\bar{f}_N(\sigma)$ и колебательным моментом $f_N^{(0)}(\sigma, v) - \bar{f}_N(\sigma)$, то при выполнении условий 1), 2), 3) определения будут выполняться утверждения 1), 2) и 3) теоремы, соответственно. Теорема доказана.

Таким образом, прохождение системы (3) через фиксированный основной резонанс описывается гамильтоновой системой (12), эквивалентной уравнению маятникового типа. В этом смысле ситуация

аналогична случаю систем с полутора степенями свободы. Однако наличие у системы (12) колебательных решений не является достаточным условием для вечного "застревания" системы (3) в окрестности резонанса. Причиной служит дополнительная эволюция вдоль резонансной кривой.

Более детальное исследование системы (8) выходит за рамки настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. — М: Наука, 1974.
2. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Методы осреднения в теории нелинейных колебательных систем. — М: Изд-во МГУ, 1971.
3. Морозов А.Д., Шильников Л.П. О неконсервативных периодических системах, близких к двумерным гамильтоновым // ПММ, 1983.—Т.47.—Вып.3.—С.385-394.

ГРАДИЕНТНО-ВЯЗКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ В УСТЬЯХ ПРИЛИВНЫХ РЕК

А.П. Урнышев

Работа является развитием математической модели градиентно-вязкого движения однородной жидкости в устьях приливных рек [2]. В данной статье дается вывод дифференциальных уравнений колебаний уровня воды в пространстве. Основными уравнениями турбулентного движения вязкой несжимаемой жидкости на "наклонной плоскости" для градиентно-вязкого режима течений будут:

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

где x, y, z — декартовы координаты с направлением оси Ox вдоль русла, Oy — поперек русла и ось Oz вертикально вверх, u, v, w — соответствующие скорости потока;

уравнение движения в плоскости (x, y) в виде баланса внешних сил, давления и турбулентной вязкости по соответствующим направлениям X и Y

$$\frac{\partial}{\partial z} A \frac{\partial u}{\partial z} = g \sin \theta \sin \varphi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} A \frac{\partial v}{\partial z} = g \sin \theta \cos \varphi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (3)$$

где A — коэффициент турбулентного обмена импульсом, ρ — плотность, P — давление, θ и φ — углы, образуемые водной поверхностью

с горизонтом вдоль осей X и Y соответственно, g — ускорение свободного падения. По вертикальному направлению предполагается гидростатическое приближение

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \rho g \cos \theta. \quad (4)$$

Уравнения (1)–(4) описывают движение воды в области

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) : x \in (-\infty, \infty), y \in [-b_1(x), b_2(x)], z \in [-H(x, y), h(x, y, t)] \right\},$$

где функции $b_1(x), b_2(x), H(x, y)$ известны, а функция $h(x, y, t)$ неизвестна. В рассматриваемой области Ω для неизвестных функций u, v, w, P зададим граничные условия в виде:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \text{при } z = -H(x, y). \quad (5)$$

Если свободная поверхность $z = h(x, y, t)$ покрыта льдом, то в качестве кинематических условий на поверхности будем рассматривать

$$u = v = 0, \quad w = \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (6)$$

а динамическое условие возьмем в виде

$$P = P_{\text{атм}}, \quad (7)$$

где $P_{\text{атм}}$ — известная функция атмосферного давления. Более подробный вывод формулы (7) и ее обоснование для двумерного случая дается в работе [1]. Если поверхность $z = h(x, y, t)$ свободна от ледяного покрова, то кинематическое условие без учета ветра

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=h} = \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0, \quad w = \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (8)$$

а при наличии ветра

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=h} = \frac{\tau_{ux}}{A \cdot \rho}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=h} = \frac{\tau_{vy}}{A \cdot \rho}, \quad w = \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (9)$$

где τ_x, τ_y — тангенциальное напряжение ветра в направлениях X и Y соответственно. Напряжение ветра определяется из соотношений

$$\tau_x = k \rho_a |W| W_x, \quad \tau_y = k \rho_a |W| W_y, \quad (10)$$

где k — коэффициент трения, ρ_a — плотность воздуха, $W = (W_x, W_y)$ — вектор скорости ветра.

Вывод уравнения колебаний уровня воды. Из уравнения (4) при условии (7) найдем давление

$$P = P_{\text{атм}} + \rho g \cos \theta (h - z) \quad (11)$$

и подставим в уравнение (2) и (3). Пусть коэффициент турбулентности A и уклон водной поверхности θ постоянны. В этих предположениях уравнения (2) и (3) примут вид

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = g \sin \theta \sin \varphi + g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (12)$$

$$A \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = g \sin \theta \cos \varphi + g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial y}. \quad (13)$$

Уравнения (12) и (13) независимы, поэтому интегрировать их по вертикали можно отдельно. Используя методику интегрирования из работы [2], мы получим уравнение для скоростей:

$$u = -g \frac{(z + H)(h - z)}{2A} \left[\sin \theta \sin \varphi + \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} \right], \quad (14)$$

$$v = -g \frac{(z + H)(h - z)}{2A} \left[\sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \frac{\partial h}{\partial y} \right]. \quad (15)$$

Подставляя скорости u, v в уравнение неразрывности (1) и интегрируя по вертикали от $z = -H$ до $z = h$ с учетом граничных условий (5) и (6), получим дифференциальное уравнение для колебаний уровня воды при наличии ледяного покрова с постоянным уклоном водной поверхности

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{g \cos \theta}{12A} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[(h + H)^3 \left(\sin \varphi \tan \theta + \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(h + H)^3 \left(\cos \varphi \tan \theta + \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right] \right\}. \quad (16)$$

При учете граничных условий (8) для горизонтальных скоростей u и v получим выражение:

$$u = -g \frac{(z + H)(2h - z + H)}{2A} \left[\sin \theta \sin \varphi + \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} \right], \quad (17)$$

$$v = -g \frac{(z + H)(2h - z + H)}{2A} \left[\sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \frac{\partial h}{\partial y} \right]. \quad (18)$$

Подставляя уравнения (17) и (18) в уравнение неразрывности (1) и учитывая граничные условия (8) при отсутствии ледяного покрова, получим дифференциальное уравнение свободных колебаний уровня воды при постоянном уклоне θ

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{g \cos \theta}{3A} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[(h+H)^3 (\sin \varphi \tan \theta + \frac{\partial h}{\partial x}) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(h+H)^3 (\cos \varphi \tan \theta + \frac{\partial h}{\partial y}) \right] \right\}. \quad (19)$$

Отличие уравнений (16) и (19) состоит в том, что постоянный коэффициент перед выражением справа в 4 раза меньше для задач с "покрышкой".

При наличии ветра над свободной поверхностью необходимо учитывать граничное условие (9). После интегрирования уравнений (2) и (3) для скоростей u и v получим соответственно формулы:

$$u = -g \frac{(z+H)(2h-z+H)}{2A} \left[\sin \theta \sin \varphi + \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} \right] - \frac{k\rho_a}{\rho A} |W_x| \cdot W_x \cdot (z+H), \quad (20)$$

$$v = -g \frac{(z+H)(2h-z+H)}{2A} \left[\sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \frac{\partial h}{\partial y} \right] - \frac{k\rho_a}{\rho A} |W_y| \cdot W_y \cdot (z+H). \quad (21)$$

Соответствующее дифференциальное уравнение для колебаний уровня воды при учете ветра представляется следующим образом:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{g \cos \theta}{3A} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[(h+H)^3 (\tan \theta \sin \varphi + \frac{\partial h}{\partial x}) \right] + \frac{k\rho_a}{\rho A} |W_x| \cdot W_x \cdot (h+H)^2 \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(h+H)^3 (\tan \theta \cos \varphi + \frac{\partial h}{\partial y}) \right] + \frac{k\rho_a}{\rho A} |W_y| \cdot W_y \cdot (h+H)^2 \left. \right\}. \quad (22)$$

Дифференциальные уравнения (16), (19), (21) описывают колебания уровня воды в предположении постоянного уклона водной поверхности θ .

Если отказаться от предположения $\theta = const$, то процесс получения соответствующих формул (12)-(21) сохраняется, с той лишь разницей, что вместо $(\sin \theta \sin \varphi + \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x})$ по направлению X надо рассматривать выражение

$$(\sin \theta \sin \varphi + \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x}) + h \cdot \frac{\partial \cos \theta}{\partial x}, \quad (23)$$

а в поперечном направлении Y выражение $(\sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \frac{\partial h}{\partial y})$ надо заменить на

$$(\sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \frac{\partial h}{\partial y}) + h \cdot \frac{\partial \cos \theta}{\partial y}. \quad (24)$$

После этих операций в уравнениях (16), (19), (21) коэффициент в правой части не содержит функцию $\cos \theta$.

При определении уровня поверхности необходимо задать краевые условия. В качестве начала координат будем рассматривать морскую границу устьевого участка реки. Условимся, что при $x=0$ отклонение уровня поверхности h подчиняется гармоническим колебаниям с периодом приливной волны T и известной амплитудой $B = B(y)$

$$h(0, y, t) = B(y) \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \quad (25)$$

при

$$y = -b_1(x) : h(x, -b_1, t) = B_1(x) \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_1\right), \quad (26)$$

$$y = b_2(x) : h(x, b_2, t) = B_2(x) \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_2\right), \quad (27)$$

где фазы φ_1 и φ_2 , являющиеся функциями x и амплитуды колебаний вдоль берегов B_1, B_2 , известны. При неограниченном возрастании x будем предполагать

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x, y, t) = 0. \quad (28)$$

Так как рассматриваемый процесс неустановившийся, требуется задать начальные условия. Для периодического процесса в качестве начальных можно взять любые, согласованные с (24)-(27) условия. Для простоты предположим, что в начальный момент уровень ре- жим не возмущен:

$$h(x, y, 0) = 0. \quad (29)$$

Таким образом, математическая модель колебаний водной поверхности для однородной жидкости в градиентно-вязком режиме построена в виде нелинейного дифференциального уравнения (16) при наличии ледяного покрова, (19) без учета ветровых нагонов и (21) при учете сгонно-нагонных ветровых явлений с граничными условиями (24)–(27) и с начальным приближением (28).

ЛИТЕРАТУРА

1. Урнышев А.П. Модель распространения приливной волны в устье реки Печоры в зимнюю межень. - Сыктывкар, 1988. - 24с. (Сер. препринтов "Науч. докл." / АН СССР, УрО, Коми науч. центр; Вып. 190).
2. Урнышев А.П. Распространение приливных волн в устьях северных рек. - Сыктывкар, 1993. - 124с.

ОЦЕНКА ДЛИНЫ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПРЕСНОЙ ВОДЫ В СИЛЬНО СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ЭСТУАРИЯХ

А.П. Урнышев, В.А. Урнышев

Если соленость на поверхности потока значительно отличается от придонной, то на средних глубинах существует большой градиент солености. Такой тип эстуария называется сильно стратифицированным. В этом случае наблюдается двухслойный характер движения водных масс. Через границу раздела слоев происходит обмен импульсом и транспорт соли [5].

В качестве исходных уравнений колебаний поверхности воды и границы раздела стратифицированных по плотности потоков будем рассматривать систему дифференциальных уравнений для градиентно-вязкого режима течений из работы [1]:

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} = \frac{g}{12A} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ D_1^3 \frac{\partial h_1}{\partial x} + \Delta \rho D_2^2 (3D_1 - 2D_2) \frac{\partial h_2}{\partial x} \right\}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} = \frac{g}{12A} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ D_2^2 \frac{\partial h_1}{\partial x} (3D_1 - 2D_2) + \Delta \rho D_2^3 \left(4 - 3 \frac{D_2}{D_1} \right) \frac{\partial h_2}{\partial x} \right\}, \quad (2)$$

где h_1 — уровень воды, h_2 — граница раздела морской и пресной воды в стратифицированном по плотности потоке; A — постоянный коэффициент вертикального турбулентного обмена импульсом; $D_1 = h_1 + H$ — общая глубина потока, $D_2 = h_2 + H$ — глубина морской

воды, H — функция морского дна; $\Delta\rho = (\rho_1 - \rho_0)/\rho_0$, где ρ_0, ρ_1 — соответственно плотности пресной и морской воды.

Проинтегрируем уравнения (1) и (2) по периоду T приливной волны M_2 . Так как функции $h_1(x, t)$ и $h_2(x, t)$ периодичны, то слева получим нулевые значения, а справа, предполагая справедливой перестановку операций дифференцирования и интегрирования, получим

$$C_1 = \int_0^T \left\{ D_1^3 \frac{\partial h_1}{\partial x} + \Delta\rho D_2^2 (3D_1 - 2D_2) \frac{\partial h_2}{\partial x} \right\} dt, \quad (3)$$

$$C_2 = \int_0^T \left\{ D_2^2 (3D_1 - 2D_2) \frac{\partial h_1}{\partial x} + \Delta\rho D_2^3 \left(4 - 3 \frac{D_2}{D_1} \right) \frac{\partial h_2}{\partial x} \right\} dt. \quad (4)$$

Эти выражения в формулах (3), (4) отражают удельные расходы пресной и морской воды соответственно. Так как по мере удаленности от речного створа расход пресной воды уменьшается, то постоянная C_1 должна быть равна нулю. Из теоремы Лагранжа о среднем следует, что существуют моменты времени t_1 и t_2 , такие, что при $t = t_1$

$$D_1^3 \frac{\partial h_1}{\partial x} + \Delta\rho D_2^2 (3D_1 - 2D_2) \frac{\partial h_2}{\partial x} = 0, \quad (5)$$

а при $t = t_2$

$$D_2^2 \frac{\partial h_1}{\partial x} (3D_1 - 2D_2) + \Delta\rho D_2^3 \left(4 - 3 \frac{D_2}{D_1} \right) \frac{\partial h_2}{\partial x} = C_2 T. \quad (6)$$

Формулу (5) разложим в ряд Тейлора в момент времени t_2 и сохраним только линейную часть относительно $\Delta t = t_2 - t_1$.

$$\left[D_1^3 \frac{\partial h_1}{\partial x} + \Delta\rho D_2^2 (3D_1 - 2D_2) \frac{\partial h_2}{\partial x} \right]_{t=t_2} = - \frac{\partial}{\partial t} \left[D_1^3 \frac{\partial h_1}{\partial x} + \Delta\rho D_2^2 (3D_1 - 2D_2) \frac{\partial h_2}{\partial x} \right]_{t=t_2} \cdot \Delta t - \dots \quad (7)$$

Правую часть в формуле (7) обозначим через ΔA . Тогда относительно градиентов ∇h_1 и ∇h_2 получим систему уравнений

$$D_1^3 \frac{\partial h_1}{\partial x} + \Delta\rho D_2^2 (3D_1 - 2D_2) \frac{\partial h_2}{\partial x} = \Delta A, \quad (8)$$

$$D_2^2 \frac{\partial h_1}{\partial x} (3D_1 - 2D_2) + \Delta\rho D_2^3 \left(4 - 3 \frac{D_2}{D_1} \right) \frac{\partial h_2}{\partial x} = C_2 T. \quad (9)$$

Решая систему уравнений (8) и (9) относительно ∇h_1 и ∇h_2 , получим

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} = \frac{\Delta A \cdot b_2 - b_1 \cdot C_2 \cdot T}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial x} = \frac{a_1 \cdot C_2 \cdot T - a_2 \Delta A}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad (11)$$

где $a_1 = D_1^3$; $a_2 = D_2^2 (3D_1 - 2D_2)$; $b_1 = \Delta\rho D_2^2 (3D_1 - 2D_2)$; $b_2 = \Delta\rho D_2^3 (4 - 3D_2/D_1)$. Заметим, что глубина пресной воды, которую будем обозначать h , определяется формулой

$$h = h_1 - h_2 = D_1 - D_2, \quad (12)$$

поэтому из уравнений (10) и (11) для функции h получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\Delta A (b_2 + a_2) - C_2 T (b_1 + a_1)}{a_1 b_2 - a_2 b_1}. \quad (13)$$

При подстановке в правую часть уравнения (13) указанных выше значений получим

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{(3h + D_1) \Delta A}{4D_1 h^3} + \frac{D_2^2 (2h + D_1) [\Delta A - \Delta\rho C_2 T] - C_2 T D_1^3}{4\Delta\rho D_2^3 h^3}. \quad (14)$$

Уравнение (14) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение с начальным условием $h(0) = d_0$. Если принять, что при $x = L$ глубина пресной воды исчезающе мала, то длина ее распространения будет определяться формулой

$$L = \int_0^{d_0} \frac{4\Delta\rho D_1 D_2 h^3 dh}{g_1 - g_2}, \quad (15)$$

где

$$g_1 = C_2 T \left[D_1 (2h + D_1) \Delta\rho + \frac{D_1^4}{D_2^2} \right],$$

$$g_2 = \left[D_2 (3h + D_1) \Delta\rho + D_1 (2h + D_1) \right] \Delta A.$$

Подинтегральную функцию в формуле (15) представим в виде суммы геометрической прогрессии со знаменателем

$$q = \frac{D_2 (3h + D_1) \Delta\rho + D_1 (2h + D_1)}{D_1 (2h + D_1) \Delta\rho + D_1^4 / D_2^2} \cdot \frac{\Delta A}{C_2 T}, \quad (16)$$

который всегда по модулю меньше 1. В первом приближении, обозначая длину распространения пресной воды через L_0 , получим

$$L_0 = \frac{4\Delta\rho}{D_1^3 C_2 T} \int_0^{d_0} \frac{D_2^3 h^3 dh}{1 + \Delta\rho D_2^2 (2h/D_1 + 1)/D_1^2} = \frac{4D_1^4}{C_2 T} \int_0^{d_0/D_1} \frac{(1-z)^3 z^3 dz}{1/\Delta\rho + (1+2z)(1-z)^2}, \quad (17)$$

где сделана замена переменных $h = zD_1$ и $D_2 = D_1 - h$ или $D_2 = D_1(1-z)$ при условии, что $D_1 = \text{const}$. Для удобства введем обозначения: $a = d_0/D_1$, $b = 1 + 1/\Delta\rho$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{(1-z)^3 z^3 dz}{b-1+(1-z)^2(1+2z)} &= - \int_0^a \frac{z^6 - 3z^5 + 3z^4 - z^3}{2z^3 - 3z^2 + b} dz = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^a [z^3 - 1.5z^2 + 0.75z + 0.125 - 0.5b] dz - \\ &= -\frac{1}{16} \int_0^a \frac{3z^2 - 6bz - b(1-4b)}{2z^3 - 3z^2 + b} dz = \\ &= -\frac{a}{16} [2a^3 - 4a^2 + 3a - 4b + 1] - \frac{1}{16} I_0. \end{aligned}$$

Подынтегральную функцию в I_0 разложим на простейшие дроби. Для этого трехчлен в знаменателе представим в виде произведения:

$$2z^3 - 3z^2 + b = 2(z - \alpha)(z^2 + pz + q),$$

где α — корень кубического уравнения $2z^3 - 3z^2 + b = 0$, а постоянные p и q определяются соотношениями $p = \alpha - 1.5$ и $q = \alpha(\alpha - 1.5)$. Тогда подынтегральную функцию можно представить в виде

$$\frac{3z^2 - 6bz - b(1-4b)}{2z^3 - 3z^2 + b} = \frac{A}{z - \alpha} + \frac{Bz + C}{2(z^2 + pz + q)}.$$

Из этого соотношения, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях, получаем относительно неизвестных A, B, C систему линейных уравнений

$$\begin{cases} A + B = 3, \\ Ap + C - B\alpha = -6b, \\ Aq - C\alpha = -b(1-4b). \end{cases}$$

Решение этой системы имеет вид

$$\begin{cases} A = \frac{8}{3}\alpha^2(\alpha - 1)^2, \\ B = \frac{1}{3}[9 - 16\alpha^2(\alpha - 1)^2], \\ C = -\frac{\alpha(2\alpha - 3)}{3}[16\alpha^3 - 20\alpha^2 - 8\alpha + 3]. \end{cases}$$

Интеграл I_0 разбивается на два интеграла

$$I_0 = \int_0^a \frac{A}{z - \alpha} dz + \frac{1}{2} \int_0^a \frac{Bz + C}{z^2 + pz + q} dz = A \ln |z - \alpha| \Big|_0^a + 0.5 \int_0^a \frac{Bz + C}{z^2 + pz + q} dz, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} B \int_{p/2}^{a+p/2} \frac{x + D}{x^2 + l^2} dx &= \frac{B}{2} \ln(l^2 + x^2) \Big|_{p/2}^{a+p/2} + \frac{BD}{l} \arctan \frac{x}{l} \Big|_{p/2}^{a+p/2} = \\ &= \frac{B}{2} \ln \frac{l^2 + (a+p/2)^2}{l^2 + p^2/4} + \frac{BD}{l} \left[\arctan \frac{a+p/2}{l} - \arctan \frac{p}{2l} \right], \end{aligned}$$

где проведена замена переменных $x = z + p/2$ и $D = C/B - 0.5p$, $l = q - 0.25p^2$.

$$I_0 = A \ln \left| 1 - \frac{a}{\alpha} \right| + \frac{B}{4} \ln \left[1 + \frac{a(a+p)}{q} \right] + \frac{BD}{2l} \arctan \frac{4a(q - p^2/4)}{2q + ap}. \quad (19)$$

Окончательно получим следующую оценку длины распространения пресной воды в морском заливе в первом приближении:

$$L_0 = -\frac{D_1^4}{4C_2 T} \left\{ a [2a^3 - 4a^2 + 3a - 4b + 1] - A \ln \left| 1 - \frac{a}{\alpha} \right| + \frac{B}{4} \ln \left[1 + \frac{a(a+p)}{q} \right] + \frac{BD}{2l} \arctan \frac{4a(q - 0.25p^2)}{2q + ap} \right\}, \quad (20)$$

где $d = 1/b = \rho/g \cdot \Delta\rho$, $a = d_0/D_0$.

В частности, для устьевой области р. Печоры при наличии приливной волны M_2 с периодом 12.25 ч и глубине Печорского залива $D_1 = 20$ м при условиях, когда $a = 0.5$, $b = 28$ (b соответствует обратному значению относительной плотности $\Delta\rho$) $C_2 = 0.25\text{ м}^3/\text{с}$ получаем приближенно $L_0 = 16.4$ км.

Таким образом, уравнение (20) позволяет оценить длину распространения пресной воды в любой устьевой области, где справедливы предположения градиентно-вязкого режима течения. Для этого предварительно надо знать относительную глубину пресной воды в устьевом створе a , глубину приемного водоема D_1 , удельный расход морской воды C_2 и значения плотностей пресной и морской воды ρ_0, ρ_1 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Хублярян М.Г. Водные потоки: модели течений и качества вод суши // М.: Наука, 1991. — 192с.
2. Урнышев А.П. Распространение приливных волн в устьях северных рек. Сыктывкар, 1993. — 124с.

ТРЕХМЕРНАЯ ГРАДИЕНТНО-ВЯЗКАЯ МОДЕЛЬ ЭВОЛЮЦИИ ПРИЛИВНОЙ ВОЛНЫ НА МЕЛКОВОДЬЕ

Л.Э. Лапина

Рассматривается трехмерная задача эволюции приливной волны в области моря, в которой глубина меньше критического значения. Существование такого значения было показано в работе [4]. В области этих глубин и для длинных гравитационных волн типа приливной волны с точностью до $O(\max[Fr^2])$ выполняется градиентно-вязкий режим течения, т.е. такой, при котором силы вязкости и силы, обусловленные градиентом давления, имеют один порядок, а инерционные силы пренебрежимо малы [4].

Двумерная модель рассматривается в работе [3]. Трехмерная модель необходима, во-первых, когда направление распространения меняется в пространстве, т.е. нет постоянного направления у приливной волны, что может иметь место в достаточно широких заливах, и, во-вторых, для более полного учета направления ветра.

Постановка задачи

Пусть имеется залив, в котором есть область закритических глубин. Рассматривается распространение приливной волны в этой области. Задача распространения приливной волны исследуется во многих работах, но, как правило, с использованием осредненного по вертикали коэффициента вертикального турбулентного обмена (см., например, работу [6]). Однако зависимость вертикальной структуры течения, а следовательно и эволюции приливной волны, от коэффициента вертикального турбулентного обмена весьма существенна. В

работе [3] рассматривается эта задача с дополнительными уравнениями для коэффициента, но в двумерном случае.

Выберем следующую систему координат: ось z направим вертикально вниз, оси x, y расположим в горизонтальной плоскости невозмущенной свободной поверхности.

Тогда движение воды описывается уравнениями сохранения импульса в градиентно-вязком приближении, неразрывности, баланса энергии турбулентных пульсаций с учетом обобщения гипотез Прандтля и Колмогорова в следующей форме:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(A(x, y, z, t) \frac{\partial u}{\partial z} \right) = g \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(A(x, y, z, t) \frac{\partial v}{\partial z} \right) = g \frac{\partial \xi}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \alpha \frac{\partial}{\partial z} A \frac{\partial b}{\partial z} - \gamma \frac{b^2}{A} + A \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right], \quad (4)$$

$$A = l\sqrt{b}, \quad (5)$$

$$l = c^{1/4} \kappa \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)^2}}. \quad (6)$$

Уравнение (6) можно записать в более компактном виде:

$$l = c^{1/4} \kappa \frac{\left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right|}{\left| \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2} \right|},$$

где $A(x, y, z, t)$ — коэффициент вертикального турбулентного обмена, ξ — возвышение свободной поверхности, u, v, w — компоненты вектора скорости по осям x, y, z соответственно, b — кинетическая энергия турбулентных пульсаций, l — масштаб турбулентности, κ — постоянная Кармана, c, α, γ — эмпирические константы.

Ускорение Кориолиса не учитывается, так как предполагается, что горизонтальная протяженность акватории меньше внешнего радиуса деформации Россби $L_R = \sqrt{gH/f}$, где $f = 2\omega \sin \phi$ параметр Кориолиса и при $H \approx 10$ м, L_R составляет приблизительно 100 км.

Система уравнений (1)–(6) рассматривается при условии прилипания скорости на дне, т.е. при $z = H(x, y)$

$$u = v = w \equiv 0, \quad (7)$$

где $H(x, y)$ — функция дна. На поверхности водоема в зависимости от наличия или отсутствия припайного льда граничные условия будут иметь вид:

а) при наличии ледяного покрова

$$\text{условие прилипания:} \quad u|_{z=\xi} = v|_{z=\xi} \equiv 0 \quad (8)$$

$$\text{и кинематическое условие:} \quad w|_{z=\xi} \equiv \frac{\partial \xi}{\partial t};$$

б) на открытой поверхности с учетом воздействия ветра:

$$\text{условие равенства касательных напряжений} \quad A \frac{\partial u}{\partial z} |_{z=\xi} = \tau_x, \quad A \frac{\partial v}{\partial z} |_{z=\xi} = \tau_y \quad (9)$$

и кинематическое

$$\text{условие:} \quad w|_{z=\xi} \equiv \frac{d\xi}{dt} \equiv \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y},$$

где $\vec{\tau} = (\tau_x, \tau_y)$ — вектор тангенциального напряжения ветра на поверхности воды.

Проинтегрируем уравнения (1) и (2) по z :

$$A \frac{\partial u}{\partial z} = g \frac{\partial \xi}{\partial x} z + c_1, \quad (10)$$

$$A \frac{\partial v}{\partial z} = g \frac{\partial \xi}{\partial y} z + c_2. \quad (11)$$

Введем обозначения $\xi_x \equiv \frac{\partial \xi}{\partial x}$, $\xi_y \equiv \frac{\partial \xi}{\partial y}$. Деля уравнения (10), (11) на

A , имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{g \xi_x z + c_1}{A}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{g \xi_y z + c_2}{A}. \quad (13)$$

и ниже точки z_0) V_L , т.е. $|\bar{V}_D| = |\bar{V}_L|$. Найдем положение точки z_0 из эмпирических зависимостей.

Из условия линейности распределения касательного напряжения турбулентного трения по глубине, которое следует из выражений (10), (11), получим:

$$|\tau_L| = \rho g \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} (z_0 - \xi), \quad |\tau_D| = \rho g \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} (H - z_0),$$

где τ_D, τ_L - касательное напряжение на дне и на поверхности льда соответственно.

Выразим через соотношение Шези средние по вертикали скорости в верхней части потока от поверхности льда ξ до точки z_0 и в нижней части от z_0 до дна H через $|\nabla \xi| = \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}$:

$$\bar{V}_L = C_L \sqrt{(z_0 - \xi) |\nabla \xi|}, \quad \bar{V}_D = C_D \sqrt{(H - z_0) |\nabla \xi|}.$$

Исходя из равенства средних по вертикали скоростей в приледном \bar{V}_L и придонном \bar{V}_D частях течения [1], имеем:

$$\frac{C_D}{C_L} = \sqrt{|\tau_L/\tau_D|} = \sqrt{\frac{H - z_0}{z_0 - \xi}},$$

где $C_D = (H - z_0)^{1/6}/n_D$, $C_L = (z_0 - \xi)^{1/6}/n_L$ — коэффициенты Шези в форме Маннинга, n_L, n_D — коэффициенты шероховатости льда и дна соответственно. Тогда

$$z_0 = \frac{H + (n_D/n_L)^{3/2} \xi}{(n_D/n_L)^{3/2} + 1}.$$

Используем связь между коэффициентом шероховатости и размером частиц грунта или выступов шероховатости по формуле Штриклера [7]:

$$n = \frac{0.15}{g^{1/2} d^{1/6}},$$

где

$$d = \begin{cases} \Delta, & \text{для } d \geq 3 \text{ mm}, \\ 0.625 \Delta, & \text{для } d \leq 1.5 \text{ mm} \end{cases}$$

d — диаметр частиц грунта, Δ — характерный размер выступов шероховатости. Тогда, как показано в работе [3], для z_0 будем иметь оценку:

$$z_0 = \frac{H + (\Delta_D/\Delta_L)^{1/4}}{(\Delta_D/\Delta_L)^{1/4} + 1}, \quad (25)$$

где Δ_D, Δ_L — выступы шероховатости дна и льда соответственно:

$$\Delta_D = \sqrt{\Delta_{D_x}^2 + \Delta_{D_y}^2}, \quad \Delta_L = \sqrt{\Delta_{L_x}^2 + \Delta_{L_y}^2}.$$

Определение точек z_0 и z_1 в случае открытой поверхности

В этом случае точки z_0 и z_1 могут не совпадать и поэтому необходимо покомпонентно разделить касательные напряжения на дне и на поверхности. Для выражения турбулентного касательного напряжения от воздействия ветра $\vec{r}_b = (\tau_x, \tau_y)$ через его скорость используется общепринятая зависимость [2], [5]:

$$\tau_x = \rho_a C \alpha u_b |W|, \quad \tau_y = \rho_a C \alpha v_b |W|, \quad (26)$$

где ρ_a — плотность воздуха, C — эмпирическая константа ($1.3 \cdot 10^{-3}$), α — коэффициент передачи импульса от ветра и жидкости, $\vec{W} = (u_b, v_b)$ — вектор скорости ветра. Коэффициент α берем аналогично работе [3], т.е.

$$\alpha = \begin{cases} 0.23 & \text{при } H \geq 7.58 |W| \\ 0.75 & H < 7.58 |W|. \end{cases} \quad (27)$$

Для поиска точек z_0 и z_1 в случае открытого потока воспользуемся отношением касательного напряжения на верхней границе в результате воздействия ветра τ_x и τ_y к величинам донного трения в отсутствии ветра по осям x и y соответственно. Так как при отсутствии ветра $z_0 = z_1 = \xi$, то

$$\tau_{D_x}^{(0)} = g \xi_x (H - \xi), \quad \tau_{D_y}^{(0)} = g \xi_y (H - \xi).$$

Введем коэффициенты

$$k_x = \frac{\tau_x}{\tau_{D_x}^{(0)}} = \frac{\rho_a C \alpha u_b |W|}{g \xi_x (H - \xi)}, \quad (28)$$

$$k_y = \frac{\tau_y}{\tau_{D_y}^{(0)}} = \frac{\rho_a C \alpha v_b |W|}{g \xi_y (H - \xi)}. \quad (29)$$

Для градиентно-вязкого режима течения справедлива зависимость [3]

$$\tau_{D_x} = \tau_x + \tau_{D_x}^{(0)}, \quad \tau_{D_y} = \tau_y + \tau_{D_y}^{(0)}.$$

Учитывая (28), (29), имеем

$$\frac{\tau_{D_x}}{\tau_x} = 1 + \frac{1}{k_x}, \quad \frac{\tau_{D_y}}{\tau_y} = 1 + \frac{1}{k_y}. \quad (30)$$

Из соотношений (10), (11) следует линейная зависимость трения по глубине для обоих компонент. Из подобия треугольников получаем выражения

$$z_0 = \xi - k_x(H - \xi), \quad z_1 = \xi - k_y(H - \xi). \quad (31)$$

Отсюда следует, что z_0 совпадает с z_1 , если $k_x = k_y$, что физически интерпретируется как условие параллельности вектора скорости ветра с вектором градиента уровня свободной поверхности.

Найдем модуль касательного напряжения на дне, выражение для которого понадобится в дальнейшем:

$$|\tau_{Д}| = \sqrt{\tau_{Дx}^2 + \tau_{Дy}^2} = \sqrt{\left(\frac{k_x + 1}{k_x}\right)^2 \tau_x^2 + \left(\frac{k_y + 1}{k_y}\right)^2 \tau_y^2}. \quad (32)$$

Вывод уравнения для коэффициента вертикального турбулентного обмена

Рассмотрим уравнение (6). Возведем его в квадрат, получим:

$$C^{1/2} \kappa^2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \right] - l^2 \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)^2 \right] = 0. \quad (33)$$

Обозначим через β коэффициент при l^2 . Вычисляя $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ из выражений (14), (15), имеем следующее представление:

$$\beta = \left| \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial z^2} \right| = \frac{g^2}{A^2} \left[(\xi_x^2 + \xi_y^2) - 2 \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial z} (\xi_x^2(z - z_0) + \xi_y^2(z - z_1)) + \left(\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial z} \right)^2 (\xi_x^2(z - z_0)^2 + \xi_y^2(z - z_1)^2) \right]. \quad (34)$$

По физическому смыслу $\beta \geq 0$. Обозначим через γ квадрат модуля градиента скорости по вертикали, т.е.

$$\gamma = \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 = \frac{g^2}{A^2} (\xi_x^2(z - z_0)^2 + \xi_y^2(z - z_1)^2).$$

Уравнение (33) переписывается следующим образом:

$$l^2 = \frac{c^{1/2} \kappa^2 \gamma}{\beta}$$

или, учитывая уравнение (5),

$$\frac{A^2}{b} = \frac{C^{1/2} \kappa^2 \gamma}{\beta}. \quad (35)$$

Заметим, что β есть полином второй степени относительно $\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial z}$. Запишем выражение для β в более удобном виде:

$$\beta = \frac{g^2}{A^2} \cdot \left(C_1 + b_1 \left(\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial z} \right) + a_1 \left(\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial z} \right)^2 \right), \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \xi_x^2(z - z_0)^2 + \xi_y^2(z - z_1)^2, \\ b_1 &= -2(\xi_x^2(z - z_0) + \xi_y^2(z - z_1)), \\ C_1 &= \xi_x^2 + \xi_y^2. \end{aligned} \quad (37)$$

Заметим, что $\frac{g^2}{A^2} a_1 = \gamma$. Коэффициенты β и γ имеют один множитель g^2/A^2 , разделив на который и подставив выражение β и γ в (33), имеем:

$$\left(C_1 + b_1 \left(\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial z} \right) + a_1 \left(\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial z} \right)^2 \right) \cdot A^2 - bc^{1/2} \kappa^2 \cdot a_1 = 0. \quad (38)$$

Если $z_0 = z_1$, тогда выражение для β (36) раскладывается на множители и β имеет вид

$$\beta = a_1 \left(\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{1}{z - z_0} \right)^2. \quad (39)$$

Уравнение (38) в этом случае упрощается:

$$\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{A}{z - z_0} = \pm b^{1/2} c^{1/4} \kappa. \quad (40)$$

Так как по физическому смыслу для подледного течения скорость по всей вертикали не имеет точки перегиба, то от дна до точки z_0 решается уравнение (40) с положительной правой частью, от точки z_0 до поверхности льда решается уравнение с отрицательной правой частью, и тогда решение уравнения (40) совпадает с решением, полученным в [3]:

$$A = \left[+\kappa c^{1/4} \int_{\xi}^z \frac{b^{1/2} dz}{z - z_0} + \frac{A(\xi)}{\xi - z_0} \right] (z - z_0) \quad \text{при } z \leq z_0, \quad (41)$$

$$A = \left[-\kappa c^{1/4} \int_H^z \frac{b^{1/2} dz}{z - z_0} + \frac{A(H)}{H - z_0} \right] (z - z_0) \quad \text{при } z \geq z_0.$$

В общем случае имеем уравнение

$$\tilde{\beta} \cdot A^2 = bc^{1/2} \kappa^2 \cdot a_1, \quad \text{где } \tilde{\beta} = \frac{A^2}{g^2} \beta,$$

или

$$a_1 \left(\left[\frac{\partial A}{\partial z} \right]^2 - bc^{1/2} \kappa^2 \right) + b_1 \cdot \left(A \frac{\partial A}{\partial z} \right) + c_1 A^2 = 0. \quad (42)$$

Найдем решение уравнения относительно $\frac{\partial A}{\partial z}$. Уравнение (42) перепишем в виде:

$$\alpha_1 \left[\frac{\partial A}{\partial z} \right]^2 + \beta_1 \left[\frac{\partial A}{\partial z} \right] + \gamma_1 = 0, \quad (43)$$

где

$$\alpha_1 = \xi_x^2 (z - z_0)^2 + \xi_y^2 (z - z_1)^2 = a_1,$$

$$\beta_1 = b_1 A = -2 (\xi_x^2 (z - z_0) + \xi_y^2 (z - z_1)) A,$$

$$\gamma_1 = c_1 A^2 - a_1 bc^{1/2} \kappa^2 = (\xi_x^2 + \xi_y^2) A^2 - (\xi_x^2 (z - z_0)^2 + \xi_y^2 (z - z_1)^2) \cdot bc^{1/2} \kappa^2.$$

Исследуем условия существования действительных решений уравнения (43). Для этого вычислим дискриминант уравнения Δ :

$$\begin{aligned} \Delta &= \beta_1^2 - 4\alpha_1\gamma_1 = b_1^2 A^2 - 4a_1(c_1 A^2 - a_1 bc^{1/2} \kappa^2) = \\ &= (b_1^2 A^2 - 4a_1 c_1 A^2 + 4a_1^2 bc^{1/2} \kappa^2) = (b_1^2 - 4a_1 c_1) A^2 + 4a_1^2 bc^{1/2} \kappa^2 = \\ &= (-4\xi_x^2 \xi_y^2 (z_1 - z_0)^2 A^2 + 4a_1^2 bc^{1/2} \kappa^2). \end{aligned} \quad (44)$$

Отсюда следует, что $\Delta \geq 0$ тогда и только тогда, когда

$$\xi_x^2 \xi_y^2 (z_1 - z_0)^2 A^2 \leq a_1^2 bc^{1/2} \kappa^2. \quad (45)$$

Условие (45) весьма существенно и накладывает определенные ограничения на значения коэффициента вертикального турбулентного обмена или, учитывая уравнение (5), на длину пути смешивания. Заметим, что выражение для дискриминанта в (44) можно переписать в виде произведения:

$$\Delta = 4((a_1 b^{1/2} c^{1/4} \kappa) - \xi_x \xi_y (z_1 - z_0) A) \cdot ((a_1 b^{1/2} c^{1/4} \kappa) + \xi_x \xi_y (z_1 - z_0) A).$$

Тогда решение (43) запишем в виде:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{-\beta_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha_1}.$$

Отметим, что при $z_1 = z_0$ условие (45) выполняется автоматически. Окончательно имеем следующее уравнение для коэффициента вертикального турбулентного обмена A :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial z} &= \frac{1}{(\xi_x^2 (z - z_0)^2 + \xi_y^2 (z - z_1)^2)} \left[(\xi_x^2 (z - z_0) + \xi_y^2 (z - z_1)) A \pm \right. \\ &\left. \pm \sqrt{\eta_1 \eta_2} \right], \end{aligned} \quad (46)$$

где

$$\eta_1 = \xi_x \xi_y (z_1 - z_0) A + a_1 b^{1/2} c^{1/4} \kappa,$$

$$\eta_2 = -\xi_x \xi_y (z_1 - z_0) A + a_1 b^{1/2} c^{1/4} \kappa.$$

Уравнение баланса энергии турбулентности

В трехмерном случае и при введенных в рассмотрение в формуле (18) точек z_0, z_1 уравнение баланса энергии (4) имеет вид:

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \alpha \frac{\partial}{\partial z} A \frac{\partial b}{\partial z} - \gamma \frac{b^2}{A} + \frac{1}{A} (g^2 \xi_x^2 (z - z_0)^2 + g^2 \xi_y^2 (z - z_1)^2). \quad (47)$$

Таким образом, система уравнений (1)-(6) свелась к системе из трех уравнений, включающей:

- 1) уравнение колебаний уровня воды (23);
- 2) уравнение для коэффициента турбулентного обмена A (46), которое в случаях подледного течения и ветра, направленного параллельно градиенту уровня, имеет решение (41);
- 3) уравнение баланса энергии (47).

Точка z_0 находится из (25) в случае подледного течения, в случае открытого потока точки z_0 и z_1 находятся из формул (31). Для решения системы необходимо задать начальные и граничные условия для $A(x, y, z, t), b(x, y, z)$.

Постановка граничных условий для коэффициента вертикального турбулентного обмена A и энергии турбулентности b

Предположим, что выполняется логарифмический закон распределения скорости вблизи твердых границ, а именно, начиная с уровня, равного размеру шероховатости Δd и Δl . Рассмотрим граничное условие на дне для A . Представим скорости в виде:

$$u = \frac{u^*}{\kappa} \ln\left(\frac{z}{\Delta dx}\right),$$

$$v = \frac{v^*}{\kappa} \ln\left(\frac{z}{\Delta dy}\right),$$

где u^*, v^* — компоненты динамической скорости для дна. Модуль касательного напряжения представим в виде:

$$\frac{|\tau_d|}{\rho} = A_d \left| \frac{d\vec{V}}{dz} \right|_{z=\Delta d}$$

Подставляя выражение для u и v и заменяя \vec{V}^* на $\sqrt{\frac{|\tau_d|}{\rho}}$, получим в общем виде:

$$A_d = \kappa |\Delta d| \sqrt{\rho} \sqrt{|\tau_d|}. \quad (48)$$

Если рассматриваем течение с ледяным покровом, то граничное условие на дне для коэффициента вертикального турбулентного обмена имеет вид:

$$A_d = \kappa |\Delta d| \sqrt{\rho g (H - z_0)} \sqrt{(\xi_x^2 + \xi_y^2)}. \quad (49)$$

В случае рассмотрения задачи со свободной поверхностью, учитывая (32), получаем другое выражение для граничного условия на дне для коэффициента A , а именно:

$$A_d = \kappa |\Delta d| \sqrt{\left(\frac{k_x + 1}{k_x}\right)^2 \tau_x^2 + \left(\frac{k_y + 1}{k_y}\right)^2 \tau_y^2}. \quad (50)$$

Заметим, что выражение для касательного напряжения τ_d также можно расписать покомпонентно, тогда получим

$$\tau_{dx} = A_d \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=\Delta dx}, \quad \tau_{dy} = A_d \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=\Delta dy},$$

так как A_d — число, то должно выполняться соотношение

$$\frac{\tau_{dx}}{\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=\Delta dx}} = \frac{\tau_{dy}}{\left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=\Delta dy}}.$$

Перепишем его в виде:

$$\frac{\kappa \tau_{dx}}{u^* \left(\frac{1}{\Delta dx}\right)^2} = \frac{\kappa \tau_{dy}}{v^* \left(\frac{1}{\Delta dy}\right)^2}$$

или, окончательно,

$$\frac{\tau_{dx}}{\tau_{dy}} = \frac{u^* (\Delta dy)^2}{v^* (\Delta dx)^2}. \quad (51)$$

Уравнение (51) есть условие разрешимости граничных условий и накладывает определенные ограничения на величину динамической скорости при известных шероховатости.

Аналогично для поверхности льда:

$$A_l = \kappa |\Delta l| \sqrt{\rho g (H - z_0)} \sqrt{(\xi_x^2 + \xi_y^2)} \quad (52)$$

и причем всегда должно выполняться соотношение

$$\frac{\tau_{lx}}{\tau_{ly}} = \frac{u_l^* (\Delta l_y)^2}{v_l^* (\Delta l_x)^2}, \quad (53)$$

где u_l^*, v_l^* — компоненты динамической скорости, соответствующей поверхности льда.

В двумерном случае выражения (49), (52) упрощаются и имеют вид

$$\begin{aligned} A_d &= \kappa \sqrt{\rho g (H - z_0)} |\xi_x| \Delta d, \\ A_l &= \kappa \sqrt{\rho g (H - z_0)} |\xi_x| \Delta l, \end{aligned} \quad (54)$$

что совпадает с граничными условиями, полученными в [3].

Для определения граничных значений энергий турбулентности b предполагается равенство вблизи границы пути смешивания выступу шероховатости [3]. Тогда из уравнения (5) получим:

$$b_d = \frac{A_d^2}{\sqrt{(\Delta d_x^2 + \Delta d_y^2)}}, \quad (55)$$

$$b_l = \frac{A_l^2}{\sqrt{(\Delta l_x^2 + \Delta l_y^2)}}. \quad (56)$$

На свободной поверхности для A и b ставятся граничные условия такие же, как и в работе [3]:

$$A_{\xi} = \begin{cases} 4.3 \cdot 10^{-4} |W|^2, & |W| \geq 6m/c, \\ 1.02 \cdot 10^{-4} |W|^3, & |W| < 6m/c, \end{cases} \quad (57)$$

$$b_{\xi} = 0.2 |\tau_b|. \quad (58)$$

Заключение

Таким образом, чтобы определить структуру подледного потока, необходимо решить уравнения (23), (47), где коэффициент A определяется из формулы (41) с граничными условиями (8), (49), (54), (55), (56), т.е. задача сводится к двумерной в каждой точке пространства. Точка z_0 определяется формулой (25).

Для свободной поверхности с учетом воздействия ветра необходимо решить уравнения (23), (46), (47) с граничными условиями (9), (50), (57), (58), (56) и точками z_0 и z_1 , определяемыми формулами (31).

Автор выражает благодарность В.Н.Зырянову и Е.И.Дебольской за обсуждение задачи и ряд полезных советов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоконь П.Н. Инженерная гидравлика потока под ледяным покровом. - М.: Госэнергоиздат, 1940.
2. Ветровые волны / Перевод с английского под ред. Ю.М.Крылова - М.: Изд. иностр. лит., 1962. - 442 с.
3. Дебольская Е.И., Зырянов В.Н. Вертикальная турбулентная структура течения в мелком море // Водные ресурсы. - 1994. - №6. - С.800-820.
4. Зырянов В.Н. Гидродинамика соленосного клина // Водные ресурсы. - 1986. - №6. - С.107-125.
5. Тернопольский А.Г., Шнайман В.А. Нестационарная модель взаимодействия пограничных слоев океана и атмосферы. // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1991. - Т.27. - N 12.
6. Урнышев А.П. Трансформация приливной волны в устье реки Печоры. (Сер. препринтов "Новые научные методики" / АН СССР, УрО, Коми научный центр; Вып. 30).
7. Фидман Б.А. Турбулентность водных потоков. - Л.: Гидрометеиздат, 1991.

О БУТСТРЕП ОЦЕНИВАНИИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ СТАЦИОНАРНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Р.О.Кузнецовский, А.Н.Тихомиров

1. Введение

Пусть имеется набор n независимых одинаково распределенных случайных величин $X_n = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, имеющих общее неизвестное распределение P . Про распределение P известно только, что оно принадлежит некоторому непараметрическому семейству вероятностных распределений \mathcal{P} на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{M}) . И пусть требуется по набору X_n оценить некоторый параметр $T = T(P)$, зависящий от неизвестного распределения P .

Обычной непараметрической статистикой для $T(P)$ является оценка, построенная по выборочному распределению \hat{P}_n , которое определяется следующим образом:

$$\hat{P}_n = \frac{1}{n} (\delta_{X_1} + \dots + \delta_{X_n}),$$

$$\text{где } \delta_x(A) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in \bar{A} \end{cases}$$

Очевидно \hat{P}_n задает случайную вероятностную меру на множестве $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. Однако не всегда выборочные оценки оказываются удовлетворительными в том или ином смысле. В дальнейшем мы остановимся в основном на трех характеристиках качества рассматриваемых оценок: несмещенности, состоятельности и асимптотической нормальности. Так, если статистика \hat{T}_n имеет смещение,

представляет интерес оценка распределения разности $\mathbf{P}\{(\hat{T}_n - T) \leq x\}$. В общем случае мы будем оценивать некоторый функционал $\Phi(\hat{T}_n; T)$, зависящий как от параметра $T = T(\mathbf{P})$, так и от статистики $\hat{T}_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

В 1979-86 гг. появилось несколько работ Б.Эфрона (см. [3, 11]), в которых автор предложил оригинальный метод, позволяющий оценивать функционалы $\Phi(\hat{T}_n; T)$. Данный метод получил название бутстреп метода, а получаемые с его помощью оценки – бутстреп оценками. Рассмотрим краткое описание ставшего уже классическим бутстреп метода по Эфрону. В соответствии с введенными выше обозначениями выборочное распределение $\hat{\mathbf{P}}_n$ определяет вероятностную меру на множестве $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. Обозначим через $\mathcal{X}_k^* = (X_1^*, X_2^*, \dots, X_k^*)$ набор из k независимых одинаково распределенных случайных величин с общим распределением $\hat{\mathbf{P}}_n$ и будем называть его бутстреп выборкой. Очевидно, что \mathcal{X}_k^* определяет свое выборочное распределение $\hat{\mathbf{P}}_k^*$ (вообще говоря, условное относительно случайных величин X_i)¹. Основную идею метода можно свести к следующему: Эфрон предложил оценивать функционал $\Phi(T(\hat{\mathbf{P}}_n); T(\mathbf{P}))$ с помощью $\Phi^* = \Phi(T(\hat{\mathbf{P}}_k^*); T(\hat{\mathbf{P}}_n))$. При этом величина Φ^* называется бутстреп оценкой функционала Φ .

В качестве примера приведем процедуру, которая часто применяется на практике для оценивания статистик со смещением. Пусть имеется (X_1, X_2, \dots, X_n) – выборка из неизвестного распределения \mathbf{P} и пусть $\hat{T}_n(X_1, X_2, \dots, X_n) = T(\hat{\mathbf{P}}_n)$ – оценка для некоторого параметра $T(\mathbf{P})$. По описанному выше способу построим независимо друг от друга B оценок $\hat{T}_n^{*b}(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*) = T(\hat{\mathbf{P}}_n^{*b})$, $b = 1, 2, \dots, B$ и рассмотрим их среднее $\bar{T}_n^* = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{T}_n^{*b}$. В качестве оценки смещения $T - \hat{T}_n$ положим величину $\hat{T}_n - \bar{T}_n^*$. Тогда бутстреп оценка с коррекцией на смещение есть $\hat{T}_n - (\hat{T}_n - \bar{T}_n^*) = 2\hat{T}_n + \bar{T}_n^*$. При этом бутстреп оценка стандартной ошибки $T(\mathbf{P})$ вычисляется по формуле:

$$se^*(T) = \sqrt{\frac{\sum_{b=1}^B (\hat{T}_n^{*b} - \bar{T}_n^*)^2}{B-1}}$$

После публикации статей Эфрона появилось (и продолжает появляться) большое количество работ, в которых развиваются идеи бутстрепа и исследуются различные свойства и возможности применимости бутстреп метода. Одной из первых в этом ряду была

¹Здесь и везде далее \mathbf{P}^* и \mathbf{E}^* обозначают соответственно условное распределение и условное математическое ожидание относительно случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n

работа Бикела и Фридмена в 1981 г. [7], в которой авторы доказали состоятельность и асимптотическую нормальность для простейших бутстреп оценок среднего и выборочной функции распределения. Аналогичная задача была исследована в [32]. В работе Э.Маммена ([28], 1991) исследуются бутстреп оценки линейного функционала $T(\mathbf{P}) = \int g(\omega)\mathbf{P}(d\omega)$ и установлены необходимые условия для асимптотической нормальности бутстреп оценок \hat{T}_n^* . Причем в данной работе доказана асимптотическая нормальность для более общего случая, когда $\mathbf{P} = \mathbf{P}(n)$, $g = g(n)$ и когда X_1, X_2, \dots, X_n – независимые, но необязательно одинаково распределенные случайные величины. В 1986 г. Ву [33] представил бутстреп схему, в которой не предполагается одинаковой распределенности наблюдаемых случайных величин X_j . Хардли и Маммен ([19], 1990) назвали эту процедуру диким бутстрепом (*wild bootstrap*). Изучению свойств бутстрепа от независимых случайных величин посвящены работы [4, 5, 6, 8, 9, 12, 15, 16, 17, 21, 29, 30].

До недавнего времени попытки применить бутстреп в области зависимых случайных величин в основном ограничивались моделями регрессии, которые позволяли свести рассмотрение к классической схеме Эфрона (см. [10, 14, 18, 20, 23, 27, 33]).

Общая непараметрическая схема построения бутстреп оценок для функционалов, определенных на стационарных случайных последовательностях, была предложена Кюншем (1989, [22]) и, независимо от него, Лью и Синхом (1992, [26]). Эта техника заключается в переборке целых блоков наблюдений из исходной выборочной траекторий. При этом для получения хороших асимптотических свойств бутстреп оценок (например, асимптотической нормальности) приходится дополнительно накладывать условия слабой зависимости наблюдаемых величин.

В п.2 настоящей работы развивается метод стационарного бутстрепа применительно к оцениванию спектральной плотности стационарной последовательности $\{X_t\}$, $t \in \mathbf{Z}$. В п.3 предлагается схема построения бутстреп оценок спектральной плотности в случае, когда $\{X_t\}$ – гауссовская стационарная последовательность.

2. Стационарный бутстреп для оценок спектральной плотности

Пусть $\{X_t\}$, $t \in \mathbf{Z}$ – стационарная в узком смысле последовательность со средним $\mathbf{E}X_t = 0$, ковариационной функцией $R(t) = \mathbf{E}X_0X_t$ и конечными моментами четвертого порядка. Также нам понадобятся

ся ввести следующее определение условия слабой зависимости для $\{X_t\}$.

Определение: Стационарная последовательность $\{X_t\}$ удовлетворяет условию полной регулярности, если

$$\rho(n) = \sup \frac{|\mathbf{E}\xi\eta - \mathbf{E}\xi\mathbf{E}\eta|}{\sqrt{\mathbf{E}|\xi - \mathbf{E}\xi|^2 \mathbf{E}|\eta - \mathbf{E}\eta|^2}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (1)$$

где \sup берется по всем случайным величинам ξ и η , измеримым относительно σ -алгебр $\mathcal{F}_{-\infty}^0$ и \mathcal{F}_n^∞ соответственно и имеющим конечный второй момент. ($\mathcal{F}_a^b = \sigma\{X_j, a \leq j \leq b\}$ - минимальная σ -алгебра, порожденная случайными величинами X_j , когда $a \leq j \leq b$).

Допустим, что для последовательности $\{X_t\}$ выполняется условие $\sum_{t=-\infty}^{\infty} |R(t)| < \infty$, т.е. существует спектральная плотность

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda} R(t), \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi.$$

Нас интересует задача построения и исследования свойств статистик типа Гренандера-Розенблатта, построенных по набору последовательных наблюдений (выборочной траектории) $\mathcal{X}_N = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ случайной последовательности $\{X_t\}$, для оценивания спектральной плотности $f(\lambda)$ (см., например, [1, 2]). Эти статистики можно записать в следующем общем виде:

$$\hat{f}_N(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-N+1}^{N-1} a_N(t) e^{-it\lambda} C_N(t), \quad (2)$$

где $C_N(t) = \frac{1}{N-t} \sum_{s=1}^{N-t} X_s X_{s+t}$, при $t > 0$, $C_N(t) = C_N(-t)$ при $t < 0$. Последовательность $a_N(t)$ называется корреляционным окном статистики $\hat{f}_N(\lambda)$. Однако такие оценки являются заведомо смещенными. Более того, требования на малость смещения и дисперсии оценки оказываются противоположными с точки зрения выбора спектрального окна. То есть при уменьшении дисперсии оценки возрастает смещение и наоборот. Поэтому возникает вполне естественная задача оценки распределения отклонения статистики с помощью бутстреп процедур и при этом выяснения: насколько могут быть полезны бутстреп методы для уменьшения смещения выборочных статистик.

Пусть K - натуральное число, $K < N$ и пусть μ - дискретная случайная величина, равномерно распределенная на множестве

$\{1, 2, \dots, N-K+1\}$. Из выборочной траектории \mathcal{X}_N рассмотрим блок последовательных наблюдений (подвыборку) фиксированной длины K , начиная со случайного индекса μ . Полученный таким образом набор $\mathcal{X}_K^* = (X_1^*, X_2^*, \dots, X_K^*)$, где

$$X_1^* = X_\mu, \quad X_2^* = X_{\mu+1}, \quad \dots, \quad X_K^* = X_{\mu+K-1}$$

будем называть бутстреп траекторией. По \mathcal{X}_K^* можно построить оценку

$$\hat{f}_K^*(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-K+1}^{K-1} a_K(t) e^{-it\lambda} C_K^*(t).$$

Тогда бутстреп оценка $\hat{f}_{K,B}^*(\lambda)$ - это оценка, построенная по B -независимым бутстреп траекториям, т.е.

$$\hat{f}_{K,B}^*(\lambda) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{f}_K^{*b}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-K+1}^{K-1} a_K(t) e^{-it\lambda} C_{K,B}^*(t).$$

Далее будет показано (см. Т.2.1 и Т.2.2), что $\hat{f}_{K,B}^*(\lambda)$ является асимптотически несмещенной и состоятельной оценкой спектральной плотности $f(\lambda)$.

Лемма 2.1. Пусть $(X_1^*, X_2^*, \dots, X_K^*)$ - бутстреп траектория. Тогда имеют место следующие равенства:

- (i) $\mathbf{E}^* X_s^* = \frac{1}{N-K+1} \sum_{j=1}^{N-K+1} X_j, \quad \forall s = 1, 2, \dots, K,$
- (ii) $\mathbf{E}^* X_s^* X_{s+t}^* = \frac{1}{N-K+1} \sum_{j=1}^{N-K+1} X_j X_{j+t}, \quad \forall t = 0, 1, \dots, K-1,$
- (iii) $\mathbf{E}^* C_K^*(t) = \frac{1}{N-K+1} \sum_{j=1}^{N-K+1} X_j X_{j+t}, \quad \forall t = 0, 1, \dots, K-1,$

Доказательство. Согласно построению бутстреп траектории

$$\mathbf{P}(X_s^* = X_j | X_1, \dots, X_N) = \frac{1}{N-K+1}, \quad t = 1, 2, \dots, K;$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X_s^* | X_1, \dots, X_N) &= \sum_{j=1}^{N-K+1} X_j \mathbf{P}(X_s^* = X_j | X_1, \dots, X_N) = \\ &= \frac{1}{N-K+1} \sum_{j=1}^{N-K+1} X_j, \quad t = 1, 2, \dots, K. \end{aligned}$$

Тем самым доказано первое равенство. Аналогично доказываются остальные два равенства. \square^2

Лемма 2.2. В условиях леммы 2.1 имеют место следующие равенства:

- (i) $\mathbf{E}X_s^* = 0, \quad \forall s = 1, 2, \dots, K,$
- (ii) $\mathbf{E}X_s^* X_{s+t}^* = R(t), \quad \forall t = 0, 1, \dots, K-1 \quad \forall s = 1, 2, \dots, K-t,$
- (iii) $\mathbf{E}C_K^*(t) = R(t), \quad \forall t = 0, 1, \dots, K-1,$

Утверждение леммы непосредственно следует из Леммы 2.1.

Лемма 2.3. Если стационарная последовательность удовлетворяет условию полной регулярности, причем $\rho(n) \leq n^{-\alpha}, \alpha > 1$, тогда найдутся $d_1, d_2 \geq 0$, такие, что для любого целого t и для любого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\mathbf{P} \left\{ \left| \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M X_j X_{j+t} - R(t) \right| > \varepsilon \right\} \leq \frac{2d_1(|t| + d_2)}{\varepsilon^2 M}. \quad (3)$$

Доказательство. Положим $\forall j = 1, \dots, M$

$$\xi_j(t) = X_j X_{j+t},$$

причем, поскольку $\{X_t\}$ стационарная последовательность, то $\mathbf{E}\xi_j(t) = R(t)$. Применяя неравенство Чебышева, получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \left| \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M X_j X_{j+t} - R(t) \right| > \varepsilon \right\} &= \mathbf{P} \left\{ \left| \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \xi_j(t) - \mathbf{E}\xi_j(t) \right| > \varepsilon \right\} \leq \\ &\leq \frac{\mathbf{E} \left| \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \xi_j(t) - \mathbf{E}\xi_j(t) \right|^2}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2 M^2} \sum_{j,k=1}^M \left(\mathbf{E}\xi_j(t)\xi_k(t) - \mathbf{E}\xi_j(t)\mathbf{E}\xi_k(t) \right). \end{aligned}$$

Последнее равенство домножим и разделим на $\sqrt{\mathbf{D}\xi_j(t)\mathbf{D}\xi_k(t)}$ и воспользуемся тем, что $\exists d_1 \geq 0 \quad \mathbf{D}\xi_j(t) \leq d_1$:

$$\mathbf{P} \left\{ \left| \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \xi_j(t) - \mathbf{E}\xi_j(t) \right| > \varepsilon \right\} \leq \frac{d_1}{\varepsilon^2 M^2} \sum_{j,k=1}^M \frac{|\mathbf{E}\xi_j(t)\xi_k(t) - \mathbf{E}\xi_j(t)\mathbf{E}\xi_k(t)|}{\sqrt{\mathbf{D}\xi_j(t)\mathbf{D}\xi_k(t)}} =$$

²Символом " \square " обозначается окончание доказательства утверждения.

$$= \frac{d_1}{\varepsilon^2 M^2} \sum_{j,k=1}^M \rho(\xi_j(t), \xi_k(t)). \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^M \rho(\xi_j(t), \xi_k(t)) &= \left(\sum_{|k-j| \leq |t|} + \sum_{|k-j| > |t|} \right) \rho(\xi_j(t), \xi_k(t)) \leq \\ &\leq 2|t|M + 2 \sum_{j+|t| \leq k} \rho(k-j-|t|) \leq 2|t|M + 2M \sum_{n=1}^M \rho(n) \leq \\ &\leq 2M(|t| + d_2). \quad (5) \end{aligned}$$

Подставив оценку (4) в (5) получим требуемое неравенство. \square

Теорема 2.1. Пусть выполнены следующие условия:

1. Процесс $\{X_t\}$ удовлетворяет условию полной регулярности с коэффициентом перемешивания $\rho(n) \leq n^{-\alpha}, \alpha > 1$;
2. $\exists d_1 \geq 0 \quad \mathbf{D}(X_j X_{j+t}) \leq d_1 \quad \forall j = \dots, -1, 0, 1, \dots$;
3. $\mathbf{E}\hat{f}_N(\lambda) = f(\lambda) + o(1)$;
4. $K = o(\sqrt{N})$.

Тогда

$$\mathbf{E}^* \hat{f}_{K,B}^*(\lambda) \xrightarrow{P} f(\lambda), \quad K \rightarrow \infty \quad \forall \lambda \in [-\pi, \pi].$$

Доказательство.

$$\mathbf{E}^* \hat{f}_{K,B}^*(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-K+1}^{K-1} a_K(t) e^{-it\lambda} \left(\frac{1}{N-K+1} \sum_{j=1}^{N-K+1} X_j X_{j+t} \right).$$

Согласно лемме 2.3

$$\mathbf{P} \left\{ \left| \frac{1}{N-K+1} \sum_{j=1}^{N-K+1} X_j X_{j+t} - R(t) \right| > \varepsilon \right\} \leq \frac{2d_1(|t| + d_2)}{\varepsilon^2(N-K+1)}.$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что сумма этих остатков стремится к 0 при $K \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \sum_{t=-K+1}^{K+1} \mathbf{P} \left\{ \left| \frac{1}{N-K+1} \sum_{j=1}^{N-K+1} X_j X_{j+t} - R(t) \right| > \varepsilon \right\} &\leq \\ &\sum_{-K+1}^{K-1} \frac{2d_1(|t| + d_2)}{\varepsilon^2(N-K+1)} \leq \frac{\tilde{d}_1 K^2 + \tilde{d}_2 K}{\varepsilon^2(N-K+1)} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

так как $K = o(\sqrt{N})$ при $N \rightarrow \infty$, согласно условию теоремы. \square

Сравнение осуществлялось следующим образом: проводились последовательно m независимых экспериментов, в каждом из которых подсчитывались коэффициенты эффективности для L^1 - и L^2 -нормы на отрезке $[-\pi, \pi]$ и затем рассматривались их средние значения $e^*(L^p) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m e_i^*(L^p)$, $p = 1, 2$.

В следующей таблице представлены средние значения коэффициентов эффективности $e^*(L^1)$ и $e^*(L^2)$, которые были получены при длине выборочной траектории $N = 20$ и числе бутстреп шагов $B = 20$ после проведения 25 экспериментов:

Тип процесса	$e^*(L^1)$	$e^*(L^2)$
Белый шум	1.30	1.37
Процесс скользящего среднего ($q = 1$)	1.15	1.19
Процесс скользящего среднего ($q = 2$)	1.04	1.05
Процесс авторегрессии ($q = 1$)	1.18	1.21

где q – порядок уравнения, задающего стационарную последовательность.

Из таблицы видно что наибольший коэффициент эффективности $e^*(L^p)$ бутстреп дает для независимых одинаково распределенных случайных величин. Для остальных процессов значения $e^*(L^p)$ не много меньше.

В заключение следует отметить, что задача бутстреп оценивания спектральной плотности стационарного процесса исследовалась в работе Франке и Хардли ([13] 1992), где предложен способ, который позволяет применить классический бутстреп по Эфрону, и в работе Политиса и Романо ([31], 1992), в которой рассматривается несколько модернизированная схема перевыборки блоков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Журбенко И.Г. Спектральный анализ временных рядов. –М.: Изд-во МГУ, 1982.
2. Журбенко И.Г., Кожевникова И.А. Стохастическое моделирование процессов. –М.: Изд-во МГУ, 1990.
3. Эфрон Б. Нетрадиционные методы многомерного статистического анализа. –М.: Финансы и статистика, 1988.
4. Argones M. and Giné E. On the bootstrap of U and V statistics //Ann.Statist. – 1992. –V.20. –P.121-145.
5. Beran R. Estimated sampling distributions: The bootstrap and competitors //Ann.Statist. –1982. –V.10. –P.212-225.

6. Beran R. Jackknife approximation to bootstrap estimates //Ann.Statist. –1984. –V.12. –P.101-118.
7. Bickel P.J. and Freedman D.A. Some asymptotic theory for the bootstrap //Ann.Statist. –1981. –V.9. –P.1196-1217.
8. Both J.G., Hall P. and Wood A.T.A. Bootstrap estimation of conditional distribution //Ann.Statist. –1992. –V.20. –P.1594-1610.
9. Both J.G., Hall P. and Wood A.T.A. Balanced importance resampling for the bootstrap //Ann.Statist. –1993. –V.21. –P.286-298.
10. Cao-Abad R. Rate of convergence for the wild bootstrap in nonparametric regression //Ann.Statist. –1991. –V.19. –P.2226-2231.
11. Efron B. Censored data and the bootstrap //J.Roy.Statist.Soc. Ser.B. –1981. –V.76. –P.312-319.
12. Efron B. Better bootstrap confidence intervals //J.Amer.Statist.Assoc. –1987. –V.82. –P.171-200.
13. Franke J. and Härdle W. On bootstrapping kernel spectral estimates //Ann.Statist. –1992. –V.20. –P.121-145.
14. Freedman D.A. Bootstrapping regression models //Ann.Statist. –1981. –V.9. –P.1218-1228.
15. Hall P. Theoretical comparison of bootstrap confidence intervals //Ann.Statist. – 1988. –V.16. –P.927-953.
16. Hall P. Performance of the balanced bootstrap in distribution function and quantile problems //Prob.Theory Related Fields. –1990. –V.85. –P.239-260.
17. Hall P. Effect of bias estimation on coverage accuracy of bootstrap confidence intervals //Ann.Statist. –1992a. –V.20. –P.675-694.
18. Hall P. On bootstrap confidence intervals in nonparametric regression //Ann.Statist. – 1992b. –V.20. –P.695-711.
19. Härdle W. and Mammen E. Comparing non parametric versus parametric regression fits. –Preprint SFB 123, Universität Heidelberg, 1990.
20. Härdle W. and Mammen E. Bootstrap methods in nonparametric regression. –Preprint SFB 123, Universität Heidelberg, 1991.
21. Hinkley D.V. Bootstrap methods //J.Roy.Statist.Soc. Ser.B. –1988. –V.50. –P.312-337.
22. Künsch H.R. The jackknife and the bootstrap for general stationary observations //Ann.Statist. –1989. –V.17. –P.1217-1241.
23. Lahiri S.N. Bootstrapping M -estimators of multiple linear regression parameter //Ann.Statist. –1992. –V.20. –P.1548-1570.
24. Lju R. Bootstrap procedures under some non i.i.d. models //Ann.Statist. –1988. –V.16. –P.1696-1708.
25. Liu R. and Singh K. On partial correction by the bootstrap //Ann.Statist. –1987. –V.15. –P.1713-1718.
26. Liu R. and Singh K. Moving blocks Jackknife and Bootstrap capture weak dependence //Ann.Statist. –1992. –V.20. –P.225-248.
27. Mammen E. Asymptotics with increasing dimension for robust regression with application to the bootstrap //Ann.Statist. –1989. –V.17. –P.382-400.
28. Mammen E. Bootstrap, wild bootstrap and asymptotic normality. –Preprint SFB 123, No.667, Universität Heidelberg, 1992a.
29. Mammen E. When Does Bootstrap Work: Asymptotic Result and Simulations. –Lecture Notes in Statist, Springer, Berlin, 1992b.
30. Mammen E. Bootstrap and wild bootstrap for high dimensional linear model //Ann.Statist. –1993. –V.21. –P.255-285.
31. Politis D. and Romano J. A general resampling scheme for triangular arrays of α -mixing random variables with application to the problem of spectral density estimation //Ann.Statist. –1992. –V.20. –P.1985-2007.

32. Singh K. On the asymptotic accuracy of Efron's bootstrap // Ann. Statist. -1981. -V.9. -P.1187-1195.
33. Wu C.F.J. Jackknife, bootstrap and other resampling methods in regression analysis (with discussion) // Ann. Statist. -1986. -V.14. -P.1295.

АДАПТИВНОЕ РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НА ОСНОВЕ КОНУСНОГО АЛГОРИТМА ОЦЕНИВАНИЯ

В.Ф.Соколов

1. Введение

Построение законов управления системами, описание которых содержит неопределенные параметры и допускает наличие тех или иных возмущений, составляет содержание теории адаптивного управления. В настоящей статье рассматривается задача адаптивного управления линейными дискретными объектами в условиях аддитивных и мультипликативных детерминированных возмущений. Мультипликативные возмущения учитывают возможные малые колебания параметров и немоделируемую динамику. Аддитивные возмущения описывают влияние помех измерений, шумов в объекте управления, ошибок линеаризации и т.п. Априорная информация о возмущениях является достаточно бедной. Мультипликативные возмущения предполагаются малыми в том смысле, что допускают построение устойчивой обратной связи для объектов с известными параметрами. Аддитивные возмущения предполагаются ограниченными известной константой, а в остальном произвольными. Столь бедная априорная информация о возмущениях приводит к неидентифицируемости объекта и составляет главное отличие детерминированной задачи адаптивного управления от стохастической.

До недавнего времени основной задачей адаптивного управления являлась задача обеспечения устойчивости замкнутой системы. При этом оценивание параметров объекта основывалось на различных модификациях рекуррентного метода наименьших квадратов (МНК)

или градиентных алгоритмах. В последние годы были получены также и некоторые оценки качества адаптивных систем, основанных на алгоритмах такого типа [6, 7, 8, 10, 11]. Однако в целом проблема оценки качества замкнутых адаптивных систем остается открытой.

Альтернативным подходом в задаче оценивания является использование множественных оценок параметров [5, 1, 9]. В подавляющем большинстве публикаций этого направления задача оценивания рассматривается вне контекста задачи управления и основное внимание уделяется вычислительным аспектам, представляющим несомненный практический интерес. К настоящему времени нет, по-видимому, строгих результатов по применению разработанных в рамках этого направления алгоритмов к задачам адаптивного управления.

В настоящей статье описывается новый алгоритм оценивания, основанный на рекуррентном вычислении последовательности конусных оценок неизвестных параметров. Первоначальная версия этого алгоритма была представлена в [2, 3]. В отличие от [2, 3] конусный алгоритм применяется ниже в более общей ситуации наличия мультипликативных возмущений. Кроме того, алгоритм излагается в более общем виде. Полезность такого обобщения иллюстрируется на простом примере объекта первого порядка, для которого удается построить адаптивное субоптимальное робастное управление.

2. Постановка задачи

Объект управления описывается уравнением

$$a(q)y(t) = q^k b(q)u(t) + w(t) + v(t), \quad t \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

где $y(t)$, $u(t)$, $w(t)$ и $v(t)$ обозначают соответственно скалярные выход, управление и возмущения, q – оператор сдвига назад ($qz(t) = z(t-1)$), k – известное запаздывание,

$$a(q) = 1 + a_1 q + \dots + a_n q^n,$$

$$b(q) = b_0 + b_1 q + \dots + b_m q^m.$$

Неизвестный вектор параметров объекта (1)

$$\theta = (a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m)^T$$

принадлежит известному множеству Θ ,

$$\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^{n+m+1}. \quad (2)$$

Возмущение $v(t)$ предполагается ограниченным, но никакая верхняя граница его абсолютной величины не предполагается известной. Положим

$$\rho := \sup_t |v(t)| < +\infty. \quad (3)$$

Априорная информация о возмущении $w(t)$ заключается в неравенствах

$$|w(t)| \leq \delta |\psi(t-1)|, \quad t \in \mathbb{N}, \quad (4)$$

где

$$\psi(t-1) = (-y(t-1), \dots, -y(t-n), u(t-k), \dots, u(t-k-m))^T,$$

$|\psi(t-1)|$ обозначает евклидову норму вектора $\psi(t-1)$, а постоянная δ неизвестна. Не уменьшая общности, эту постоянную можно считать наименьшей среди удовлетворяющих всем неравенствам (4). Возмущение $w(t)$ может описывать малые колебания параметров и немоделируемую динамику.

Управление объектом (1) осуществляется регулятором вида

$$\alpha_t(q)u(t) = \beta_t(q)y(t), \quad (5)$$

где $\alpha_t(\cdot)$ и $\beta_t(\cdot)$ являются полиномами относительно q и подлежат определению в каждый момент времени.

Качество регулятора (5) определяется функционалом

$$J(\alpha_t(\cdot), \beta_t(\cdot)) = \limsup_{t \rightarrow \infty} |y(t)| + r|u(t)|, \quad r > 0, \quad (6)$$

где $y(t)$ и $u(t)$ являются решениями замкнутой системы управления (1),(5) с некоторыми начальными данными. Поскольку в дальнейшем будут синтезированы устойчивые замкнутые системы, начальные данные не будут влиять на значения функционала (6) и могут быть произвольными. Однако значения функционала (6) зависят от последовательностей возмущений $w(\cdot)$, $v(\cdot)$, не входящих в список аргументов функционала. Такое сокращение записи не вызовет в дальнейшем недоразумений ввиду того, что нас будут интересовать только верхние оценки значений функционала.

Неадаптивное робастное управление. Предполагается, что для каждого объекта с известным вектором параметров $\theta \in \Theta$ задан линейный регулятор

$$\alpha(q, \theta)u(t) = \beta(q, \theta)y(t), \quad (7)$$

обеспечивающий оценку показателя качества (6)

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |y(t)| + r|u(t)| \leq K\rho < +\infty \quad (8)$$

для всех δ , удовлетворяющих условию

$$0 \leq \delta \leq \Delta(\theta) \quad (9)$$

с известной ограниченной функцией $\Delta: \Theta \rightarrow \mathbb{R}$.

Постановка задачи. Для объекта с неизвестным вектором параметров $\theta \in \Theta$ и неизвестными параметрами возмущений δ и ρ требуется по наблюдениям выходов $y(t)$ и управлений $u(t)$ построить регулятор (5), обеспечивающий выполнение неравенства (8).

Замечание 2.1. Отметим следующие два аспекта поставленной задачи. Во-первых, никакая верхняя оценка аддитивного возмущения $v(t)$ не предполагается известной. Во-вторых, адаптивный регулятор (5) должен обеспечивать выполнение неравенства (8) с той же константой K , что и неадаптивный регулятор (7) в случае известных параметров. Благодаря этим двум аспектам поставленная задача является новой. Аналогичную неравенству (8) интегральную оценку для объектов непрерывного времени и линейно-квадратичных неадаптивных регуляторов (7) можно найти в [10] (лемма 2.1), где отмечено, что такая оценка не имеет аналога в задаче адаптивного управления. Решение поставленной выше задачи опровергает это суждение.

Замечание 2.2. В действительности регулятор (7) обеспечивает более сильное по сравнению с (8) неравенство, получающееся заменой равномерной относительно параметров постоянной K на постоянную $K(\theta, \delta)$,

$$K(\theta, \delta) = \sup_{|w(t)| \leq \delta |\psi(t-1)|} \sup_{|v(t)| \leq 1} J(\alpha(q, \theta), \beta(q, \theta)).$$

Задача обеспечения неравенства (8) с постоянной $K(\theta, \delta)$ при адаптивном управлении является существенно более сложной и обсуждается в [4]. Ограничимся здесь замечанием о том, что ее решение может быть получено ценой значительного усложнения закона адаптивного управления.

3. Задача оценивания

Перепишем уравнение (1) в форме линейной регрессии

$$y(t) = \theta^T \psi(t-1) + w(t) + v(t). \quad (10)$$

Известные виды градиентных и МНК алгоритмов, основанные на минимизации в соответствующем смысле невязок

$$r(t) = y(t) - \theta^T \psi(t-1),$$

не обеспечивают выполнение неравенства (8).

Новый алгоритм оценивания, более адекватный поставленной задаче, основан на следующих соображениях. Введем расширенный вектор неизвестных параметров объекта (1)

$$\xi = (\theta^T, \delta, \rho)^T \in \mathbb{R}^{n+m+3}. \quad (11)$$

Новая информация о векторе ξ в момент времени t после измерения выхода $y(t)$ заключена в неравенстве

$$|y(t) - \theta^T \psi(t-1)| \leq \delta |\psi(t-1)| + \rho, \quad (12)$$

вытекающем из условий (3), (4). Не останавливаясь подробно на деталях, которые изложены в [3], подчеркнем, что объект управления (1) с любым вектором параметров θ при воздействии мультипликативного возмущения $w(\cdot)$ с любым параметром δ может иметь измеренные к моменту t выходы $y(t), y(t-1), \dots$ и входы $u(t-1), u(t-2), \dots$, если считать, что на промежутке $[0, t]$ аддитивные возмущения имели вид

$$v(s) = y(s) - \theta^T \psi(s-1) - w(s), \quad s \leq t.$$

Тогда все неравенства вида (12) на промежутке $[0, t]$ будут выполнены, если

$$\rho \geq \sup_{s \leq t} |y(s) - \theta^T \psi(s-1) - w(s)|.$$

Таким образом, объект управления (1) неидентифицируем в условиях априорной информации (3), (4).

Основная идея построения алгоритма оценивания, адекватного поставленной задаче адаптивного управления, заключается в выборе оценки $\xi(t)$ расширенного вектора параметров, обеспечивающей наименьшее возможное значение последней компоненты $\rho(t)$. При реализации этой идеи необходимо решить две возникающие проблемы. Во-первых, алгоритм оценивания должен иметь рекуррентную форму, позволяющую использовать этот алгоритм для вычисления оценок по ходу процесса управления. Во-вторых, необходимо обосновать "правильную" работу алгоритма в замкнутой системе управления.

Для получения рекуррентного алгоритма сделаем следующее упрощение. Пусть $\xi(t-1)$ — оценка расширенного вектора неизвестных параметров, полученная в момент $t-1$. Положим

$$\eta(t) = \text{sign}(y(t) - \theta(t-1)^T \psi(t-1)).$$

Из (12), в частности, следует неравенство

$$(y(t) - \theta^T \psi(t-1))\eta(t) \leq \delta |\psi(t-1)| + \rho. \quad (13)$$

Введя расширенный вектор регрессии $\phi(t-1)$,

$$\phi(t-1) = (\eta(t)\psi(t-1)^T, |\psi(t-1)|, 1)^T,$$

мы можем переписать неравенство (13) в виде

$$\xi^T \phi(t-1) \geq y(t)\eta(t). \quad (14)$$

Построение рекуррентного алгоритма основано на использовании множественных оценок параметров. В каждый момент времени записывается многогранное множество (конус с вершиной не в начале координат), заданное $\dim \xi = n + m + 3$ неравенствами вида (14). Точное описание алгоритма дается в следующем разделе.

4. Конусный алгоритм

Рассмотрим бесконечную систему линейных неравенств

$$\tau^T d(t) \geq e(t), \quad t \in \mathbb{N}, \quad (15)$$

относительно вектора $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_l)^T$. Здесь $d(t) \in \mathbb{R}^l$ и $e(t) \in \mathbb{R}$. Пусть задан многогранник U ,

$$U = \{\tau \in \mathbb{R}^l \mid \Gamma \tau \geq \gamma\}, \quad (16)$$

где $\Gamma = [\Gamma_1, \dots, \Gamma_r]^T$ - $r \times l$ матрица и $\gamma = [\gamma_1, \dots, \gamma_r]^T \in \mathbb{R}^r$.

Пусть также задана функция

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}, \quad (17)$$

называемая в дальнейшем функцией предпочтения. Пусть, наконец, выбрано положительное число ε , называемое параметром конусного алгоритма.

Описываемый далее алгоритм определяет рекуррентным образом последовательность конусов $C(t)$ вида

$$C(t) = \left\{ \tau \in \mathbb{R}^l \mid \tau = \tau(t) + \sum_{k=1}^l \lambda_k \xi_k(t), \lambda_k \geq 0 \right\}. \quad (18)$$

Здесь $\tau(t)$ - вершина и $\xi_1(t), \dots, \xi_l(t)$ - ребра конуса $C(t)$.

Конусный алгоритм. Задав начальный конус $C(0)$, положим

$$C(t+1) = C(t), \text{ если } \tau(t)^T d(t) \geq e(t) - \varepsilon |d(t)|. \quad (19)$$

В противном случае

$$j \in \arg \min_{\{k \mid d(t)^T \xi_k(t) > 0\}} f[\tau(t) + \xi_k(t)(e(t) - \tau(t)^T d(t))/d(t)^T \xi_k(t)], \quad (20)$$

$$\xi_k(t+1) = \begin{cases} \xi_k(t), & \text{если } k = j, \\ \xi_k(t) - \xi_j(t) \frac{d(t)^T \xi_k(t)}{d(t)^T \xi_j(t)}, & \text{если } k \neq j, \end{cases} \quad (21)$$

$$\tau(t+1) = \tau(t) + \xi_j(t)(e(t) - \tau(t)^T d(t))/d(t)^T \xi_j(t). \quad (22)$$

Если $\tau(t+1) \in U$, шаг конусного алгоритма в момент $t+1$ считается завершенным. В противном случае процедура, описанная формулами (19)-(22), повторяется при $\varepsilon = 0$ циклически по $i \in \{1, \dots, r\}$ с подстановкой Γ_i, γ_i вместо $d(t), e(t)$ соответственно до тех пор, пока не будет обеспечено включение $\tau(t+1) \in U$.

Если в качестве функции предпочтения задана линейная функция

$$f(\tau) = \tau^T d_*, \quad d_* \in \mathbb{R}^l, \quad (23)$$

(именно такая функция будет использоваться при решении поставленной в разделе 2 задачи адаптивного управления), то алгоритм (19)-(23) имеет следующую простую интерпретацию.

Лемма 4.1. Вектор $\tau(t+1)$ является решением задачи линейного программирования

$$\tau^T d_* \rightarrow \min, \quad \tau \in A_t, \quad (24)$$

$$A_t = C(t) \cap \{\tau \mid \tau^T d(t) \geq e(t)\} \cap U,$$

и

$$C(t+1) = \tau(t+1) + \text{conv}(A_t - \tau(t+1)), \quad (25)$$

где $\text{conv}(A)$ обозначает выпуклую оболочку множества A .

В силу описанной интерпретации конусный алгоритм (19)-(23) с функцией предпочтения (23) назван в [2] алгоритмом рекуррентного линейного программирования. Назначение конусного алгоритма описывается следующей теоремой.

Теорема 4.2. Пусть выполнены условия:

1) множество U ограничено и $V := U \cap S \neq \emptyset$, где

$$S = \bigcap_{t \in \mathbb{N}} \{\tau \mid \tau^T d(t) \geq e(t)\},$$

– множество решений системы неравенств (15);

2) $U \subset C(0)$ и $\tau(0) \in U$;

3) $d_*^T \xi_k(0) \geq 0$ при $k \in \{1, \dots, l\}$;

4) $\det[\xi_1(0), \dots, \xi_l(0)] \neq 0$.

Тогда для любого параметра $\varepsilon > 0$ последовательность конусов $C(t)$, определенная формулами (19)-(23), обладает следующими свойствами:

a) $\forall t \in \mathbb{N} \quad V \subset C(t)$;

b) $\forall t \in \mathbb{N} \quad \tau(t) \in U$;

c) последовательность $\{f(\tau(t))\}$ неубывающая и для всех t

$$f(\tau(t)) \leq \min_{\tau \in V} f(\tau); \quad (26)$$

d) если векторы $\xi_k(t), t \in \mathbb{N}, k \in \{1, \dots, l\}$ равномерно ограничены, то при всех достаточно больших t

$$C(t+1) = C(t) \quad \text{и} \quad \tau_\infty^T d(t) \geq e(t) - \varepsilon |d(t)|, \quad (27)$$

где τ_∞ обозначает вершину предельного конуса C_∞ .

Теорема 4.2 доказывается аналогично [3].

Замечание 4.3. Неравенство (26) является ключевым для решения поставленной задачи. Использование функции предпочтения (23) с вектором

$$d_* = (0, \dots, 0, 1)^T \quad (28)$$

позволяет гарантировать справедливость неравенства $\rho(t) \leq \rho$ для верхних границ аддитивных возмущений в модели и в управляемом объекте (1).

Замечание 4.4. Конечная сходимости конусного алгоритма обеспечена при выполнении нежелательного предположения равномерной ограниченности векторов $\xi_k(t)$. Теорема остается справедливой, если это предположение заменено предположением равномерной ограниченности векторов $\tau(t)$ (с учетом промежуточных вычислений векторов $\tau(t) \notin U$). Скорее всего, оба этих предположения являются чисто техническими, что частично подтверждает следующая теорема.

Теорема 4.5. При выполнении условий 1-4 теоремы 4.2 и при условии $l \leq 3$ алгоритм (19)-(23) обеспечивает выполнение (27) при всех достаточно больших t .

Теорема 4.5 доказывается аналогично [3].

Для использования конусного алгоритма в качестве алгоритма оценивания положим

$$d(t) = \phi(t), \quad e(t) = y(t+1)\eta(t+1). \quad (29)$$

Теорема 5.1. Пусть выполнены условия:

1) множество

$$\Omega = \{(\theta, \delta) | \theta \in \Theta, 0 \leq \delta \leq \Delta(\theta)\}$$

является многогранником;

2) существует $\varepsilon_* > 0$ такое, что неадаптивный регулятор (7) обеспечивает выполнение неравенства (8) для всех $\delta \in [0, \Delta(\theta) + \varepsilon_*]$;

3) в качестве оценки $\xi(t) = (\theta(t)^T, \delta(t), \rho(t))^T$ выбирается вершина конуса $C(t)$, и последовательность конусов $C(t)$ определяется алгоритмом (19)-(23) с параметрами (28),(29) и

$$U = \Omega \times [0, +\infty);$$

4) управление объектом (1) с расширенным вектором параметров $\xi = (\theta^T, \delta, \rho)^T$ осуществляется в момент времени t регулятором

$$\alpha(q, \theta(t))u(t) = \beta(q, \theta(t))y(t), \quad (30)$$

полученным из (7) подстановкой $\theta(t)$ вместо θ ;

5) начальный конус $C(0)$ выбран в соответствии с условиями 2-4 теоремы 4.2;

6) векторы $\xi_k(t)$ из (21) равномерно по $t \in \mathbb{N}, k \in \{1, \dots, l\}$ ограничены.

Тогда для любого параметра $\varepsilon \leq \varepsilon_* / \sqrt{2}$ решения адаптивной системы управления (1), (19)-(23), (28)-(30) удовлетворяют неравенству

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |y(t)| + r|u(t)| \leq K(\rho + \varepsilon). \quad (31)$$

Доказательство. Множество U можно считать ограниченным, дополнив его описание фиктивным неравенством $\tau^T d_* \leq \rho$, необходимость проверки которого отпадает в силу замечания 4.3. На основании свойства iv) теоремы 4.2 при всех достаточно больших t имеем $\xi(t) = \xi_\infty := (\theta_\infty^T, \delta_\infty, \rho_\infty)^T$ и

$$\xi_\infty^T \phi(t-1) \geq y(t)\eta(t) - \varepsilon |\phi(t-1)|.$$

Учитывая, что $|\phi(t)| \leq \sqrt{2}|\psi(t)| + 1$ и

$$\eta(t) = \text{sign}(y(t) - \xi_\infty^T \psi(t-1)),$$

последнее неравенство можно переписать в виде

$$|y(t) - \theta_\infty^T \psi(t-1)| \leq (\delta_\infty + \varepsilon\sqrt{2})|\psi(t-1)| + \rho_\infty + \varepsilon. \quad (32)$$

Полученное неравенство (32) можно интерпретировать следующим образом. При всех достаточно больших t последовательности $y(\cdot)$ и $u(\cdot)$ могут рассматриваться как решения системы, включающей объект управления (1) с расширенным вектором параметров $\xi_\varepsilon = (\theta_\infty^T, \delta_\infty + \sqrt{2}\varepsilon, \rho_\infty + \varepsilon)^T$ и регулятор

$$\alpha(q, \theta_\infty)u(t) = \beta(q, \theta_\infty)y(t).$$

Из условия 2 и неравенства $\sqrt{2}\varepsilon < \varepsilon_*$ следует

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |y(t)| + r|u(t)| \leq K(\rho_\infty + \varepsilon). \quad (33)$$

Поскольку истинный вектор параметров ξ удовлетворяет при всех t неравенствам (12) и, следовательно, неравенствам (14), то $\xi \in V$. На основании неравенства (26) с вектором d_* вида (28) имеем $\rho_\infty \leq \rho$. Теперь из (33) следует утверждение теоремы.

Замечание 5.2. Уменьшение параметра ε обеспечивает сближение гарантированного результата (31) для адаптивного управления с гарантированным результатом (9) для управления объектом с известными параметрами. Платой за это сближение является возможное замедление сходимости оценок $\xi(t)$.

Замечание 5.3. Условие 2 теоремы 5.1 не является слишком ограничительным и означает, что системы управления, включающие объекты управления (1) и соответствующие им регуляторы (7), имеют некоторый известный "запас устойчивости".

5. Пример адаптивного субоптимального робастного управления

В замечании 2.2 отмечалось, что наименьшая возможная постоянная K в неравенстве (8) в действительности зависит от параметров θ и δ . Это обстоятельство особенно сильно отражается на оценке (8), когда параметр δ принимает значения, близкие к границе, на которой происходит потеря устойчивости замкнутой системы (1), (7). Для улучшения качества адаптивного управления это обстоятельство должно быть принято во внимание. Градиентные и МНК алгоритмы учитывают это обстоятельство только косвенным образом, стремясь уменьшить в том или ином смысле невязку модели

$|y(t) - \theta(t)^T \psi(t-1)|$. Однако получение и строгое обоснование асимптотических оценок качества адаптивного управления, основанного на этих алгоритмах, остается в целом нерешенной задачей. В этом разделе для иллюстрации отмеченной в замечании 2.2 проблемы мы рассмотрим простой пример системы первого порядка и покажем, что на основе конусного алгоритма оценивания можно построить адаптивное субоптимальное управление.

Рассмотрим объект управления

$$y(t) + ay(t-1) = u(t-1) + w(t) + v(t), \quad t \in \mathbb{N}, \quad (34)$$

в котором возмущения w и v удовлетворяют ограничениям

$$|w(t)| \leq \delta|y(t-1)|, \quad \sup_t |v(t)| = \rho < +\infty. \quad (35)$$

Расширенный вектор параметров $\xi = (a, \delta, \rho)^T$ предполагается неизвестным.

Пусть показатель качества имеет вид

$$J = \limsup_{t \rightarrow +\infty} |y(t)|.$$

Утверждение 6.1. Для каждого $a \in \mathbb{R}$, $\rho \geq 0$, и $0 \leq \delta < 1$ неадаптивный робастный регулятор

$$u(t) = ay(t) \quad (36)$$

является оптимальным относительно показателя качества

$$\sup_v \sup_w J.$$

Оптимальная оценка показателя качества J имеет вид

$$J \leq \frac{\rho}{1-\delta}. \quad (37)$$

Доказательство утверждения можно получить, выписав в явном виде решение уравнения

$$y(t) = \delta(t)y(t-1) + v(t),$$

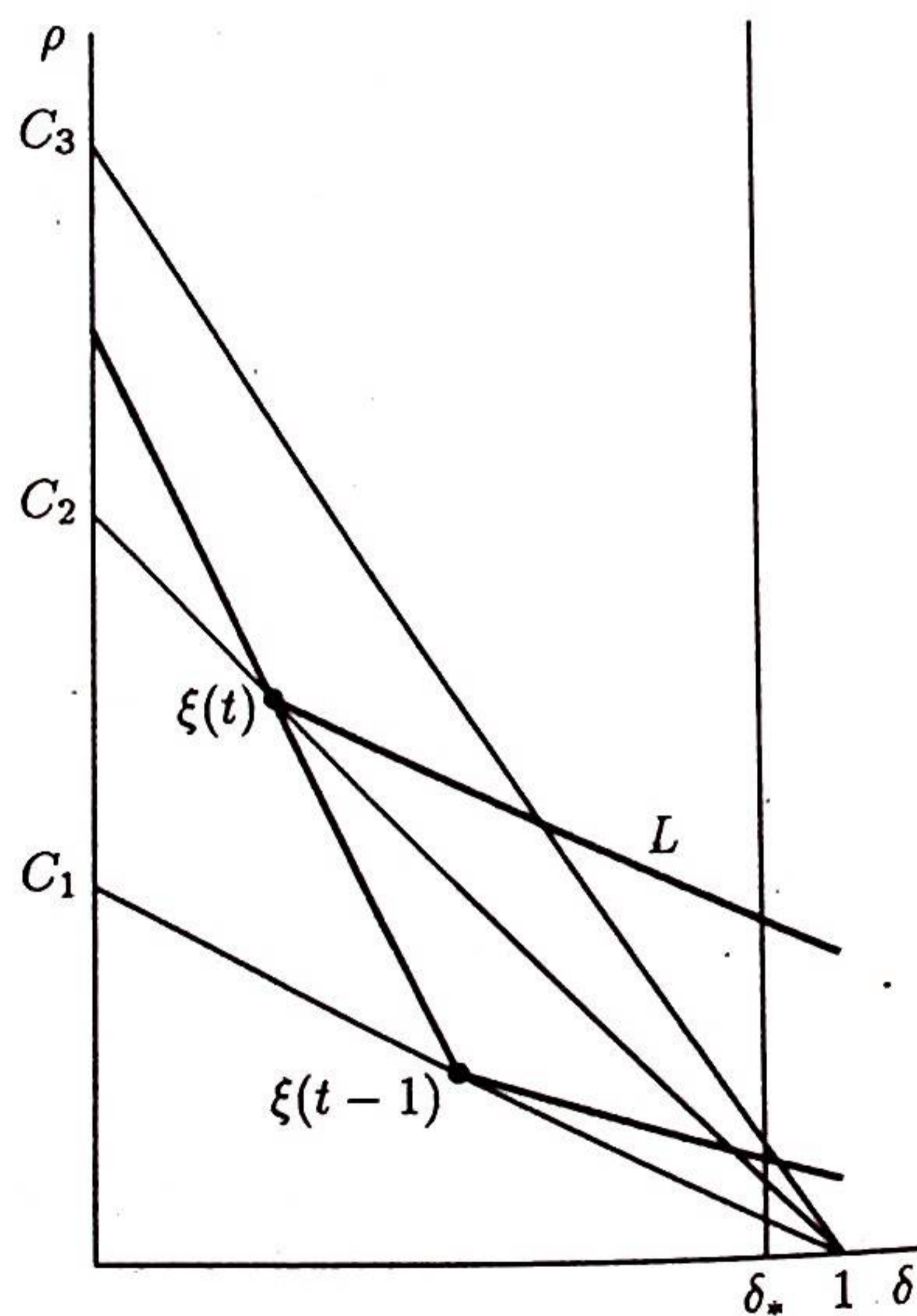
в котором $|\delta(t)| \leq \delta$ и $|v(t)| \leq \rho$. Таким образом, постоянная $K(\theta, \delta)$ из замечания 2.2 равна $1/(1-\delta)$.

Поверхностями уровня функции

$$f(\xi) = \frac{\rho}{1-\delta} \quad (38)$$

(правой части оптимальной оценки (37)) являются плоскости $\rho + C\delta = C, C > 0$. Это обстоятельство позволяет применить конусный алгоритм оценивания для обеспечения оптимальности адаптивного управления. Для этого в качестве функции предпочтения (17) следует взять функцию (38). Поскольку $l = \dim \xi = 3$, конусный алгоритм сводится к рекурсивному вычислению четырех векторов размерности 3 (трех ребер и вершины конуса). Процесс изменения оценок иллюстрируется приведенной ниже картинкой в подпространстве параметров (δ, ρ) . Линия L лежит на границе полуплоскости (14), жирные линии выделяют конусы $C(t-1)$ и $C(t)$ с вершинами $\xi(t-1)$ и $\xi(t)$ соответственно, постоянные C_i задают поверхности уровня функции (38).

Из рисунка можно увидеть, что при значениях $y(t-1)$, меньших некоторого порогового (и зависящего от $f(\xi(t-1))$), оценка $\rho(t)$ возрастает, а оценка $\delta(t)$ убывает, в то время как при значениях $y(t-1)$, больших порогового, происходит противоположное. В самом деле, вектор $\psi(t-1)$ ортогонален лучу L . Тогда в первом случае луч L имеет меньший угол с осью ρ , чем аналогичный угол линии уровня, на которой лежит вершина $\xi(t-1)$. Следовательно, в этом случае вершина нового конуса $\xi(t)$ имеет большую ρ -компоненту и меньшую δ -компоненту по сравнению с $\xi(t-1)$. Во втором



случае картина противоположная. Точное описание адаптивного закона управления имеет следующий вид. Выберем параметр алгоритма $\epsilon \in (0, 1)$. Положим

$$\xi(t) = (\xi^1(t), \xi^2(t), \xi^3(t))^T,$$

$$\eta(t) = \text{sign}(y(t) - u(t-1) + \xi^1(t-1)y(t-1)),$$

$$\phi(t-1) = (-y(t-1)\eta(t), |y(t-1)|, 1)^T,$$

$$u(t) = \xi^1(t)y(t), \quad (39)$$

$$\xi(t) = \begin{cases} \xi(t-1), & \text{если } \xi(t-1)^T \phi(t-1) > \\ & (y(t) - u(t-1))\eta(t) - \epsilon|\phi(t-1)|, \\ \xi(t-1) + \lambda_j d_j(t-1), & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (40)$$

$$j = \arg \min_{\{k | d_k(t-1)^T \phi(t-1) > 0\}} \frac{\tau_k^3}{1 - \tau_k^2},$$

$$\tau_k = \xi(t-1) + \lambda_k d_k(t-1), \quad k \in \{1, 2, 3\},$$

$$\lambda_k = \frac{(y(t) - u(t-1))\eta(t) - \xi(t-1)^T \phi(t-1)}{d_k(t-1)^T \phi(t-1)},$$

$$d_k(t) = \begin{cases} d_k(t-1), & \text{если } k = j \text{ или } d_k(t-1)^T \phi(t-1) = 0, \\ d_k(t-1) - d_j(t-1)d_k(t-1)^T \phi(t-1) / d_j(t-1)^T \phi(t-1), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь τ_k^i обозначает i -ую компоненту вектора τ_k , а $d_k(t)$ ($k = 1, 2, 3$) и $\xi(t)$ обозначают соответственно ребра и вершину конуса $C(t)$. Начальный конус задан равенствами

$$\xi(0) = (-a_*, 0, 0)^T, \quad d_1(0) = (1, 0, 0)^T,$$

$$d_2(0) = (0, 1, 0)^T, \quad d_3(0) = (0, 0, 1)^T.$$

Если после вычисления $\xi(t)$ по формуле (40)

$$\xi(t) \notin U = \{ \xi \mid |a| \leq a_*, 0 \leq \delta \leq \delta_*, \rho \geq 0 \},$$

то вектор $\xi(t)$ пересчитывается согласно процедуре, описанной после формулы (22).

Теорема 6.2. Пусть $|a| \leq a_*$ и $\delta \leq \delta_* < 1$, где a_* и δ_* известные постоянные. Тогда для любого $\epsilon < 1 - \delta_*$ адаптивный закон управления (39),(40) обеспечивает для выхода объекта управления (34) выполнение неравенства

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |y(t)| \leq \frac{\rho}{1 - \delta} + M\epsilon,$$

где постоянная M не зависит от параметра ϵ .

Доказательство теоремы 6.2 проводится аналогично доказательству теоремы 5.1 с учетом изменения функции предпочтения f . Подчеркнем, что в теореме 6.2 не вводится дополнительное предположение 6 теоремы 5.1 благодаря теореме 5.2. Таким образом, конусный алгоритм оценивания настраивает оценки параметров объекта и возмущений оптимальным для достижения цели управления образом.

6. Заключение

Рассмотрена задача синтеза адаптивного управления линейным дискретным объектом в условиях аддитивных и мультипликативных детерминированных возмущений. Предложен новый алгоритм оценивания параметров, названный конусным алгоритмом и предназначенный для улучшения качества адаптивного управления. На основе конусного алгоритма предложен вариант решения задачи построения адаптивного управления, качество которого пропорционально уровню аддитивного возмущения. На примере объекта первого порядка показана также возможность построения адаптивного субоптимального управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куржанский А.Б. Задачи идентификации – теория гарантированных оценок // Автоматика и телемеханика—1991.—N.4—С.3-26.
2. Соколов В.Ф. Рекуррентное линейное программирование в задачах адаптивного минимаксного управления // Изв. РАН. Техническая кибернетика.—1993.—N.3.—С.103-109.
3. Соколов В.Ф. Адаптивное минимаксное управление на основе рекуррентного линейного программирования // Автоматика и телемеханика—1993.—N.12.—С.127-139.
4. Соколов В.Ф. Адаптивное робастное управление с гарантированным результатом в условиях ограниченных возмущений // Автоматика и телемеханика.—1994.—N.2.—С.121-131.
5. Bayard D.S., Yans Y., Mettler E. A Criterion for Joint Optimization of Identification and Robust Control // IEEE Trans. Aut. Contr.—1992.—V.AC-37.—P.986-991.
6. Lozano-Leal R. Robust Adaptive Regulation Without Persistent Excitation // IEEE Trans. Aut. Contr.—1989.—V.AC-34.—P.1260-1267.
7. Praly L., Lin S.-F., Kumar P.R. A robust adaptive minimum variance controller // SIAM J. Control and Optimization—1989.—V.27—P.235-266.
8. Radenkovic M.S., Michel A.N. Robust Adaptive Systems and Self Stabilization // IEEE Trans. Aut. Contr.—1992.—V.AC-37.—P.1355-1369.
9. Smith R.S., Doyle J.C. Model Validation: A Connection Between Robust Control and Identification // IEEE Trans. Aut. Contr.—1992.—V.AC-37.—P.942-952.
10. Sun J., Ioannou P. Robust Adaptive LQ Control Schemes // IEEE Trans. Aut. Contr.—1992.—V.AC-37.—P.100-106.
11. Ydstie B.E. Transient Performance and Robustness of Direct Adaptive Control // IEEE Trans. Aut. Contr.—1992.—V.AC-37.—P.1091-1105.

СОДЕРЖАНИЕ

Н.А.Громов. Контракции и аналитические продолжения представлений группы $SU(2)$	3
Н.А.Громов, И.В.Костяков. Структура Кэли-Клейна на квантовых унитарных группах	17
А.А.Карабаков. Частичное усреднение в окрестности резонанса в системах с двумя степенями свободы, близких к интегрируемому гамильтоновым	25
А.П.Урнышев. Градиентно-вязкая модель движения однородной жидкости в устьях приливных рек	33
А.П.Урнышев, В.А.Урнышев. Оценка длины распространения пресной воды в сильно стратифицированных эстуариях	39
Л.Э.Лапина. Трехмерная градиентно-вязкая модель эволюции приливной волны на мелководье	45
Р.О.Кузнецовский, А.Н.Тихомиров. О бутстреп оценивании спектральной плотности стационарной последовательности	59
В.Ф.Соколов. Адаптивное робастное управление на основе конусного алгоритма оценивания	71

УДК 512.815

Н.А.Громов. Контракции и аналитические продолжения представлений группы $SU(2)$ // Квантовые группы, дифференциальные уравнения и теория вероятностей — Сыктывкар, 1994. — С.3 - 16 (Труды Коми научного центра УрО Российской АН, N 138).

Библиогр. 13.

Цель работы — дать единое описание хорошо известных неприводимых представлений специальной унитарной группы $SU(2)$, псевдоунитарной группы $SU(1,1) \cong QU(2)$ и контрактивной группы $M(2)$, реализуемых в пространствах функций, заданных на окружности. Группа $SU(2)$ локально изоморфна группе вращений $SO(3)$, а группа $M(2)$ локально изоморфна группе движений евклидовой плоскости и мы будем называть ее евклидовой группой. Метод основан на использовании дуальных чисел и мы даем их краткое описание.

УДК 512.667.7+530.1

Н.А.Громов, И.В.Костяков. Структура Кэли-Клейна на квантовых унитарных группах // Квантовые группы, дифференциальные уравнения и теория вероятностей — Сыктывкар, 1994. — С.17 - 24 (Труды Коми научного центра УрО Российской АН, N 138).

Библиогр. 5.

Используя формализм дуальных чисел, мы определяем многомерные контракции и аналитические продолжения квантовых унитарных групп. Подробно описаны $SU_q(2)$, $SU_q(3)$ случаи. Как частный случай, контракцией $SU_q(2)$ -группы получена евклидова квантовая двумерная группа $E_q(2)$.

УДК 517.925

А.А.Карabanov. Частичное усреднение в окрестности резонанса в системах с двумя степенями свободы, близких к интегрируемым гамильтоновым // Квантовые группы, дифференциальные уравнения и теория вероятностей — Сыктывкар, 1994. — С.25 - 32 (Труды Коми научного центра УрО Российской АН, N 138).

Библиогр. 3.

Получен общий вид частично усредненной системы в окрестности фиксированного резонанса в системе обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя степенями свободы, близкой к интегрируемой гамильтоновой

УДК 551.482

А.П.Урнышев. Градиентно-вязкая модель движения однородной жидкости в устьях приливных рек // Квантовые группы, дифференциальные уравнения и теория вероятностей — Сыктывкар, 1994. — С.33 - 38 (Труды Коми научного центра УрО Российской АН, N 138).

Библиогр. 2.

В данной статье дается вывод математической модели колебаний уровня воды в устьях приливных рек, при условии градиентно-вязкого режима течений однородной жидкости, как при наличии ледяного покрова, так и при учете ветровых нагонов. Предлагается аналитический вид дифференциальных уравнений с краевыми условиями в трехмерном случае.

УДК 551.482

А.П.Урнышев, В.А.Урнышев. Оценка длины распространения пресной воды в сильно стратифицированных эстуариях // Квантовые группы, диф-

ференциальные уравнения и теория вероятностей — Сыктывкар, 1994. — С.39 - 44 (Труды Коми научного центра УрО Российской АН, N 138).

Библиогр. 2.

В работе дается оценка дальности распространения пресных вод в морских заливах приливного характера. За основу берется градиентно-вязкий режим сильно стратифицированной по плотности течения жидкости

УДК 551.465

Л.Э.Лапина. Трехмерная градиентно-вязкая модель эволюции приливной волны на мелководье // Квантовые группы, дифференциальные уравнения и теория вероятностей — Сыктывкар, 1994. — С.45 - 58 (Труды Коми научного центра УрО Российской АН, N 138).

Библиогр. 7.

В работе рассматривается трехмерная модель распространения приливной волны на мелководье в градиентно-вязком приближении. При этом используется гипотеза Прандтля, связывающая коэффициент вертикального турбулентного обмена с энергией турбулентности и гипотеза Колмогорова о локально-изотропной турбулентности.

УДК 519.234

Р.О.Кузнецовский, А.Н.Тихомиров. О бутстреп оценивании спектральной плотности стационарной последовательности // Квантовые группы, дифференциальные уравнения и теория вероятностей — Сыктывкар, 1994. — С.59 - 70 (Труды Коми научного центра УрО Российской АН, N 138).

Библиогр. 33.

Применяя бутстреп метод, предложенный в 1989 г. Кюншем для статистик, определенных на стационарных последовательностях, авторы построили бутстреп оценку спектральной плотности и исследовали их асимптотические свойства. Предлагается метод построения бутстреп оценок спектральной плотности для гауссовских стационарных последовательностей. Исследуемые процедуры иллюстрируются примерами численного моделирования.

УДК 517.977:62.506.1

В.Ф.Соколов. Адаптивное робастное управление на основе конусного алгоритма оценивания // Квантовые группы, дифференциальные уравнения и теория вероятностей — Сыктывкар, 1994. — С.71 - 84 (Труды Коми научного центра УрО Российской АН, N 138).

Библиогр. 11.

Проблема повышения качества — одна из актуальных задач теории адаптивного управления. В статье рассмотрена задача адаптивного управления линейным дискретным объектом в условиях аддитивных и мультипликативных возмущений. Предполагается, что для объекта управления с известными параметрами задан регулятор, обеспечивающий желаемое качество управления. Предложен новый конусный алгоритм оценивания неизвестных параметров, позволяющий гарантировать значение показателя качества, пропорциональное уровню аддитивного возмущения.

КВАНТОВЫЕ ГРУППЫ,
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Редактор *Ю.А.Кочев*
Художник *О.П.Велегжанинов*

Лицензия №0015 от 27.12.93
Компьютерный набор. Подписано в печать 11.10.94. Формат 60x90 1/16.
Бум. типографская №1. Печать офсетная. Усл. печ. л. 5,5.
Уч.-изд. л. 10. . Тираж 300. Заказ № 194.

Участок оперативной полиграфии Коми научного центра УрО РАН.
167610, г.Сыктывкар, ул.Первомайская, 48.