

ИЗВЕСТИЯ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

СЕРИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

Год основания журнала 1957 Год основания серии 1963	Периодичность журнала 15 номеров в год Периодичность серии 3 номера в год	№ 8 (368) Вып. 2	Июнь 1983
--	--	---------------------	--------------

ИЗВЕСТИЯ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

Главный редактор журнала чл.-кор. АН СССР *М. Ф. Жуков*

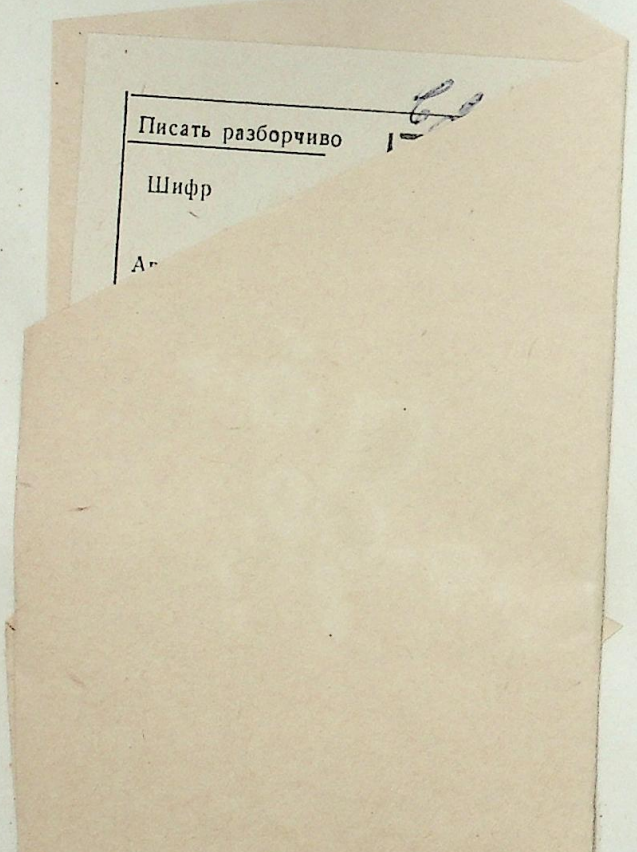
Заместитель главного редактора чл.-кор. АН СССР *В. Г. Дулов*

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ СЕРИИ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

Ответственный редактор серии чл.-кор. АН СССР *М. Ф. Жуков*

Чл.-кор. АН СССР *О. Ф. Васильев*, д-р техн. наук *Б. И. Девятов*, чл.-кор. АН СССР *В. Г. Дулов*, чл.-кор. АН СССР *И. А. Желтухин* (зам. ответственного редактора), чл.-кор. АН СССР *В. Е. Накоряков*, д-р техн. наук *Н. А. Рубцов* (ответственный секретарь серии), д-р техн. наук *Б. А. Урюков*

Адрес редакции: 630099, Новосибирск 99, Советская, 18, ком. 331.



Редакторы *Р. П. Ефимова, И. Н. Стригун*
Художественный редактор *Э. С. Филонычева*
Технический редактор *Г. Я. Герасимчук*
Корректоры *В. К. Чичельник, В. В. Борисова*

Сдано в набор 24.02.83. Подписано к печати 13.06.83. МН-12067. Формат 70×108^{1/16}. Высокая печать. Усл. печ. л. 11,2. Усл. кр.-отт. 11,7. Уч.-изд. л. 14. Тираж 1519 экз. Заказ 518.

Издательство «Наука», Сибирское отделение, 630099, Новосибирск, 99, Советская, 18.
4-я типография изд-ва «Наука», 630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25.

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕРМОДИНАМИКА И ТЕПЛООБМЕН

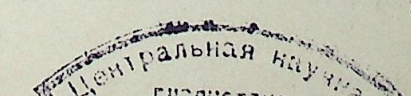
- И. И. Гогошин, О. А. Кабов*. Влияние капиллярного удерживания жидкости на теплообмен при конденсации на оребренных трубах 3
- А. Н. Хозе, Ю. В. Дьяченко*. Влияние инертного газа на теплообмен при конденсации в динамическом двухфазном слое 10
- В. И. Лелеков, Ю. И. Петухов, А. А. Фурсенко*. Модель эволюции напряженно-деформированного состояния шарового тепловыделяющего элемента 15

ПРИКЛАДНАЯ ГАЗО- И РЕОДИНАМИКА

- С. И. Лежнин, Н. А. Прибатурин*. Нестационарные волны давления для различных режимов течения парожидкостной среды 20
- А. М. Павлюченко, Е. М. Макенмова*. Численный метод обработки летного теплового эксперимента на метеоракете типа «Облако» с учетом теории турбулентных пятен Эммонса 27
- Г. В. Петров*. Характеристики устойчивости пограничного слоя газа, рекомбинирующего на охлаждаемой стенке 36
- Б. И. Заславский, Б. В. Юрьев*. Экспериментальное исследование процесса трансформации свободного шарообразного объема легкого газа в вихревое кольцо 40
- А. В. Довгаль, В. В. Козлов*. Восприимчивость пограничного слоя на телах с затупленным носиком к акустическим колебаниям потока 47
- В. И. Елисеев*. Пространственная устойчивость радиальной пленки 52
- Л. И. Сень*. Модель течения слоя жидкости перед сливным отверстием 58
- П. Г. Бедриковецкий, Я. Е. Дорфман*. Распространение волн концентрации компонентов при вытеснении нефти спиртовым раствором 61
- Ю. П. Чернов*. О потенциальном обтекании диафрагм электрическим током 67

ГАЗОРАЗРЯДНАЯ ПЛАЗМА

- Н. А. Дворников, В. И. Терехов*. Динамика и тепломассообмен частиц в вихревой камере с притоком плазменным потоком 74
- В. М. Градов, Е. Н. Гайдуков, Л. Г. Сапрыкин, А. А. Щербатов, М. В. Щедров*. Энергетический баланс разрядов высокого давления в парах щелочных металлов 83
- О. Я. Новиков, В. Ф. Путько, В. И. Шацких, В. П. Яковлев*. Микрокомпьютерная система управления плазменной установкой 91



- Б. Н. Девятков, А. Г. Верещагин. Об интегральных методах аппроксимации динамических характеристик тепломассообменных процессов 94
- А. Г. Верещагин, Б. Н. Девятков. Интегральный метод решения многомерных линейных задач динамики тепломассообменных процессов 102
- Н. Д. Демиденко, А. М. Авдеев. Численный метод исследования оптимального управления химико-технологическими объектами с рециркуляцией взаимодействующих потоков 112

ВОПРОСЫ РЕЖИМОВ, УСТОЙЧИВОСТИ И ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

- В. В. Бушуев, Я. М. Шлемензон. Использование информационных показателей при оценке качества работы систем контроля и управления энергообъектов 118
- А. Х. Каложный. Упрощенная оценка динамической устойчивости при внезапных небалансах мощности в энергосистеме 124

И. И. ГОГОНИН, О. А. КАБОВ

ВЛИЯНИЕ КАПИЛЛЯРНОГО УДЕРЖИВАНИЯ ЖИДКОСТИ
НА ТЕПЛОБМЕН ПРИ КОНДЕНСАЦИИ НА ОРЕБРЕННЫХ
ТРУБАХ

Исследователи теплообмена при конденсации на оребренных трубах отмечали, что в некоторых случаях нижняя часть трубы покрывалась постоянно удерживающимся между ребрами слоем конденсата [1, 2]. На основании опытных данных по конденсации хладона-12, *n*-бутана и ацетона авторы работы [1] делают вывод, что для исследованных ими параметров оребренных труб и жидкостей, слой конденсата, удерживающийся между ребрами, практически не оказывал влияния на теплообмен.

Особенностью использующихся в настоящее время в промышленности оребренных труб является то, что боковая поверхность ребер составляет, как правило, не менее 70% всей поверхности трубы. Высота ребра примерно на порядок меньше, чем ее диаметр. Если жидкость постоянно удерживается между ребрами за счет капиллярных сил, то она исключает из процесса теплообмена часть боковой поверхности ребер, что может приводить к заметному снижению теплообмена.

Цель данной работы — экспериментальное исследование теплообмена при конденсации неподвижного пара на одиночных оребренных трубах разной геометрии. Особое внимание уделено измерениям части поверхности труб, которая затоплена жидкостью, постоянно удерживающейся между ребрами силами поверхностного натяжения.

Опыты проводились на стенде, описание которого дано в [3]. Рабочим веществом являлся хладон-12 (ГОСТ 19212-73). Опыты проводились на оребренных трубах с прямоугольными кольцевыми ребрами. Размеры труб и ребер были одинаковы, а расстояния между ребрами различны. Параметры оребрения приведены в табл. 1.

Первая труба изготовлена из латуни, а остальные трубы — из меди. Трубы были установлены в цилиндрический конденсатор с внутренним диаметром 400 мм и рабочей длиной 585 мм, со смотровыми окнами.

Оценки эффективности ребра по [4] позволяют с высокой степенью точности считать поверхность изотермической для всех исследованных труб. Температура стенки T_w экспериментальных участков измерялась десятью термопарами, показания которых осреднялись. Термопары диаметром 0,15 мм укладывались в пазы, выфрезерованные вдоль образующей трубы, которые закрывались медной пластинкой с полным восстановлением профиля оребрения. Тепловой поток определялся по изменению энтальпии охлаждающей воды, расход которой измерялся расходомером РМ-5 и контролировался весовым способом. Нагрев воды измеряли полупроводниковыми дифференциальными термодатчиками, изготовленными на базе диодов КД-514А. Датчик обладал чувствительностью 1 мВ на 1°C и позволял измерять нагрев с точностью не ниже 0,02°C при выведении сигнала на цифровой прибор. Температуру насыщения хладона определяли по $P - T$ зависимости. Давление измеряли с помощью кремниевого датчика давления, изготовленного в лаборато-

Таблица 1

№ трубы	D_n	D_o	h	a	δ	s	k	ϵ
1	19,78	17,72	1,03	0,25	0,50	0,75	0,73	3,98
2	19,90	17,88	1,01	0,41	0,52	0,93	0,68	3,36
3	19,86	17,68	1,09	1,00	0,50	1,50	0,60	2,58
4	19,75	17,73	1,01	2,14	0,46	2,60	0,45	1,84

Примечание. D_n — наружный диаметр; D_o — диаметр по впадинам; h — высота ребра, a — ширина впадины; δ — толщина ребра; s — шаг оребрения; k — отношение вертикальной поверхности оребрения к полной поверхности трубы; ϵ — коэффициент оребрения по отношению к поверхности гладкой трубы с $D=D_o$.

при автоматизации института по принципу, изложенному в [5], и контролировали образцовым манометром класса 0,35.

Опыты проведены при температурах насыщения $T'' = 20, 40$ и 70°C в диапазоне изменения тепловых потоков от $q = 10,0 \cdot 10^3$ до $200,0 \cdot 10^3$ Вт/м² при отнесении потока тепла к площади гладкой трубы диаметром D_o . Общая погрешность эксперимента при $\Delta T > 2^\circ\text{C}$ не превышала 10% (здесь $\Delta T = T'' - \bar{T}_c$). Для проверки методики эксперимента одновременно с оребренными трубами в конденсатор устанавливалась гладкая труба. Экспериментально определенные коэффициенты теплоотдачи на гладкой трубе хорошо совпали с результатами обобщения, приведенного в [6].

Визуальные наблюдения показали, что во всех режимах эксперимента нижняя часть труб была покрыта постоянно удерживающимся слоем конденсата, который сохранялся долгое время после отключения подачи охлаждающей воды в экспериментальный участок. Высота этого слоя не зависела от теплового потока, режима стекания конденсата с трубы и от того, каким способом конденсат попадал на трубу.

В опытах проводились измерения высоты полного затопления H_1 (рис. 1) и максимального затопления H_2 межреберных впадин на трубах 1, 2, 3. Для этой цели использовался катетометр КМ-8 с точностью измерения 0,015 мм. Отсчет брали от верхней образующей трубы.

Измерения показали, что средняя высота удерживающегося на трубе слоя конденсата $\bar{H} = (H_1 + H_2)/2$ хорошо совпадает с высотой капиллярного поднятия H_0 в бесконечной вертикальной щели с шириной, равной a . Здесь

$$H_0 = 2\sigma/[(\rho' - \rho'')ga], \quad (1)$$

где ρ' , ρ'' — плотность жидкости и пара, кг/м³, σ — поверхностное натяжение, Н/м, g — ускорение свободного падения, м/с².

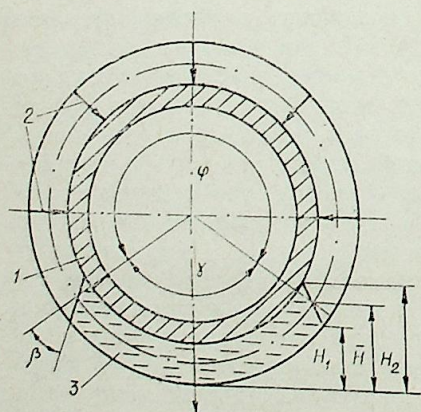


Рис. 1. Схема стекания конденсата с оребренной трубы.

1 — оребренная труба, 2 — направление стекания конденсата с боковой поверхности ребра, 3 — слой жидкости, удерживающийся между ребрами.

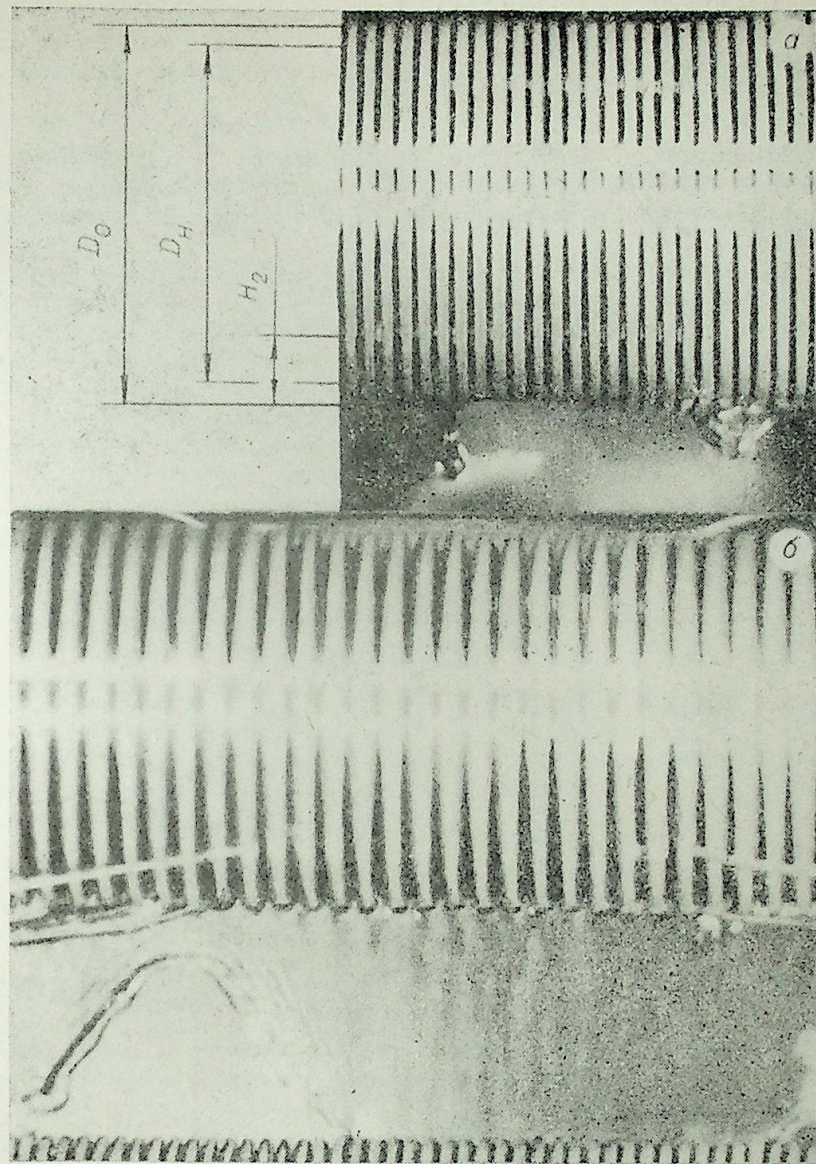


Рис. 2. Фотографии режимов стекания конденсата с оребренных труб. а) труба 2, $T''=40^\circ\text{C}$, $\Delta T=1,5^\circ\text{C}$, $Re_1=40$; б) труба 3, $T''=70^\circ\text{C}$, $\Delta T=11,2^\circ\text{C}$, $Re_1=172$.

между ребрами a величины поверхностного натяжения (температуры насыщения) примерно от $\beta = 0$ на трубе 1 при температуре насыщения 20°C до $\beta = 60^\circ$ на трубе 2 при $T'' = 70^\circ\text{C}$. Точных измерений по высоте капиллярного удерживания на трубе 4 провести не удалось. На рис. 2, а представлена фотография стекания конденсата с трубы 2.

Таким образом, в проведенных опытах в зависимости от соотношения ширины межреберного канала a и капиллярной постоянной жидкости $l = \sqrt{\sigma/(\rho' - \rho'')g}$ конденсат мог заливать существенную часть поверхности трубы (до 1/3), максимальный угол капиллярного удерживания γ (см. рис. 1) на трубе 1 при $T'' = 20^\circ\text{C}$ составлял 127° .

Кино- и фотосъемка показала, что конденсат стекает с нижней образующей трубы в виде капель, струй или сплошной пленки в зависимости от теплового потока и меняющихся свойств жидкости при изменении температуры насыщения. При $T'' = 70^\circ\text{C}$ и числе Рейнольдса пленки $Re_1 = 185-195$ по всей длине труб 1, 2, 3 конденсат стекал ров-

ной сплошной пленкой. На рис. 2, б представлена фотография стекания сплошной пленки с трубы 3. Небольшие участки сплошной пленки появлялись при $Re_1 = 135-140$, если число Рейнольдса определять как

$$Re_1 = \pi D_0 q / [\mu r (1 + \varphi/K)]. \quad (2)$$

Переохлаждение конденсата определялось по [4], здесь $\varphi = 3/8$, $K = r/c\Delta T$ — критерий Кутателадзе; μ — динамическая вязкость жидкости, Нс/м²; r — теплота парообразования, Дж/кг; c — теплоемкость жидкости, Дж/(кг·°C).

На расстоянии 12—15 мм от нижней кромки трубы сплошная пленка становится неустойчивой и распадается на струи и капли.

С трубы 4 стекания в виде сплошной пленки не наблюдалось, хотя числа Re_1 достигали 200. При стекании конденсата образовывались лишь небольшие по 15—20 мм отдельные кусочки пленки. Сплошной пленки на этой трубе не было даже при $T'' = 78^\circ\text{C}$ и $Re_1 = 304$.

В опытах при $T'' = 20$ и 40°C наблюдалось только капельное и

Таблица 2

Труба 1		Труба 2		Труба 3		Труба 4	
$q \cdot 10^{-3}$ Вт/м ²	$\Delta T, ^\circ\text{C}$	$q \cdot 10^{-3}$ Вт/м ²	$\Delta T, ^\circ\text{C}$	$q \cdot 10^{-3}$ Вт/м ²	$\Delta T, ^\circ\text{C}$	$q \cdot 10^{-3}$ Вт/м ²	$\Delta T, ^\circ\text{C}$

$T'' = 20^\circ\text{C}$

51,35	4,00	36,97	2,65	33,14	2,54	26,67	2,99
50,08	3,90	36,89	2,70	32,58	2,48	26,60	2,93
37,76	2,75	33,02	2,25	32,11	2,45	23,71	2,50
34,33	2,30	31,81	2,25	30,74	2,26	23,07	2,43
32,88	2,25	27,19	1,75	30,45	2,24	21,75	2,19
29,71	1,95	23,08	1,40	23,83	1,66	20,25	2,04
24,53	1,50	17,95	1,00	23,78	1,64	15,73	1,40
21,52	1,30	17,82	1,00	20,39	1,36	15,68	1,41
18,55	1,05	14,61	0,75	19,68	1,27	12,93	1,11
17,52	0,95	12,43	0,60	19,70	1,26	12,36	1,05

$T'' = 40^\circ\text{C}$

105,3	10,05	87,06	8,30	65,76	7,03	47,73	7,09
101,3	8,85	89,82	8,65	65,76	7,11	47,36	6,99
89,58	7,85	77,93	7,16	66,19	7,01	42,48	6,17
69,72	5,85	60,37	5,11	63,21	6,60	42,48	6,07
61,32	4,70	53,88	4,51	54,57	5,44	38,76	5,38
56,62	4,50	45,87	3,63	44,53	4,13	38,22	4,99
53,01	4,20	40,04	3,05	44,22	4,06	34,76	4,48
44,76	3,30	35,87	2,60	43,84	4,18	29,46	3,64
38,80	2,60	29,90	2,08	31,21	2,36	26,36	3,07
33,22	2,15	26,55	1,74	31,21	2,49	25,07	2,97
27,76	1,70	22,81	1,47	33,02	2,69	19,47	1,98
21,53	1,20	19,51	1,15	15,00	0,96	13,43	1,28
18,98	1,00	15,68	0,86	16,71	1,06	13,30	1,21
16,50	0,85	14,93	0,78	18,78	1,16	11,16	0,99
15,22	0,75	10,51	0,50	18,02	1,2	11,49	1,01

$T'' = 70^\circ\text{C}$

199,6	25,00	124,6	16,66	103,3	18,31	82,00	21,33
158,9	19,18	113,9	14,13	103,1	18,20	81,42	21,41
150,6	17,40	108,1	13,18	84,38	14,01	70,72	18,12
143,5	15,85	93,53	11,11	71,47	11,18	60,85	15,10
124,3	12,90	87,40	10,08	73,08	11,31	54,08	12,95
90,44	8,65	78,20	8,66	58,56	8,46	46,56	10,64
80,93	7,55	74,84	7,82	45,65	5,92	40,32	9,06
77,53	7,25	61,38	6,20	34,10	3,86	35,87	7,56
65,81	5,96	52,37	5,19	34,29	3,76	33,10	6,83
35,58	2,67	42,96	3,93	29,97	3,32	29,18	5,75
30,03	2,15	35,05	2,96	24,21	2,40	23,38	4,20
20,13	1,28	24,97	1,87	24,21	2,63	16,81	2,66
18,19	1,06	25,19	1,90	13,84	1,29	14,58	2,16
16,37	0,90	19,09	1,25	13,83	1,09	10,92	1,49
14,61	0,78	18,76	1,30	12,68	1,03	10,62	1,37

струйное стекание конденсата. Полученные данные по критическим числам Рейнольдса для образования сплошной пленки хорошо совпадают с данными [7]. Определяющим параметром режима стекания, по-видимому, является число Ar_* . Оценки по зависимостям, приведенным в работе [8], где изучалось стекание пленки с пластины, дают значения критических чисел $Re_{кр} = f(Ar_*)$, близкие полученным в данном эксперименте (здесь $Ar_* = (\sigma^3/v^4\rho^3g)^{1/2}$ — число Архимеда, построенное по капиллярной постоянной; v — кинематическая вязкость жидкости, м²/с).

Частично результаты эксперимента по теплообмену на разных трубах представлены в табл. 2. На всех исследованных оребренных трубах наблюдалась существенная интенсификация теплообмена. Коэффициенты теплоотдачи α_n , вычисленные по тепловому потоку, отнесенному на полную поверхность трубы, выше в 1,7—2,6 раза по сравнению с коэффициентами теплоотдачи, получаемыми на гладкой трубе того же диаметра при одинаковом температурном напоре пар — стенка. Опытные данные хорошо описываются зависимостью $\alpha_n \sim \Delta T^{-0,25}$.

На рис. 3 показаны результаты наших опытов, обработанные в координатах $Nu^* = f(Re)$, где

$$Nu^* = \frac{\alpha_n}{\lambda \cdot \epsilon_t} \left(\frac{v^2}{g(1 - \rho''/\rho')} \right)^{1/3}, \quad (3)$$

$$Re = q_n h / \mu r (1 + \varphi/K). \quad (4)$$

Переменность свойств по толщине пленки учитывалась поправкой ϵ_t , рекомендованной в [9]. Здесь λ — теплопроводность жидкости, Вт/(м²·°C). Коэффициент теплоотдачи α_n вычислен по тепловому потоку q_n , отнесенному на боковую поверхность ребер. Значения q_n вычислены по следующей зависимости: $q_n = (Q_1 - Q_2 - Q_3)/F$.

Здесь Q_1 — экспериментально определенное количество тепла (Вт), снимаемое с трубы длиной S ; Q_2, Q_3 — расчетное количество тепла, снимаемое с одного торца и одной впадины оребренной трубы, Вт, F — боковая поверхность ребра, м². В расчете предполагалось, что теплообмен на горизонтальных участках труб такой же, как при конденсации на гладкой трубе с диаметрами D_n и D_0 при одинаковом числе Рейнольдса пленки.

Предполагалось также, что конденсат с боковой поверхности ребра под действием сил поверхностного натяжения течет во впадину [10].

Теплообмен на торце ребра (Q_2) рассчитывали по Нуссельту [11]. Для расчета Q_3 определялось число Рейнольдса пленки во впадине:

$$Re_3 = (Q_1 - Q_2) / a \mu r. \quad (5)$$

Число Нуссельта во впадине Nu_3^* принимали для вычисленного по (5) числа Re_3 , используя результаты обобщения экспериментальных данных [3]. Тогда

$$Q_3 = \frac{Nu_3^* \lambda \Delta T F_3}{(v^2/g(1 - \rho''/\rho'))^{1/3}},$$

где F_3 — площадь впадины, м².

Значения Q_2 и Q_3 для труб 1 и 2 в сумме не превышали 16% от полного количества тепла Q_1 , для труб 3 и 4 достигали 20 и 32% соответственно.

Как видно из рис. 3, экспериментальные данные в координатах (3) и (4) для труб 1 и 2 четко расслаиваются по температурам. Ниже лежат данные, соответствующие более низким температурам, т. е. более высоким значениям коэффициента поверхностного натяжения. Для трубы 3 интенсивность теплообмена при различных температурах практически одинакова. На трубе 4 теплообмен несколько ухудшается с уменьшением поверхностного натяжения. Таким образом, в зависимости от

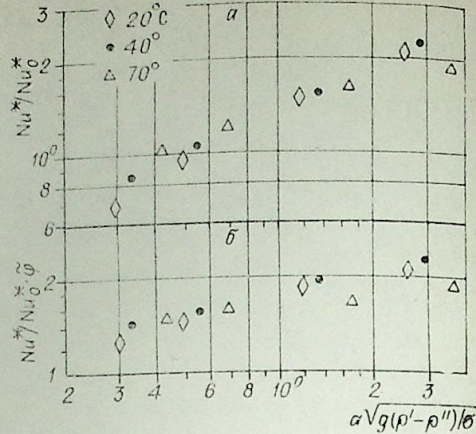
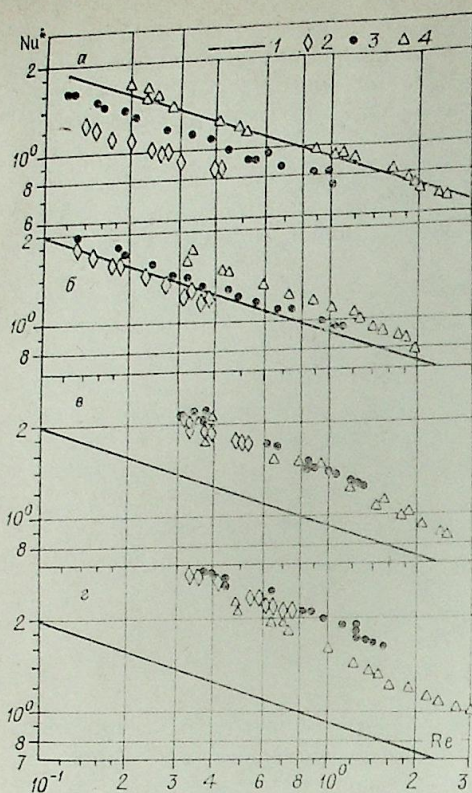


Рис. 3. Зависимость теплообмена от безразмерного расстояния между ребрами. Сопоставление выполнено при $Re=0,4$.

Рис. 4. Обработка опытных данных на одиночных оребренных трубах в безразмерных координатах (3) и (4).
Трубы: 1 (а); 2 (б); 3 (в); 4 (г). 1 — расчет по (6), 2 — $T''=20^\circ\text{C}$, 3 — $T''=40^\circ\text{C}$, 4 — $T''=70^\circ\text{C}$.

расстояния между ребрами изменяется характер воздействия сил поверхностного натяжения на теплообмен.

На рис. 3 значения чисел Nu^* , определенных по (3), сопоставлены с расчетом по формуле Нуссельта для вертикальной пластины [11] при одинаковых числах Re

$$Nu_0^* = 0,925 Re^{-1/3}. \quad (6)$$

На рис. 3 видно, что в зависимости от соотношения расстояния между ребрами и капиллярной постоянной интенсивность теплообмена на оребренной трубе может быть ниже теоретической (на 50%) и существенно выше (в 2,2 раза).

На рис. 4, а опытные данные представлены в виде зависимости относительного числа Нуссельта от безразмерной ширины впадины. С достаточной степенью точности влияние капиллярного удерживания можно учесть, если предположить, что в зоне затопления теплообмен отсутствует. Тогда все снятое с трубы тепло необходимо отнести на незатопленную часть поверхности теплообмена, которую можно определить для $H_0 < D_H/2$

$$\tilde{\varphi} = \varphi/2\pi = 1 - \arccos \left(\left(1 - \frac{4\sigma}{(\rho' - \rho'')gaD_H} \right) \frac{D_H}{D_H - h} \right) / \pi.$$

Здесь φ и π — углы в радианах.

На рис. 4, б полученные экспериментальные данные обработаны с учетом капиллярного удерживания. Для труб 4 и 3 при $T'' = 70^\circ\text{C}$, у которых $H_0 < h$, поправка $\tilde{\varphi}$ не вводилась. Оценка площади трубы, занятой поддонным слоем, у этих труб показала, что она не превышала 10%. Как видно из рис. 4, зависимость теплообмена от безразмерной ширины впадины сохраняется даже при учете этого явления.

Таким образом, из приведенных данных следует, что при конденсации на оребренных поверхностях, у которых расстояние между ребрами по отношению к капиллярной постоянной $\tilde{a} > 1,0$, теплообмен существенно интенсивнее, чем при его определении по теории Нуссельта (6).

При значении $\tilde{a} < 0,5$ имеет место значительное капиллярное удерживание конденсата между ребрами, что исключает из теплообмена существенную часть оребренной поверхности.

Институт теплофизики СО АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
10/IX 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Katz D. L., Geist J. M. Condensation on Six Finned Tubes in a vertical Row. Trans.— ASME, 1948, v. 70, N 8.
2. Хижняков С. В. Теплообмен при конденсации фреонов-12 и 22 на гладких и оребренных трубах.— Холодильная техника, 1971, № 1.
3. Гоголин И. И., Дорохов А. Р., Сосунов В. И. Теплообмен при пленочной конденсации неподвижного пара. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1980. Препринт 48-80.
4. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. М.: Атомиздат, 1979.
5. Гридчин В. А., Беренштейн О. Ф., Бердинский А. С. и др. Интегральный теплопреобразователь на плоской мембране.— В кн.: Физика деформируемых полупроводников/Под ред. В. С. Шадрина. Новосибирск: НЭТИ, 1979.
6. Гоголин И. И., Дорохов А. Р., Сосунов В. И., Кубышева Н. В. О коэффициенте теплоотдачи при конденсации неподвижного пара на горизонтальном цилиндре.— В кн.: Теплообмен и газодинамика при кипении и конденсации. Новосибирск: ИТФ, 1979.
7. Гоголин И. И., Сосунов В. И., Лазарев С. П., Кабов О. А. Теплообмен при конденсации неподвижного пара на пакетах горизонтальных труб различной геометрии.— Теплоэнергетика, 1982, № 3.
8. Puzyrewski R., Zukoski E. E. Desintegration of a Liquid sheat due to gravity force.— Fluid dynamics transactions, 1969, v. 4.
9. Лабуцков Д. А. О влиянии на теплоотдачу при пленочной конденсации пара зависимости физических параметров конденсата от температуры.— Теплоэнергетика, 1957, № 2.
10. Боровков В. П. Уточнение метода расчета теплообмена при конденсации неподвижного пара на горизонтальных оребренных трубах.— ИФЖ, 1980, т. 39, № 4.
11. Nusselt W. Die Oberflächenkondensation des Wasserdampfes.— Z. der VDI, 1916, Bd 60, H. 27—28.

А. Н. ХОЗЕ, Ю. В. ДЬЯЧЕНКО

ВЛИЯНИЕ ИНЕРТНОГО ГАЗА НА ТЕПЛОБМЕН
ПРИ КОНДЕНСАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКОМ ДВУХФАЗНОМ СЛОЕ

Известно [1, 2], что при пленочной конденсации парогазовых смесей инертный газ оказывает существенное влияние на интенсивность теплообмена. Объясняется это явление тем, что при конденсации парогазовых смесей в отличие от конденсации «чистого» пара вклад диффузионной составляющей общего термического сопротивления становится ощутимым и даже может превысить термическое сопротивление пленки конденсата. Следовательно при наличии инертного газа интенсивность теплообмена зависит не только от режима течения и толщины пленки конденсата, но и от процесса массообмена в парогазовой фазе.

В последнее время большое внимание уделяется исследованию методов интенсификации процесса конденсации из парогазовых смесей. В данной работе рассматривается организация процесса конденсации из парогазовых смесей в динамическом двухфазном слое с отводом теплоты фазового перехода охлаждающими поверхностями, размещенными в его объеме.

В литературе имеются лишь отдельные исследования, относящиеся к этому методу конденсации. Так, в [3] рассмотрена конденсация одиночных парогазовых пузырей в слое подогретой жидкости, в [4, 5] приведены экспериментальные данные по конденсации пара при барботаже в слое подогретой жидкости. В последнее время выполнен ряд теоретических [5] и экспериментальных [7] исследований по изучению абсорбции паров при барботажном режиме. В этом случае перенос массы абсорбируемого вещества в газовой фазе бинарного состава аналогичен процессу конденсации из парогазовых смесей.

По данным [8—10] наиболее интенсивное протекание процессов массообмена в парогазовой фазе происходит при развитом барботажном (пенном) режиме движения газожидкостной смеси. При этом вследствие турбулентного характера движения фаз, развитой межфазной поверхности и ее непрерывного обновления удается реализовать наиболее благоприятные гидродинамические условия для массообмена.

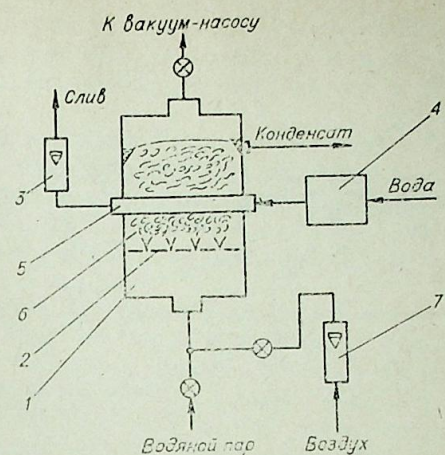
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ ВЛИЯНИЯ
ИНЕРТНОГО ГАЗА НА ПРОЦЕСС КОНДЕНСАЦИИ В ПЕННОМ СЛОЕ

Теоретическое исследование тепломассообмена при конденсации парогазовых смесей в пенном слое затруднено сложностью гидродинамической обстановки и отсутствием формализованного описания модели процесса вследствие статистического характера основных гидродинамических характеристик. Поэтому в настоящей работе приводятся результаты экспериментального изучения конденсации водяного пара, содержащего воздух при давлении $P = 10^4$ Па.

Принципиальная схема экспериментальной установки показана на рис. 1. На этой установке получены данные для сравнительной оценки влияния концентрации воздуха в водяном паре при пленочной конденсации и конденсации в динамическом слое. Эксперименты выполнены на

Рис. 1. Схема экспериментальной установки.

1 — колонна; 2 — газораспределительная решетка; 3 — ротаметр для измерения расхода охлаждающей воды; 4 — термостат; 5 — рабочий участок (одиночная трубка); 6 — динамический слой; 7 — ротаметр для измерения расхода воздуха.



одиночной трубе $\varnothing 12$ мм при одинаковых исходных условиях по давлению и температуре парогазовой смеси на входе в колонну приведенной скорости парогазовой смеси и средней разности температур.

При пленочной конденсации в колонне убиралась газораспределительная решетка. Конденсат стекал в поддон колонны и измерялся объемным методом. Для примера в табл. 1 приведены опытные данные одной серии экспериментов.

На рис. 2 показано влияние концентрации воздуха на коэффициент теплоотдачи при пленочной конденсации и конденсации в динамическом двухфазном слое при различной приведенной скорости парогазовой смеси. Из рисунка следует, что при пленочной конденсации характерно существенное влияние на α содержания воздуха в паре, причем с уменьшением скорости парогазовой смеси это влияние увеличивается. Полученные данные согласуются с имеющимися в литературе [1]. При конденсации в динамическом двухфазном слое влияние воздуха незначительно и находится в пределах погрешности эксперимента. В экспериментах концентрация воздуха изменялась в диапазоне $C_{в1} = 0,125 \div 11,0\%$.

На этой же экспериментальной установке изучалось влияние содержания воздуха в паре на теплообмен семирядного трубного пучка с диаметром трубок $d = 12$ мм при относительном шаге $S/d = 1,0$. Массовая концентрация воздуха на входе в колонну изменялась в диапазоне $C_{в1} = 0,09 \div 3,5\%$; вследствие конденсации пара содержание воздуха на выходе из конденсатора составляло $C_{в2} = 0,37 \div 16,4\%$.

Количество сконденсированного пара определялось по результатам измерений при сопоставлении теплового и материального балансов.

Таблица 1

Температура парогазовой смеси на входе в колонну, $t_{см}, ^\circ\text{C}$	Температура динамического слоя, $t_{д}, ^\circ\text{C}$	Средняя температура поверхности трубки, $t_{ст}, ^\circ\text{C}$	Расход пара, $M_{п}, \text{кг/с}$	Расход воздуха, $M_{в}, \text{кг/с}$	Расход охлаждающей воды, $M_{вод}, \text{кг/с}$	Нагрев охлаждающей воды, $\Delta t_{вод}, ^\circ\text{C}$	Коэффициент теплоотдачи, $\alpha, \text{Вт/м}^2, ^\circ\text{C}$
--	---	--	-----------------------------------	--------------------------------------	---	---	--

Конденсация в динамическом двухфазном слое (сечение колонны 100×40 мм)

46,3	44,6	29,5	3,15	0,0	236	1,85	8920
46,3	44,6	29,5	3,15	0,0535	236	1,85	8920
46,2	44,5	29,4	3,15	0,097	236	1,9	9050
46,1	44,5	29,4	3,15	0,147	236	1,9	9050
46,2	44,6	29,5	3,15	0,192	236	1,9	9050
46,2	44,6	29,5	3,15	0,239	236	1,9	9050

Пленочная конденсация (сечение колонны $100 \cdot 100$ мм)

44,5	44,1	28,9	7,87	0,01	143	2,25	8810
44,6	44,2	29,0	7,87	0,0535	176	2,1	7520
44,6	44,3	29,4	7,87	0,097	143	2,3	6940
44,5	44,3	29,4	7,87	0,147	130	2,3	6140
44,5	44,3	29,4	7,87	0,192	113	2,45	5730
44,6	44,5	29,5	7,87	0,239	97	2,6	5140

* Температура поверхности осреднялась по четырем точкам на поверхности трубки.

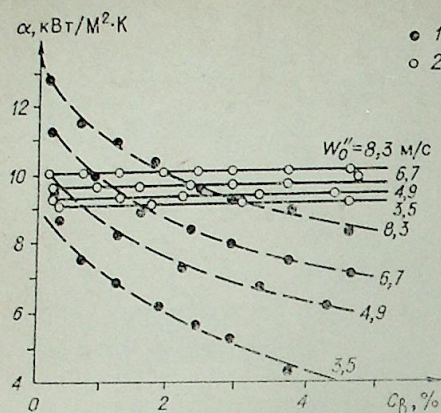


Рис. 2. Зависимость $\bar{\alpha}$ от содержания воздуха при $P=10^4$ Па, $t_{см}=44,5^\circ\text{C}$, $\Delta t=15^\circ\text{C}$.

1 — пленочная конденсация; 2 — конденсация в динамическом двухфазном слое.

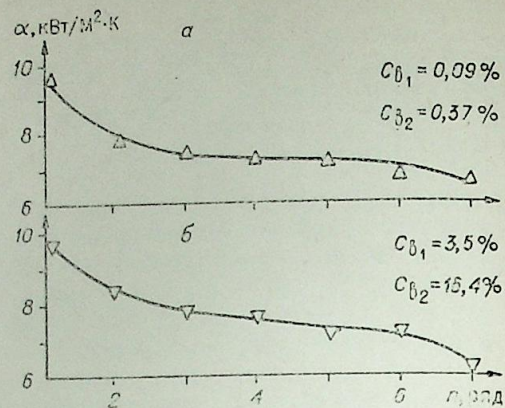


Рис. 3. Характер изменения $\bar{\alpha}$ по рядам пучка при $P=10^4$ Па, относительном шаге шахматного пучка $S/d=2,0$.

а — $C_{в1}=0,09\%$, $C_{в2}=0,37\%$; б — $C_{в1}=3,5\%$, $C_{в2}=16,4\%$.

В этих экспериментах расход и начальная температура охлаждающей воды в трубках поддерживались постоянными. Результаты экспериментов для двух значений концентрации воздуха даны в табл. 2.

На рис. 3 приведено изменение $\bar{\alpha}$ по рядам трубного пучка при $C_{в}=\text{var}$. Из рисунка следует, что в рассматриваемом диапазоне концентраций воздуха ($C_{в} \leq 16\%$) характер распределения $\bar{\alpha}$ по рядам пучка и его численные значения практически не изменяются.

АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Необходимым условием для протекания процесса конденсации является наличие «холодной» поверхности, имеющей температуру ниже температуры насыщения. Механизм процесса конденсации в динамическом двухфазном слое можно представить, исходя из следующих соображений. Жидкая фаза (конденсат), контактируя с охлаждающей поверхностью,

Таблица 2

Ряд пучка n	Температура динамического слоя $t_{д}$, $^\circ\text{C}$	Средняя температура поверхности трубки $t_{ст}$, $^\circ\text{C}$	Тепловой поток q , Вт/м ²	Расход пара M , кг/с
$C_{в1}=0,09\%$, $C_{в2}=0,37\%$				
1	43,8	37,9	57 600	10,66
2	42,8	34,9	61 500	»
3	42,3	34,0	61 570	»
4	41,8	33,9	57 560	»
5	41,6	33,5	56 800	»
6	41,3	32,9	56 800	»
7	41,1	32,5	56 800	»
$C_{в1}=3,5\%$, $C_{в2}=16,4\%$				
1	44,1	37,5	63 740	10,66
2	42,8	34,7	66 840	»
3	42,1	34,0	63 750	»
4	41,6	33,3	63 740	»
5	41,1	32,8	58 590	»
6	40,8	32,2	60 200	»
7	40,6	31,2	56 840	»

переохлаждается относительно температуры насыщения; это переохлаждение конденсата происходит в пристенной области динамического слоя, которая формируется при взаимодействии газожидкостного потока с охлаждающей поверхностью.

Результаты изучения структуры и основных гидродинамических характеристик пристенной области [11] свидетельствуют о том, что в ней условно можно зафиксировать некоторые характерные зоны. К внутренней зоне относится слой жидкости на охлаждающей поверхности, в которую не проникают движущиеся газовые образования; толщина этого невозмущенного слоя незначительна.

Во внешней зоне пристенной области происходит увеличение частоты прохождения газовых образований от нуля на внешней границе внутренней зоны до частоты их прохождения в объеме пенного слоя. В этой зоне за счет турбулизующего воздействия газовых образований и вытеснения молей переохлажденной жидкой фазы в объем пенного слоя наряду с теплопроводностью происходит конвективный перенос тепла. Естественно, в реальных условиях между указанными зонами нет резких границ. Однако такой подход позволяет выполнить качественный анализ сложных процессов в пристенной области и на его основе разработать основные представления о механизме процесса конденсации в динамическом двухфазном слое при наличии инертного газа.

Таким образом, общее термическое сопротивление переносу тепла фазового перехода к охлаждающей поверхности определяется следующими составляющими:

1. Диффузионной составляющей, соответствующей процессу диффузии пара из паровоздушной смеси к межфазной поверхности. Выполненные в работе измерения средней разности температур между паровоздушной и жидкой фазами (при помощи микротермопар в объеме пенного слоя) не превышают $1,0 \div 1,5^\circ\text{C}$ при разности температур между жидкой фазой и стенкой до 18°C . Последнее объясняется тем, что величина межфазной поверхности пенного слоя существенно больше охлаждающей поверхности трубок и по данным [12] составляет $670 \div 1500 \text{ м}^2/\text{м}^3$. Следовательно, при оценке влияния составляющих общего термического сопротивления диффузионную составляющую можно исключить.

2. Термическим сопротивлением, соответствующим переносу тепла фазового перехода через жидкую фазу в объеме пенного слоя. Турбулизация газожидкостного потока, приводящая к непрерывному обновлению межфазной поверхности, определяет высокую степень интенсивности переноса тепла в жидкой фазе и позволяет предположить, что и это термическое сопротивление также не является определяющим.

3. Термическим сопротивлением, соответствующим переносу тепла через пристенную область пенного слоя к охлаждающей поверхности. Это сопротивление определяющее и в основном зависит от толщины внутренней зоны пристенной области, через которую перенос тепла происходит теплопроводностью.

Такой качественный анализ позволяет объяснить, почему при рассматриваемых условиях не было отмечено влияние инертного газа на процесс конденсации в пенном слое. Влияние инертного газа на процесс конденсации в пенном слое может быть ощутимым лишь при его значительных концентрациях, когда величина диффузионной составляющей термического сопротивления станет соизмеримой с термическим сопротивлением невозмущенного слоя жидкой фазы в пристенной области.

Это качественно подтверждается результатами, полученными в [7], где приведены результаты изучения абсорбции в пенном слое с отводом теплоты абсорбции теплообменными поверхностями. При этом массообмен и соответствующая ему диффузионная составляющая общего термического сопротивления сосредоточены в жидкой фазе. Однако в условиях развитого пенного режима процесс абсорбции также определяется только отводом теплоты охлаждающими элементами.

1. Установлено незначительное влияние массообмена на процесс конденсации в динамическом двухфазном слое в рассматриваемом диапазоне концентраций (до 16%) инертного газа. Поэтому процесс конденсации определяется в основном отводом теплоты фазового перехода через пристенную область охлаждающей поверхности.

2. Сложный характер гидродинамики пленочного слоя и недостаточная изученность механизма взаимодействия газожидкостного потока с охлаждающими поверхностями не позволяет получить в настоящее время более полную физическую картину рассматриваемого способа конденсации. Для решения этой задачи необходимо систематическое накопление экспериментальных данных.

Новосибирский электротехнический институт

Поступила в редакцию
3/IV 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Кутателадзе С. С. Теплоотдача при конденсации и кипении. М.: Машгиз, 1961.
2. Берман Л. Д. Экспериментальные исследования конденсации пара в присутствии неконденсирующихся газов.— Теплоэнергетика, 1957, № 5.
3. Wittke D. D., Chao V. T.— Journal Heat Transfer, Trans. ASME, ser. C, 1967, N 1.
4. Лабунцов Д. А., Сознев Д. И. Конденсация пара в потоке недогретой жидкости.— В кн.: Тепло- и массообмен. Т. 2. Минск, 1972.
5. Бартоломей Г. Г., Горбунов В. И. Экспериментальное исследование конденсации паровой фазы в жидкости, недогретой до температуры насыщения.— Теплоэнергетика, 1969, № 12.
6. Григорьева Н. И. Исследования процессов тепломассопереноса при абсорбции. Автореф. канд. дис. Новосибирск, 1979.
7. Бурдуков А. П., Дорохов Р. А., Казаков В. И. Совместный тепло- и массообмен в динамическом двухфазном слое.— В кн.: Тепло- и массообмен в абсорбционных аппаратах. М., 1979.
8. Позин М. Е., Мухленов П. П., Тумаркина Е. С., Тарат Э. Я. Певный способ обработки газов и жидкостей. Л.: Госхимиздат, 1955.
9. Богатых С. А. Циклонно-пепные аппараты. Л.: Машиностроение, 1978.
10. Хозе А. Н., Дьяченко Ю. В. Исследование конденсации в динамическом двухфазном слое по горизонтальной трубе.— Изв. вузов. Энергетика, 1978, № 11.
11. Дьяченко Ю. В. Исследование процессов тепломассообмена при конденсации в динамическом двухфазном слое на охлаждающих поверхностях. Автореф. канд. дис. М., 1981.
12. Олиker П. И., Пермяк В. А. Термическая дезаэрация воды на тепловых электростанциях. М.: Энергия, 1971.

В. П. ЛЕЛЕКОВ, Ю. П. ПЕТУХОВ, А. А. ФУРСЕНКО

МОДЕЛЬ ЭВОЛЮЦИИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО
СОСТОЯНИЯ ШАРОВОГО ТЕПЛО ВЫДЕЛЯЮЩЕГО ЭЛЕМЕНТА

Известно [4—6], что в ядерной энергетике широко распространены цилиндрические и сферические тепло выделяющие элементы (ТВЭЛы), которые представляют собой топливный керамический слой соответствующей геометрии, заключенный в тонкостенную металлическую оболочку, препятствующую утечке продуктов ядерного деления и разрушению элемента на конечной стадии его работы. В центре элемента имеется полость, в которой накапливаются газообразные продукты деления, что приводит к возрастанию давления внутри. Таким образом, топливный слой и оболочка нагружены внешним давлением теплоносителя и давлением во внутренней полости. ТВЭЛ работает при высокой температуре, поэтому явления упругого деформирования, пластичности, радиационной и тепловой ползучести, газового распухания топлива могут привести с течением времени к значительной суммарной деформации металлической оболочки и к ее разрушению.

Математическому моделированию этих явлений посвящены работы [4—6]. В частности, в [5] рассмотрена модель эволюции цилиндрического ТВЭЛ с тонкостенной оболочкой. Для учета зависимости от радиуса основных характеристик напряженно-деформированного состояния предложена многозонная модель, сущность которой состоит в том, что топливный слой разбивается на n тонких цилиндрических слоев, внутри каждого из которых все характеристики считаются независимыми от радиуса. Методом последовательного послойного сопряжения решений на границе слоев удается получить приближенные решения в виде ступенчатой функции радиуса.

В данной статье рассмотрена задача о сферически-симметричном напряженном состоянии шарового ТВЭЛ с центральной полостью. Попытка распространить идеи и алгоритмы многозонной модели на эту задачу показала, что они приводят к несовместной системе уравнений, однако этого не происходит в осесимметричном случае. Поэтому в настоящей работе записана система точных в рамках физической модели уравнений для сферически-симметричного ТВЭЛ, предложен численный метод ее решения и рассмотрена эволюция деформации оболочки в характерных случаях.

1. Напряженно-деформированное состояние ТВЭЛ описывается системой уравнений, состоящей из уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r(r, t)}{\partial r} = 2 \frac{\sigma_\theta(r, t) - \sigma_r(r, t)}{r}, \quad (1.1)$$

уравнения совместности деформаций

$$\frac{\partial \varepsilon_\theta(r, t)}{\partial r} = \frac{\varepsilon_r(r, t) - \varepsilon_\theta(r, t)}{r} \quad (1.2)$$

и физических соотношений между составляющими вектора деформаций $\varepsilon_r(r, t)$, $\varepsilon_\theta(r, t)$, $\varepsilon_\varphi(r, t)$ и составляющими вектора главных напряжений $\sigma_r(r, t)$, $\sigma_\theta(r, t)$, $\sigma_\varphi(r, t)$. В рассматриваемом сферически-симметричном

случае имеет место равенство окружных напряжений $\sigma_\theta(r, t) = \sigma_r(r, t)$ и деформаций $\varepsilon_\theta(r, t) = \varepsilon_r(r, t)$.

Граничные условия для этой системы уравнений должны включать начальные условия при $t=0$ и краевые условия при $t \geq 0$. В начальный момент времени должно быть задано распределение по радиусу сечения составляющих вектора деформаций $\varepsilon_r(r, 0)$, $\varepsilon_\theta(r, 0)$ и напряжений $\sigma_r(r, 0)$, $\sigma_\theta(r, 0)$. Краевые условия для полого шарового твэла имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_r(a, t) &= -P_1(t), \\ \sigma_r(b + \delta, t) &= -P_2(t), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где a — радиус центральной полости; b — внешний радиус топливного слоя; δ — толщина оболочки теплоносителя. $P_1(t)$ — давление газа в центральной полости; $P_2(t)$ — давление теплоносителя.

Предполагается, что топливный слой жестко скреплен с оболочкой и на границе топливо-оболочка (при $r=b$) выполняются условия

$$\begin{aligned} \sigma_r(b, t) &= \sigma_r^*(b, t), \\ \frac{\partial \varepsilon_\theta(b, t)}{\partial t} &= \frac{\partial \varepsilon_\theta^*(b, t)}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\sigma_r^*(r, t)$ — напряжение в оболочке, а $\varepsilon_\theta^*(r, t)$ — деформация оболочки.

При рассмотрении напряженно-деформированного состояния тонкостенной оболочки ($\delta \ll b$) можно пренебречь радиальным напряжением при определении деформаций и считать полные деформации и напряжения постоянными по толщине оболочки [5]. Кроме того, при стационарном режиме работы твэла объемными изменениями в оболочке можно пренебречь. Исходя из этих предположений, можно выписать физические соотношения, связывающие скорости окружных напряжений и деформаций в оболочке.

Ползучесть материала оболочки описывается степенной зависимостью [3]

$$\frac{d\varepsilon_{1i}^*(t)}{dt} = B_1 (\sigma_i^*(t))^m + B_2 (\sigma_i^*(t))^n, \quad (1.5)$$

где первое слагаемое определяет тепловую, а второе — радиационную ползучесть; $\varepsilon_{1i}^*(t)$ — интенсивность деформации ползучести; B_1 и B_2 — известные коэффициенты, зависящие от температуры, свойств материала оболочки и интенсивности облучения; m и n — константы, $\sigma_i^*(t)$ — интенсивность напряжения в оболочке. При сделанных выше предположениях $\sigma_i^*(t) = \sigma_\theta^*(t)$.

Находя скорость пластической деформации из соотношения, взятого для случая диаграммы деформирования с линейным упрочнением, нетрудно получить уравнение относительно скорости изменения напряжения в оболочке в виде

$$\frac{1-\mu}{E} \left(\frac{1-g_0}{3g_0} - 1 \right) \frac{d\sigma_\theta(t)}{dt} = -\frac{1}{2} M(t) \sigma_\theta^*(t) + \xi_\theta^*(t), \quad (1.6)$$

где μ — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга, g_0 — относительный модуль упрочнения, $M(t) = B_1 (\sigma_\theta^*(t))^{m-1} + B_2 (\sigma_\theta^*(t))^{n-1}$, $\xi_\theta^*(t) = d\varepsilon_\theta^*(t)/dt$ — скорость полной деформации в оболочке.

2. На установившейся стадии процесса деформирования можно считать, что упругие и пластические деформации в топливе малы по сравнению с деформациями ползучести и объемными деформациями [5]. При высоких температурах и умеренных напряжениях скорость деформации ползучести в топливе при одноосном растяжении имеет линейный характер [5, 8]

$$\frac{d\varepsilon_{1i}(r, t)}{dt} = K(r) \sigma_i(r, t). \quad (2.1)$$

где $K(r)$ — коэффициент ползучести, зависящий от структурных свойств топлива, температуры и интенсивности облучения; $\sigma_i(r, t)$ — интенсивность напряжений.

Из уравнения совместности деформаций (1.2), условия неизменности объема при деформации ползучести

$$\frac{\partial \varepsilon_{1i}(r, t)}{\partial r} + 2 \frac{\varepsilon_{1\theta}(r, t)}{dr} = 0 \quad (2.2)$$

и соотношений для скоростей составляющих полной деформации при сделанных выше предположениях получим дифференциальное уравнение относительно скорости окружной деформации $\xi_\theta(r, t)$:

$$\frac{\partial \xi_\theta(r, t)}{\partial r} + \frac{3}{r} \xi_\theta(r, t) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial S(r, t)}{\partial t}, \quad (2.3)$$

где $S(r, t)$ — распухание топлива.

Решение уравнения (2.3) с граничным условием $\xi_\theta(b, t) = \xi_\theta^*(t)$ имеет вид

$$\xi_\theta(r, t) = \frac{b^3}{r^3} \xi_\theta^*(t) + \frac{\partial \Psi(r, t)}{\partial t}, \quad (2.4)$$

$$\text{где } \frac{\partial \Psi(r, t)}{\partial t} = \frac{1}{r^3} \int_b^r \rho^2 \frac{\partial S(\rho, t)}{\partial t} d\rho.$$

Далее из уравнения равновесия (1.1), физических соотношений для скоростей деформации ползучести, зависимостей (2.1), (2.2) и граничных условий (1.3) могут быть получены соотношения для составляющих вектора напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, t) &= \int_a^r \frac{1}{\rho} F(\rho, t) d\rho - P_1(t), \\ \sigma_\theta(r, t) &= \sigma_r(r, t) + \frac{1}{2} F(r, t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

и среднего напряжения

$$\sigma_c(r, t) = \sigma_r(r, t) + \frac{1}{3} F(r, t), \quad (2.6)$$

$$\text{где } F(r, t) = \frac{4}{3K(r)} \left[\frac{3b^3}{r^3} \xi_\theta^* + 3 \frac{\partial \Psi(r, t)}{\partial t} - \frac{\partial S(r, t)}{\partial t} \right].$$

Для того чтобы получить замкнутую систему уравнений, необходимо связать общее напряженно-деформированное состояние твэла с распуханием топливного слоя.

Распухание топлива в процессе работы твэла вызвано образованием твердых и газообразных продуктов деления. Газовое распухание связано с образованием газовых пузырей внутри зерен топлива и на границах зерен. Как указывается в работах [9, 10], на развитой стадии распухания в топливе преобладает газовое распухание, связанное с образованием и развитием пористости на границах зерен. Сдерживание пузырей газа в равновесном состоянии обеспечивается за счет внешнего гидростатического давления, которое определяется общим напряженно-деформированным состоянием твэла. С другой стороны, из закона газового состояния в любой момент времени для любого значения r справедливо соотношение [5]

$$\sigma_c(r, t) = \frac{T(r)}{273(S(r, t) + \varepsilon_0)} [C_1 \varphi(t) \beta t + \varepsilon_0], \quad (2.7)$$

где $T(r)$ — температура, β — скорость выгорания топлива, $\varphi(t)$ — доля газа в межзеренных порах, ε_0 — исходная пористость топлива и C_1 — постоянная.

Из (2.6) и (2.7) следует интегральное уравнение

$$\int_a^r \frac{1}{\rho} F(\rho, t) d\rho + \frac{1}{3} F(r, t) = A(r, t), \quad (2.8)$$

$$\text{где } A(r, t) = P_1(t) - \frac{T(r)}{273} \cdot \frac{C_1 \varphi(t) \beta t + \varepsilon_0}{S(r, t) + \varepsilon_0}.$$

Из уравнения равновесия (1.1), соотношения (2.5) и граничных условий (1.3) следует второе интегральное соотношение

$$\int_a^b \frac{1}{\rho} F(\rho, t) d\rho = P_1(t) - \frac{b+\delta}{b} P_2(t) - \frac{2\delta}{b} \sigma_0^*(t). \quad (2.9)$$

Из (2.8) и (2.9) получим выражение для функции $\sigma_0^*(t)$ в виде

$$\sigma_0^*(t) = \left[P_1(t) - \frac{b+\delta}{b} P_2(t) - \frac{3}{b^3} \int_a^b r^2 A(r, t) dr \right] \frac{b}{2\delta}. \quad (2.10)$$

Пользуясь определением функции $F(r, t)$ и интегральными соотношениями (2.8) и (2.9), нетрудно получить соотношение, связывающее скорость распухания топлива $dS(r, t)/dt$ со скоростью окружной деформации оболочки ξ_0^* , в виде

$$\frac{\partial S(r, t)}{\partial t} = -\frac{3}{4r^3} K(r) I(r, t) - \frac{9}{4} \int_a^r \frac{1}{\rho^4} K(\rho) I(\rho, t) d\rho + 3\xi_0^*(t), \quad (2.11)$$

$$\text{где } I(r, t) = 3r^3 A(r, t) - 9 \int_a^r \rho^2 A(\rho, t) d\rho.$$

Выражения (2.10), (2.11) и уравнение (1.6) используются далее в численном алгоритме.

3. Пусть в момент времени $t = t_0$ известно распределение распухания $S(r, t_0)$ по радиусу и значения функций $P_1(t_0)$, $P_2(t_0)$ и, следовательно, $A(r, t_0)$. Тогда по формуле (2.10) можно вычислить значение $\sigma_0^*(t_0)$. Далее, по формуле (1.5) находим значение скорости деформации ползуности в оболочке $\xi_{10}^*(t_0)$. Предполагается, что упругие деформации невелики, а пластические деформации не исчезают при уменьшении напряжения (т. е. скорость пластической деформации может быть только положительной). Тогда из уравнения (1.6) следует, что $\xi_0^*(t_0) \geq \xi_{10}^*(t_0)$.

Принимая в качестве начального приближения $\xi_0^*(t_0) = \xi_{10}^*(t_0)$, по формуле (2.11) находим значения $dS(r, t)/dt$. Задавая шаг по времени $\Delta t \ll 1$ (t — безразмерное время, масштабом времени выбрано полное время эволюции твэла), определяем $S(r, t)$, $A(r, t)$ в момент времени $t = t_0 + \Delta t$, а затем по (2.10) значение $\sigma_0^*(t_0 + \Delta t)$. Имея значения $\sigma_0^*(t)$ в два последовательных момента времени, по конечным разностям находим приближенное значение производной $d\sigma_0^*(t_0)/dt \approx \Delta\sigma_0^*/\Delta t$. Если полученное значение $\Delta\sigma_0^*/\Delta t \leq 0$, то принимается $\xi_0^*(t_0) = \xi_{10}^*(t_0)$. В противном случае ($\Delta\sigma_0^*/\Delta t > 0$), методом последовательных приближений ξ_0^* варьируется до тех пор, пока с заданной точностью не будет найдено ξ_0^* удовлетворяющее соотношению (1.6).

Зная $\xi_0^*(t_0)$, а следовательно, и $S(r, t_0 + \Delta t)$, можно перейти к следующему шагу по времени. Если деформации значительны, в процессе счета необходимо определить текущие значения геометрических размеров твэла, используя очевидные соотношения $b(t) = b(t_0)(1 + \xi_0^* \Delta t)$, $\delta(t) = \delta(t_0)(1 - 2\xi_0^* \Delta t)$, $a(t) = a(t_0) \left[1 + \left(\xi_0^* - \int_a^b r^2 \frac{\partial S(r, t_0)}{\partial t} dr \right) \frac{\Delta t}{a(t_0)^3} \right]$.

Очевидно, в каждый дискретный момент времени известно значение $\sigma_0^*(t)$ и вместе с тем значения функции $F(r, t)$. Отсюда из соотношений (2.5) получаем значения напряжений $\sigma_r(r, t)$, $\sigma_\theta(r, t)$, а из (2.2) и (2.4)

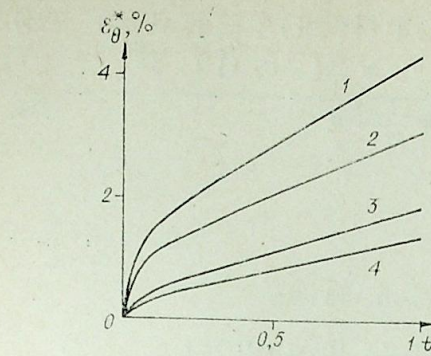


Рис. 1.

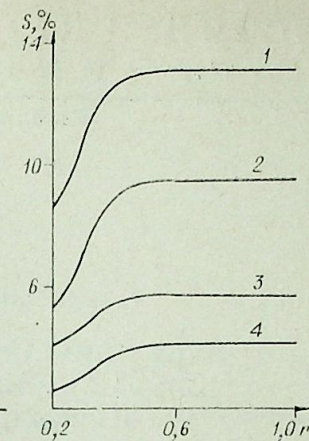


Рис. 2.

скорости деформаций $\xi_r(r, t)$, $\xi_\theta(r, t)$ в топливе и, следовательно, $\varepsilon_r(r, t)$, $\varepsilon_\theta(r, t)$.

В качестве численного примера приведем некоторые результаты расчета напряженно-деформированного состояния шарового твэла и распухания сферического топливного слоя. При расчетах учитывалось распухание топлива, давление теплоносителя, изменение давления газа в центральной полости. Давление теплоносителя принималось постоянным. Численные расчеты проводились при следующих начальных условиях: $S(r, 0) = 0$, $\varepsilon_0^*(0) = 0$, $P_1(0) = 5$ МПа, $a/b = 0,2$, $\delta/b = 0,02$.

Развитие деформации оболочки ε_0^* во времени при различных ε_0 и P_2 показано на рис. 1. Кривым 1 и 2 соответствуют ε_0 , равные 0,03 и 0,02 при $P_2 = 1$ МПа, кривым 3 и 4 — те же значения при $P_2 = 2$ МПа. На рис. 2 при тех же значениях ε_0 и P_2 приведено распределение распухания по радиусу сечения топливного слоя в конце выбранного интервала времени ($3,6 \cdot 10^6$ с).

Численные эксперименты показали, что модель явления и предложенные численные алгоритмы позволяют анализировать изучаемые процессы в достаточно широком диапазоне значений исходных параметров. Результаты находятся в качественном соответствии с данными, полученными для цилиндрических твэлов [2].

Авторы благодарят Л. В. Потатуркину за помощь в проведении расчетов на ЭВМ.

Институт теплофизики СО АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
9/IV 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Yalch J. P., Connelee I. E. Plane strain creep and plastic deformation analysis of a composite tube.— Nucl. Eng. and Des., 1967, v. 5, N 1.
2. Guyette M. Cladding-strength analysis under the combined effect of creep and plasticity in fast-reactor environments.— Nucl. Eng. and Des., 1972, v. 18.
3. Yankus V. Z., Weeks R. W. LIFE-II — a computer analysis of fast-reactor fuel-element behavior as a function of reactor operating history.— Nucl. Eng. and Des., 1972, v. 18.
4. Cheng C. K., Ma B. M. Thermal, radiation and mechanical analysis for unsteady-state fuel restructuring of cylindrical oxide elements in fast reactors.— Nucl. Eng. and Des., 1972, v. 48.
5. Борисов В. И. Расчетные модели механического поведения цилиндрических твэлов в случае осесимметричного напряженно-деформированного состояния. М., 1980. Препринт ИАЭ-3311/4.
6. Лихачев Ю. И., Пупко В. Я. Прочность тепловыделяющих элементов ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1975.
7. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. М.: Мир, 1974.
8. Olsen, C. S. Steady-State creep model for UO₂.— Transaction ANS, 1977, v. 22.
9. Turnbull J. A. The distribution of intragranular fission gas bubbles in UO₂ during irradiation.— J. of Nucl. Mat., 1971, v. 38.
10. Pati S. R. et al. Re-solution-controlled fission gas behavior in UO₂ irradiated in fast flux.— J. of Nucl. Mat., 1974, v. 50.

С. П. ЛЕЖНИН, Н. А. ПРИБАТУРИН

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ ДАВЛЕНИЯ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМОВ ТЕЧЕНИЯ ПАРОЖИДКОСТНОЙ СРЕДЫ

Знание явлений, возникающих при прохождении волн давления через парожидкостную среду, необходимо при решении ряда важных задач, связанных с нестационарным движением теплоносителя в аппаратах ядерной энергетики, криогенной техники, авиации и космонавтики.

Вследствие сложности общей системы уравнений, описывающих поведение многофазных систем [1], основной задачей теоретического исследования волновых процессов в таких средах становится математическое моделирование и получение нелинейных эволюционных уравнений для распространения волн давления. Не менее важным является постановка и проведение наглядных физических экспериментов, на основе которых возможна проверка адекватности тех или иных теоретических моделей.

При изучении поведения двухфазных сред необходимо учитывать наличие принципиально различных по структуре режимов течения: спарядный, расслоенный, дисперсно-кольцевой, пузырьковый и т. д. В связи с этим требуются различные подходы к исследованию поведения волн при разных структурах течения.

1. МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМОВ

К настоящему времени наиболее хорошо исследован **пузырьковый режим** [2—5]. При этом режиме «равновесная» и «замороженная» (по межфазному обмену импульсом) скорости звука отличаются незначительно [3, 6]. Поэтому связанная с этим дисперсия волн мала, и двухфазную среду можно исследовать с позиции гомогенного подхода [3, 5]. Основная дисперсия вызвана инерцией жидкости, окружающей пузырек.

Волны в парожидкостной среде, как правило, изучают в рамках следующих предложений: пар ведет себя адиабатически, фазовый переход определяется теплопроводом из жидкости, температура межфазной границы «следит» за давлением согласно равновесному уравнению Клапейрона — Клаузиуса [6—9]. С учетом этих предположений в работе [8] получено эволюционное уравнение, описывающее распространение длинных волн (без учета сжимаемости жидкости) в парожидкостной среде пузырьковой структуры:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c_b \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\gamma + 1}{2\gamma p_0} p \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{c_b R^2}{6\varphi} \cdot \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{a_l}{R} \cdot \frac{c_v^2}{r} \cdot \frac{\rho_l}{\rho_v} \times \frac{C_{pl} T}{r} \int_0^t \frac{\partial p}{\partial t'} \cdot \frac{dt'}{\sqrt{\pi a_l (t - t')}} = 0, \quad (1)$$

где $c_b = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_l \varphi (1 - \varphi)}} = c_v \sqrt{\frac{\rho_v}{\rho_l \varphi (1 - \varphi)}}$ — характерная скорость звука в пузырьковой смеси.

Расслоенный (дисперсно-кольцевой) режим течения нельзя исследовать в рамках гомогенного подхода. Для анализа этого режима необходи-

мо исходить из осредненных по сечению канала уравнений движения и неразрывности отдельно для пара и жидкости [9]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_v \varphi) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_v \varphi u_v) - \frac{g}{D} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} [\rho_l (1 - \varphi)] + \frac{\partial}{\partial x} [\rho_l (1 - \varphi) u_l] + \frac{g}{D} &= 0, \\ \frac{\partial u_v}{\partial t} + u_v \frac{\partial u_v}{\partial x} + \frac{1}{\rho_v} \cdot \frac{\partial p_v}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u_l}{\partial t} + u_l \frac{\partial u_l}{\partial x} + \frac{1}{\rho_l} \cdot \frac{\partial p_l}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

В системе (2) не учтены члены 3-го порядка малости и несущественные для парожидкостной среды при данном режиме течения силы трения [6, 9].

При пузырьковой структуре дисперсия волн связана с инерцией жидкости, окружающей пузырек ($\rho_v \neq \rho_l$). Аналогично при расслоенном режиме поперечные колебания жидкой пленки определяются различием осредненных по сечению значений p_v и p_l . Очевидно, что $p_l - p_i \sim D^2 \times (1 - \varphi) \varphi u_l \rho_l$, $p_v - p_i \sim D^2 \varphi \varphi u_l \rho_l$, т. е.

$$\left| \frac{p_v - p_l}{p_l - p_i} \right| \sim \frac{\varphi}{1 - \varphi} \cdot \frac{\rho_v}{\rho_l}. \quad (3)$$

Если считать $\frac{\varphi}{1 - \varphi} \cdot \frac{\rho_v}{\rho_l} \ll 1$, то можно положить $p_v = p_l$. Решим следующую модельную задачу: определим поле давления в бесконечном плоском слое идеальной жидкости ширины $\delta = D(1 - \varphi)$, если на одной границе задано значение давления p_v , а другая граница — непроницаемая стенка (рис. 1). Если ввести потенциал скорости ψ , то в линейном приближении имеем

$$\begin{aligned} \Delta \psi &= 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{p}{\rho_l}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{y=0} &= 0, \quad \psi \Big|_{y=\delta} = \psi_v, \quad \frac{\partial \psi_v}{\partial t} = -\frac{p_v}{\rho_l}. \end{aligned} \quad (4)$$

Задача (4) решается с помощью преобразования Фурье

$$p = \int_{-\infty}^{+\infty} p_v(x', t) \frac{dx'}{\delta} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{y}{\delta}\right) \operatorname{ch}\left[\frac{\pi}{2} \cdot \frac{(x-x')}{\delta}\right]}{2 \left[\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{y}{\delta}\right) + \operatorname{sh}^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{(x-x')}{\delta}\right) \right]}. \quad (5)$$

После интегрирования по y получим

$$p_l = \langle p \rangle = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta p dy = \frac{1}{\pi \delta} \int_{-\infty}^{+\infty} p_v(x-x') \ln \left| \operatorname{cth} \left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{x'}{\delta} \right) \right| dx'. \quad (6)$$

Так как в длинноволновом приближении $p_v(x-x')$ — медленно меняющаяся функция, то имеем

$$p_l \approx \frac{2}{\pi \delta} \int_0^\infty \left[p_v(x) + \frac{x'^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 p_v}{\partial x'^2} + \dots \right] \ln \left| \operatorname{cth} \left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{x'}{\delta} \right) \right| dx'. \quad (7)$$

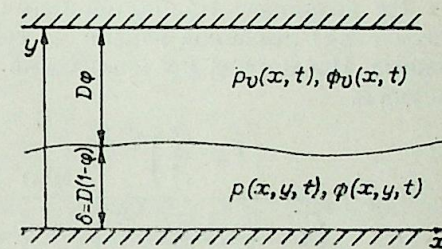


Рис. 1. Схема течения при расслоенном режиме.

Члены с нечетными степенями x' отброшены, поскольку подынтегральное ядро $\ln \left| \operatorname{cth} \left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{x'}{\delta} \right) \right|$ — четная функция.

После разложения в ряд Тейлора, почленного интегрирования и свертки ряда вычислим интегралы

$$\int_0^{\infty} \ln(\operatorname{cth} z) dz = \frac{\pi^2}{8}, \quad \int_0^{\infty} z^2 \ln(\operatorname{cth} z) dz = \frac{\pi^4}{192}. \quad (8)$$

Следовательно:

$$p_l \approx p_v + \frac{D^2(1-\varphi)^2}{3} \cdot \frac{\partial^2 p_v}{\partial x^2} + \dots \quad (9)$$

Не возникает принципиальных трудностей и при решении полной (двумерной) линейной задачи на собственные значения для расслоенного режима. После ряда несложных, но довольно громоздких выкладок можно получить

$$p_l \approx p_v + \frac{\left(1 - \frac{c_v^2}{c_l^2}\right)}{\left(1 + \frac{\rho_v}{\rho_l} \cdot \frac{1-\varphi}{\varphi} \cdot \frac{c_v^2}{c_l^2}\right)} \cdot \frac{D^2(1-\varphi)^2}{3} \left[1 + \frac{\rho_v}{\rho_l} \cdot \frac{\varphi}{1-\varphi}\right] \frac{\partial^2 p_v}{\partial x^2} + \dots \quad (10)$$

Видно, что при небольшой плотности пара и выполнении условия (3) можно использовать приближенную формулу (9).

Значение g в (2) определяется из уравнения теплового баланса при рассмотрении фазового перехода на границе пленка жидкости — паровая прослойка [9].

Для получения эволюционного уравнения воспользуемся методом «многих масштабов» [9]. Этот метод позволяет свести систему уравнений, зависящих от нескольких малых параметров, к одному уравнению, решение которого остается справедливым для больших времен. Без учета сжимаемости жидкости искомое уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c_s \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{c_s(\gamma_{\text{эф}} + 1)}{2\gamma_{\text{эф}} p_0} p \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{c_s D^2(1-\varphi)^3}{6\varphi} \cdot \frac{\rho_v}{\rho_l} \cdot \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} + \frac{a_l}{2D\varphi} \cdot \frac{c_v^2}{r} \cdot \frac{\rho_l}{\rho_v} \cdot \frac{C_{p_l} T}{r} \int_0^t \frac{\partial p}{\partial t'} \cdot \frac{dt'}{\sqrt{\pi a_l(t-t')}} = 0, \quad (11)$$

где $c_s = c_v \sqrt{1 + \frac{\rho_v}{\rho_l} \cdot \frac{1-\varphi}{\varphi}}$ — «расслоенная» скорость звука,

$$\gamma_{\text{эф}} = \gamma \left[1 + \frac{\rho_v}{\rho_l} \cdot \frac{1-\varphi}{\varphi}\right]^2 \left[1 - \frac{\rho_v}{\rho_l} \cdot \frac{1-\varphi}{\varphi} \left(1 - 3 \frac{\rho_v}{\rho_l}\right) + \frac{\rho_v^2}{\rho_l^2} \cdot \frac{(1-\varphi)^2}{\varphi^2}\right]^{-1}.$$

Характерная для расслоенного режима скорость c_s при обычных условиях превышает на порядок «пузырьковую» скорость c_b . Интересно, что эффективный показатель адиабаты $\gamma_{\text{эф}}$ всегда больше γ . Максимальное значение $\gamma_{\text{эф}} = 4 \left(1 + 3 \frac{\rho_v}{\rho_l}\right)^{-1}$ достигается при $\frac{\rho_v}{\rho_l} \cdot \frac{1-\varphi}{\varphi} = 1$.

Снарядный режим от остальных режимов отличается тем, что его нельзя рассматривать в рамках ни гомогенного, ни двухскоростного гидродинамического подхода. Для исследования волн низкой частоты использовалась следующая модель: безынерционные сжимаемые газовые снаряды передают импульс инерционным жидким пробкам [10, 11].

Используя математическую модель квазиконтинуума [10, 12], в длинноволновом приближении можно записать нелинейное интегродифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} - \frac{\gamma+1}{2\gamma p_0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (p^2) - c_p^2 \frac{\partial^2 p}{\partial a^2} - \frac{c_p^2 l^2}{12} \cdot \frac{\partial^4 p}{\partial a^4} + \frac{a_l}{\varphi l} \cdot \frac{c_v^2}{r} \cdot \frac{\rho_l}{\rho_v} \cdot \frac{C_{p_l} T}{r} \int_0^t \frac{\partial^2 p}{\partial \tau'^2} \cdot \frac{d\tau'}{\sqrt{\pi a_l(\tau-\tau')}} = 0. \quad (12)$$

Уравнение (12) записано в лагранжевых переменных (a, τ) , так как a связана с «номером» жидкой пробки. Для перехода от (a, τ) к эйлеровым «лабораторным» координатам (x, t) воспользуемся соотношениями

$$\frac{\partial p}{\partial a} = \frac{\partial p}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial a}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial p}{\partial \tau} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial t} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{и т. д.}$$

Оставляя в (12) только члены 2-го порядка малости по амплитуде и дисперсии, получим

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_p^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{c_p^2 l^2}{12} \cdot \frac{\partial^4 p}{\partial x^4} - \frac{\gamma+1}{2\gamma p_0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} (p^2) + \frac{\varphi c_p^2}{\gamma} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} (p^2) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int \frac{\partial p}{\partial x} dt \right)^2 \right] = 0. \quad (13)$$

Появившийся в уравнении (13) новый нелинейный член исчезает, если факторизацией выделить волну, распространяющуюся в одну сторону.

Следовательно, эволюционное уравнение для снарядного режима запишется в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c_p \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\gamma+1}{2\gamma p_0} p \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{c_p l^2}{24} \cdot \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} + \frac{a_l}{2l\varphi} \cdot \frac{c_v^2}{r} \cdot \frac{\rho_l}{\rho_v} \cdot \frac{C_{p_l} T}{r} \int_0^t \frac{\partial p}{\partial t'} \cdot \frac{dt'}{\sqrt{\pi a_l(t-t')}} = 0. \quad (14)$$

Характерные скорости распространения возмущений для пузырькового и снарядного режимов значения одинаковы $c_p = c_b$.

2. КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

Все эволюционные уравнения (1), (11), (14) для волн давления при различных режимах течения можно привести к тождественному безразмерному виду (для пузырькового режима это сделано в [13]):

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tau} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \xi} + M \tilde{p} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \xi} + \frac{M}{\sigma^2} \cdot \frac{\partial^3 \tilde{p}}{\partial \xi^3} + WM^{1/2} \int_0^{\tau} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tau'} \cdot \frac{d\tau'}{\sqrt{\tau-\tau'}} = 0. \quad (15)$$

Если Δp_0 — начальная амплитуда возмущения, L — характерная длина возмущения, то для разных режимов имеем:

$$\xi = x/L, \quad \tilde{p} = \Delta p / \Delta p_0:$$

а) пузырьковый режим

$$\tau = t \cdot c_b / L, \quad M = (\gamma+1) \Delta p_0 / 2\gamma p_0.$$

$$\frac{M}{\sigma^2} = \frac{R^2}{6\varphi(1-\varphi)L^2}; \quad W = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{a_l L}{\pi c_b R^2}} \sqrt{\frac{2\gamma p_0}{(\gamma+1)\Delta p_0}} \cdot \frac{c_v^2}{r} \cdot \frac{\rho_l}{\rho_v} \cdot \frac{C_{p_l} T}{r};$$

б) расслоенный режим

$$\tau = t \cdot c_s / L, \quad M = (\gamma_{\text{эф}} + 1) \Delta p_0 / 2\gamma_{\text{эф}} p_0,$$

$$\frac{M}{\sigma^2} = \frac{D^2(1-\varphi)^3}{6\varphi L^2} \cdot \frac{\rho_v}{\rho_l}; \quad W = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a_l L}{\pi C_s D^2 \varphi^2}} \sqrt{\frac{2\gamma_{\text{эф}} p_0}{(\gamma_{\text{эф}} + 1) \Delta p_0}} \cdot \frac{c_v^2}{r} \cdot \frac{\rho_l}{\rho_v} \cdot \frac{C_{p_l} T}{r};$$

в) снарядный режим

$$\tau = t \cdot c_p / L,$$

$$\frac{M}{\sigma^2} = \frac{l^2}{24L^2}; \quad W = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a_1 L}{\rho c l^2 \varphi^2}} \sqrt{\frac{2\gamma p_0}{(\gamma+1)\Delta p_0} \frac{c_v^2}{r} \cdot \frac{\rho_l}{\rho_v} \cdot \frac{C_{pl} T}{r}}$$

Критерий подобия W характеризует относительную роль фазового перехода жидкость — пар и нелинейных эффектов, критерий σ определяет вклад в искажение профиля волны нелинейных и дисперсионных эффектов.

В случае слабого влияния фазового перехода ($W \rightarrow 0$) уравнение (15) переходит в хорошо известное [14] уравнение Кортевега — де-Вриза. При больших значениях W ($W > 1$) вклад интегрального члена в (15) доминирующий. Линейный вариант уравнения (15) допускает аналитическое решение [8].

Как видно, критерии W и σ для разных режимов течения отличаются в основном лишь скоростью звука и характерным структурным размером двухфазной среды (радиус пузырька, толщина паровой пленки, длина снаряда). Таким образом результаты анализа динамики волн при одном режиме течения имеют общий характер.

3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

С точки зрения экспериментальной проверки теоретических моделей распространения волн наиболее удобным и простейшим является пузырьковый режим. Именно для этого случая изучалась применимость уравнения (15) к анализу динамики волн в парожидкостных средах.

При проведении опытов параметры рабочей среды и начального возмущения подбирались таким образом, чтобы обеспечить наиболее широкий диапазон изменения критериев W и σ . Для генерации возмущений использовался метод ударной трубы. Жидкость с пузырьками пара поддерживалась в равновесии, контролируемом термомпарами и датчиками статического давления. Пульсации давления регистрировались пьезоэлектрическими датчиками. Обработка опытов осуществлялась с использованием ЭВМ-М-6000. Подробно методика измерений и экспериментальная установка описаны в [15]. В опытах изменение σ обеспечивалось варьированием амплитуды и длительности начального возмущения, а изменение параметра W — изменением теплофизических свойств жидкости. Использование воды, фреона-12, и фреона-21, температура насыщения которых менялась в диапазоне 100—160°C и 20—60°C соответственно, позволило изменять величину W от 2 до 10^{-3} .

В зависимости от величины критерия W в опытах наблюдался различный характер эволюции возмущений с одинаковой начальной интенсивностью и длительностью.

При $W > 1$ распространение волн различной интенсивности происходило одинаковым образом: волны существенно расплывались и затухали. Типичная эволюция возмущения приведена на рис. 2, а. Уже на расстоянии порядка 0,5 м амплитуда волны уменьшается в 20 раз. Результаты экспериментов показывают, что поведение волн при $W > 1$ определяется в основном лишь межфазным теплообменом.

При уменьшении значения W на формирование волн давления начинают влиять интенсивность исходного возмущения и инерционные эффекты.

При слабоинтенсивном начальном возмущении на малых расстояниях от входа в среду образуется осциллирующий импульс (см. рис. 2, в), который в дальнейшем, однако, стремится к колоколообразной форме. При значении критерия $\sigma \sim 10$ образуется уединенная волна (см. рис. 2, д). По мере движения волны сбаластированное вначале действие нелинейных и инерционных эффектов сменяется доминирующим влиянием фазового перехода. Образуется возмущение со значительно большими пространст-

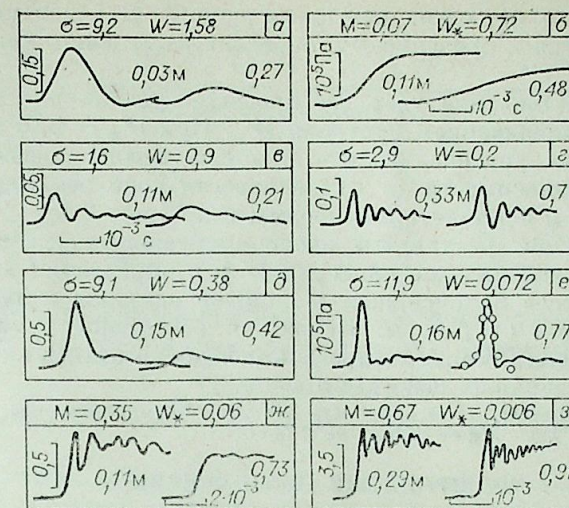


Рис. 2. Эволюция волн давления в парожидкостной среде.

Часть рисунка	Среда	$\rho_0 \cdot 10^{-5}$, Па	T_0 , К	$\varphi_0 \cdot 10^2$	R_0 , мм	$\Delta p \cdot 10^{-5}$, Па	L , мм
а	Вода	1,3	380,4	1	1,5	0,26	134
б	»	1,6	391,5	1	1,5	0,15	—
в	»	5	124,6	1,5	1,4	1,35	95
г	Фреон-12	13,2	326,6	1	1	0,2	81
д	Вода	5,1	425,2	1,5	1,4	1,1	110
е	Фреон-12	13	325,7	1	1	1,9	105
ж	Фреон-21	1,85	298,4	1	1,2	0,69	—
з	Фреон-12	7	301	1	1,3	5,06	—

венно временными масштабами, чем у солитона той же амплитуды. В сильно нелинейном случае за передним фронтом волны появляются осцилляции; их дальнейшего развития, однако, не происходит, волна трансформируется в несимметричный гладкий импульс. Таким образом, опыты показали, что значение $W = 1$ можно считать за верхнюю границу проявления нелинейных и инерционных эффектов.

Из результатов теоретического анализа следует, что при малых значениях критерия W в парожидкостной среде могут устанавливаться волновые режимы, такие же, как и в жидкости с пузырьками газа. Для проверки этого положения были проведены эксперименты в парофреоновой среде, где значения W составляли 0,01 ÷ 0,001.

Опыты показали, что, действительно, структура волн зависит в основном от соотношения инерционных эффектов и амплитуды исходной волны. Так, слабо нелинейное возмущение распространяется в виде волнового пакета (см. рис. 2, в), а волна со значением $\sigma \sim 10$ — в виде солитона (см. рис. 2, е — точки рассчитаны по [14]). Эти возмущения сохраняют свои параметры на всей длине рабочего участка. Для сильно нелинейного случая существенным становится дробление сигнала на отдельные группы волн. Распространение ударных волн рассматривалось в зависимости от критерия $W_* = W/\sigma^{1/2}$. При $W_* \sim 1$ ударной формы волны не образовывалось (рис. 2, б), передний фронт сильно уширялся при своем движении и его длительность, определенная по области максимального наклона, была сопоставима с расстоянием, пройденным волной. Компенсировать сильное выполаживание переднего фронта увеличением интенсивности волн не удается. Волны с большим числом Маха эволюционируют подобным образом.

С уменьшением W_* размытие переднего фронта замедлялось, структура волн начинала зависеть от их интенсивности. Если число Маха меньше 0,3, то форма волны все время монотонная, в противном случае инерционные эффекты формируют на начальном участке крутой скачок с осциллирующей структурой (см. рис. 2, ж). Однако его существование ограничено малыми расстояниями. Уже через 0,5 м происходит вырожде-

ние осцилляций и размытие переднего фронта. В дальнейшем волновой профиль стремится к предельному, определяемому лишь межфазным теплообменом.

Длина существования ударного профиля существенно увеличивается с дальнейшим уменьшением критерия W_* . При $W_* \sim 0,01$ на всей длине рабочего участка устанавливались ударные волны квазистационарной структуры. В зависимости от интенсивности волн реализовывались как монотонная, так и осцилляторная формы волн (рис. 2, а).

Таким образом, результаты экспериментальных исследований подтвердили, что предложенные критерии W и σ определяют всю специфику волновых процессов интенсивностью меньше единицы в парожидкостной среде пузырьковой структуры. Используя обобщение данных опытов в этих критериях, можно прогнозировать поведение волн в любых кипящих системах при различных режимах течения.

Авторы выражают благодарность В. Е. Накорякову, Б. Г. Покусаеву, И. Р. Шрейберу за постоянное внимание к работе.

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ:

φ — истинное объемное газосодержание, R — радиус пузырька, l — размер элементарной ячейки «снаряд + пробка», c — скорость звука, C_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, a — коэффициент температуропроводности, γ — показатель адиабаты пара, r — скрытая теплота парообразования, g — плотность межфазового потока массы, D — ширина канала.

Индексы

v — пар, l — жидкость, i — межфазная поверхность, o — невозмущенное состояние, b — пузырьковый, s — расслоенный, p — снарядный.

Институт теплофизики СО АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
21/XII 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1972.
2. Бэтчелор Г. К. Волны сжатия в суспензии газовых пузырьков в жидкости.— Механика. Сборник переводов, 1968, № 3.
3. Ван Вейнгарден Л. Одномерные течения жидкости с пузырьками газа.— В кн.: Реология суспензий. М., Мир, 1975.
4. Губайдуллин А. А., Ивандасев А. И., Нигматулин Р. И. Нестационарные волны в жидкости с пузырьками газа.— ДАН СССР, 1976, т. 226, № 6.
5. Гасенко В. Г., Накоряков В. Е., Шрейбер И. Р. Двухволновая модель распространения возмущений в жидкости с пузырьками газа.— ПМТФ, 1979, № 6.
6. Лежнин С. И. Распространение возмущений в парожидкостных средах при различных структурах течения.— В кн.: Волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1980.
7. Ardron K. H., Duffey R. B. Acoustic wave propagation in flowing liquid mixtures.— Inter. J. Multiphase Flow, 1978, v. 4, N 3.
8. Накоряков В. Е., Шрейбер И. Р. Модель распространения возмущений в парожидкостной среде.— ТВТ, 1979, т. 17, № 4.
9. Лежнин С. И. Волны конечной амплитуды при расслоенном режиме течения парожидкостной среды.— Изв. СО АН СССР, 1980, № 3. Сер. техн. наук, вып. 1.
10. Лежнин С. И. Распространение длинноволновых возмущений при снарядном режиме течения парожидкостной среды.— В кн.: Исследование по гидродинамике и теплообмену. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1980.
11. Matsui G., Sugihara M., Arimoto S. Propagation characteristics of pressure wave through gas—liquid plug—train systems.— Bull. of the JSME, 1979, v. 22, N 173.
12. Лежнин С. И. Волны давления конечной амплитуды при снарядном режиме течения двухфазной среды.— В кн.: Неравновесные процессы в одно- и двухфазных системах. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1981.
13. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Прибатурин Н. А., Шрейбер И. Р. Распространение возмущений давления конечной амплитуды в пузырьковой парожидкостной среде.— ПМТФ, 1982, № 3.
14. Березин Ю. А., Кариман В. И. О нелинейной эволюции возмущений в плазме и других диспергирующих средах.— ЖЭТФ, 1966, т. 51, № 5.
15. Покусаев Б. Г., Корабелников А. В., Прибатурин Н. А. Волны давления в жидкости с пузырьками пара.— В кн.: Волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск, ИТФ, СО АН СССР, 1980.

УДК 532.526

А. М. ПАВЛЮЧЕНКО, Е. М. МАКСИМОВА

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ОБРАБОТКИ ЛЕТНОГО ТЕПЛОВОГО ЭКСПЕРИМЕНТА НА МЕТЕОРАКЕТЕ ТИПА «ОБЛАКО»

С УЧЕТОМ ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПЯТЕН ЭММОНСА

Для получения объективных данных о тепловом состоянии и сопротивлении тел, летящих со сверхзвуковыми скоростями, важное значение приобретают численный эксперимент на ЭВМ, летный аэрофизический эксперимент и непосредственное сравнение результатов этих двух типов экспериментов [1]. С одной стороны, это связано с известными трудностями моделирования в аэродинамических трубах натуральных условий при сверхзвуковых скоростях [1—3]. Так, например, летные данные по числам Рейнольдса перехода ламинарного режима течения в сжимаемом пограничном слое в турбулентный на острых конусах значительно превышают числа Рейнольдса перехода, полученные в аэродинамических трубах [4]. Обобщение, проведенное в [5], показало, что коэффициенты теплоотдачи в летных условиях могут превышать соответствующие значения коэффициентов в аэродинамических трубах до 25%. С другой стороны, целесообразность сравнения летных и расчетных данных обусловлена эффективностью такого сравнения [5—8]. Несмотря на большой прогресс в развитии численных методов решения аэрофизических задач [9—12], реализация точных физико-математических моделей при рассмотрении натуральных условий полета с использованием эффективных численных алгоритмов сопряжена со значительными затратами времени на ЭВМ. Особую сложность при этом представляет решение сопряженной задачи, когда для точного расчета, например, температуры стенки обтекаемого сверхзвуковым потоком тела необходимо совместно решать уравнения Навье — Стокса, теплопроводности для стенки и уравнения, описывающие перенос тепла от стенки к воздуху в бортовом отсеке с учетом термогравитационной конвекции. Такая задача возникает при движении по траектории метеоракеты типа «Облако» [13], специальная головная часть которой оснащена датчиками температуры и давления, бортовой измерительной системой, многоканальной телеметрией [14]. Таким образом, наряду с точными численными решениями практический интерес представляет создание приближенных методов численного расчета на ЭВМ теплового состояния и сопротивления течения, учитывающих основные физические процессы и отличающихся экономичностью и приемлемой точностью. Применительно к объектам типа «Викинг» 10 [6] и М100 [15] такая методика описана в [8], в которой имеются алгоритмы расчета ламинарного и турбулентного сжимаемых пограничных слоев. Температура стенки головной части М100 при движении ее по траектории в [8] определялась из решения нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения, описывающего баланс энергии на тонкой стенке. Уравнение решено численно на ЭВМ БЭСМ-6 методом Рунге — Кутты. При этом показано, что при рассмотрении процессов обтекания и теплообмена справедливо условие квазистационарности. Расчет изменения температуры стенки в одной точке по длине головной части М100 составлял 30 с. Допустимость использования условия квазистационарности обтекания для исследуемой головной части метеоракеты типа «Облако» (рис. 1) обоснована тем, что по траектории $Sh =$

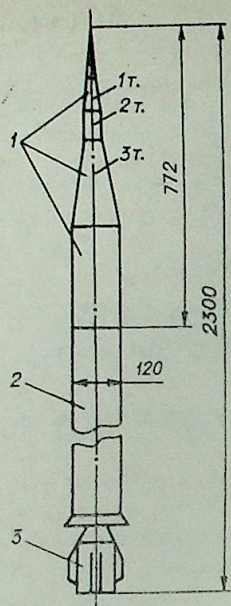


Рис. 1. Схема метеоракеты типа «Облако» [13, 14].

1 — головная часть с измерительными системами; 2 — двигатель; 3 — парашютный отсек. 1 т. — $X=0,25$; $\delta_w=4$ мм; материал Д16; 2 т. — $X=0,28$ м; $\delta_w=1,8$ мм, материал Д16; 3 т. — $X=0,4$ м; $\delta_w=1$ мм; материал 1X18Н9Т.

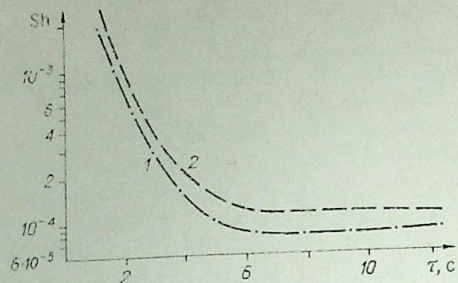


Рис. 2. Изменение числа Струхала Sh по траектории для головной части «Облака».
1 — $X=0,25$ м; 2 — $X=0,4$ м.

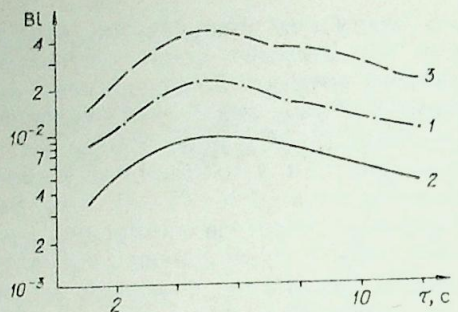


Рис. 3. Изменение числа Био Ви по траектории для головной части «Облака».
1 — $X=0,25$ м; 2 — $X=0,28$ м; 3 — $X=0,4$ м.

$= 3 \cdot 10^{-3} \div 8 \cdot 10^{-5}$ (рис. 2), где $Sh = \frac{X}{U_e \cdot \tau}$; U_e — скорость на внешней границе пограничного слоя; X — продольная координата; τ — время движения по траектории.

На рис. 3 приведены данные по изменению критерия Био Ви по траектории для трех участков головной части «Облако», различающихся толщиной стенки и материалом. Так как число $Bi \approx 10^{-2}$, то в соответствии, например, с [16] для расчета теплового состояния головной части «Облака» можно использовать уравнение баланса энергии для тонкой стенки из [8]. Для решения вопроса о том, ламинарный, турбулентный или переходный пограничный слой формируется на поверхности «Облака», использовано два подхода. Во-первых, на основе методики [8] рассчитывались температуры стенок в предположении существования ламинарного или турбулентного режима, начиная с момента старта. Расчетные данные сравнивались с летными значениями температуры стенки головной части «Облака» (рис. 1) в трех точках по длине, представленными в [14]. Из рис. 4, а — в, видно, что предположение о наличии турбулентного пограничного слоя для $\tau \leq 13$ с и ламинарного режима течения при $\tau > 6 \div 7$ с несправедливо. Проведенное сравнение дало основание полагать, что при $0 < \tau \leq 6 \div 7$ с имеет место ламинарный пограничный слой, а при $\tau > 6 \div 7$ с формируется переходный режим течения. Во-вторых, как и в [6], привлечена теория устойчивости Ван-Дриста [17] и летные данные по температурному фактору в пограничном слое на обтекаемой поверхности

$\Psi = \frac{T_w}{T_e}$, где T_w , T_e — температуры стенки и на внешней границе пограничного слоя. T_e определялось по методике [8] с учетом траекторных данных для «Облака», а T_w — из летного эксперимента. Из рис. 5 видно, что имеют место потеря устойчивости ламинарного пограничного слоя и переход к турбулентности из-за роста дестабилизирующего влияния на-

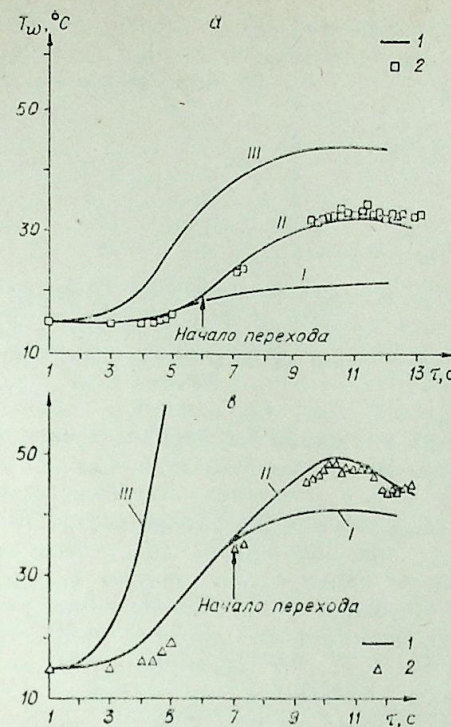


Рис. 4. Сравнение расчетных и летных данных по температуре стенки головной части «Облака»:

I — ламинарный пограничный слой; II — переходный режим в пограничном слое; III — турбулентный пограничный слой.

а) т. 1 — $X=0,25$ м, $\delta_w=4$ мм, Д-16; 1 — расчет, 2 — летный эксперимент; б) т. 2 — $X=0,28$ м; $\delta_w=1,8$ мм, Д-16, 1 — расчет, 2 — летный эксперимент; в) т. 3 — $X=0,4$ м; $\delta_w=1$ мм, 1X18Н9Т, 1 — расчет, 2 — летный эксперимент.

грева. Таким образом, со старта на поверхности формируется ламинарный пограничный слой до $\tau \approx 6 \div 7$ с, а затем формируется переходный режим течения в пограничном слое. При этом числа Рейнольдса изменяются от $\sim 10^6$ до $\sim 10^7$ (рис. 6).

Для расчета теплообмена в переходной области сжимаемого пограничного слоя на головной части метеоракеты типа «Облако» необходимо знать числа Рейнольдса перехода, а также коэффициент перемежаемости. В [18] отмечено, что переход при сверхзвуковых скоростях — сложный и запутанный вопрос. Несмотря на большое количество различных теорий, обзор которых представлен в [18—23], в настоящее время законченной теории перехода нет. Вопросам создания нелинейной теории развития возмущений посвящено исследование [24]. В обзоре [19] сделаны следующие выводы: 1) методы предсказания перехода, основанные на линейной теории устойчивости, не учитывают возмущений за счет турбулентности внешнего потока, шероховатости поверхности, вибраций, шума и не рассматривают спектры воз-

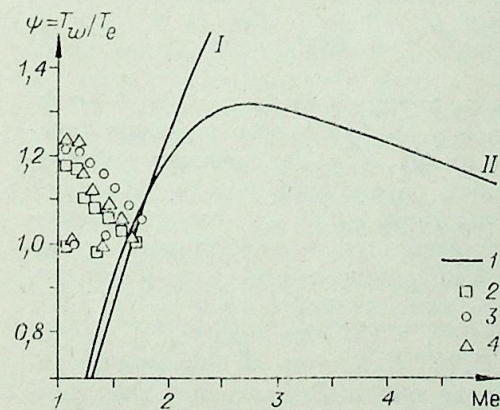


Рис. 5. Кривая устойчивости Ван-Дриста.

1 — расчет [17]; 2—4 — летный эксперимент; 1 — 1 т. $X=0,25$ м; 2 — 2 т. $X=0,28$ м; 3 — 3 т. $X=0,4$ м, I — вязкость по Сазерленду; II — $\rho \cdot \mu = \text{const}$; $Pr=1$.

мущений за счет турбулентности внешнего потока, шероховатости поверхности, вибраций, шума и не рассматривают спектры воз-

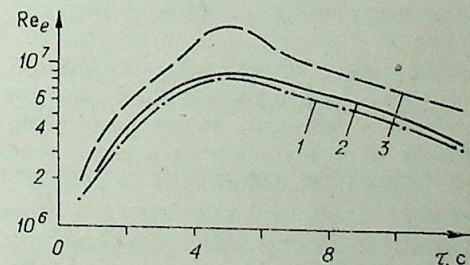


Рис. 6. Изменение числа Рейнольдса Re_e по траектории для головной части «Облака».

1 — $X=0,25$ м; 2 — $X=0,28$ м; 3 — $X=0,4$ м.

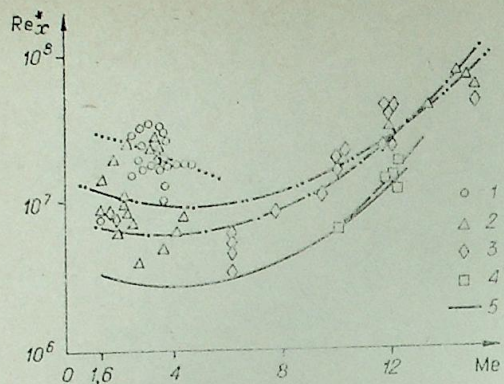


Рис. 7. Числа Рейнольдса перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный на острых конусах [4].

1—4 — летные данные; $Re_x = 77 \cdot 10^6$ (1); $27,9 \cdot 10^6$ (2); $11,1 \cdot 10^6$ (3); $4,3 \cdot 10^6$ (4); результаты испытаний в аэродинамических трубах (5) (568 точек не указаны).

формации об интенсивности, масштабе и спектре возмущений в окружающей среде в летных условиях; 3) необходима постановка отдельных тщательно планируемых летных исследований перехода. Важность последнего вывода подтверждает работа [4] (рис. 7). Принимая во внимание трудности определения перехода в сжимаемом пограничном слое, перспективными представляются результаты работы [25], в которой предложены инвариантные критерии перехода. Для практического использования инвариантных критериев целесообразно провести экспериментальную проверку их, особенно в летных условиях.

В связи с проблематичностью предсказания чисел Re перехода Re_{tr} в натуральных условиях полета тел, в частности для головной части «Облака», предлагается следующая методика расчета температур на обтекаемой поверхности метеоракеты. Во-первых, использовано нелинейное дифференциальное уравнение для тонкой стенки из [8], описывающее распределение температуры стенки при движении объекта по траектории. Во-вторых, тепловой поток к поверхности рассчитывается в зоне перехода с учетом коэффициента перемежаемости по методу [26]. В этом случае уравнение баланса энергии для тонкой стенки на головной части «Облака» записывается в виде

$$\rho \cdot c \cdot \delta_w \frac{dT_w}{dt} = [\alpha_{л} \cdot (1 - \gamma) + \alpha_{т} \cdot \gamma] \cdot (T_r - T_w) - \alpha_1 (T_{w,вн} - T_{вн}^{возд}) - \varepsilon_w \cdot \sigma_0 \cdot T_w^4 - \varepsilon_{w,вн} \cdot \sigma_0 \cdot T_{w,вн}^4, \quad (1)$$

где ρ, c, δ_w — удельный вес, теплоемкость, толщина стенки; $\alpha_{л}, \alpha_{т}$ — коэффициенты теплоотдачи для ламинарного и турбулентного режимов течения в пограничном слое, определяемые по [8]; T_r — равновесная температура стенки; $T_{w,вн}$ — поверхности стенки, обращенной внутрь бортового отсека; σ_0 — постоянная Стефана — Больцмана; $\varepsilon_w, \varepsilon_{w,вн}$ — степени черноты наружной и внутренней поверхности стенки; α_1 — коэффициент теплоотдачи в условиях термогравитационной конвекции в отсеке; γ — коэффициент перемежаемости в зоне перехода, изменяющийся от 0 до 1,0 [27]. В-третьих, коэффициент перемежаемости γ в (1) определяется с учетом теории турбулентных пятен Эммонса [28]. Для этого использованы результаты работы [29], в которой на основе теории Эммонса и установленной связи между скоростью образования турбулентных пятен Эммонса и числом Рейнольдса в начале зоны перехода получено выражение для коэффициента перемежаемости

$$\gamma = 1 - \exp \left[-G_1 \cdot \frac{(X - X_n)^2}{U_e} \right]. \quad (2)$$

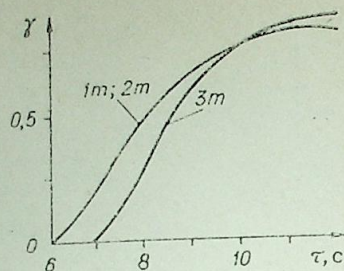


Рис. 8. Изменение коэффициента перемежаемости γ в переходном пограничном слое по длине головной части «Облака».

мущений; 2) предсказание числа Рейнольдса перехода в летных условиях представляется практически невозможным прежде всего из-за недостатка ин-

Здесь G_1 — скорость образования турбулентных пятен; X_n — продольная координата в начале перехода в пограничном слое; X — текущая координата в зоне перехода.

$$G_1 = \frac{3,507}{A^2} \cdot Re_{tr}^{-1,34} \cdot \frac{U_e^3 \cdot \rho_e^2}{\mu_e^2}, \quad (3)$$

где

$$A = 60 + 4,68 \cdot M_e^{1,92}. \quad (4)$$

В (3) ρ_e, μ_e — плотность и вязкость воздуха на внешней границе сжимаемого пограничного слоя. Расчеты по теплообмену [29] и трению [30] с учетом выражений (2)–(4) показали эффективность метода [29]. Этот подход использован также в [31]. Так как в пограничном слое на головной части «Облака» (см. рис. 1) переход происходит во времени в фиксированных на поверхности точках 1, 2, 3 в отличие от [29], то соотношения (2) и (3) необходимо представить в виде

$$\gamma = 1 - \exp \left[-\frac{3,507}{A^2} \cdot Re_{tr}^{-1,34} \cdot \frac{U_e^2 \cdot \rho_e^2}{\mu_e^2} \cdot \left(\frac{\mu_{e,tr}}{U_{e,tr} \cdot \rho_{e,tr}} \right)^2 (Re_{e,x}(\tau) - Re_{tr})^2 \right]. \quad (5)$$

В (5) индекс tr относится к параметрам течения, зафиксированным в момент начала перехода; $U_e, \rho_e, \mu_e, Re_{e,x}(\tau)$ — параметры течения на внешней границе пограничного слоя, изменяющиеся во времени в пределах области перехода. Зависимость γ от времени показана на рис. 8.

Для определения числа Рейнольдса перехода Re_{tr} , входящего в (5), привлечена следующая информация: 1) по данным рис. 5 видно, что на головной части метеоракеты имеет место потеря устойчивости ламинарного пограничного слоя; 2) рис. 4, а — в свидетельствует о том, что при $\tau > 6-7$ с расчетные кривые распределения температуры T_w в предположении развития ламинарного пограничного слоя располагаются существенно ниже экспериментальных значений; это расхождение расчетных и экспериментальных данных начинается при $\tau = 6-7$ с и обусловлено, как показывает рис. 5, потерей устойчивости и возникновением переходного режима в пограничном слое; так как координаты трех точек на головной части, в которых измерены температуры, фиксированы, а во времени изменяются числа Рейнольдса при движении по траектории

$$Re_{e,x}(\tau) = \frac{U_e(\tau) \cdot X}{v_e(\tau)}, \quad \text{то } Re_{tr} = Re_{e,x}(\tau_{tr}),$$

где τ_{tr} — момент времени, соответствующий началу перехода (согласно рис. 4, а — в, $\tau_{tr} = 6-7$ с). Таким образом, анализ летных данных и простой численный эксперимент позволили оценить число Re_{tr} для 3 точек; соответствующие данные с учетом температурного фактора приведены в таблице; 3) по летным данным для острых конусов из [4] (рис. 7) определены числа Рейнольдса перехода Re_{tr} для трех исследуемых точек «Облака» при единичных числах Рейнольдса $Re_1 \sim idem$; $M_e \sim idem$; в таблице приведены эти значения Re_{tr} .

Видно, что числа Рейнольдса перехода Re_{tr} , приближенно определенные по пунктам 1 и 2 и из независимых летных экспериментов [4] по пункту 3, удовлетворительно согласуются.

1-я точка; $X=0,25$ м $Re_1=30 \cdot 10^6$			2-я точка; $X=0,28$ м $Re_1=28,6 \cdot 10^6$			3-я точка; $X=0,4$ м $Re_1=26,2 \cdot 10^6$		
$\frac{\tau_{tr}, c}{M_e}$	Re_{tr} , расчет	Re_{tr} , [4]	$\frac{\tau_{tr}, c}{M_e}$	Re_{tr} , расчет	Re_{tr} , [4]	$\frac{\tau_{tr}, c}{M_e}$	Re_{tr} , расчет	Re_{tr} , [4]
$\frac{6}{1,55}$	$7,5 \cdot 10^6$	$9 \cdot 10^6$	$\frac{6}{1,6}$	$8 \cdot 10^6$	$8 \cdot 10^6$	$\frac{7}{1,45}$	$1,05 \cdot 10^7$	$1,4 \cdot 10^7$

В [30] приведена зависимость для определения числа Re_{tr} .

$$Re_{tr, \theta} = 1,174 \left[1 + \left(\frac{22400}{Re_{tr}} \right) \right] \cdot Re_{tr}^{0,16}. \quad (6)$$

Применительно к летным условиям головной части «Облака» при $M_e = 1,6$ из (6) следует, например, что $Re_{tr} = 4 \cdot 10^6$; это в 2 раза ниже значения Re_{tr} , полученного в летных условиях [4] (см. рис. 7). Таким образом, показанные в таблице, целесообразно использовать далее при расчете коэффициента перемежаемости по (5), необходимого для численного решения уравнения (1).

Уравнение (1) решено численно на ЭВМ методом Рунге — Кутты. Программа составлена на языке α -6. При расчете параметров ρ_e , U_e , T_e учитываются газодинамические особенности обтекания носовой части метеоракеты в виде конуса с углом $\theta_{нон} = 17^\circ$. В соответствии с [32] при числе Маха набегающего потока $M_\infty^* = 1,3$ меняется характер обтекания. Для $M_\infty < M_\infty^*$ формируется отсоединенная ударная волна, а при $M_\infty > M_\infty^*$ — присоединенная. В соответствии с [8] параметры за ударной волной рассчитываются при $M_\infty < 1,3$ как для прямого скачка, а при $M_\infty > 1,3$ — как для косого. Давление на внешней границе пограничного слоя рассчитывалось по методу Ньютона при $M_\infty \geq 1,3$ в первом приближении, что оказалось приемлемым для метеоракеты М100 и ракеты «Викинг» [10] [8]. Угол атаки на расчетном участке до $\tau \leq 13$ с принят равным нулю. Старт метеоракеты осуществлен под углом к горизонту 65° , ее ускорение достигает $12g$. В [33] отмечено, что модели ПВРД, запускавшиеся с помощью твердотопливных ракет для создания ускорений до $30g$ с наземной установки под углами от 45 до 75° , летели по траектории с нулевой подъемной силой, т. е. с нулевым углом атаки. Двигатель на «Облаке» работает до $\tau = 7$ с, и для $\tau \leq 7$ с, угол атаки $\alpha \approx 0$, а при $\tau = 13$ с скорость стабилизированного полета околосвуковая, и можно сделать предположение малости углов атаки при $7 \cdot c < \tau \leq 13$ с. Расчеты [8] показали, что пренебрежение малыми углами атаки не дает заметных ошибок в T_w , например для «Викинг» [10] [6]. Вопрос о возможности пренебрежения влиянием вибрацией метеоракеты на пограничные слои обсужден в [14]. Мало исследован вопрос о влиянии вращения осесимметричных тел на сжимаемые пограничные слои, на переход в них. Эксперименты [34] для несжимаемого пограничного слоя на теле вращения показали, что для параметра вращения $\lambda = \frac{\omega \cdot R}{U_e} < 0,1$ влияние вращения на переход

отсутствует (ω — угловая скорость вращения, R — радиус). Так как для «Облака» $\lambda \leq 0,8 \cdot 10^{-2}$, то влиянием вращения на переход и на ламинарный пограничный слой в соответствии с [34] и [27] пренебрегалось.

Измерения температуры воздуха в бортовом отсеке «Облака» [14] указывают на некоторое влияние на T_w термогравитационной конвекции при ускорениях $a \leq 12g$. На рис. 9 представлено изменение числа Рэлея Ra на траектории. Так как $Ra < 10^4$, то в наклонном слое формируется ламинарное течение. Вследствие вращения имеет место периодическая модуляция равновесной разности температур ($T_{w, \text{вн}} - T_{\text{вн}}^{\text{возд}}$) [35]. Здесь рассмотрено влияние модулируемого параметра на устойчивость слоя в условиях термогравитационной конвекции. При больших ускорениях этот вопрос не исследован. Так как вклад термогравитационной конвекции в тепловое состояние исследуемой головной части не превосходит 2%, то в уравнении (1) коэффициент α_1 рассчитывался для ламинарного слоя по [36]. На рис. 4, а — в приведены данные расчетов ламинарного и переходного пограничных слоев. Видно, что расчеты переходного пограничного слоя по принятой методике хорошо описывают данные летного эксперимента на головной части метеоракеты типа «Облако» (см. рис. 1). На рис. 10 приведена зависимость числа Нуссельта Nu от времени, а рис. 11 дает представление об изменении теплового потока на метеоракете. Рост

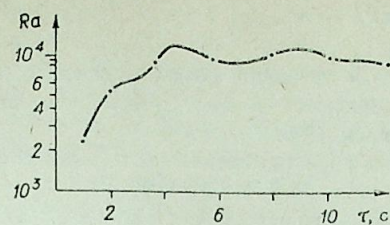


Рис. 9. Изменение числа Рэлея Ra по траектории для термогравитационной конвекции в бортовом отсеке «Облака».

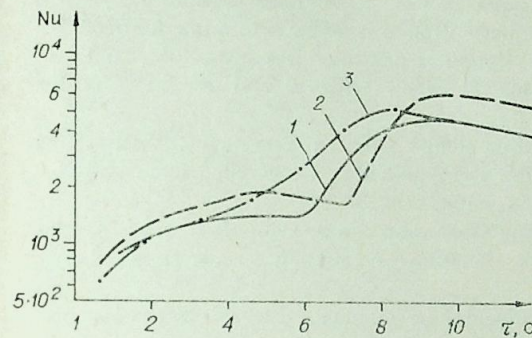


Рис. 10. Изменение числа Нуссельта Nu по траектории для головной части «Облака» в 3 точках.

Обозначения те же, что и на рис. 6.

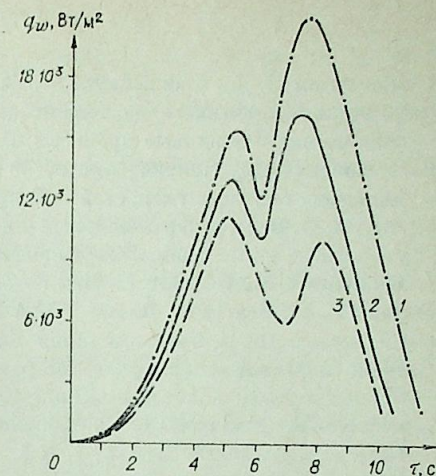


Рис. 11. Изменение конвективного теплового потока q_w по траектории в 3 точках при обтекании головной части «Облака».

Обозначения те же, что и на рис. 6.

q_w после минимума на левой ветви связан с переходом. В целом получено удовлетворительное согласование расчетных и летных значений температуры на головной части, стенки которой выполнены из разных

материалов различной толщины, принимая во внимание сложность процессов, сопровождающих полет сверхзвуковой метеоракеты типа «Облако», и приближенный характер предложенной методики численного расчета на ЭВМ. Время расчета на ЭВМ БЭСМ-6 изменения температуры стенки по траектории составляет 50 с, что свидетельствует о высокой экономичности расчетной схемы.

ВЫВОДЫ

1. На основе летных значений температуры стенки, кривых устойчивости Ван-Дриста [17], данных расчета температуры стенки в предположении ламинарного и турбулентного режимов течения в пограничном слое по методике [8] показано существование на исследуемой головной части метеоракеты типа «Облако» ламинарного и переходного пограничных слоев.

2. Создана экономичная методика приближенного численного расчета на ЭВМ ламинарного и переходного пограничных слоев, удовлетворительно описывающая летные значения температуры на исследуемой головной части сверхзвуковой метеоракеты типа «Облако» для $M_\infty < 2$ и $Re_{tr} \leq 2 \cdot 10^7$.

3. Показана эффективность применения методики расчета коэффициента перемежаемости на основе теории турбулентных пятен Эдмонса [29] и соответствующей методики расчета тепловых потоков в переходной зоне пограничного слоя [26] для расчета температуры стенки сверхзвуковой метеоракеты типа «Облако» в летных условиях.

Авторы выражают благодарность Н. Н. Яненко, Н. А. Желтухину за плодотворные обсуждения, Ю. А. Брагину и А. А. Тютину за внимание к работе.

Институт теоретической
и прикладной механики
СО АН СССР, Новосибирск

Поступила в редакцию
3/ХІІ 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Желтухин П. А., Павлюченко А. М. Научные проблемы создания летного научно-исследовательского аэрофизического комплекса.— В кн.: Прикладная аэрогазодинамика и тепловые процессы. Новосибирск, 1980.
2. Лукашевич Дж. Критический обзор развития экспериментальных методов в аэродинамике больших скоростей.— В кн.: Механика. № 5. М.: Мир, 1974.
3. Лыжин О. В. Перспективы развития аэродинамических труб.— В кн.: Всесоюзный симпозиум по методам аэрофизических исследований. Новосибирск, 1976.
4. Beckwith I. E., Bertram M. H.— NASA TN D-7453, 1974.
5. Zoby E. V., Graves Jr. R. A.— AJAA Journ., 1977, v. 15, N 7.
6. Сподграсс. Полетные испытания по определению аэродинамического нагрева и точки перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный на носовой конической части ракеты «Викинг» 10.— Вопросы ракетной техники, 1957, № 1.
7. Hidalgo H., Kadanoff L. P. Comparison Between Theory and Flight Ablation Data.— AJAA Journ., 1963, v. 1, N 1.
8. Максимова Е. М., Павлюченко А. М. Сравнение расчетных и летных данных по теплообмену для осесимметричных тел, движущихся по траектории при $M_\infty \leq 5$.— Изв. СО АН СССР, 1982, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.
9. Яненко Н. Н. Численное решение задач механики жидкости.— В кн.: Сб. трудов III Всесоюзного семинара по моделям механики сплошной среды. Новосибирск, 1976.
10. Ковеня В. М., Яненко Н. Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981.
11. Брили У. Р., Макдональд Х. Неявный метод расщепления уравнений Навье — Стокса для 3-мерных сжимаемых течений.— В кн.: Численное решение задач гидромеханики. М.: Мир, 1977.
12. Алексин В. А., Шевелев Ю. Д. Численное исследование пространственных пограничных слоев. М., 1980. Препринт ИПМ АН СССР, № 147.
13. Качурин Л. Г. Физические основы воздействия на атмосферные процессы. Л.: Гидрометеиздат, 1973.
14. Павлюченко А. М., Брагин О. А., Тютин А. А. Летные измерения температур и давления на спасаемых головных частях метеорокетов типа М100 и «Облако».— Изв. СО АН СССР, 1983, № 3. Сер. техн. наук, вып. 1.
15. Гайгеров С. С. Исследование синоптических процессов в верхних слоях атмосферы. М.: Гидрометеиздат, 1973.
16. Жданов В. В., Майоров А. П.— В кн.: Аэродинамическое нагревание при сверхзвуковых скоростях полета. Тр. ЦАГИ, 1980, вып. 2046.
17. Van Driest E. R. JAS, 19, 1952, p. 801—812.
18. Mack L. M. Linear Stability Theory and Problem of Supersonic Boundary — Layer Transition.— AJAA Journ., 1975, N 3, v. 13.
19. Решотко Э. Устойчивость ламинарного пограничного слоя и его переход в турбулентный.— В кн.: Вихревые движения жидкости. М.: Мир, 1979.
20. Гапонов С. А., Маслов А. А. Развитие возмущений в сжимаемых потоках. Новосибирск: Наука, 1980.
21. Алексеев М. А., Бабуев В. Ф., Кузьминский В. А. К устойчивости ламинарного пограничного слоя при сверхзвуковых скоростях потока.— Уч. зап. ЦАГИ, 1971, т. 2, № 3.
22. Алексеев М. А. Об асимптотических приближениях в задаче устойчивости ламинарного пограничного слоя при сверхзвуковых скоростях.— Тр. ЦАГИ, 1972, вып. 1420.
23. Кузьминский В. А. О температурном граничном условии в задаче устойчивости пограничного слоя.— Уч. зап. ЦАГИ, 1973, т. 4, № 2.
24. Жигулев В. И. Нелинейная теория развития возмущений.— В кн.: Аэрогазодинамика и физическая кинетика. Новосибирск, 1977.
25. Яненко Н. Н., Гапонов С. А. Инвариантные критерии устойчивости течений сжимаемой жидкости.— ДАН СССР, 1981, т. 259, № 5.
26. Dhawan S., Narasimha K. Some Properties of Boundary Layer Flow During the Transition from Laminar to Turbulent Motion.— Journ. of Fluid Mechanics, 1958, v. 3.
27. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969.
28. Emmons H. W. The Laminar — Turbulent Transition in a Boundary Layer — Part I.— Journ. of the Aerospace Sciences, 1951, v. 18, N 7.
29. Chen K. K., Thyson N. A. Extension of Emmons' Spot Theory to flows on Blunt Bodies.— AJAA Journ., 1971, v. 9, N 5.
30. Sebeci T. Wall Curvature and Transition Effects in Turbulent Boundary Layers.— AJAA Journ., 1971, v. 9, N 9.
31. Коллина Н. П., Солодкин Е. Е.— В кн.: Аэродинамическое нагревание при сверхзвуковых скоростях полета.— Тр. ЦАГИ, 1980, вып. 2046.
32. Краснов Н. Ф. Аэродинамика тел вращения. М.: Машиностроение, 1964.
33. Внатт М. Д., Лундин Б. Т. Прямоточные реактивные двигатели.— В кн.: Реактивные двигатели. М., 1962.
34. Mueller T. I., Nelson R. C., Kegelmann J. T., Morkovin M. V.— AJAA Journ., 1981, v. 19, N 12.
35. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.
36. Кирдянкин А. Г. Структура тепловых гравитационных течений вблизи поверхности теплообмена. Докт. дис. Новосибирск, 1975.

УДК 532.526

Г. В. ПЕТРОВ

ХАРАКТЕРИСТИКИ УСТОЙЧИВОСТИ
ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ГАЗА,
РЕКОМБИНИРУЮЩЕГО НА ОХЛАЖДАЕМОЙ СТЕНКЕ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, ОБОЗНАЧЕНИЯ

Проводятся расчеты устойчивости пограничного слоя на пластине, обтекаемой однородным потоком газа, представляющего собой бинарную смесь молекулярного и атомарного компонентов. Предполагается, что поверхность пластины является идеально каталитической по отношению к рекомбинации атомов, а газофазные реакции полностью заморожены, при таких условиях пограничный слой автомоделен.

Уравнения линейной задачи устойчивости в приближении Дала-Линя приведены в [1]. Там же обоснованы используемые в данной работе граничные условия, которые заключаются в отсутствии на стенке возмущений скорости, температуры и степени диссоциации. Решение задачи ищется в виде $f(y) \cdot \exp\{-i[\alpha(x + \operatorname{tg} \chi \cdot z) - \omega t]\}$, где x, z, y — продольная, поперечная и нормальная к поверхности пластины координаты, t — время, χ — угол между направлениями внешнего потока и распространения волны возмущения. Для нейтральных возмущений значения угловой частоты ω и продольной составляющей волнового вектора α — вещественны. В случае комплексного $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$, инкремент $\alpha_i = d \ln A / dx$ определяет пространственное нарастание амплитуды возмущения A :

$$K = \frac{A}{A_0} \doteq \exp \left\{ \int_{x_0}^x \alpha_i dx \right\}.$$

В данной работе начальное значение амплитуды A_0 считается заданным в точке потери устойчивости x_0 по отношению к возмущению заданной частоты.

Все результаты приведены в безразмерном виде. Величины α и ω обезразмерены на $1/\delta$ и u_∞/δ соответственно, т. е. с помощью масштаба толщины пограничного слоя δ , определяемого через число Рейнольдса: $Re = u_\infty \delta / \nu_\infty = \sqrt{\gamma} u_\infty x / \nu_\infty$, где u_∞ — скорость набегающего потока, ν_∞ — кинематический коэффициент вязкости газа в набегающем потоке. С помощью масштаба времени ν_∞ / u_∞^2 вводится еще одна безразмерная частота F , независимая от локальной характеристики пограничного слоя δ .

Цель работы — определить влияние каталитической рекомбинации на устойчивость пограничного слоя в условиях большого теплоотвода с поверхности пластины. Расчеты проведены для значений числа Маха $M_\infty = 2 \div 3$, степени диссоциации набегающего потока $c_\infty = 0 \div 0,6$ и температурного фактора $T_0 = T_0/T_\infty = 0,333 \div 2,5$. Результаты представлены графически, сплошные линии на рисунках соответствуют каталитически рекомбинирующему газу (почти везде $c_\infty = 0,6$), штрихпунктирные — недиссоциирующему газу.

В п. 2 даны результаты для плоских и трехмерных нейтральных возмущений первой моды. Используется простая модель газа: вязкость не зависит от степени диссоциации и пропорциональна температуре, числа

Прандтля и Шмидта $Pr = Sc = 1$, из внутренних степеней свободы вклад в теплоемкость вносит лишь вращение молекул. В п. 3 рассмотрено нарастание по x плоских возмущений второй моды; расчеты проведены для азота, термодинамические и переносные свойства которого описаны в [2].

ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕЙТРАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ОТНОШЕНИЮ
К ВОЗМУЩЕНИЯМ ПЕРВОЙ МОДЫ

Нейтральные кривые 1, 2, 3 на рис. 1 построены для плоских возмущений ($\chi = 0$) в пограничном слое совершенного газа для $M_\infty = 3$; $T_0 = 2$ (кривая 1) и $T_0 = 1,6$ (кривые 2 и 3). Видно, что при охлаждении стенки устойчивость повышается. Кроме того, область неустойчивости дробится на две области, которые при дальнейшем охлаждении вообще исчезают. Такие результаты ранее были получены в [3], где исследовались также асимптоты нейтральных кривых при $Re \rightarrow \infty$ и условия полной стабилизации.

Нейтральная кривая 4 соответствует газу, рекомбинирующему на стенке при $c_\infty = 0,6$. Сравнение с кривой 1, рассчитанной для совершенного газа при тех же параметрах, указывает на стабилизирующее воздействие каталитической рекомбинации.

Наименьшие критические числа Рейнольдса Re_* при $M_\infty = 3$ достигаются для возмущений, распространяющихся под углом $\chi = 54^\circ$ к направлению основного течения. Нейтральные кривые, соответствующие таким возмущениям при $T_0 = 1,667$, построены на рис. 2 и пронумерованы в порядке нарастания степени диссоциации набегающего потока: $c_\infty = 0; 0,2; 0,3; 0,6$. Здесь также наблюдается повышение устойчивости, обусловленное рекомбинацией на стенке. Замкнутые кривые, подобные кривой 4, обнаруживаются также и в случае совершенного газа при достаточной степени охлаждения стенки [4].

На рис. 3 изображены зависимости критического числа Рейнольдса от температурного фактора для $M_\infty = 3$. Кривые 1—4 соответствуют плоским возмущениям, кривые 5, 6 — углу распространения $\chi = 54^\circ$, сплошные кривые — случаю $c_\infty = 0,6$, штрихпунктирные — совершенному газу. Наличие двух кривых 1 и 2 (то же касается кривых 3 и 4) обусловлено дроблением области неустойчивости или, по крайней мере, наличием двух локальных минимумов Re на нейтральной кривой.

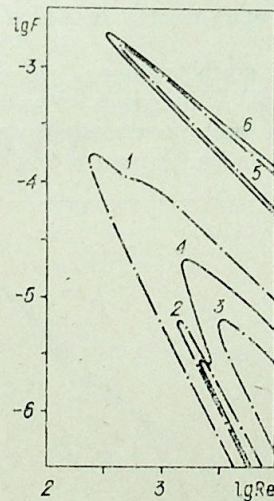


Рис. 1.

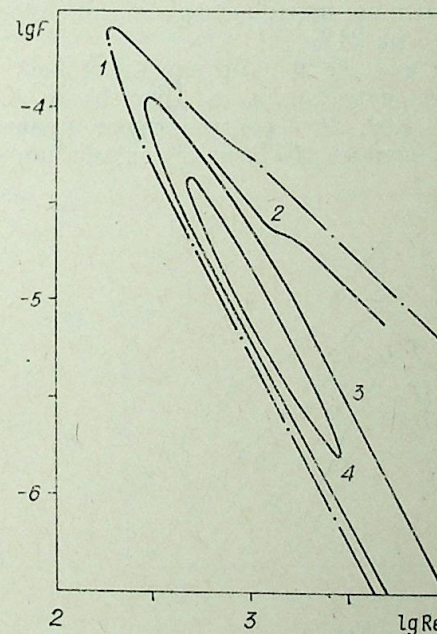


Рис. 2.

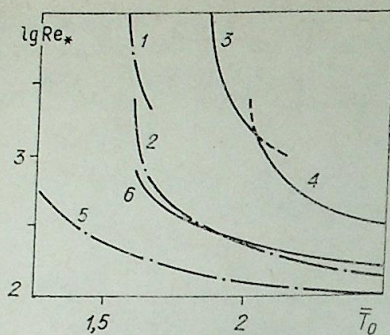


Рис. 3.

Видно, что в случае рекомбинирующего на стенке газа стабилизация наступает при более высоких температурах стенки, чем в случае совершенного газа. Это справедливо как для плоских, так и для трехмерных возмущений, в последнем случае \bar{T}_0 стабилизации увеличивается от 1,25 до 1,6 при достижении $c_\infty = 0,6$. К аналогичному результату приводят и расчеты для $M_\infty = 2$ (рис. 4), однако наиболее неустойчивые возмущения, распространяющиеся в данном случае под углом 40° (кривые 3 и 4), мало отличаются от плоских (кривые 1 и 2) возмущений.

ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ РОСТ ВОЗМУЩЕНИЙ ВТОРОЙ МОДЫ

Приведенные выше результаты показывают, что при глубоком охлаждении стенки могут существовать линейные нарастающие возмущения лишь высших мод, на которые теплопровод оказывает слабое дестабилизирующее воздействие [5]. В [5] также показано, что наиболее существенными из возмущений высших мод, особенно при сравнительно небольших сверхзвуковых скоростях, являются плоские возмущения второй моды, которые и рассматриваются ниже.

Нейтральные кривые 5 и 6 на рис. 1 рассчитаны соответственно для недиссоциирующего и каталитически рекомбинирующего ($c_\infty = 0,6$) азота при $M_\infty = 3$; $T_\infty = 6000$; $T_0 = 2000$ К. Видно, что рекомбинация на стенке, подобно ее охлаждению, понижает устойчивость. Однако это понижение незначительно: критическое число Рейнольдса уменьшается от 415 до 328, т. е. всего на 21%.

При тех же параметрах были рассчитаны коэффициенты пространственного нарастания α_i (рис. 5) и K (рис. 6). Частотам $F = 6 \cdot 10^{-4}$, $4 \cdot 10^{-4}$, $3 \cdot 10^{-4}$, 10^{-4} соответствуют кривые 1—4 для недиссоциирующего азота и кривые 5—8 для рекомбинирующего азота. Кривые 9 и 10 на

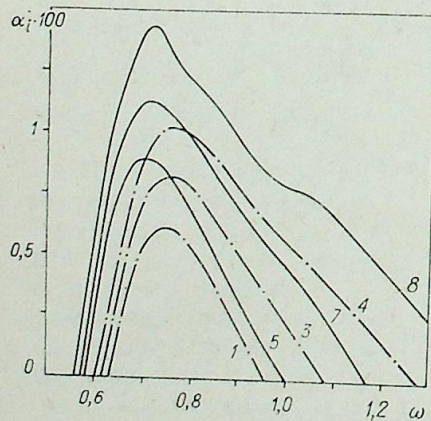


Рис. 5.

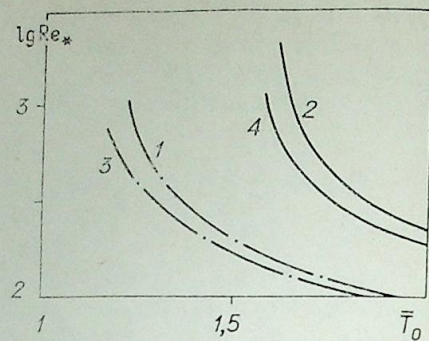


Рис. 4.

рис. 6 представляют собой огибающие семейств кривых нарастания для возмущений различных частот и определяют максимальный рост возмущений K_{max} при заданном Re .

Широко известен критерий, согласно которому переход пограничного слоя в турбулентное состояние происходит в точке, где максимально возможное нарастание монохроматического линейного возмущения достигает значения $K_{max} = e^9$. В данном случае это происходит при $Re = 2430$ для недиссоциирующего азота и $Re = 1790$ для каталитически рекомбинирующего азота, т. е. уменьшение числа Рейнольдса перехода составляет 26%.

Указанный критерий подвергается справедливой критике, а его эффективность применительно к возмущениям второй моды вообще не проверялась. Однако относительное изменение числа Рейнольдса, соответствующего фиксированному значению K_{max} , может служить количественной оценкой влияния того или иного фактора на устойчивость, особенно, если это изменение слабо зависит от выбора значения K_{max} . В данном случае проверка показывает, что в диапазоне $\ln K_{max} = 5 \div 75$ (чему соответствует $Re \approx 1500 \div 10000$) относительное уменьшение числа Рейнольдса, обусловленное каталитической рекомбинацией, составляет $25 \div 30\%$, т. е. вариации незначительны. Отметим, что эти оценки, полученные на основании коэффициентов пространственного нарастания, несколько превышают результат, основанный на вычислении критических чисел Рейнольдса (21%).

Проводились отдельные расчеты и для других параметров обтекания. Они показали, что результаты при низких \bar{T}_0 довольно слабо зависят от изменения температур T_0 и T_∞ , но при уменьшении числа Маха устойчивость резко возрастает: $Re_* > 10000$ для $M_\infty = 2$, тогда как в представляющем практический интерес диапазоне $Re < 10000$ при $M_\infty = 3$ коэффициенты нарастания возмущений второй моды достигают очень больших значений.

Институт теоретической
и прикладной механики
СО АН СССР, Новосибирск

Поступила в редакцию
6/XII 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров Г. В. Устойчивость пограничного слоя каталитически рекомбинирующего газа.— Журн. прикл. мех. и техн. физ., 1978, № 1.
2. Петров Г. В. Влияние диссоциации на устойчивость пограничного слоя.— В кн.: Развитие возмущений в пограничном слое. Новосибирск, 1979.
3. Гапонов С. А., Маслов А. А. Численное решение задачи о полной стабилизации сверхзвукового пограничного слоя.— Журн. прикл. мех. и техн. физ., 1972, № 2.
4. Маслов А. А. Устойчивость сверхзвукового пограничного слоя по отношению к трехмерным возмущениям.— Журн. прикл. мех. и техн. физ., 1974, № 1.
5. Mack L. M. Boundary layer stability theory. Doc. 900-227, Rev. A. Pasadena: JPL, 1969.

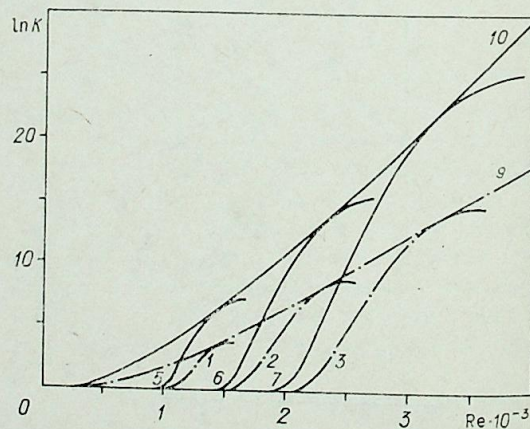


Рис. 6.

УДК 532.517.4

Б. И. ЗАСЛАВСКИЙ, Б. В. ЮРЬЕВ

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА
ТРАНСФОРМАЦИИ СВОБОДНОГО ШАРООБРАЗНОГО ОБЪЕМА
ЛЕГКОГО ГАЗА В ВИХРЕВОЕ КОЛЬЦО

Исследованию закономерностей движения всплывающих вихрей-термиком посвящен ряд теоретических [1—5] и экспериментальных [6—9] работ. Во многих из них рассматривается и начальная стадия движения термика — процесс формирования всплывающего вихревого кольца. На этой стадии возникает и достигает своего предельного значения циркуляция вихря Γ , определяющая его кинематические и динамические характеристики. Причины, вызывающие рост циркуляции, обсуждались в [1—5], методы определения ее предельного значения — в [1, 4], где предлагались варианты оценок, основанные на геометрических соображениях. В работе [5] предложена качественная теория механизма трансформации шарообразного термика в ядро кольцевого вихря, в основе которой лежит предположение о том, что формирование вихря обуславливается в основном не движением среды, составляющей термик, а движением более плотной внешней атмосферы. При этом скорость, циркуляция которой и определяет Γ , вычислялась из некоторого энергетического соотношения, характеризующего потерю потенциальной энергии при переходе из начального неустойчивого состояния (шарообразный объем) в более устойчивое (тороидальное ядро кольцевого вихря).

Данная работа посвящена экспериментальному исследованию этого процесса. Результаты измерений сравниваются с выводами работы [5].

1. Пусть R_0 — эффективный радиус начального объема термика $Q_0 = \frac{4\pi}{3} R_0^3$, (Q_0 — начальный шарообразный объем более легкого, чем внешняя среда, газа), p_1 и ρ_1 — давление и плотность газа внутри Q_0 , p и ρ_0 — давление и плотность внешней среды, $\xi = \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_0} > 0$ — относительный перепад плотности, R и r — радиусы осевой окружности и сечения тороидального ядра вихря, α — угол раствора ($\alpha = \frac{dR}{dH}$), H и V — высота и скорость подъема термика.

Рассмотрим, следуя [5], механизм трансформации шарообразного объема в тор.

Пусть в момент времени $t = 0$ свободный объем термика имеет шарообразную форму. В этом случае он начинает всплывать с ускорением [10]

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{Q_0(\rho_0 - \rho_1)g}{Q_0\rho_1 + 0,5Q_0\rho_0} = \frac{2\xi g}{3 - 2\xi}. \quad (1.1)$$

В системе координат, связанной с термиком, распределение давления на поверхности определяется уравнением Коши — Лагранжа

$$p = p_0 - \rho_0\varphi_t + \rho_0gh + \frac{1}{2}\rho_0V_1^2 - \frac{1}{2}\rho_0V^2, \quad V = \text{grad } \varphi. \quad (1.2)$$

Внутри термика

$$p_1 = p_0 - \rho_1\varphi_{1t} + \rho_1gh, \quad (1.3)$$

где h — разность высот между верхней точкой Q_0 и рассматриваемой точкой, φ и φ_1 — потенциал скорости вне и внутри Q_0 , V_1 и p_0 — скорость и давление на уровне $h = 0$, V — скорость обтекающего термик потока внешней среды. За потенциал скорости во внешней среде, обтекающей Q_0 , может быть взято известное решение для сферы [10], которое в точках, прилегающих к Q_0 , имеет вид

$$\varphi = -\frac{3}{2}V(t)R_0 \cos \Theta + \frac{3}{2}V(t)R_0, \quad (1.4)$$

где Θ — полярный угол ($h = 2R_0 \sin^2 \frac{\Theta}{2}$).

При подъеме термика в области, примыкающей к его границе, возникает завихренность и, следовательно, циркуляция $\Gamma(t)$.

При малых t циркуляцию $\Gamma(t)$ можно представить в виде $\Gamma(t) = \Gamma(0) + \Gamma'(0)t + \frac{1}{2}\Gamma''(0)t^2 + \dots$. Ее рост определяется теоремой Бьеркнеса [11]

$$\frac{d\Gamma}{dt} = - \oint \frac{dp}{\rho}.$$

Произведем интегрирование вдоль следующего контура: от верхней точки Q_0 по меридиану до нижней и обратно по вертикали вдоль оси симметрии. В результате получим

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{p(\pi) - p(0)}{\rho_0} - \frac{p_1(\pi) - p_1(0)}{\rho_1}.$$

Учитывая (1.2) и (1.3), имеем

$$\left. \frac{d\Gamma}{dt} \right|_{t=0} = -\varphi_t(\pi) + \varphi_t(0) + \varphi_{1t}(\pi) - \varphi_{1t}(0).$$

Подставляя в это уравнение φ из (1.4) и учитывая, что φ_1 во всем объеме Q_0 равно $\varphi_1(t)$, а

$$\frac{dV_0}{dt} = -\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{2\xi g}{3 - 2\xi},$$

имеем

$$\left. \frac{d\Gamma}{dt} \right|_{t=0} = 3 \cdot \frac{2\xi g R_0}{3 - 2\xi}.$$

Отсюда при малых t получаем [8]

$$\Gamma(t) = \Gamma'(0)t = 6\xi g R_0 / (3 - 2\xi)t.$$

Эта формула, как следует из вывода, определяет рост Γ до тех пор, пока не начнется деформация Q_0 и, с некоторым приближением, до момента «прокальвания» термика внешней средой.

2. Завихренность на границе диффундирует в глубь Q_0 и в процессе движения распределяется по всему объему, однако она не может служить причиной трансформации шарообразного объема в тор. Действительно, процесс трансформации должен сопровождаться возникновением в нижней части Q_0 движения внешней среды, направленного к его центру, — «возвратного течения», которое может быть вызвано только соответствующим градиентом давления. На его величину движение внутри Q_0 из-за относительно малой плотности ($\rho_1 \ll \rho_0$) существенно не повлияет.

Этот обратный градиент создается благодаря разности на одних и тех же высотах гидростатических давлений внутри и вне термика.

Эта разность $\Delta p = \xi g \rho_0 h$ при $t = 0$ компенсируется силами инерции, а в дальнейшем в верхней половине — скоростным давлением $1/2\rho_0 V^2$ обтекающего Q_0 потока. В нижней половине, где такая компенсация невозможна, поскольку величина $1/2\rho_0 V^2$, пройдя через максимум при $h = R_0$, в отличие от Δp , начинает падать, она осуществляется осевым возвратным течением внешней среды.

Обозначим скорость этого течения на оси термика через u . Уравнение Коши — Лагранжа для головной части этой струи в системе координат, связанной точкой термика, будет иметь вид

$$\varphi_t + 1/2u^2 = \xi gh. \quad (2.1)$$

Осевая струя внутри термика не только движется вдоль оси z , но и расширяется, что приводит к быстрому падению ускорения $\frac{du}{dt}$, а следовательно, и φ_t . Тогда (2.1) можно записать в приближенном виде

$$u^2 = 2\xi gh = 2\xi g(2R_0 - H_1). \quad (2.2)$$

Здесь вместо h введена высота подъема струи H_1 . Чтобы записать это уравнение в безразмерном виде, перейдем к следующим координатам:

$$H^0 = \frac{H}{R_0}, \quad t^0 = t \left(\frac{g\xi}{R_0} \right)^{1/2}, \quad u^0 = u (g\xi R_0)^{-1/2}. \quad (2.3)$$

Уравнение (2.2) примет вид

$$\frac{dH_1^0}{dt^0} = \sqrt{2(2 - H_1^0)}.$$

Отсюда получаем

$$H_1^0 = 2t^0 - \frac{1}{2}(t^0)^2. \quad (2.4)$$

В неподвижной системе координата вершины струи

$$z_c^0 = H_1^0 + H_0^0 - 1,$$

где H_0^0 можно определить из (1.1)

$$H_0^0 = \frac{1}{2} \frac{2}{3 - 2\xi} (t^0)^2 - 1. \quad (2.5)$$

Из (2.4) и (2.5) следует

$$z_c^0 = 2t^0 - \frac{1}{2}(t^0)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3 - 2\xi} (t^0)^2 - 2.$$

В частности, при $\xi = 0,5$ имеем

$$z_c^0 = 2t^0 - 2, \quad u^0 = 2. \quad (2.6)$$

3. В центре термика $u = u_c$ направлена по вертикали и определяется скоростью высотой, $h = R_0$, следовательно, по прошествии времени установления

$$\frac{1}{2} \rho_0 u_c^2 \simeq \xi g \rho_0 R_0. \quad (3.1)$$

Отсюда следует из [5]

$$u_c = \sqrt{2\xi g R_0}. \quad (3.2)$$

Будем считать, что на начальном этапе движение внутри Q_0 соответствует течению внутри вихря Хилла [10]. В этом случае скорость u_c связана со скоростью движения вихря как целого, w_h , соотношением [10]

$$w_h = \frac{2}{3} u_c. \quad (3.3)$$

Циркуляция вихря Хилла определяется соотношением

$$\Gamma = 5w_h R_0. \quad (3.4)$$

Полагая $u_c = \sqrt{2\xi g R_0}$, получаем оценку для Γ :

$$\Gamma = 5 \cdot \frac{2}{3} R_0 \sqrt{2\xi g R_0} \quad (3.5)$$

или

$$\Gamma^0 = \Gamma / R_0 \sqrt{g R_0} \simeq 4,72 \sqrt{\xi} \sim 5 \sqrt{\xi}. \quad (3.6)$$

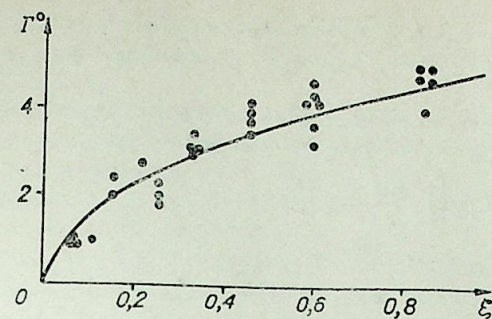


Рис. 1.

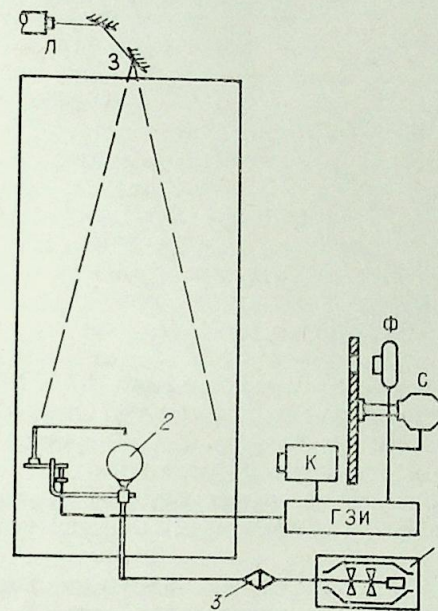


Рис. 2.

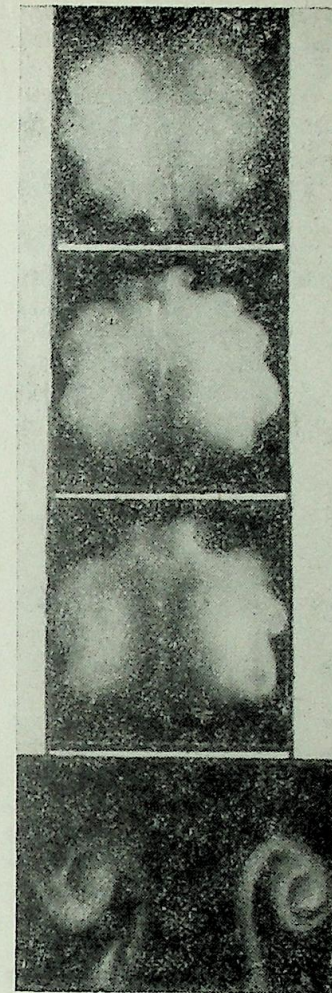


Рис. 3.

На рис. 1 сплошной линией проведена кривая, соответствующая (3.6), точками нанесены значения Γ^0 , взятые из [8].

Заметим, что использование частного решения уравнений гидродинамики — вихря Хилла для определения Γ не принципиально. Принципиальным является энергетическое соотношение (3.1), между возвратной скоростью и потенциальной энергией, обеспечивающей эту скорость.

Циркуляцию по порядку величины можно определить и по формуле

$$\Gamma = 2\pi u_c R_0 / 2 = \pi R_0 \sqrt{2\xi g R_0} \quad (3.7)$$

или

$$\Gamma^0 = \pi \sqrt{2\xi} \sim 5 \sqrt{\xi}. \quad (3.8)$$

Здесь взят вписанный в шар радиусом R_0 тор. с параметрами

$$R = R_0, \quad r = R_0/2.$$

Значение циркуляции, рассчитанное по формулам (3.6) или (3.8), близко к максимальному, так как $\Delta h = R_0$ — максимальная скорость высота.

4. Соотношения, связывающие циркуляцию Γ с углом α , могут быть определены приближенно и для сформировавшегося термика [5].

Сформировавшийся всплывающий кольцевой вихрь обладает потенциальной Π и кинетической E_k энергией. Первая целиком определяется

дефицитом веса $F = Qg\xi\rho_0$, $\Pi = FH_0$, где Q — объем ядра вихревого кольца, заполненного более легкой, чем внешняя, средой. На начальной стадии движения $Q = Q_0$.

Кинетическая энергия определяется циркуляцией и геометрическими размерами ядра. Будем определять E_k приближенной формулой

$$E_k = \frac{1}{2} \Gamma^2 R \rho_0 \left[\ln \frac{8R}{r} - 2 \right], \quad (4.1)$$

полученной в [12] в предположении выполнения закона Био и Савара и малости отношения r/R для кольцевых вихрей в идеальной жидкости. При этом будем предполагать, что Γ и $Q = 2\pi^2 R r^2$ в процессе движения остаются постоянными, а вследствие работы силы Архимеда (убыли Π) увеличивается R и соответственно уменьшается r .

Таким образом, дифференцируя (4.1) по времени при $Q = \text{const}$ и приравняв результат к $-\frac{d\Pi}{dt}$, получаем

$$\Gamma^0 = 4 \sqrt{\frac{\pi \xi}{3\alpha (2 \ln 8R/r - 1)}} \quad (4.2)$$

или

$$\alpha = \frac{16\pi \xi}{3(\Gamma^0)^2 (2 \ln 8R/r - 1)}; \quad (4.3)$$

подставляя (3.6) в это выражение, имеем

$$\alpha = \frac{16\pi}{75 (2 \ln 8R/r - 1)}. \quad (4.4)$$

5. Эксперименты были поставлены в бассейне размерами $1,5 \times 1,5 \times 3$ м³ с прозрачными стенками. Устройство для получения термик и измерительная часть установки представлены на рис. 2 (1 — смеситель, 2 — оболочка начального объема Q_0 , 3 — генератор дыма, 4 — пусковой механизм, Л — лазер (ЛГ-106М), 5 — выпуклое цилиндрическое зеркало, Ф — фотоаппарат, К — кинокамера «Коиवास-автомат», ГЗИ — генератор запускающего импульса).

Для получения с различными относительными перепадами плотности ξ использовалась тщательно перемешанная азотногелиевая смесь с небольшой добавкой кислорода. Парциальные давления каждого газа измерялись образцовым манометром. По измеренным давлениям определялась плотность смеси. Смесь, проходя через генератор 3, подкрашивалась дымом. Малая доля кислорода в смеси (1,5–2%) обеспечивала равномерную

слабую задымленность и, следовательно, незначительное, связанное с последней, изменение плотности.

Средствами измерения на установке служили предназначенный для визуализации подкрашенного газа оптический нож, образованный лучем лазера, веерообразно разведенный зеркалом в вертикальной плоскости, прохо-

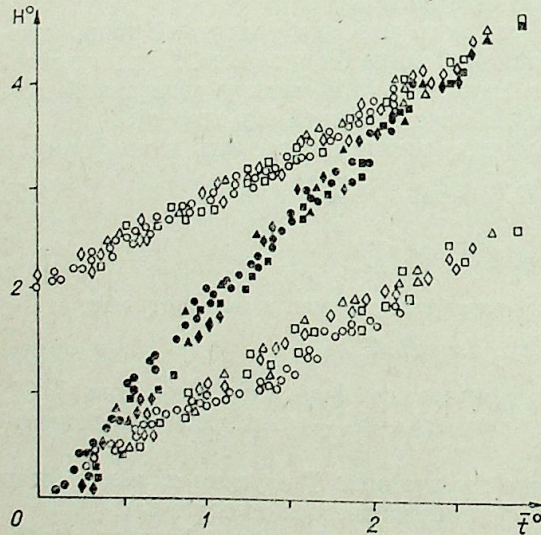


Рис. 4.

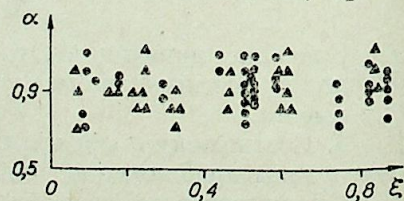


Рис. 5.

дящей через центр термика, кинокамера и фотоаппарат.

Перед объективом был установлен стробоскоп-диск с вырезом $\sim 10^\circ$. Вращаясь, диск прерывал световой поток через объектив на время $T - \tau$, где T — период вращения, τ — время экспонирования ($T/\tau = 36$). За время $T - \tau$ термик перемещался на расстояние $u(T - \tau)$ (u — скорость подъема термика) и при следующем повороте экспонировался на новом месте.

В целом установка аналогична использованной в работе [8]. Методики экспериментов состояли в следующем. Выдувался мыльный пузырь со смесью заданной плотности. Размеры пузыря брались от 2,5 до 6 см. Затем запускалась кинокамера и открывался затвор фотоаппарата. Через 1–2 с после запуска этих приборов путем прокалывания иглой, связанной с пусковым механизмом, разрушалась мыльная пленка пузыря, и таким образом освобождался объем Q_0 .

Движение подкрашенного газа в плоскости оптического ножа фиксировалось кинокамерой и открытым аппаратом со стробоскопом. С его помощью кинограмма всего движения получалась на одном кадре. Она использовалась для определения геометрических и кинематических характеристик вихревого кольца, в частности угла раствора α , значения $V_0 = V_0(t)$ или, что эквивалентно, $V_0 = V_0(z)$. Частота «съемки» аппарата со стробоскопом невелика — не более 7 кадров в 1 с. Кинокамера обеспечивала съемку со скоростью до 35 кадров в 1 с. Полученные с ее помощью кинограммы позволяли исследовать быстротекущую начальную стадию движения.

На рис. 3 представлены четыре кадра такой кинограммы. Временной интервал между первыми тремя кадрами 0,4 с, между третьим и четвертым — 0,12 с. Как видно из приведенных фотографий, механизм трансформации шарообразного объема в вихревое кольцо состоит в одновременном течении двух процессов: прокалывания снизу объема термика струей внешней атмосферы (движение этой струи хорошо видно на первых трех кадрах) и роста завихренности, на что указывает возрастание амплитуды волнообразных искажений поверхности термика (неустойчивость Рэля — Тейлора).

Обработка кинограмм позволила выявить основные закономерности движения термика и динамику исследуемого процесса трансформации. В переменных (2.3) результаты этих измерений представлены на рис. 4–6.

На рис. 4 приведены значения высот верхней и нижней точек термика и верхней точки внедряющейся в термик центральной струи внешней среды для различных значений ξ и t^* . Здесь же показана полученная теоретическим путем зависимость (2.6).

На рис. 5 даны значения $\alpha = \alpha(\xi)$ и проведена кривая, соответствующая формуле (4.2) при значениях $R/r = 5$, полученных в результате обработки кинограмм. Треугольниками на графике представлены данные, взятые из [9]. Зависимость скорости подъема термика от времени, полученная из кинограмм и фотографий, показана на рис. 6.

Как видно из рис. 3–6, экспериментальные данные находятся в хорошем соответствии с изложенной в [5] качественной теорией рассматриваемого явления.

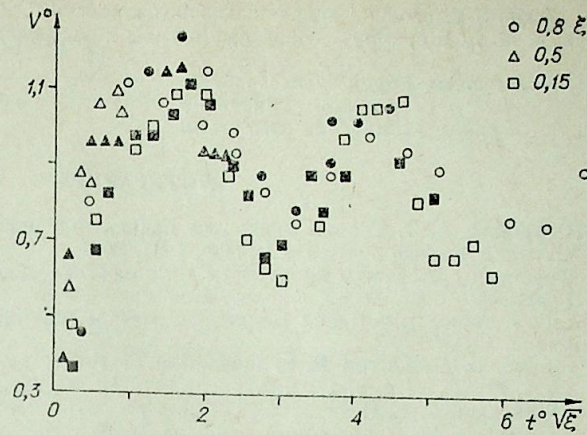


Рис. 6.

ЛИТЕРАТУРА

1. Онуфршев А. Т. Теория движения кольца под действием силы тяжести. Подъем облака атомного взрыва.— ПМТФ, 1967, № 2.
2. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкости. М.: Мир, 1977.
3. Глаголев Ю. П. и др. Образование кольцевого вихря при всплывании легкого газа в тяжелом.— В кн.: Численные методы сплошной среды. Т. 5, № 1. Новосибирск, 1974.
4. Simons G. A., Larson R. S. Formation of vortex ring in a stratified atmosphere.— Phys. Fluids, 1974, v. 17, N 1.
5. Заславский Б. П. О начальной стадии развития термика.— ПМТФ, 1982, № 6.
6. Тарасов В. Ф. О движении всплывающего вихревого кольца.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 23. Новосибирск, 1975.
7. Горев В. А. и др. Моделирование подъема и сгорания облака легкого газа в атмосфере.— ДАН СССР, 1972, т. 205, № 4.
8. Заславский Б. П., Сотников И. М. О движении вихревых колец в однородной и стратифицированной средах. I Всесоюзная конференция «Метрология гидрофизических измерений». Тезисы докладов. М., 1980.
9. Заславский Б. П., Сотников И. М. Экспериментальное исследование всплывающих вихревых колец.— ПМТФ, 1983, № 1.
10. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
11. Кочин Н. Е., Кибель Н. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. М., 1955.
12. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1977.

УДК 532.526

А. В. ДОВГАЛЬ, В. В. КОЗЛОВ

ВОСПРИИМЧИВОСТЬ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ТЕЛАХ С ЗАТУПЛЕННЫМ НОСИКОМ К АКУСТИЧЕСКИМ КОЛЕБАНИЯМ ПОТОКА

Результаты теоретических [1—3] и экспериментальных [4—8] исследований генерации собственных колебаний пограничного слоя волн Толлмина — Шлихтинга возмущениями внешнего потока свидетельствуют о том, что возбуждение пограничного слоя происходит при преобразовании внешних возмущений на пространственных неоднородностях течения. В частном случае в роли такой неоднородности выступает носик обтекаемого тела. Математическая модель, описывающая генерацию колебаний пограничного слоя звуком на затупленном носике, построена в работе [9].

На начальном участке пограничного слоя на теле с затупленным носиком формируется характерный пик в распределении давления с последующей областью неблагоприятного градиента давления. В этой области, согласно результатам работы [10], происходит усиление волн Толлмина — Шлихтинга, зародившихся в пограничном слое.

В связи с этим представляет интерес экспериментальное изучение восприимчивости пограничного слоя на телах с затупленным носиком к возмущениям внешнего потока.

Исследовалось возбуждение колебаний пограничного слоя продольным акустическим полем. Эксперименты проводились на двух моделях, представлявших собой цилиндры диаметром $50,8 \cdot 10^{-3}$ м, длиной 0,4 м, с различной формой носика (рис. 1). Затупленная лобовая часть первой модели сопрягалась с цилиндрическим участком эллипсом с соотношением полуосей $a/b = 25/8,4$. Носик второй модели был выполнен в виде полусферы. Модель 1 располагалась в рабочей части 2 малотурбулентной аэродинамической трубы Т-324 ИТПМ СО АН СССР. Ось симметрии модели совпадала с направлением потока. Для возбуждения акустических колебаний использовался динамический громкоговоритель 3, расположенный в диффузоре установки. Частота звука задавалась при помощи генератора звуковых сигналов ГЗ-34. Для контроля амплитуды и спектрального состава звука применяли «точный импульсный шумомер» PSI 202. С помощью микрофона измерялась интегральная по спектру интенсивность звука, которая варьировалась в диапазоне 80—111 дБ, при этом звук оставался монохроматическим. Течение в пограничном слое исследовалось с помощью термоанемометра постоянной температуры. Датчик термоанемометра 4 перемещался в $x-y$ направлениях с помощью координатного устройства с точностью $5 \cdot 10^{-4}$ м вдоль оси x и $5 \cdot 10^{-5}$ м вдоль оси y .

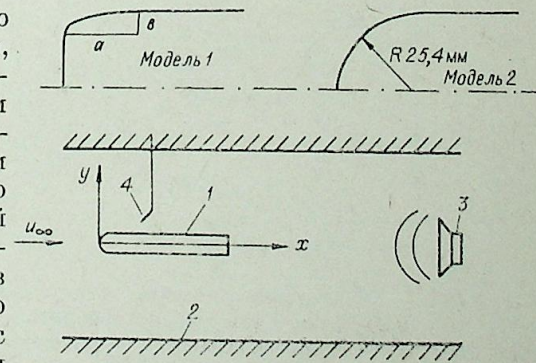


Рис. 1. Схема эксперимента.

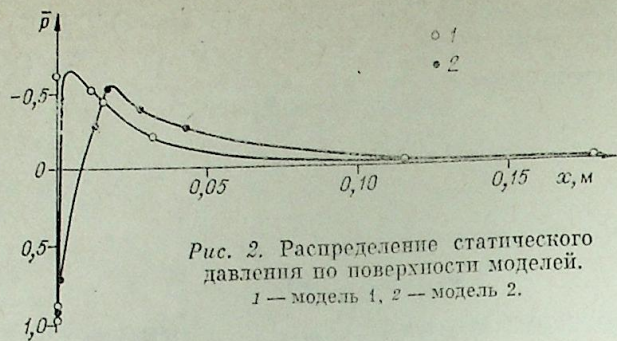


Рис. 2. Распределение статического давления по поверхности моделей.
1 — модель 1, 2 — модель 2.

Пульсационная компонента сигнала термоанемометра регистрировалась на среднеквадратичном вольтметре частотного анализатора с полосой пропускания 4 Гц. Скорость набегающего потока u_∞ в эксперименте равнялась 5 м/с.

Распределение статического давления по поверхности моделей изображено на рис. 2, где $\bar{p} = (p - p_\infty) / \frac{\rho u_\infty^2}{2}$, p_∞ — статическое давление в набегающем потоке.

При возбуждении звуковых колебаний потока в пограничном слое отмечено возникновение вихревых возмущений с частотой звука. Как показано на рис. 3, суперпозиция акустических колебаний с вихревой волной той же частоты вызывает пространственные биения амплитуды a'_Σ сигнала с датчика, где $a'_\Sigma = \sqrt{(\tilde{u} + \tilde{e}_{зв})^2}$; \tilde{u} и $\tilde{e}_{зв}$, соответственно мгновенные значения вихревой и акустической компонент. Амплитуду вихревых возмущений u' удается выделить из общего сигнала с помощью методики, изложенной в [5, 8, 11]. Аналогичные измерения были проведены на обеих моделях при варьировании частоты и интенсивности звука.

На рис. 4 приведена зависимость амплитуды вихревых колебаний от уровня звукового давления в рабочей части трубы. В логарифмиче-

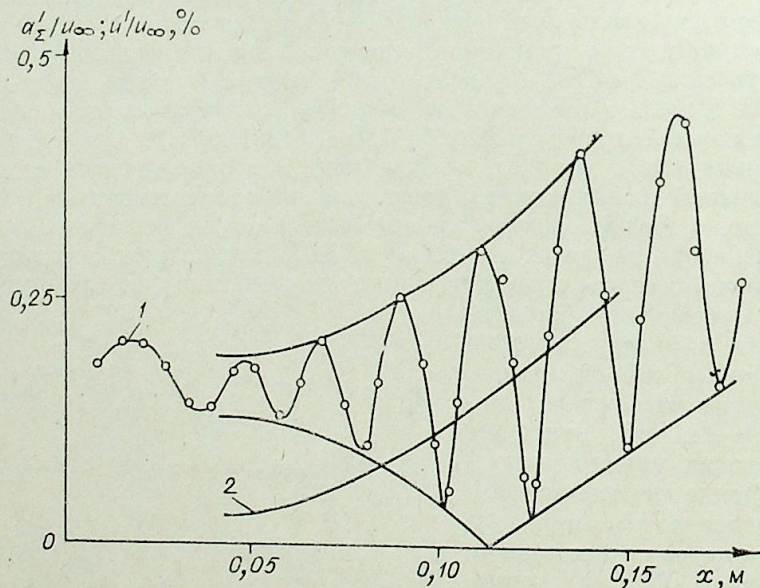


Рис. 3. Разделение вихревой и акустической компонент сигнала с датчика.

1 — общий сигнал с датчика, 2 — амплитуда вихревой волны; модель 1, $f = 89$ Гц, $A_{зв} = 103$ дБ.

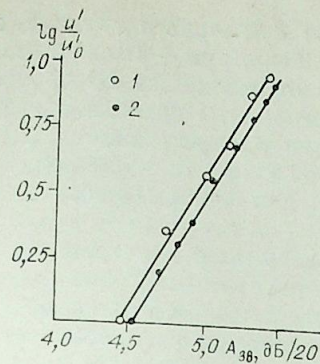


Рис. 4. Зависимость амплитуды вихревых колебаний от интенсивности звука.

$f = 89$ Гц, 1 — модель 1, $x = 130$ мм; 2 — модель 2, $x = 75$ мм.

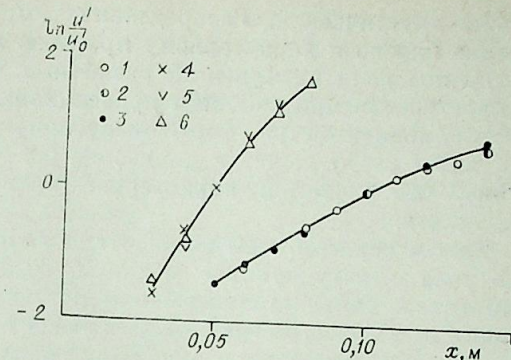


Рис. 5. Кривые нарастания возмущений, $f = 89$ Гц.

Модель 1: $u'_0/u_\infty = 0,30\%$ (1); 0,12 (2); 0,04 (3); модель 2: $u'_0/u_\infty = 0,83\%$ (4); 0,34 (5); 0,18 (6).

ских координатах она подчиняется линейному уравнению: $\lg \frac{u'}{u'_0} =$

$$= k \frac{A_{зв} (дБ)}{20} = k \lg \frac{p'}{p_0},$$

где p' — амплитуда колебаний давления в звуковой волне, а k — тангенс угла наклона к оси абсцисс. Величина k с хорошей точностью равна единице и тогда $u' \sim p'$. Последнее соотношение выражает линейную связь амплитуды пульсаций давления и скорости в вихревой волне, что свидетельствует о линейности преобразования акустических возмущений в вихревые.

Волна формируется на участке сильной неоднородности течения в области $0 < x < 40 \cdot 10^{-3} \div 50 \cdot 10^{-3}$ м и далее усиливается в области неблагоприятного градиента давления. Вероятно, генерация колебаний происходит во всей области ненулевого градиента давления, однако наиболее эффективно в данном случае звук взаимодействует с пограничным слоем в окрестности носика. Кривые нарастания возмущений в пограничном слое обеих моделей приведены на рис. 5. Измерения проводились вблизи максимума возмущения в пограничном слое. Совпадение кривых нарастания при различных амплитудах колебаний говорит о том, что развитие возмущений при амплитудах порядка 1% и меньше не зависит от начальной интенсивности и протекает по линейным законам.

На рис. 6 представлены распределения средней скорости и интенсивности возмущения поперек пограничного слоя. Измерения проводились достаточно далеко от носика, где вихревая компонента становится

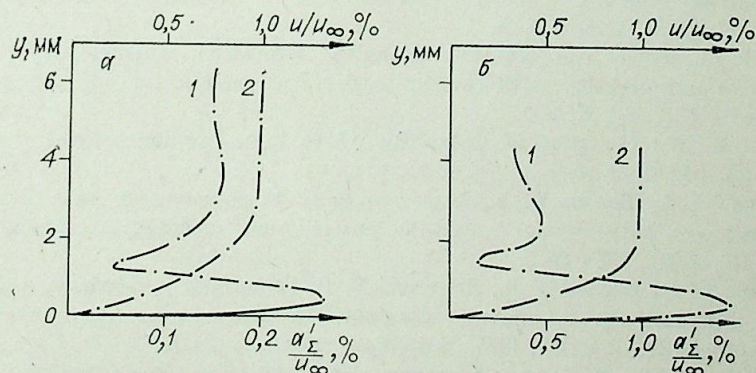


Рис. 6. Профили возмущения и средней скорости в пограничном слое.

1 — a'_Σ , 2 — u ; $f = 89$ Гц, $A_{зв} = 103$ дБ. а) модель 1, $x = 180$ мм, б) модель 2, $x = 72$ мм.

больше акустической. Распределение амплитуды суммарного сигнала с датчика близко к характерному профилю волны Толлмина — Шлихтинга.

Длины волн возмущений различных частот определялись по перпендикулярности пространственных бленн пульсационной компоненты сигнала с датчика термоанометра. Соответствующие скорости распространения возмущений $C_{\phi} = \lambda f$ лежат в диапазоне $0,3 \div 0,45$ от скорости набегающего потока, что является характерной величиной для волн Толлмина — Шлихтинга.

Таким образом, при воздействии акустического поля в пограничном слое тела с затупленным носиком возбуждаются волны Толлмина — Шлихтинга. Генерация колебаний пограничного слоя осуществляется на начальном участке пограничного слоя в области сильной неоднородности течения. Эти результаты показывают, что математическая модель возникновения волн Толлмина — Шлихтинга в осциллирующих пограничных слоях, построенная в работе [9], правильно описывает явление. Ниже по потоку в области неблагоприятного градиента давления происходит нарастание возникающих колебаний.

В соответствии с выводами работ [10, 12] приведенные результаты говорят о том, что в области неблагоприятного градиента давления пограничный слой неустойчив к возмущениям малой амплитуды. Неблагоприятный градиент давления в рассматриваемом случае начинается практически от носика модели и достаточно велик, вследствие чего колебания пограничного слоя начинают нарастать уже при малых числах Рейнольдса, минуя стадию затухания. Проводя сравнение с пограничным слоем на пластине с острой передней кромкой, заметим, что и в этом случае на носике пластины существует область неблагоприятного градиента давления. Однако его величина сравнительно мала и поэтому волны Толлмина — Шлихтинга, родившиеся на носике, затухают прежде, чем попадут в область неустойчивости. Поэтому колебания, возбуждаемые на затупленном носике, могут быть более существенными для перехода к турбулентности в пограничном слое.

Вероятно, возбуждением волн неустойчивости акустическими возмущениями на начальном участке пограничного слоя и объясняется сильное влияние звука на переход к турбулентности на телах с затупленным носиком [13, 14].

*Институт теоретической
и прикладной механики
СО АН СССР, Новосибирск*

*Поступила в редакцию
10/X 1982*

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я., Максимов В. П. Преобразование внешних возмущений в волны пограничного слоя.— Числ. методы механики сплошной среды, 1978, т. 9, № 2.
2. Fasel H. Reaction von zweidimensionalen, laminaren, inkompressiblen Grenzschichten auf periodische Störungen in der Außenströmung.— Z. Angew. Math. und Mech., 1977, Bd 57, II 5.
3. Tam C. K. W. Excitation of instability waves in a two-dimensional shear layer by sound.— J. Fluid Mech., 1978, v. 89, p. 2.
4. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я. Возникновение волн Толлмина — Шлихтинга в пограничном слое при воздействии внешних возмущений.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1978, № 5.
5. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я. Генерация и развитие возмущений малой амплитуды в ламинарном пограничном слое при наличии акустического поля.— Изв. СО АН СССР, 1975, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.
6. Mechel F., Schilz W. Untersuchungen zur akustischen Beeinflussung der Strömungsgrenzschicht in Luft.— Acustica, 1974, v. 14, N 6.
7. Довгаль А. В., Козлов В. В., Левченко В. Я. Экспериментальное исследование реакции пограничного слоя на внешние периодические возмущения.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1980, № 4.

8. Айзип Л. Б., Поляков Н. Ф. Генерация волн Толлмина — Шлихтинга звуком на отдельной перовности поверхности, обтекаемой потоком. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1979. Препринт № 17.
9. Максимов В. П. Возникновение волн Толлмина — Шлихтинга в осциллирующих пограничных слоях.— В кн.: Развитие возмущений в пограничном слое. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1979.
10. Shubauer G. B., Skramstad H. K. Laminar Boundary Layer Oscillation and Transition on Flat Plate.— NASA Tech. Rep., 1948, N 909.
11. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я. Возникновение турбулентности в пограничном слое. Новосибирск: Наука, 1981.
12. Довгаль А. В., Козлов В. В., Косорыгин В. С., Рамазанов М. П. Развитие возмущений в пограничном слое с неблагоприятным градиентом давления. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1980. Препринт № 22.
13. Гиневский А. С., Власов Е. В., Колесников А. В. Аэроакустические взаимодействия. М.: Машиностроение, 1978.
14. Knapp C. F., Roache P. J. A Combined Visual and Hotwire Anemometer Investigation of Boundary-Layer Transition.— AIAA Journ., 1968, v. 6, N 1.

В. И. ЕЛИСЕЕВ

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РАДИАЛЬНОЙ ПЛЕНКИ

В основе теории устойчивости пленочных течений [1—4] лежит допущение о параллельности основного движения. Такое предположение дает возможность получить в линейном приближении аналитические выражения, удобные для анализа устойчивости течения. В случае истечения радиальной пленки (см. рисунок) параметры ее в значительной степени зависят от радиуса, вследствие чего целесообразно рассмотреть влияние непараллельности течения на устойчивость пленки. Проведем рассмотрение пространственной устойчивости в рамках линейной теории с помощью асимптотического метода, предложенного в [5].

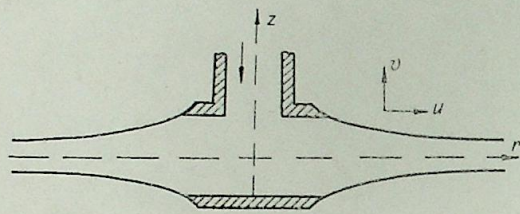


Рис. 1.

1. РАДИАЛЬНАЯ ПЛЕНКА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Выпишем в безразмерном виде основные уравнения и граничные условия для пленки и для окружающей внешней среды

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2} + \frac{a^2}{a_0^2} \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} - \frac{a''}{a} n \frac{\partial \varphi}{\partial n} + 2 \frac{a'}{a^2} n \frac{\partial \varphi}{\partial n} - 2 \frac{a'}{a} n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial n} + \frac{a'^2}{a^2} n^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2} \right\} + \frac{a^2}{a_0^2} \xi^{-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \frac{a'}{a} n \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_{cp}}{\partial N^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{cp}}{\partial \xi^2} - \frac{a''}{a_0} \frac{\partial \varphi_{cp}}{\partial N} - \frac{a'}{a_0} \frac{\partial^2 \varphi_{cp}}{\partial \xi \partial N} + \frac{a'^2}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi_{cp}}{\partial N^2} + \xi^{-1} \times \left(\frac{\partial \varphi_{cp}}{\partial \xi} - \frac{a'}{a_0} \frac{\partial \varphi_{cp}}{\partial N} \right) = 0,$$

$$p + \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - \frac{a'}{a} n \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \frac{a'}{a} n \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^2 + \left(\frac{a_0}{a} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^2 \right\} = \text{const},$$

$$\frac{\rho}{\rho_{cp}} p_{cp} + \frac{\partial \varphi_{cp}}{\partial \tau} = \text{const}_{cp};$$

$$v(\xi, 0) = 0, \quad v(\xi, 1) = \frac{\dot{a}}{a_0} + \frac{a'}{a_0} u(\xi, 1),$$

$$v_{cp}(\xi, 1) = \dot{a}, \quad p(\xi, 1) - p_{cp}(\xi, 0) = -We^{-1} \xi^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial a}{\partial \xi} \right), \quad (1.2)$$

$$p_{cp}(\xi, \infty) = 0.$$

Здесь $\xi = \frac{r}{a_0}$; $n = \frac{z}{a_0}$; $N = \frac{z-a}{a_0}$; r, z — цилиндрическая система координат; a_0 — линейный масштаб; a — толщина пленки; $\varphi = \frac{\Phi}{a_0 U}$; U —

масштаб скорости; Φ — потенциал; u, v — безразмерные составляющие скорости, соответствующие r и z ; $p = P/\rho U^2$; P — давление; $We = \frac{\rho U^2 a_0}{\sigma}$ — число Вебера; σ — коэффициент поверхностного натяжения; ρ — плотность жидкости; ρ_{cp} — плотность среды, штрих-производная по ξ ; точка — по τ , $\tau = Q_0^{-1} U t$; t — время, параметры с индексом cp относятся к внешней среде.

Согласно линейной теории представим решения системы в виде

$$\varphi = \varphi_* + \varphi_\delta, \quad a = y_* + \delta, \quad (1.3)$$

где звездочкой отмечены параметры основного течения, а индексом δ — параметры возмущенного движения, $\varphi_{cp*} = 0$. Для определения решений невозмущенных уравнений необходимо дописать еще два интегральных соотношения — сохранение количества массы в струе и сохранение количества движения:

$$\rho a_0^2 U y_* \xi \int_0^1 u dn = G, \quad (1.4)$$

$$\rho a_0^2 U^2 y_* \xi \int_0^1 u^2 dn = I,$$

откуда следует

$$U = \frac{I}{G}, \quad a_0 = \frac{G}{\rho^{1/2} I^{1/2}}, \quad (1.5)$$

а y_* и φ_* могут быть представлены в виде разложений

$$\varphi_* = \xi + \ln \xi \cdot \varphi_1(n) + \xi^{-1} \varphi_2(n) + \xi^{-2} \varphi_3(n) + \xi^{-3} \varphi_4(n) + \dots, \quad (1.6)$$

$$y_* = \xi^{-1} (1 + \xi^{-1} y_1 + \xi^{-2} y_2 + \xi^{-3} y_3 + \dots).$$

Подставляя выписанные выражения в основные уравнения и опуская промежуточные действия, получим

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_3 = -\frac{1}{2} We^{-1}, \quad \varphi_4 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} n^2, \quad (1.7)$$

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = -We^{-1}.$$

Отсюда видно, что при больших ξ скорость в радиальной пленке идеальной жидкости постоянна и однородна. Неоднородность появляется в пятом члене разложения, но она, как это будет видно в дальнейшем, окажет влияние на устойчивость течения. Толщина пленки при $\xi \rightarrow \infty$ утоньшается по формуле $y_* = \xi^{-1}$.

Выделим теперь из системы (1.1) и (1.2) линейные уравнения для возмущенного движения

$$\frac{\partial^2 \varphi_\delta}{\partial n^2} + y_*^2 \left\{ \frac{\partial^2 \varphi_\delta}{\partial \xi^2} - \frac{y_*''}{y_*} n \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial n} - \left(\frac{\delta''}{y_*} - \frac{y_*'' \delta}{y_*^2} \right) n \frac{\partial \varphi_*}{\partial n} + 2 \frac{y_*'^2}{y_*^2} n \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial n} + 4 \left(\frac{y_*' \delta'}{y_*^2} - \frac{y_*'^2 \delta}{y_*^3} \right) n \frac{\partial \varphi_*}{\partial n} - 2 \frac{y_*'}{y_*} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_\delta}{\partial \xi \partial n} - 2 \left(\frac{\delta'}{y_*} - \frac{y_*' \delta}{y_*^2} \right) n \frac{\partial^2 \varphi_*}{\partial \xi \partial n} + \frac{y_*'^2}{y_*^2} n^2 \frac{\partial^2 \varphi_\delta}{\partial n^2} + 2 \left(\frac{y_*' \delta'}{y_*^2} - \frac{y_*'^2 \delta}{y_*^3} \right) n^2 \frac{\partial^2 \varphi_*}{\partial n^2} \right\} + 2 y_* \delta \left\{ \frac{\partial^2 \varphi_*}{\partial \xi^2} - \frac{y_*''}{y_*} n \frac{\partial \varphi_*}{\partial n} + 2 \frac{y_*'^2}{y_*^2} n \frac{\partial \varphi_*}{\partial n} - 2 \frac{y_*'}{y_*} n \frac{\partial^2 \varphi_*}{\partial \xi \partial n} + \frac{y_*'^2}{y_*^2} n^2 \frac{\partial^2 \varphi_*}{\partial n^2} \right\} + y_*^2 \xi^{-1} \left[\frac{\partial \varphi_\delta}{\partial \xi} - \frac{y_*'}{y_*} n \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial n} - \left(\frac{\delta'}{y_*} - \frac{y_*' \delta}{y_*^2} \right) n \frac{\partial \varphi_*}{\partial n} \right] +$$

$$+ 2y_* \delta \xi^{-1} \left(\frac{\partial \varphi_*}{\partial \xi} - \frac{y'_*}{y_*} n \frac{\partial \varphi_*}{\partial n} \right) = 0, \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_{cp \delta}}{\partial N^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{cp \delta}}{\partial \xi^2} - y_*'' \frac{\partial \varphi_{cp \delta}}{\partial N} - y_*' \frac{\partial^2 \varphi_{cp \delta}}{\partial \xi \partial N} + y_*'^2 \frac{\partial^2 \varphi_{cp \delta}}{\partial N^2} +$$

$$+ \xi^{-1} \left(\frac{\partial \varphi_{cp \delta}}{\partial \xi} - \frac{y'_*}{y_*} n \frac{\partial \varphi_{cp \delta}}{\partial N} \right) = 0.$$

$$p_\delta + \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial \tau} - \frac{\delta'}{y_*} n \frac{\partial \varphi_*}{\partial n} + u_* u_\delta + v_* v_\delta = 0,$$

$$\frac{\rho}{\rho_{cp}} p_{cp \delta} + \frac{\partial \varphi_{cp \delta}}{\partial \tau} = 0,$$

$$v_\delta(\xi, 0) = 0, \quad v_\delta(\xi, 1) = \delta' + y_*' u_\delta(\xi, 1) + \delta' u_*(\xi, 1),$$

$$v_{cp \delta}(\xi, 0) = \delta' + y_*' u_{cp \delta}(\xi, 0), \quad \varphi_{cp \delta}(\infty) = 0,$$

$$p_\delta(\xi, 1) - p_{cp \delta}(\xi, 0) = -We^{-1} \xi^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \delta}{\partial \delta} \right). \quad (1.9)$$

Будем рассматривать только симметричные относительно оси z концентрические возмущения. Из системы (1.8), (1.9) видно, что она имеет тривиальное решение. Для получения собственных решений представим

$$\delta \sim \xi^p \exp [i(\omega \tau + \gamma \xi^k + \dots)],$$

$$\varphi_\delta \sim \xi^p \Phi_\delta(n) \exp [i(\omega \tau + \gamma \xi^k + \dots)],$$

$$\varphi_{cp \delta} \sim \xi^p \Omega_\delta(n) \exp [i(\omega \tau + \gamma \xi^k + \dots)], \quad (1.10)$$

$$p_\delta \sim \xi^r p_\delta(n) \exp [i(\omega \tau + \gamma \xi^k + \dots)],$$

$$p_{cp \delta} \sim \xi^q r_\delta(N \xi^s) \exp [i(\omega \tau + \gamma \xi^k + \dots)].$$

В этих выражениях указаны старшие по ξ члены разложений. В основе определения неизвестных показателей степеней лежат требования регулярности разложений и условие, что γ есть собственное значение, т. е. $\gamma = \gamma(\omega)$. Для удовлетворения этим требованиям необходимо уравнять порядки первых трех членов в кинематическом уравнении для пленки

$$(1.9), \text{ уравнять порядки членов } \frac{\partial^2 \varphi_{cp \delta}}{\partial N^2} \text{ и } \frac{\partial^2 \varphi_{cp \delta}}{\partial \xi^2} \text{ во внешней области,}$$

тогда будем иметь

$$m = p + 1, \quad n = p, \quad r = p + 1, \quad q = p, \quad k = 1, \quad s = 0.$$

Таким образом, решения можно записать в виде

$$\delta = \xi^p \chi, \quad \varphi_\delta = \xi^{p+1} (\Phi_0 + \xi^{-1/2} \Phi_{1/2} + \xi^{-1} \Phi_1 + \dots) \chi,$$

$$\varphi_{cp \delta} = \xi^p (\Omega_0 + \xi^{-1/2} \Omega_{1/2} + \xi^{-1} \Omega_1 + \dots) \chi,$$

$$p_\delta = \xi^{p+1} (p_0 + \xi^{-1/2} p_{1/2} + \xi^{-1} p_1 + \dots) \chi, \quad (1.11)$$

$$p_{cp \delta} = \xi^p (r_0 + \xi^{-1/2} r_{1/2} + \xi^{-1} r_1 + \dots) \chi,$$

$$\chi = \exp [i(\omega \tau + \gamma_0 \xi + \gamma_{1/2} \xi^{1/2} + \gamma_{3/2} \xi^{-1/2} + \dots)].$$

Опуская промежуточные выкладки, сразу выпишем собственные значения

$$\gamma_0 = -\omega, \quad \gamma_{1/2 \text{ I, II}} = \pm 2\gamma_0 \left(\gamma_0^2 We^{-1} - \omega \frac{\rho_{cp}}{\rho} \right)^{1/2},$$

$$p = -\frac{1}{2} + j2\gamma_0 \left(\gamma_0^2 We^{-1} - \omega \frac{\rho_{cp}}{2\rho} \right). \quad (1.12)$$

(с индексом I указан первый корень, с индексом II — второй). Тогда

$$\delta = \exp [i(\omega \tau + f_i) + f_r],$$

$$f_i = - \left[\lambda \xi + 2\lambda \left(\lambda^2 We^{-1} - \lambda \frac{\rho_{cp}}{\rho} \right) \ln \xi \right], \quad (1.13)$$

$$f_r = \mp 2\lambda \left(\lambda \frac{\rho_{cp}}{\rho} - \lambda^2 We^{-1} \right)^{1/2} \xi^{1/2} - \frac{1}{2} \ln \xi, \quad \lambda = -\gamma_0 > 0.$$

В теории временной устойчивости для плоскопараллельного течения имеем

$$\omega = - \left(1 + \frac{\rho_{cp}}{\rho} \right)^{-1} \lambda \pm \sqrt{\frac{\kappa \lambda^3}{\left(1 + \frac{\rho_{cp}}{\rho} \right)^2} \left[\lambda^2 We^{-1} \left(1 + \kappa \frac{\rho_{cp}}{\rho} \right) - \lambda \frac{\rho_{cp}}{\rho} \right]},$$

$$\kappa = \frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{\lambda^2 + e^{-\lambda}}, \quad (1.14)$$

откуда следует, что течение неустойчиво при тех длинах волн, когда $\lambda We^{-1} \left(1 + \kappa \frac{\rho_{cp}}{\rho} \right) < \frac{\rho_{cp}}{\rho}$. Если это выражение справедливо для длинных волн ($\lambda \ll 1$), то $\lambda < \frac{\rho_{cp}}{\rho} We$ является условием устойчивости пленки. В нашем случае это же выражение также указывает на рост или затухание возмущений. Отметим одну особенность устойчивости радиальной пленки по сравнению с плоскопараллельным течением. Если положить $\frac{\rho_{cp}}{\rho} = 0$, течение плоской пленки нейтрально устойчиво. Для радиальной пленки возмущения затухают, как $\xi^{-1/2}$, но толщина пленки утоньшается, как ξ^{-1} , поэтому видно, что при больших ξ толщина пленки делается меньше, чем амплитуда некоторого малого возмущения, т. е. и в данном случае пленка должна распадаться. В этом и проявилось влияние указанной неоднородности профиля скорости. Дальнейший учет членов должен повлиять количественно на величину, определяющую максимальный рост возмущений. Однако на характер распространения возмущений эти члены не влияют, так как с ростом ξ они уменьшаются.

Исходя из найденного количества приближений, определим фазовую скорость наиболее растущих возмущений. При $\lambda = \frac{3}{4} \frac{\rho_{cp}}{\rho} We$ величина f_r максимальна, а безразмерная фазовая скорость

$$c_{cp} = \left(1 - \frac{3}{8} \xi^{-1} \frac{\rho_{cp}^2}{\rho^2} We \right)^{-1}, \quad (1.15)$$

которая с ростом ξ приближается к фазовой скорости возмущений на плоской пленке. Для случая струйного течения жидкости в газе $\frac{\rho_{cp}}{\rho} \ll 1$, поэтому фазовые скорости для радиальной пленки и плоской почти совпадают.

2. РАДИАЛЬНАЯ ПЛЕНКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Рассмотрим задачу об устойчивости радиальной пленки вязкой жидкости. Основные уравнения и граничные условия имеют вид:

$$u \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{a'}{a} n \frac{\partial u}{\partial n} \right) + \frac{a_0}{a} v \frac{\partial u}{\partial n} = - \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{a'}{a} n \frac{\partial p}{\partial n} \right) + Re^{-1} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \right.$$

$$- n \frac{a''}{a} \frac{\partial u}{\partial n} + 2 \frac{a'^2}{a^2} n \frac{\partial u}{\partial n} - 2 \frac{a'}{a} n \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial n} + \frac{a'^2}{a^2} n^2 \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \xi^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{a'}{a} n \frac{\partial u}{\partial n} \right) +$$

$$\left. + \xi^{-2} u + \frac{a_0^2}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right\},$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{a'}{a} n \frac{\partial v}{\partial n} \right) + \frac{a_0}{a} v \frac{\partial v}{\partial n} = - \frac{a_0}{a} \frac{\partial p}{\partial n} + Re^{-1} \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - n \frac{a''}{a} \frac{\partial v}{\partial n} + \right.$$

$$+ 2 \frac{a'^2}{a^2} n \frac{\partial v}{\partial n} - 2 \frac{a'}{a} n \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial n} + \frac{a'^2}{a^2} n^2 \frac{\partial^2 v}{\partial n^2} + \xi^{-1} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{a'}{a} n \frac{\partial v}{\partial n} \right) + \frac{a_0^2}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial n^2} \Big\}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{a'}{a} n \frac{\partial u}{\partial n} + \xi^{-1} u + \frac{a_0}{a} \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \quad \text{Re} = \frac{a_0 U}{v};$$

$$v(\xi, 0) = 0, \quad v(\xi, 1) = \frac{\dot{a}}{a_0} + \frac{a'}{a_0} u(\xi, 1),$$

$$\frac{a_0}{a} \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{a'}{a} n \frac{\partial v}{\partial n} = 2 \frac{a'}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{a_0}{a} \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{a'}{a} n \frac{\partial u}{\partial n} \right) \quad (n=1),$$

$$-p + 2 \text{Re}^{-1} \left\{ \frac{a_0}{a} \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{a'^2}{a^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{a'}{a} n \frac{\partial u}{\partial n} \right) \right\} = -\frac{\rho_{cp}}{\rho} p_{cp} + \\ + \text{We}^{-1} \xi^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial a}{\partial \xi} \right). \quad (2.2)$$

Во внешней области считаем газ идеальным, поэтому используем уравнения такие же, как и в предыдущем случае. Для невозмущенного движения вязкой жидкости также необходимы интегральные условия (1.4), с помощью которых можно сформулировать решения в виде следующих разложений:

$$u_* = 1 + \xi^{-1} u_1(n) + \xi^{-2} u_2(n) + \xi^{-3} u_3(n) + \dots, \\ v_* = \xi^{-2} [v_0(n) + \xi^{-1} v_1(n) + \xi^{-2} v_2(n) + \dots], \\ p_* = \xi^{-1} [p_0(n) + \xi^{-1} p_1(n) + \xi^{-2} p_2(n) + \dots] + (\rho_{cp}/\rho p_{cp}), \quad (2.3) \\ y_* = \xi^{-1} (1 + \xi^{-1} y_1 + \xi^{-2} y_2 + \dots).$$

После подстановки (2.3) в уравнения и граничные условия получим

$$u_1 = 6 \text{Re}^{-1}, \quad u_2 = -42 \text{Re}^{-2}, \\ v_0 = -n, \quad v_1 = 6 \text{Re}^{-1} n, \quad v_2 = -120 \text{Re}^{-2} n, \\ p_0 = -2 \text{Re}^{-1}, \quad p_1 = 0, \quad p_2 = -84 \text{Re}^{-3}, \\ y_1 = -6 \text{Re}^{-1}, \quad y_2 = 78 \text{Re}^{-2}. \quad (2.4)$$

Решение линейризованных уравнений (2.1) и (2.2) (из-за громоздкости они не выписаны) ищем в виде (1.11), тогда $\gamma_{0I} = -\omega$,

$$\gamma_{0II} = -i \frac{\text{Re}}{8} + i \frac{\text{Re}}{8} \left\{ \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + 16^2 \frac{\omega^2}{\text{Re}^2} + 1} \right]} + i \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + 16^2 \frac{\omega^2}{\text{Re}^2} - 1} \right]} \right\}.$$

$$\gamma_{1/2} = 0, \quad p_I = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \text{Re} \left(\gamma_0^2 \text{We}^{-1} - \omega \frac{\rho_{cp}}{\rho} \right) - i6 \text{Re}^{-1} \gamma_0, \quad (2.5)$$

$$p_{II} = (1 - i8 \text{Re}^{-1} \gamma_0)^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \text{Re} \left(\gamma_0^2 \text{We}^{-1} + \frac{\omega^2 \rho_{cp}}{\gamma_0 \rho} \right) - \frac{1}{2} - i6 \text{Re}^{-1} \gamma_0 \right\}.$$

При

$$\frac{\omega}{\text{Re}} \ll 1,$$

$$\gamma_{0II} = -\omega + i4 \frac{\omega^2}{\text{Re}}, \quad (2.6)$$

$$p_{II} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \text{Re} \left(\omega^2 \text{We}^{-1} - \omega \frac{\rho_{cp}}{\rho} \right) + 24 \frac{\omega^2}{\text{Re}^2} - \\ - i \left(4\omega^3 \text{We}^{-1} - \omega \frac{\rho_{cp}}{\rho} - 10 \frac{\omega}{\text{Re}} \right).$$

При рассмотрении первой группы собственных значений (индекс I) видно, что, если $\gamma_0^2 \text{We}^{-1} < \omega \frac{\rho_{cp}}{\rho} + 2\text{Re}^{-1}$, то, как в предыдущем случае, с ростом ξ возмущения растут. Вторая группа собственных значений указывает на более сложное поведение возмущений. В этом случае, как следует из (2.6),

$$f_{rII} = -4 \frac{\omega^2}{\text{Re}} \xi + \left[\frac{\text{Re}}{4} \left(\omega^2 \text{We}^{-1} - \omega \frac{\rho_{cp}}{\rho} \right) + 24 \frac{\omega^2}{\text{Re}^2} - \frac{1}{2} \right] \ln \xi. \quad (2.7)$$

Если второй член отрицательный, то возмущения затухают монотонно. Если же этот член положительный, то возмущения могут нарастать до некоторой максимальной величины, а затем, если пленка не разрушается, начинает преобладать первый член и возмущения убывают.

В заключение следует указать, что полученные асимптотические разложения сингулярны относительно Re , т. е. при $\text{Re} \rightarrow \infty$ решения для вязкой жидкости не переходят в решения для идеальной жидкости. Математически это следует из того, что в случае вязкой жидкости γ_{0I} и γ_{0II} отличаются друг от друга, причем при $\text{Re} \rightarrow \infty$ $\gamma_{0II} \rightarrow \gamma_{0I}$, т. е. для невязкой жидкости эти два корня совпадают. Такое совпадение дает разветвление в следующем приближении, т. е. в (1.12) для $\gamma_{1/2}$ мы имеем два различных корня, что обуславливает два типа возмущения: затухающее и возрастающее. Для вязкой жидкости $\gamma_{1/2} = 0$, а два типа возмущения обусловлены уже γ_{0I} и γ_{0II} . Причиной такой сингулярности является то, что в основных уравнениях движения вязкие члены относятся к динамическим, как ξ^2/Re , поэтому в разложениях по ξ вязкие члены являются старшими, а при $\text{Re} \rightarrow \infty$ они становятся малыми. Исходя из этого, полученные решения для вязкой жидкости будут справедливы для малых и средних чисел Re .

Днепропетровский государственный университет

Поступила в редакцию 12/Х 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Х. Гидродинамика. М.—Л.: Гостехиздат, 1947.
2. Лышевский А. С. Закономерности дробления жидкостей механическими форсунками давления. Новочеркасск, 1961.
3. Шкадов В. Я. Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости.— Научн. труды МГУ, 1973, № 25.
4. Дитякин Ю. Ф., Княчко Л. А., Новиков Б. В., Ягодкин В. И. Распыливание жидкостей. М.: Машиностроение, 1977.
5. Елисеев В. И. Устойчивость струй идеальной несжимаемой жидкости.— ПМТФ, 1981, № 3.

УДК 532.69 : 532.517.2

Л. И. СЕНЬ

МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ СЛОЯ ЖИДКОСТИ
ПЕРЕД СЛИВНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Рассмотрим течение слоя жидкости перед сливным отверстием с острой кромкой при $\delta/r_0 < 1$ (см. рисунок). При относительно небольших размерах сливного отверстия (трубы) такое течение можно считать пленочным.

Толщина сливаемого слоя жидкости (пленки) на достаточно большом удалении от оси отверстия ($r \gg r_0$) равна δ , скорость жидкости в слое равна v . На кромке сливного отверстия при $r = r_0$ толщина слоя и скорость слива — соответственно δ_0 и v_0 .

В сливаемом слое выделим на рисунке штриховой линией пьезометрическую поверхность, проходящую через острую кромку. Эта поверхность делит пленку жидкости на два слоя: верхний — толщиной δ_0 и нижний — толщиной δ_y . Рассмотрим движение жидкости в этих слоях.

Для элементарной струйки тока и всего потока верхнего слоя из уравнения Бернулли следует

$$v_{x0}^2/2g = \delta_y, \quad (1)$$

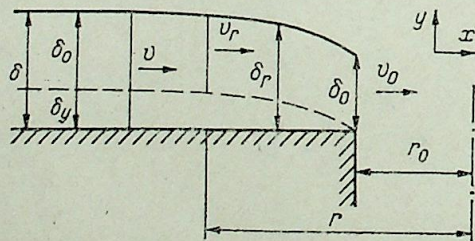
где v_{x0} — скорость потока на кромке сливного отверстия при безнапорном течении только верхнего слоя. Предполагаем, что при $r \gg r_0$ скорость $v = 0$.

В нижнем слое толщиной δ_y течение жидкости является напорным. При наличии источника в нижнем слое нет самостоятельного стока, в силу непроницаемости подстилающей поверхности линии тока нижнего слоя проходят через пьезометрическую поверхность в верхний слой. Напор нижнего слоя сообщает дополнительную энергию верхнему слою. Величина этой энергии определяется значением δ_y .

В результате на сливной кромке установится скорость жидкости, определяемая удвоенным значением толщины δ_y . Поэтому уравнение Бернулли для всего потока в целом записывается в виде

$$\frac{v_0^2}{2g} = 2\delta_y. \quad (2)$$

Этот результат справедлив не только для течения идеальной жидкости по горизонтальной поверхности, но и при любом профиле подстилающей поверхности, расположенной ниже горизонта, проходящего через острую сливную кромку.



Модель течения слоя жидкости перед сливным отверстием.

Учитывая изложенное, для верхнего слоя целесообразно ввести понятие приведенной скорости v_r , которая отражает расход потока в целом по толщине только верхнего слоя δ_0 . В этом случае уравнения неразрывности и сохранения энергии потока в целом представляются в виде

$$rv_r = r_0 v_0; \quad (3)$$

$$2\delta = 2\delta_r + \frac{v_r^2}{2g} = 2\delta_0 + \frac{v_0^2}{2g}. \quad (4)$$

Связывая характеристики потока соотношением $\delta_0 = g_0/v_0$, где $g_0 = Q/2\pi r_0$ — удельный расход жидкости, с учетом (4) получим,

$$\delta = \frac{g_0}{v_0} + \frac{v_0^2}{4g}. \quad (5)$$

Воспользовавшись предположением Бэтчелора о том, что δ имеет минимум по переменной v на гребне плотины (сливной кромке), положим $\delta' = 0$ *. Тогда из (5) следует дополнительное уравнение

$$-\frac{g_0}{v_0^2} + \frac{v_0}{2g} = 0, \quad (6)$$

позволяющее получить краевые решения в виде:

$$v_0 = \sqrt{2g\delta_0} = \sqrt[3]{2gq_0}; \quad (7)$$

$$\delta_0 = \sqrt[3]{q_0^2/2g}; \quad (8)$$

$$q_0 = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{g\delta_0^3}{3}}; \quad (9)$$

$$\delta = 1,5\delta_0. \quad (10)$$

Результат (10) получен в виде Бэтчелора, решения (7)–(9) в $\sqrt{2}$ раз отличаются от данных Бэтчелора, который считал течение потока в целом безнапорным. По данным Бэтчелора получалось, что при заданной величине δ расход реальной жидкости через плотину q_0 мог быть больше вычисленного для идеальной жидкости. В действительности в соответствии с формулой (9) расход потока идеальной жидкости в 1,41 раза больше, чем по расчетам Бэтчелора, и расход потока реальной жидкости в результате потерь всегда меньше значения, определяемого по формуле (9). Использование полученных результатов в виде (7)–(10) исключает указанное противоречие и дает возможность оценить величину потерь при движении реальной жидкости перед сливной кромкой (гребнем плотины).

Для оценки величины потерь потока при движении жидкости к сливной кромке необходимо выяснить изменение толщины пленки по радиусу. Решение такой задачи ранее не рассматривалось.

Определим профиль поверхности сливаемого слоя (пленки) жидкости. Для этого из уравнений (3), (4) и (7) получим

$$y = \delta - \delta_r = \frac{\delta_0}{2} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right); \quad (11)$$

$$\delta_r = \delta_0 + \frac{\delta_0}{2} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right). \quad (12)$$

Угол между линиями тока верхнего слоя и горизонтом найдем из выражения (11) в виде

$$\frac{dy}{dr} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\delta_0 r_0^2}{r^3}. \quad (13)$$

* Бэтчелор Дж. К. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.

Угол входа потока в сливное отверстие при $r = r_0$

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \delta_0 / r_0. \quad (14)$$

Определим характеристики потока для максимального расхода q_{0M} , соответствующего затоплению воронки на уровне сливной кромки. Из-за встречного взаимодействия линий тока общая скорость потока в радиальном направлении в районе сливного отверстия равна нулю, поэтому в соответствии с законом сохранения энергии скорость потока в направлении оси y

$$v_{yM} = \sqrt{2g\delta_m}, \quad (15)$$

где δ_m — толщина сливаемого слоя при максимальном расходе и $r \gg r_0$. Из условия неразрывности такого потока следует

$$2\pi r_0 \delta_{0M} v_{0M} = \pi r_0^2 v_{yM}. \quad (16)$$

С учетом (14) и (7) получим

$$\operatorname{tg} \alpha_{0M} = \delta_{0M} / r_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}. \quad (17)$$

или угол входа потока при максимальном расходе жидкости $\alpha_{0M} = 31,5^\circ$. Из уравнения (9) получим максимальный удельный расход потока идеальной жидкости:

$$q_{0M} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{4}{3}} r_0 \sqrt{gr_0}, \quad (18)$$

который определяется радиусом сливного отверстия.

Уравнения (7)–(14) и (17)–(18) полностью описывают характеристики потока идеальной жидкости, стекающей в сливное отверстие с острой кромкой.

Дальневосточный политехнический институт
им. В. В. Куйбышева, Владивосток

Поступила в редакцию
14/XII 1982

П. Г. БЕДРИКОВЕЦКИЙ, Я. Е. ДОРФМАН

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН КОНЦЕНТРАЦИИ КОМПОНЕНТОВ ПРИ ВЫТЕСНЕНИИ НЕФТИ СПИРТОВЫМ РАСТВОРОМ

В современной проблеме повышения нефтеотдачи важное место занимает процесс вытеснения нефти раствором спирта [1]. Ранее [2, 3] были изучены процессы вытеснения нефти слабоконцентрированными растворами активных примесей. В работе [4] получены решения задач фронтального вытеснения нефти раствором примеси любой концентрации в предположении постоянства плотностей фаз и линейной функции распределения примеси по фазам. В работах [5, 6] получены уравнения для любых концентраций и плотностей фаз в предположении сохранения суммарного объема при растворении. Эти уравнения выведены для области двухфазного течения системы вода — нефть — растворитель, для которых получены некоторые автомодельные решения. В данной работе система уравнений распространена на однофазную область. Исследована задача Римана о распаде произвольного разрыва и процесс фронтального вытеснения для произвольных значений концентрации закачиваемого раствора и заводненности пласта. Решена задача о вытеснении нефти оторочкой спиртового раствора, продвигаемой по пласту водой.

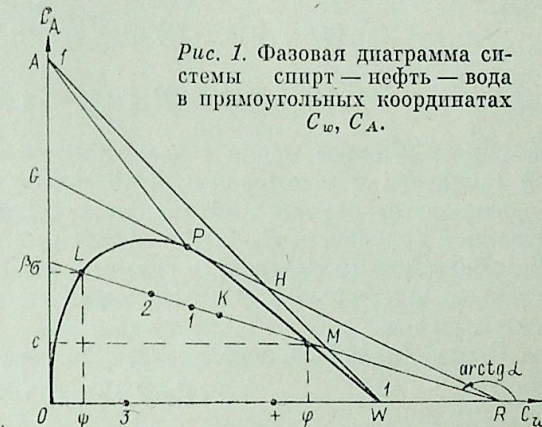


Рис. 1. Фазовая диаграмма системы спирт — нефть — вода в прямоугольных координатах C_w, C_A .

Уравнения движения. В системе спирт — нефть — вода в зависимости от состава смеси реализуется как однофазное, так и двухфазное течение. На рис. 1 фазовая диаграмма в форме треугольника Гиббса — Розебома перестроена в прямоугольных координатах. Точки состава однофазной системы лежат выше бинодала WPO . Если точка $K(C_w, C_A)$ лежит ниже бинодала, то система состоит из двух фаз — водной $M(\varphi(c), c)$ и нефтяной $L(\psi(c), \sigma(c))$. Точки K, L и M лежат на одной прямой — ноде.

$$C_w = \varphi(c) \cdot s + \psi(c) \cdot (1 - s), \quad C_A = c \cdot s + \sigma(c) \cdot (1 - s), \quad (1)$$

причем $s = KL/LM$.

Процесс двухфазной трехкомпонентной фильтрации описывается системой уравнений [7]

$$m \frac{\partial}{\partial t} [C_{i1}^m s \rho_1 + C_{i2}^m (1 - s) \rho_2] + \frac{\partial}{\partial x} [C_{i1}^m W_1 \rho_1 + C_{i2}^m W_2 \rho_2] = 0.$$

В работе [4] предполагается, что ρ_1 и ρ_2 постоянны. Мы же будем считать, что сохраняются удельные объемы компонента при растворении, т. е. $\rho_1 = \sum C_{i1} \rho_i, \rho_2 = \sum C_{i2} \rho_i, i = A, O, W$. Тогда система уравнений приобретает вид

$$m \frac{\partial}{\partial t} \{C_{i1} s \rho_i + C_{i2} (1-s) \rho_i\} + \frac{\partial}{\partial x} \{C_{i1} W_1 \rho_i + C_{i2} W_2 \rho_i\} = 0.$$

В предположении несжимаемости компонент получаем

$$m \frac{\partial}{\partial t} \{C_{i1} s + C_{i2} (1-s)\} + \frac{\partial}{\partial x} \{C_{i1} W_1 + C_{i2} W_2\} = 0. \quad (2)$$

Просуммировав (2) по $i = A, O, W$, получим

$$\partial(W_1 + W_2)/\partial x' = 0, \quad W_1 + W_2 = W(t'). \quad (3)$$

Таким образом, в отличие от случая, рассмотренного в работе [4], суммарный поток является интегралом движения, что позволяет нам в дальнейшем рассматривать любые два из трех уравнений (2). Скорости фильтрации фаз подчиняются обобщенному закону Дарси [8]

$$W_j = -k \cdot f_j(s) \cdot \mu_j^{-1} (C_{ij}) \cdot \partial p / \partial x', \quad i = A, O, W; \quad j = 1, 2. \quad (4)$$

Используя (3) и (4), вводим обычным образом функцию Баклея — Леверетта, равную доле водной фазы в потоке,

$$W_1 = F \cdot W, \quad W_2 = (1-F) \cdot W, \quad F = \{1 + f_2(s) \mu_1(C_{i1}) / f_1(s) \mu_2(C_{i2})\}^{-1}. \quad (5)$$

Подставляя выражения для W_j (5) в (2) и выбирая из трех уравнений два — уравнения баланса масс воды и спирта, получаем окончательно

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \{\psi s + \psi(1-s)\} + \frac{\partial}{\partial x} \{\varphi F + \psi(1-F)\} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \{cs + \sigma(1-s)\} + \frac{\partial}{\partial x} \{cF + \sigma(1-F)\} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь безразмерное время t вводится как отношение объема прокаченной жидкости к некоторому характерному объему Ω_0 , $t = \int W(\eta) d\eta / \Omega_0$, x — отношение порового объема, отсчитываемого вдоль пласта от нагнетательной галереи, к Ω_0 , $x = \int m(\eta) A(\eta) d\eta / \Omega_0$. Введение таких переменных позволяет рассматривать задачи с любыми функциями $W(t')$, $m(x')$, $A(x')$. При радиальном вытеснении $x = r^2/2$, где r — безразмерный радиус.

В однофазной области происходит конвективный перенос компонент

$$\partial C_i / \partial t + \partial C_i / \partial x = 0. \quad (7)$$

Для формального определения величин «насыщенности» и «фазовых концентраций» в однофазной области продолжим ноды за бинадаль, а выше касательной HG к бинадали в критической точке P положим их параллельными HG . Дополним бинадаль отрезком PA . Во всем треугольнике определим фазовые концентрации из пересечения ноды с бинадалью, а s — из соотношения (4). В областях WPH , OPG , HPA и GPA $1 < s < \infty$, $-\infty < s < 0$, $s = \infty$ и $s = -\infty$, соответственно. Положив в однофазной области $F = s$, получим, что системы (6) и (7) совпадают.

Таким образом, система уравнений (6) описывает процесс фильтрации в одно- и двухфазных областях. Перейдем к неизвестным C_w , c и обозначим $u_w = \varphi \cdot F + \psi \cdot (1-F)$,

$$\frac{\partial C_w}{\partial t} + \frac{\partial u_w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} (\alpha C_w + \beta) + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha u_w + \beta) = 0, \quad (8)$$

где $\alpha(c) = (c - \sigma)(\varphi - \psi)^{-1}$, $\beta(c) = \sigma - \varphi \cdot (c - \sigma)(\varphi - \psi)^{-1}$. Поскольку $u_w = u_w(C_w, c)$, в качестве неизвестных можно рассматривать как (C_w, c) , так и (C_w, u_w) . Плоскость (C_w, u_w) удобна тем, что первое уравнение системы (8) приобретает на ней ясный геометрический смысл, как будет показано в дальнейшем. Кривые $F = F(s, c)$ перестраиваются в кривые $u_w = u_w(C_w, c)$ сжатием в $(\varphi - \psi)$ раз и смещением на вектор (ψ, ψ) (рис. 2). На рис. 1 α — тангенс угла наклона ноды к оси C_w , β — ордината точки пересечения ноды с осью C_w .

Анализ уравнений движения. Система уравнений (8) является гиперболической системой квазилинейных уравнений [9]. Она записывается в инвариантах Римана

$$dx/dt = \xi_1 = \partial u_w / \partial C_w, \quad dI/dt = 0, \quad (9)$$

$$dx/dt = \xi_2 = (u_w + \beta'/\alpha')(C_w + \beta'/\alpha')^{-1}, \quad dc/dt = 0. \quad (10)$$

Существование инварианта $I(C_w, c)$ следует из известного факта интегрируемости произвольной дифференциальной 1-формы в R^2 (в данном случае — в пространстве (C_w, c)). При преобразовании годографа $j: (x, t) \rightarrow (C_w, u_w)$ характеристики семейства (9) перейдут в простые волны

$$du_w/dC_w = (u_w + \beta'/\alpha')(C_w + \beta'/\alpha')^{-1} = \xi_2, \quad (11)$$

а характеристики семейства (10) — в простые волны

$$du_w/dC_w = \partial u_w / \partial C_w = \xi_1. \quad (12)$$

На плоскости (C_w, u_w) волны (11) изображаются линиями уровня функции $I(C_w, c)$. Обозначим их c^- . Волны (12) изображаются участками кривых $c = \text{const}$, обозначим их c^+ .

Вдоль кривой $\xi_1 = \xi_2$ происходит смена кратности характеристик. Система не является строго гиперболической. Система (8) допускает разрывные решения. Условия Гюгонно $V \cdot [C_w] = [u_w]$, $V \cdot [\alpha C_w + \beta] = [\alpha u_w + \beta]$ при $c^- = c^+$ — к виду

$$V = [u_w]/[C_w], \quad (13)$$

а при $c^- \neq c^+$ — к виду

$$V = [u_w]/[C_w] = (u_w^\pm + [\beta]/[\alpha]) (C_w^\pm + [\beta]/[\alpha])^{-1}. \quad (14)$$

Пусть две ноды, c^- и c^+ (рис. 1) пересекаются в точке (R, T) . Тогда $\beta^\pm = T - \alpha^\pm \cdot R$, откуда следует

$$[\beta]/[\alpha] = -R. \quad (15)$$

Таким образом, прямая, соединяющая точки (C_w^-, u_w^-) и (C_w^+, u_w^+) для скачка типа (14), проходит через полюс $O_c(R, R)$ (см. рис. 2). Обозначим такие скачки $-J_c \rightarrow$, а скачки типа (13) $-J \rightarrow$. Скорость скачка равна тангенсу угла наклона прямой, соединяющей точки перед разрывом и за ним в плоскости (C_w, u_w) .

Устремив в (15) $[c]$ к нулю, получим

$$\beta'/\alpha' = -R(c). \quad (16)$$

Это значит, что касательная к волне (11) проходит через полюс $O_c(R(c), R(c))$.

На принятой в теории фильтрации плоскости (s, F) [5, 6] простые волны и разрывы для системы уравнений (8) не имеют столь ясного геометрического смысла, что затрудняет исследование решений. Так, в работе [5] простые волны типа (11) рассчитывались на ЭВМ.

На плоскости (α, β) рассмотрим параметрически заданную кривую $[\alpha(c), \beta(c)]$. Из формулы (16) следует, что $R(c) = \text{const}$ тогда и только тогда, когда зависимость $\beta(\alpha)$ линейна. На фазовой диаграмме при этом все ноды будут пересекаться в одной точке $(R, 0)$, что соответствует известному в физической химии правилу Тарасенкова. В этом случае простые волны (11) вырождаются в контактные разрывы (14). При этом $I = (u_w - R)/(C_w - R)$, условие (14) принимает вид $V = I^\pm$.

В качестве условия устойчивости разрывного решения принимаем сообщение критерия Олейника на класс невыпуклых гиперболических систем [9]: разрыв устойчив, если его скорость не больше скорости ударного перехода из точки за разрывом в любую точку ударной аднабаты, соединяющей точки за разрывом и перед ним. Для системы (8) это есть условие существования структуры разрыва при введении в систему уравнений капиллярного скачка межфазного давления и кинетики процесса

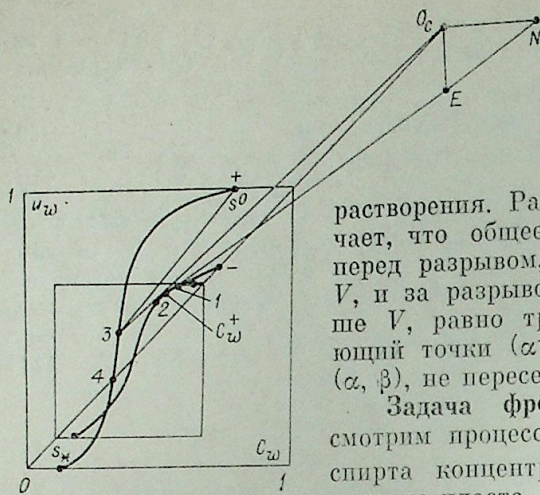


Рис. 2. Фазовая плоскость (C_w, u_w) системы уравнений движения.

растворения. Рассматриваемый критерий означает, что общее число характеристик в зоне перед разрывом, скорость которых не больше V , и за разрывом, скорость которых не меньше V , равно трем, и, что отрезок, соединяющий точки (α^-, β^-) и (α^+, β^+) в плоскости (α, β) , не пересекает кривой $\beta(\alpha)$.

Задача фронтального вытеснения. Рассмотрим процесс вытеснения нефти раствором спирта концентрации $C_A^0 = 1 - C_w^0$ из обводненного пласта

$$C_w(x, 0) = s^0, \quad c(x, 0) = 0, \quad C_w(0, t) = C_w^0, \quad c(0, t) = c^0. \quad (17)$$

Автомодельное решение задачи о распаде разрыва (17) может состоять из разрывов и волн обоих семейств и зон покоя $-P-$.

Рассмотрим контактный случай линейной зависимости $\beta(\alpha)$. В принятых обозначениях решению задачи (17) в плоскости (C_w, u_w) соответствует путь (см. рис. 2)

$$(C_w^0, c^0) - P - J \rightarrow (C_w^1, c^0) - C_w - (C_w^2, c^0) - J_c \rightarrow (C_w^3, 0) - P - J \rightarrow (s^0, 0). \quad (18)$$

Точки 1 и 2 получены построением касательных к кривой $c = c^0$ из точки (C_w^0, c^0) и полюса O_c соответственно. Путь, соответствующий решению (18), на фазовой диаграмме изображен на рис. 4.

Опишем структуру зоны вытеснения. Вслед за валом вытесняемой воды следует водонефтяной вал. Скорость его фронта равна тангенсу угла наклона прямой $(s_0, 0) - (C_w^3, 0)$, обводненность в зоне вала равна u_w^3 . Спирт в зоне отсутствует. Далее следует спиртоводонефтяной вал. Обводненность в нем возрастает от u_w^2 до u_w^1 , фазовая концентрация спирта равна своему максимальному значению $c = c^0$. Следует отметить необычный эффект: общая концентрация спирта в зоне вала убывает от C_A^2 до C_A^1 (см. рис. 1). Скорость фронта спиртоводонефтяного вала V_2 равна тангенсу угла наклона прямой $O_c - (C_w^2, c^0)$. Затем идет зона закачиваемого спиртового раствора, в которой нефти нет. Скорость фронта этой зоны V_1 определяется наклоном прямой $(C_w^0, c^0) - (C_w^1, c^0)$.

При $s_* < C_w(x, 0) < s^0$ (различные степени обводненности пласта перед закачкой спирта) выделяются четыре различных типа решения (рис. 3), отличающихся последовательностью $-J \rightarrow$ и $-C_w -$ элементов, соединяющих точки C_w^3 и $C_w(x, 0)$ на кривой $c = 0$.

В решении задачи вытеснения высококонцентрированным раствором спирта ($AC_w^0 < AH$, рис. 1) спиртоводонефтяной вал отсутствует: $(C_w^0, c^0) - P - J_c \rightarrow (C_w^4, 0) - P - J \rightarrow (s^0, 0)$. Скорость фронта закачиваемого раствора, следующего сразу за водонефтяным валом, равна единице. С уменьшением концентрации закачиваемого раствора решение принимает вид (18). Для низкоконцентрированного раствора, когда точка $(s^0, 0)$ лежит ниже касательной к кривой $c = c^0$ из O_c , решению соответствует путь $(C_w^0, c^0) - P - J \rightarrow (C_w^1, c^0) - C_w - (C_w^5, c^0) - P - J_c \rightarrow (s^0, 0)$. Точка (C_w^5, c^0) лежит на пересечении кривой $c = c^0$ с лучом $O_c - (s^0, 0)$. Водонефтяной вал отсутствует.

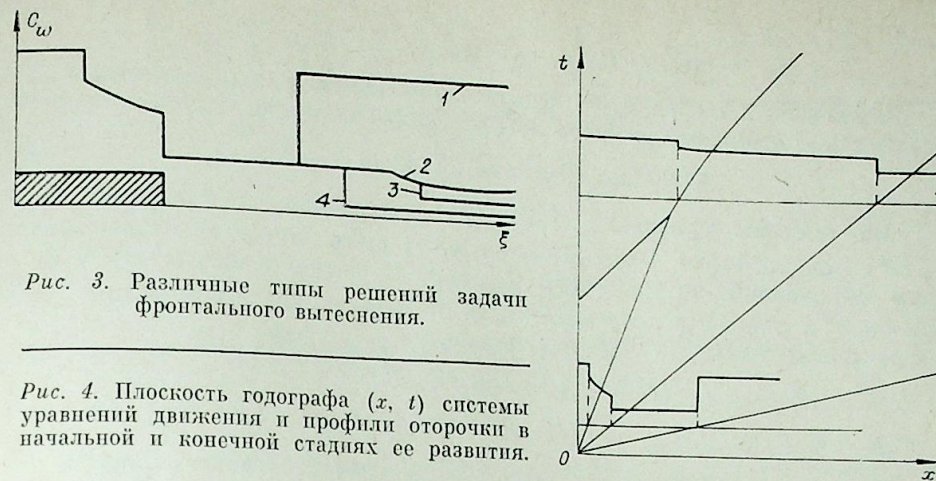


Рис. 3. Различные типы решений задачи фронтального вытеснения.

Рис. 4. Плоскость годографа (x, t) системы уравнений движения и профили оторочки в начальной и конечной стадиях ее развития.

Задача о вытеснении нефти оторочкой спиртового раствора. Спиртовой раствор закачивают в виде оторочки, продвигаемой по пласту водой [11]. В работе [10] исследована аналогичная задача для системы с активной примесью. Соответствующие начальные и граничные условия имеют вид

$$C_w(x, 0) = s^0, \quad c(x, 0) = 0, \quad C_w(0, t) = \begin{cases} C_w^0, & t < 1 \\ 1, & t > 1, \end{cases} \quad c(0, t) = \begin{cases} c^0, & t < 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases} \quad (19)$$

При $t < 1$ процесс описывается автомодельным решением (18) (рис. 4). В момент $t = 1$ происходит распад разрыва граничных условий с конфигурацией $(1, 0) - P - J_c \rightarrow (C_w^0, c^0)$. Скорость разрыва равна единице. При $t > 1$ разрыв взаимодействует с областью покоя автомодельного решения. До момента t_1 , когда разрыв догонит фронт спиртового раствора $x = V_1 \cdot t$, скорость его не меняется. При $t = t_1 (V_1 t_1 = t_1 - 1, t_1 = (1 - V_1)^{-1})$ происходит распад разрыва с тыла, догоняющего на фронт догоняемого скачка, $c^- = 0, c^+ = c^0, C_w^- = 1, C_w^+ = C_w^1$. Конфигурация распада имеет вид $(1, 0) - J \rightarrow (C_w^0, 0) - P - J_c \rightarrow (C_w^1, c^0)$, где $(C_w^0, 0)$ — точка пересечения прямых $O_c - (C_w^1, c^0)$ и $u_w = 1$. Далее тыл $x_0(t)$ оторочки распространяется в центрированной волне автомодельного решения. При $t > t_1$ характеристики приносят на разрыв значения $I^+(x_0), c^-(x_0) = 0, c^+(x_0) = c^0$,

$$x_0/t = \partial u_w(C_w^+(x_0), c^0) / \partial C_w. \quad (20)$$

Принтегрируем уравнение баланса спирта (второе уравнение системы (8)) по области плоскости (x, t) , ограниченной контуром $(0, 0) - (V_1 t_1, t_1) - (x_0(t), t) - (0, 0)$. Для этого достаточно по этому контуру проинтегрировать дифференциальную 1-форму $\theta = (\alpha u_w + \beta) dt - (\alpha C_w + \beta) dx$, имеющую смысл объемного потока спирта. Проинтегрируем ее по отрезку $(0, 0) - (V_1 t_1, t_1)$:

$$\{(\alpha^0 u_w^0 + \beta^0) - V_1 (\alpha^0 C_w^0 + \beta^0)\} t_1 = (\alpha^0 C_w^0 + \beta^0) (1 - V_1) t_1 = \alpha^0 C_w^0 + \beta^0 = C_A^0.$$

Принтегрируем форму θ по отрезку $(0, 0) - (x_0(t), t)$

$$\{(\alpha^0 u_w + \beta^0) - (\alpha^0 C_w + \beta^0) \cdot \partial u_w / \partial C_w\} \cdot t = -\alpha^0 \{(R - u_w) - (R - C_w) \times \\ \times \partial u_w / \partial C_w\} \cdot t = -\alpha^0 \cdot \Delta(C_w^+(x_0), c^0) \cdot t.$$

Принтегрируем θ вдоль тыла оторочки:

$$\int_{t_1}^t \{(\alpha^0 u_w + \beta^0) - (\alpha^0 C_w + \beta^0) (u_w - R) (C_w - R)^{-1}\} dt = \alpha^0 \int_{t_1}^t \{(u_w - R) -$$

$$-(C_w - R)(u_w - R)(C_w - R)^{-1} dt = 0.$$

Физический смысл этого факта заключается в том, что через поверхность контактного разрыва не происходит перетока спирта.

$$\Delta(C_w^+(x_0), c^0) \cdot t = -C_A^0/\alpha^0 = R - C_w^0. \quad (21)$$

Из системы уравнений (20), (21) определяются величины x_0 и $C_w^+(x_0)$ для любого t . Эти величины могут быть определены геометрическим построением на плоскости (C_w, u_w) . Проведем касательную к кривой $c = c^0$ в точке C_w^+ и продолжим ее до пересечения с прямыми $C_w = R$ и $u_w = R$ в точках E и N соответственно.

$$O_c E = (R - u_w) - (R - C_w) \partial u_w / \partial C_w = \Delta(C_w^+, c^0) = (R - C_w^0) \cdot t^{-1}, \quad (22)$$

$$O_c N = O_c E \cdot (\partial u_w / \partial C_w)^{-1} = (R - C_w^0) (t \cdot \partial u_w / \partial C_w)^{-1} = (R - C_w^0) \cdot x_0^{-1}. \quad (23)$$

Выполненное построение существенно упрощает исследование поведения оторочки. Так, очевидно, с ростом t значения x_0 и скорости разрыва dx_0/dt монотонно возрастают, причем при $t \rightarrow \infty$ ($E \rightarrow O_c$) $x_0 \rightarrow \infty$ ($N \rightarrow O_c$), $C_w^+ \rightarrow C_w^2$ и $dx_0/dt \rightarrow V_2$. Выражая x_0 и t из (20), (21) через C_w^+ , получаем для объема оторочки

$$\Omega_{от} = (R - C_w^0)(V_1 - \partial u_w / \partial C_w) \cdot (\Delta(C_w^+, c^0))^{-1}.$$

Устремляя C_w^+ к C_w^2 , получаем, используя правило Лопиталю, что объем оторочки при $t \rightarrow \infty$ стремится к пределу.

$$\Omega_\infty = (R - C_w^0)(R - C_w^2)^{-1}.$$

Откладывая $O_c N = (R - C_w^0)\Omega_0/\Omega_{пл}$, получаем из $O_c E = (R - C_w^0)\Omega_0/\Omega_{пр}$ время разработки при заданном объеме оторочки, C_w^+ и u_w^+ — концентрация воды и ее доля в потоке в момент окончания разработки. Нефть извлекается из пласта полностью, если тьл оторочки приносит на добывающую галерею $C_w^+ = C_w^1$. Таким образом, чтобы определить минимальный объем оторочки, требуемый для полного извлечения нефти, нужно прямую $(C_w^+, c^0) - (C_w^0, c^0)$ продолжить до пересечения с прямой $u_w = R$ в точке N и воспользоваться соотношением (23), связывающим $O_c N$, $\Omega_{пл}$ и Ω_0 .

Авторы благодарны М. В. Лурье и М. В. Филинову за постановку задач и полезные обсуждения.

Московский институт
нефтехимической и газовой промышленности
им. П. М. Губкина

Поступила в редакцию
19/IV 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Забродин П. И., Раковский Н. Л., Розенберг М. Д. Вытеснение нефти из пласта растворителями. М.: Недра, 1968.
2. Ентов В. М. Физико-химическая гидродинамика процессов в пористых средах. М.: Ин-т проблем механики АН СССР, 1980. Препринт № 161.
3. Брагинская Г. С., Ентов В. М. О неизотермическом вытеснении нефти раствором активной примеси. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1980, № 6.
4. Зискин Е. А., Рыжик В. М. Автомодельные решения задачи двухфазного вытеснения нефти раствором активной примеси с учетом массообмена между фазами. — Изд. АН СССР, МЖГ, 1981, № 4.
5. Wachmann C. A Mathematical Theory for the Displacement of Oil and Water by Alcohol. — Soc. Pet. Eng. J., 1964, v. 4, N 5.
6. Pope G. A. The Application of Fractional Flow Theory to Enhanced Oil Recovery. — Soc. Pet. Eng. J., 1980, v. 20, N 3.
7. Николаевский В. Н., Бондарев Э. А., Миркин М. И., Степанова Г. С., Терзи В. П. Движение углеводородных смесей в пористой среде. М.: Недра, 1968.
8. Чарный И. А. Подземная гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1963.
9. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.
10. Бедриковецкий П. Г. Вытеснение нефти оторочками растворов активных примесей. — Докл. АН СССР, 1982, т. 262, № 1.

Ю. П. ЧЕРНОВ

О ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ОБТЕКАНИИ ДИАФРАГМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ТОКОМ

Проблема эффективного расчета электрических полей в проводящей среде, в частности расчет характеристик электрических полей при протекании стационарного тока в области, разделенной бесконечной непроводящей диафрагмой конечной толщины со сквозным каналом, представляет значительный прикладной интерес. Конкретное приложение такие задачи находят, например, в так называемых датчиках Коултера [1] и аналогичных конструкциях. В общей постановке решение задачи отсутствует вследствие сложности конфигурации границ, а наличие особых точек затрудняет применение универсальных численных методов расчета.

Приближенной моделью задачи может служить полубесконечная труба, открытая в бесконечную проводящую область. Оценка коррекции сопротивления электрическому току на открытом конце такой трубы получена достаточно давно. Так, Рэлей оценил коррекцию α для трубы радиусом a в пределах $\pi a/4 < \alpha < 8a/3\pi$ [2, с. 115, 180]. Несколько позже им получено приближенное решение задачи о распределении электрического поля на открытом конце трубы, используя вариационный метод и принцип генерации минимума тепла в проводящей среде при бесконечно удаленных источниках тока [2, с. 487]. При этом не было выполнено условие непрерывности потенциала на конце трубы, и при задании формы градиента потенциала на конце не рассмотрена последовательная необходимость включения в функционал поправочных членов. В результате Н. Гровер и др. [3], допуская предположение Рэрея для градиента потенциала в осевом направлении на конце трубы в виде функционала с двумя параметрами

$$\frac{d\varphi}{dz} \Big|_{z=0} \sim 1 + \alpha \frac{r^2}{a^2} + \beta \frac{r^4}{a^4}, \quad (4)$$

где r — радиальная координата, получили, что требование генерации минимума тепла определяет α и β с противоположными знаками. Это приводит к существованию минимума функционала (4) не на оси трубы, а на расстоянии $r = 0,5$. Последнее маловероятно и, возможно, поэтому Рэлей рассмотрел также функционал с одним параметром и показал, что добавка к функционалу лучше представляется членом, изменяющимся как r^4 , чем как r^2 . При этом коррекция меняется в пределах $\alpha = 0,824 \div 0,828 a$ (в случае, если положить $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} = 1$, коррекция равна $\alpha = 0,849 a$). Сопротивление трубы длиной L ($L \gg a$) определяется тогда по следующей формуле [2]: $R = \frac{\rho L_{эф}}{\pi a^2}$, $L_{эф} = L + 2\alpha$, где ρ — удельное сопротивление среды.

Практический интерес представляет определение коррекции для трубы конечных размеров с открытыми концами ($L \sim a$) или для диафрагмы с отверстием. Выполнение требований непрерывности линий тока

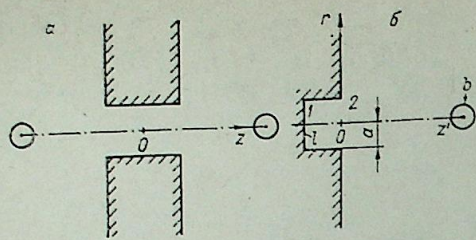


Рис. 1. Характер расчетной области.

электрического поля в пространстве при обтекании стационарным током отверстия непроводящей диафрагмы, заполненной однородной проводящей средой проводимостью σ , при наличии разноименных точечных источников тока, симметрично разнесенных относительно отверстия. Вследствие симметрии задачи геометрию диафрагмы, представленную рис. 1, а, можно описать, как на рис. 1, б. Параметрами задачи в безразмерном виде будут $\rho = r/a$, $h = l/a$, $\xi = z/a$, $\xi' = z'/a$, где a — радиус цилиндрического отверстия, h — его полудлина, ρ и ξ — радиальная и осевая координаты, ξ' — координата точечного источника на оси.

Известно, что потенциал электрического поля стационарного тока в однородной проводящей среде при отсутствии объемных источников тока удовлетворяет уравнению Лапласа [4]. В случае непроводящей диафрагмы с отверстием и точечного источника тока (см. рис. 1, б) для потенциала φ рассматривается краевая задача для уравнения Пуассона с дельта-функцией в правой части

$$\Delta\varphi = -\delta(\xi - \xi')$$

и граничными условиями Дирихле и Неймана

$$\begin{aligned} \varphi|_{\Gamma} = 0 \quad (\xi = -h, \rho < 1), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0 \\ (\rho = 1, -h < \xi < 0), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0 \quad (\xi = 0, \rho > 1). \end{aligned} \quad (2)$$

Потенциал в отверстии, удовлетворяющий крайевым условиям (2), можно разложить тогда в ряд по функциям Бесселя [5]:

$$\varphi = B_0(h + \xi) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \tau_m(\xi) J_0(\alpha_m \rho), \quad (3)$$

где α_m определяется из условия $J_0'(\alpha_m) = 0$, $\tau_m(\xi) = \text{sh}[\alpha_m(h + \xi)] \text{sh}^{-1}(\alpha_m h)$, B_0 и B_m — неизвестные коэффициенты.

Моделируя точечный источник тока с помощью функции Грина тонкой диафрагмы в сплюснутой сфероидальной системе координат [6], потенциал вне отверстия можно представить в виде ряда по полиномам Лежандра

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi^2} \sum_{l=0}^{\infty} \bar{P}_{2l}(\eta) [(4l+1)^{1/2} Q_{2l}(i\xi_{>}) Q_{2l}(-i\xi_{<}) + C_l Q_{2l}(i\xi)], \quad (4)$$

где C_l — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению, $\bar{P}_{2l}(\eta)$ и $Q_{2l}(\pm i\xi_{\pm})$ — полиномы Лежандра, $\xi_{<} = \min(\xi, \xi')$, $\xi_{>} = \max(\xi, \xi')$. Координаты η и ξ сплюснутой сфероидальной системы координат связаны с цилиндрическими координатами соотношениями $\rho = [(1 + \xi^2)(1 - \eta^2)]^{1/2}$, $\rho = \xi\eta$.

Коэффициенты C_l определяются из системы уравнений, полученной согласно условиям непрерывности потенциала и первой его производной на границе области $\xi = 0$,

$$\sum_{l=0}^{\infty} C_l [L_{lm} - K_{lm} \alpha_m \text{cth}(\alpha_m h)] = \sum_{l=0}^{\infty} (4l+1)^{1/2} Q_{2l}(i\xi') [L_{lm} + K_{lm} \alpha_m \text{cth}(\alpha_m h)] \quad (5)$$

с матричными коэффициентами

па концах отверстия и включение локализованных источников тока на конечных расстояниях от отверстия позволяет более точно отразить структуру электрического поля в отверстии диафрагмы.

Постановка краевой задачи. В работе рассматривается простейший случай осесимметричной краевой задачи о распределении

электрического поля в пространстве при обтекании стационарным током отверстия непроводящей диафрагмы, заполненной однородной проводящей средой проводимостью σ , при наличии разноименных точечных источников тока, симметрично разнесенных относительно отверстия. Вследствие симметрии задачи геометрию диафрагмы, представленную рис. 1, а, можно описать, как на рис. 1, б. Параметрами задачи в безразмерном виде будут $\rho = r/a$, $h = l/a$, $\xi = z/a$, $\xi' = z'/a$, где a — радиус цилиндрического отверстия, h — его полудлина, ρ и ξ — радиальная и осевая координаты, ξ' — координата точечного источника на оси.

Известно, что потенциал электрического поля стационарного тока в однородной проводящей среде при отсутствии объемных источников тока удовлетворяет уравнению Лапласа [4]. В случае непроводящей диафрагмы с отверстием и точечного источника тока (см. рис. 1, б) для потенциала φ рассматривается краевая задача для уравнения Пуассона с дельта-функцией в правой части

$$\Delta\varphi = -\delta(\xi - \xi')$$

и граничными условиями Дирихле и Неймана

$$\begin{aligned} \varphi|_{\Gamma} = 0 \quad (\xi = -h, \rho < 1), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0 \\ (\rho = 1, -h < \xi < 0), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0 \quad (\xi = 0, \rho > 1). \end{aligned} \quad (2)$$

Потенциал в отверстии, удовлетворяющий крайевым условиям (2), можно разложить тогда в ряд по функциям Бесселя [5]:

$$\varphi = B_0(h + \xi) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \tau_m(\xi) J_0(\alpha_m \rho), \quad (3)$$

где α_m определяется из условия $J_0'(\alpha_m) = 0$, $\tau_m(\xi) = \text{sh}[\alpha_m(h + \xi)] \text{sh}^{-1}(\alpha_m h)$, B_0 и B_m — неизвестные коэффициенты.

Моделируя точечный источник тока с помощью функции Грина тонкой диафрагмы в сплюснутой сфероидальной системе координат [6], потенциал вне отверстия можно представить в виде ряда по полиномам Лежандра

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi^2} \sum_{l=0}^{\infty} \bar{P}_{2l}(\eta) [(4l+1)^{1/2} Q_{2l}(i\xi_{>}) Q_{2l}(-i\xi_{<}) + C_l Q_{2l}(i\xi)], \quad (4)$$

где C_l — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению, $\bar{P}_{2l}(\eta)$ и $Q_{2l}(\pm i\xi_{\pm})$ — полиномы Лежандра, $\xi_{<} = \min(\xi, \xi')$, $\xi_{>} = \max(\xi, \xi')$. Координаты η и ξ сплюснутой сфероидальной системы координат связаны с цилиндрическими координатами соотношениями $\rho = [(1 + \xi^2)(1 - \eta^2)]^{1/2}$, $\rho = \xi\eta$.

Коэффициенты C_l определяются из системы уравнений, полученной согласно условиям непрерывности потенциала и первой его производной на границе области $\xi = 0$,

$$\sum_{l=0}^{\infty} C_l [L_{lm} - K_{lm} \alpha_m \text{cth}(\alpha_m h)] = \sum_{l=0}^{\infty} (4l+1)^{1/2} Q_{2l}(i\xi') [L_{lm} + K_{lm} \alpha_m \text{cth}(\alpha_m h)] \quad (5)$$

с матричными коэффициентами

$$K_{lm} = Q_{2l}(i0) \int_0^1 \bar{P}_{2l}(\sqrt{1-\rho^2}) J_0(\alpha_m \rho) \rho d\rho, \quad (6)$$

$$L_{lm} = Q_{2l}^1(i0) \int_0^1 \bar{P}_{2l}(\sqrt{1-\rho^2}) (1-\rho^2)^{-1/2} J_0(\alpha_m \rho) \rho d\rho. \quad (7)$$

Соответственно определяются и коэффициенты B_m для потенциала (3)

$$B_m = -[\pi J_0(\alpha_m)]^{-2} \sum_{l=0}^{\infty} K_{lm} [(4l+1)^{1/2} Q_{2l}(i\xi') + C_l].$$

Редуцируя систему (5) до порядка N , мы подчиняем решение требования, чтобы равнялись нулю N первых членов в разложениях разрывов потенциала и его первой производной и, увеличивая N , приближаемся к точным условиям непрерывности.

Значения интегралов (6) и (7) легко вычисляются. Интеграл (6) берется отдельно для каждого слагаемого полинома Лежандра с помощью равенства Г6.567.1 [7]

$$K_{lm} = Q_{2l}(i0) (-1)^l (4l+1)^{1/2} \frac{(2l-1)!!}{(2l)!!} \sum_{k=1}^{l+1} C_k J_k(\alpha_m) \alpha_m^{-k}, \quad (8)$$

где $C_1 = 1$, $C_{k+1} = -(2l-2k+2)(2l+2k-1)(2k-1)^{-1} C_k$. При значениях l , значительно превышающих m , использование этой формулы сопряжено с вычислением малых разностей приближенных чисел. В этом случае лучше пользоваться другим соотношением, полученным посредством замены переменной интегрирования на $t = (1-\rho^2)^{1/2}$, и подставляя в интеграл (6) разложение

$$J_0(\alpha_m \sqrt{1-t^2}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_m)^k t^{2k}}{2^k k!} J_k(\alpha_m),$$

следующее из формулы Г8.335 [7]. Далее, изменяя порядок интегрирования и суммирования и пользуясь равенством Г7.231.1 [7], после ряда преобразований получим для K_{lm} выражение в виде

$$\begin{aligned} K_{lm} = Q_{2l}(i0) \frac{(4l+1)^{1/2}}{2^{l+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_m^k J_k(\alpha_m) (2k+1)!!}{2^k (l+k+1)!} \times \\ \times \begin{cases} [(2k-2l+1)!!]^{-1}, & (k \geq l), \\ (-1)^{l-k-1} (2l-2k-3)!!, & (k < l). \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

Полученный ряд сходится при всех значениях l и m . В практических расчетах числа K_{lm} определялись для $l < m + 3$ по формуле (8), а при $l \geq m + 3$ по формуле (9). Коэффициенты L_{lm} определяются с помощью преобразований Ганкеля [5]:

$$L_{lm} = Q_{2l}^1(i0) \left[\frac{\pi (4l+1)}{2\alpha_m} \right]^{1/2} \frac{(2l-1)!!}{(2l)!!} J_{2l+0,5}(\alpha_m).$$

Наконец, отметим, что в случае $\xi > 1$ полиномы Лежандра $Q_l(\pm i\xi)$ следует определять по формулам

$$Q_l(i\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(l+2k)!}{(2k)!! (2l+2k+1)!!} (i\xi)^{-(l+2k+1)},$$

$$Q_l(-i\xi) = (-1)^{l+1} Q_l(i\xi) - i\pi P_l(-i\xi), \text{ где}$$

$$P_l(-i\xi) = \sum_{k=0}^{E\left(\frac{l}{2}\right)} (-1)^k (-i\xi)^{l-2k} \frac{(2l-2k-1)!!}{(2k)!! (l-2k)!}.$$

Предельный случай толстой диафрагмы. Оценим коррекцию сопротивления для отверстия диафрагмы. Решение для коэффициентов C_l системы (5) в матричном виде описывается уравнением (10)

$$C = P^{-1} M \bar{D},$$

где элементами матриц служат $P_{lm} = L_{lm} - K_{lm} \alpha_m \operatorname{cth}(\alpha_m h)$, $M_{lm} = L_{lm} + K_{lm} \alpha_m \operatorname{cth}(\alpha_m h)$, элементами вектора $-D_l = (4l+1)^{1/2} Q_{2l}(i\xi')$.

В случае толстой диафрагмы $h > 1$ и удаленного точечного источника ка $\xi' \gg 1$ приближенным решением системы (10) будет следующее:

$$C_0 = \left[1 - \frac{\pi}{2} (h - \Sigma_0)^{-1} \right] Q_0(i\xi'), \text{ где } \Sigma_0 = \sum_{l=0}^N (-1)^l K_{l0} |P_{l0}| |P_{l0}^{-1}|,$$

и $C_k = -\frac{\pi}{2} \Sigma_k (h - \Sigma_0)^{-1} Q_0(i\xi')$, где $\Sigma_k = (-1)^k |P_{k0}| |P_{k0}^{-1}|$, а $|P_{ij}|$ — миноры определителя матрицы P .

Как показывает расчет, спад коэффициентов C_k с ростом номера k выражается степенной зависимостью $C_k \approx C_0 k^{-2,15}$ (для $k=1, 10$), показатель которой увеличивается с ростом k (для $k > 10$).

Коррекция сопротивления для отверстия диафрагмы равна $\alpha = \pi I_0^{-1} \varphi(\xi, \eta) - h$, где ток через отверстие определяется выражением

$$I_0 = \pi^{-1} \operatorname{Re} [C_0 - Q_0(i\xi')] \approx [2\xi'(h - \Sigma_0)]^{-1} \quad (11)$$

и зависит от координат эквипотенциала $\varphi(\xi, \eta)$ и источника ξ' . Приближенное решение для потенциала вне отверстия при условии $\xi, \xi' \gg 1$ запишется в следующем виде:

$$\varphi = \frac{1}{2\pi^2} \left[\frac{1}{\xi'} \left(\pi \sum_{l=0}^N \left(\frac{\xi}{\xi'} \right)^{2l} \frac{\bar{P}_{2l}(\eta)}{\sqrt{4l+1}} - \frac{1}{\xi} \right) - \frac{C_0}{\xi} \right],$$

или с учетом зависимости для коэффициента C_0

$$\varphi = \frac{1}{2\pi\xi'} \left[\sum_{l=0}^N \left(\frac{\xi}{\xi'} \right)^{2l} \frac{\bar{P}_{2l}(\eta)}{\sqrt{4l+1}} - \frac{1}{2\xi(h - \Sigma_0)} \right]. \quad (12)$$

Осевая компонента напряженности поля, уменьшаясь при удалении от отверстия, достигает минимума на расстоянии

$$\xi_{\min} = \xi'^{2/3} [2(h - \Sigma_0)]^{-1/3}.$$

В окрестности минимума существует область квазиподродного поля, в которой эквипотенциальные поверхности представляют плоскости, ортогональные оси отверстия диафрагмы. При этом зависимость коррекции от параметров h и ξ' незначительна (в точке $\xi = \xi_{\min}$) $\alpha_{\min} = -\Sigma_0 + (2\xi')^{-4/3} (h - \Sigma_0)^{-1/3} + (2\xi')^{-2} (h - \Sigma_0) + \dots$. Согласно расчетам $\Sigma_0 = -0,821619$, таким образом, коррекция в точке $\xi = \xi_{\min}$ весьма близко лежит к рэлеевскому значению коррекции. По мере приближения к точечному источнику эквипотенциалы приобретают форму поверхностей сфероидов, что приводит к увеличению значения коррекции ($\alpha > \alpha_{\min}$ для электродов сферической формы). Соответственно при вогнутых электродах коррекция для отверстия диафрагмы становится равной $\alpha < \alpha_{\min}$.

Наконец, отметим, как следует из выражения для потенциала (12), максимальное различие потенциалов точечного источника на поверхности сферы радиуса b с центром в точке ξ' (см. рис. 1) равно $\delta\varphi \approx \frac{b}{\xi'} \bar{\varphi}$, где $\bar{\varphi}$ — усредненный по поверхности сферы потенциал. Поэтому если точечный источник заменить сферическим электродом с заданным потенциалом $\bar{\varphi}$, то поле от него в области будет совпадать с полем точечного источника с точностью до члена $b\xi'^{-1}$.

Структура поля в отверстии диафрагмы. На ЭВМ М4030 рассчитаны структуры полей для диафрагм с относительно длинным и коротким

сквозными цилиндрическими отверстиями. Для сравнения рассчитаны два положения точечного источника — вблизи и вдали от отверстия диафрагмы. Информативной характеристикой принят модуль напряженности поля. Размеры геометрии задачи нормированы на радиус отверстия диафрагмы. Значения полей отнесены к точечному источнику единичной силы.

Кривые напряженности поля на входе для короткого (рис. 2, $h=1$) и длинного (см. рис. 2, $h=5$, случай α) отверстий в случае близко и далеко разнесенных источников в основном подобны. При увеличении радиуса ρ от 0 до 0,7 форма кривой напряженности поля вдоль оси плавно изменяется от колоколообразной к форме ступеньки с более крутым фронтом. Начиная с $\rho=0,7$ и далее к стенке отверстия начинает проявляться краевой эффект. При этом резкое возрастание поля наблюдается у края отверстия. Следствием возрастания крутизны фронтов кривых напряженности поля вне отверстия при увеличении радиуса наблюдения является пересечение фронтов в некоторой точке, отстоящей от диафрагмы на расстоянии $\xi \approx -0,3$, которая, как видно из рис. 2, является точкой перегиба фронтов.

На расстоянии радиуса от диафрагмы по оси дисперсность напряженности поля вдоль радиуса ρ составляет почти два порядка в диапазоне $\rho=0 \div 10$ (рис. 3), в то время как на расстоянии $\xi=10$ дисперсность по радиусу падает до нескольких десятков процентов и продолжает уменьшаться. Это указывает на формирование на больших расстояниях от отверстия и от источника области квазиподродного поля.

Если в плоскости сечения на входе отверстия разброс значений напряженности поля для крайних радиусов наблюдения составляет 74%, то на расстоянии радиуса от края для длинного отверстия разброс уменьшается до 1,65% (или до 2,6% для короткого отверстия) и на расстоянии следующего радиуса в глубь отверстия монотонно падает до нуля. Таким образом, расчеты показывают, что в длинном цилиндрическом отверстии диафрагмы существует участок однородного с точностью до 1% поля, равный по протяженности длине отверстия без трех его радиусов.

Точность метода. Сравнение с методом интегральных уравнений.

Как уже отмечалось, реализация предложенного метода расчета полей для диафрагм с отверстием осуществлена на ЭВМ М4030 (на языке АЛГОЛ). Порядок системы уравнений (5) ограничен значением $N=21$. Дальнейшее увеличение значения этого параметра не приводит к повышению точности вследствие потери устойчивости расчетной схемы. При этом ряд (4) сходится с точностью до 10^{-6} , однако из-за медленной сходимости ряда (3) и его первой производной сшивка решений на границе областей реализуется с точностью только до 10^{-4} . Последнее значение оценивает погрешность расчета

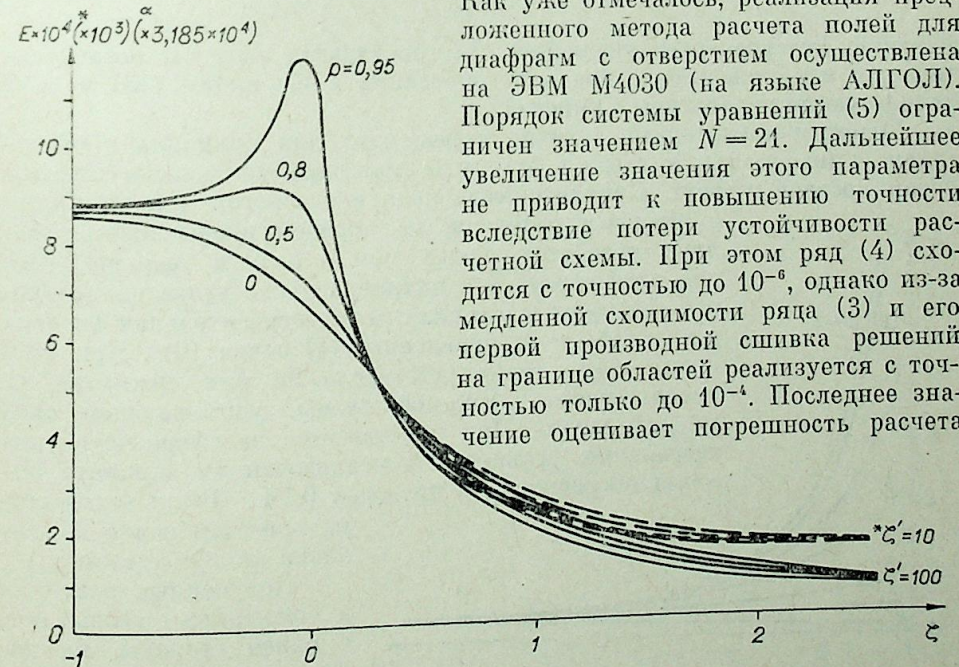


Рис. 2. Напряженность поля в отверстии диафрагмы как функция $E(\xi)$ при различных ρ .

полей на границе областей. Время для расчета матричных коэффициентов (6) и (7) составляет в среднем 30 мин, характеристик поля в одной точке — 1 мин.

В заключение приведем для сравнения расчет задачи численным методом интегральных уравнений теории потенциала. Расчет полей был проведен на ЭВМ М4030 (на языке АЛГОЛ) для цилиндра большого, по конечного радиуса с соосным цилиндрическим отверстием, расположенного симметрично между двумя разноименными точечными источниками, удаленными на расстояние $\zeta'_0 = 10$.

Задача формулируется следующим образом. В цилиндрической системе координат для уравнения Лапласа $\Delta\varphi = 0$ рассматривается задача с краевым условием на границе (поверхности цилиндра) $\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0$ и заданным частным решением $\varphi_0(\vec{r})$.

Решение краевой задачи определяется в виде потенциала простого слоя

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_0(\vec{r}) + \int_{\Gamma} \sigma(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') d^2r'. \quad (13)$$

Частное решение краевой задачи в области при наличии точечных источников определяется выражением

$$\varphi_0(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \{ [(\zeta - \zeta'_0)^2 + \rho^2]^{-1/2} - [(\zeta + \zeta'_0)^2 + \rho^2]^{-1/2} \}.$$

Ядром уравнения (13) в цилиндрической системе координат служит

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = -\pi^{-1} \rho' E(k) [(\zeta - \zeta')^2 + (\rho + \rho')^2]^{-1/2}, \\ k^2 = 4\rho\rho' [(\zeta - \zeta')^2 + (\rho + \rho')^2]^{-1},$$

где $E(k)$ есть полный эллиптический интеграл 1-го рода. Учет краевого условия на границе Γ дает интегральное уравнение для $\sigma(\vec{r})$

$$\sigma(\vec{r}) + 2 \frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial n} = 0. \quad (14)$$

Решение интегрального уравнения (14) проводится методом последовательных приближений, а при интегрировании в формулах (13) и (14) используются квадратуры Симпсона.

Отметим характерные отличия в решениях для цилиндра с отверстием и диафрагмы. У входа в отверстие цилиндра фактически нивелирован краевой эффект. Напряженность поля в отверстии для цилиндра с внешним радиусом, на порядок превышающим радиус отверстия, более чем в 3 раза меньше, чем для диафрагмы. Для цилиндра число узлов квадратурной формулы взято равным 50, относительная невязка расчетной схемы уравнения (14) равна 10^{-3} . При этом время счета задачи составило 90 мин, несмотря на использование расчетной схемы, учитывающей симметрию задачи. При тестировании на сфере метод интегральных уравнений в реализованном варианте показал погрешность в пределах 0,1%. Число узлов сетки при этом равно 20, невязка задана прежней.

Полученные различия в решениях указывают, с одной стороны, на невозможность получения качественной аппроксимации решения для диафраг-

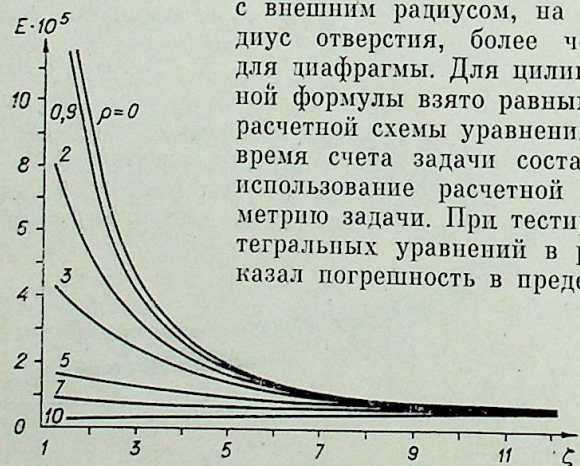


Рис. 3. Напряженность поля вне отверстия диафрагмы ($h = 1, \zeta'_0 = 100$).

мы посредством аппроксимации границы диафрагмы поверхностью цилиндра достаточно большого, но конечного внешнего радиуса с соосным методом и высокую точность определения искомых характеристик полей при небольших затратах машинного времени.

Институт автоматики и электрометрии
СО АН СССР, Новосибирск

Поступила в редакцию
11/VI 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Coulter W. H. Means for counting particles suspended in fluid. U. S. Pat. 1953, N 2656508, cl. 324-71.
2. Rayleigh J. W. Theory of Sound. Macmillan et Co. New York. 2-nd edition, 1945, v. 2.
3. Grover N. B., Naaman J. Ben-Sasson and Doljanski. Electrical sizing of particles in suspension.—Biophys. J., 1969, v. 9.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
5. Цыркин Л. Э. Избранные задачи расчета электрических и магнитных полей. М.: Сов. радио, 1977.
6. Чернов Ю. П. Функции Грина в краевых задачах с бесконечными границами. Препринт ИАиЭ СО АН СССР, № 92. Новосибирск, 1980.
7. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1974.

УДК 532.72+663.015.23

Н. А. ДВОРНИКОВ, В. И. ТЕРЕХОВ

ДИНАМИКА И ТЕПЛОМАССОБМЕН ЧАСТИЦ
В ВИХРЕВОЙ КАМЕРЕ С ПРИОСЕВЫМ ПЛАЗМЕННЫМ
ПОТОКОМ

Известны работы, посвященные анализу динамики и теплообмена частиц в закрученном потоке газа [1, 2] и в плазменных струях [3, 4]. Однако при решении технических задач приходится рассматривать более сложные случаи течений со взаимодействием частиц и вращающихся потоков плазмы. При этом одним из эффективных методов стабилизации плазменного шнура и его термозащиты от ограничивающих твердых стенок является использование периферийной закрутки охлаждающего газа [5, 6].

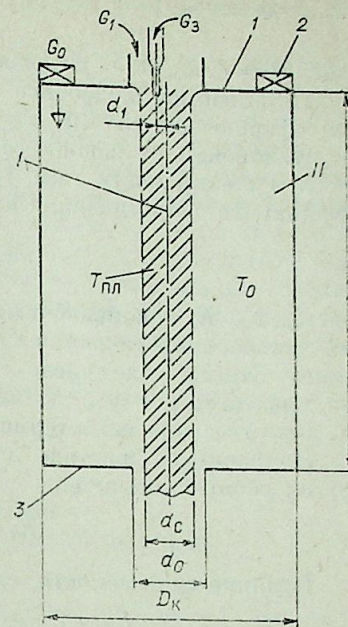
Схема такой вихревой камеры с потоком плазмы в приосевой области представлена на рис. 1. Подача плазмы с массовым расходом G_1 в камеру осуществляется через отверстие диаметром d_0 в верхней крышке 1. Охлаждающий периферийный поток вводится в камеру с закруткой через направляющий аппарат 2. В результате взаимодействия этих двух потоков в вихревой камере формируются две зоны — плазменный столб I и периферийную область II. Ввод частиц в камеру может производиться через узкую кольцевую щель диаметром d_1 . Выброс охлаждающего газа и плазмы происходит через отверстие диаметром d_0 в нижней торцевой крышке 3 вихревой камеры. Расчету поведения частиц в таких вихревых камерах и посвящена настоящая работа. При этом определяются следующие основные параметры: температура частицы в процессе ее движения в различных зонах камеры, время нахождения частицы в плазменном столбе и в периферийной зоне, закон изменения ее диаметра за счет испарения и др.

Сильное влияние на аэродинамику и теплообмен частиц размером порядка единиц и десятков микронов, как это показали расчеты, оказывает переменность физических свойств газа и его разреженность, это обстоятельство часто не учитывается [3, 4]. Тем не менее строгое решение задачи в полной ее постановке чрезвычайно затруднительно, и ряд сделанных допущений позволяет считать анализ, проведенный в данной работе, оценочным.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.
ДИНАМИКА ЧАСТИЦЫ В ВИХРЕВОЙ КАМЕРЕ

Примем, что температура плазмы $T_{пл}$ в режиме стабилизации постоянна по диаметру и длине столба I (см. рис. 1). В периферийной области II температура газа также постоянна и равна температуре охлаждающего воздуха на входе в камеру T_0 . Вращение плазменного шнура I происходит с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = \text{const}$, а в зоне II сохраняется циркуляция потока $\Gamma = \omega r^2 = \text{const}$. Как и при расчетах вихревых камер с изотермическими течениями [7, 8] предполагалось, что в потенциальной зоне II осевая скорость газовой фазы равна нулю, а в области плазменного столба ее величина постоянна по сечению. Радиальная скорость газа при расчете движения частицы полагалась равной нулю.

Рис. 1. Схема вихревой камеры с приосевым плазменным шнуром.



Одним из сложных вопросов, возникающих при расчетах вихревых камер, является определение диаметра зоны квазитвердого вращения d_c , где локализован плазменный столб. В первом приближении его граница может быть найдена из условия равенства осевой скорости газа и плазмы в выходном отверстии камеры:

$$d_c = d_0 \sqrt{G_1 / (G_1 + G_0 \rho_1 / \rho_0)}, \quad (1.1)$$

где ρ_1 , G_1 и ρ_0 , G_0 — плотность и расход плазмы и охлаждающего газа соответственно.

Запишем уравнения движения частицы в вихревой камере. При этом полагаем, что взаимодействие частиц между собой отсутствует. Из сил, действующих на частицу, в рассматриваемых условиях наибольшее значение имеют сила аэродинамического сопротивления и центробежная. С учетом этого имеем

$$W_r \frac{dW_r}{dr} = \frac{W_\varphi^2}{r} - \alpha (W_r - V_r), \quad (1.2)$$

$$\frac{dW_\varphi}{dr} = -\frac{W_\varphi}{r} - \alpha (W_\varphi - V_\varphi) / W_r. \quad (1.3)$$

Здесь W_φ , W_r и V_φ , V_r — окружная и радиальная компоненты скорости частицы и газа соответственно; $\alpha = 18\mu_0/a_s^2\rho_s$ — коэффициент Стокса; a_s и ρ_s — диаметр и плотность частицы, а μ_0 — эффективная вязкость газа.

Рассмотрим движение частицы в области плазменного вихря I (см. рис. 1). Задача о движении сферической частицы при стоковском режиме обтекания в потоке газа, вращающегося с постоянной угловой скоростью, аналитически решена в работе [1]. Вязкость газа в плазме существенно выше, чем в холодном потоке, что позволяет значительно расширить применение закона сопротивления Стокса для частиц. Для случая $V_r = 0$ решение уравнений динамики, полученное в [1], преобразованное в цилиндрической системе координат, может быть представлено в следующем виде:

$$r = r_0 e^{-\tau/2} \left[\left(\text{ch}(m\tau/2) \cdot \cos(n\tau/2) + \frac{m + 2n\varphi'(0)}{m^2 + n^2} \text{sh}(m\tau/2) \cdot \cos(n\tau/2) + \frac{n - 2m\varphi'(0)}{m^2 + n^2} \text{ch}(m\tau/2) \cdot \sin(n\tau/2) \right)^2 + \left(\text{sh}(m\tau/2) \cdot \sin(n\tau/2) + \frac{m + 2n\varphi'(0)}{m^2 + n^2} \text{ch}(m\tau/2) \cdot \sin(n\tau/2) - \frac{n - 2m\varphi'(0)}{m^2 + n^2} \text{sh}(m\tau/2) \cdot \cos(n\tau/2) \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (1.4)$$

$$\varphi' = \sqrt{r'/r + r''/r}. \quad (1.5)$$

Решение записано для следующих начальных условий: $\tau = 0$, $\varphi'(\tau) = \varphi'(0) = 0$, $r(0) = r_1$, $r'(0) = 0$. Здесь штрих означает дифференцирование по τ , $\tau = \alpha t$ — безразмерное время, t — время с момента попадания частицы в плазменный поток.

$$m = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + (4/N)^2} + 1}; \quad n = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + (4/N)^2} - 1}. \quad (1.6)$$

Здесь $N = \alpha/\omega_0$, ω_0 — угловая скорость вращения плазменного вихря. Остановимся подробнее на определении коэффициента сопротивления сферических частиц с учетом переменности физических свойств газа, отклонения от закона сопротивления Стокса при $Re > 1$, разреженности и сжимаемости газа. Согласно работам [2, 9], выражение для коэффициента сопротивления имеет вид

$$c_D = \frac{24}{Re} \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot K_3, \quad (1.7)$$

где K_1, K_2, K_3 — поправочные коэффициенты. Решение (1.4) получено для закона сопротивления Стокса. Зависимость (1.7) можно привести к закону Стокса, если число Рейнольдса в нем определять по эффективной вязкости: $\mu_0 = \mu_{00} \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot K_3$, где μ_{00} — эффективная молекулярная вязкость газа при неизотермическом обтекании частицы.

Поправка на влияние инерционных сил, используемая в [2, 9] и других работах, имеет вид

$$K_1 = 1 + 0,15 \cdot Re^{0,687}. \quad (1.8)$$

Влияние сжимаемости, согласно [9], принято учитывать как

$$K_2 = 1 + \exp[-0,427/M^{1,63} - 3/Re^{0,88}]. \quad (1.9)$$

При значении числа Маха $M < 0,6$ сжимаемость на сопротивлении частиц не сказывается, и $K_2 \approx 1$.

Влияние разреженности среды в работе [2] предлагается учитывать по следующей формуле:

$$K_3 = (1 + 3,3Kn)^{-1}, \quad (1.10)$$

которая является аппроксимацией результатов работы [9]; здесь $Kn = \mu/a$, число Кнудсена, l — длина свободного пробега молекул.

При неизотермическом обтекании, когда температура газа существенно отличается от температуры частицы, все физические параметры в пограничном слое, согласно Эккерту [10], следует определять по эффективной температуре

$$T_{эф} = (T_s + T_{гн})/2, \quad (1.11)$$

где $T_{гн}$ — температура газа, окружающего частицу, а T_s — температура частицы.

Полагая в первом приближении, что вязкость плазмы зависит линейно от температуры, ее эффективное значение вблизи частицы можно определить как

$$\mu_{00} = \mu_{пл}(1 + T_s/T_{пл})/2, \quad (1.12)$$

где $\mu_{пл}, T_{пл}, T_s$ — вязкость, температура плазмы и частицы соответственно. В области плазменного столба, где $T_s \ll T_{пл}$, выражение (1.12) упрощается, $\mu_{00} = 0,5\mu_{пл}$ и число Рейнольдса в коэффициенте сопротивления (1.7) рассчитывалось по этому значению вязкости и эффективной плотности.

Таким образом, используя соотношения (1.4)–(1.6), а также выражения для эффективной вязкости с учетом воздействия инерционных сил (1.8), сжимаемости (1.9), разреженности (1.10) и неизотермичности (1.12) течения, можно рассчитать динамику частиц в области плазменного столба, вращающегося с постоянной угловой скоростью. Так при условии, что осевая скорость плазменного потока постоянна по радиусу, а ввод частиц в него производится со скоростью газа и в дальнейшем частицы в осевом направлении полностью следят за потоком, можно определить время нахождения частиц в плазме, координату выхода ее из столба и другие параметры. При этом следует иметь в виду, что скоро-

сти газа и частиц не совпадают и скольжение фаз, как показывают расчеты, может достигать больших величин.

Для потенциальной зоны течения ($\Gamma = V_\phi \cdot r = \text{const}$) в рассматриваемых условиях получить точное аналитическое решение уравнений движения частиц не удастся. Поэтому система уравнений (1.2), (1.3) с начальными и граничными условиями решалась численно. В расчетах полагалось, что радиальная и осевая составляющие скорости равны нулю.

Вязкость газа в этой области определялась по эффективной температуре (1.11). Поскольку здесь температура частиц T_s после выхода их из плазменного столба значительно выше температуры потока T_0 , значение эффективной вязкости является функцией температуры частицы. Поэтому задача о движении частиц в потенциальной зоне решалась совместно с уравнением энергии численно методом Рунге — Кутты — Мерсона.

Подробно результаты исследования динамики частиц будут рассмотрены в разделе 3.

2. ТЕПЛОБМЕН ЧАСТИЦ В ВИХРЕВОЙ КАМЕРЕ С ПЛАЗМЕННЫМ СТОЛБОМ

Баланс энергии в процессе прогрева частицы при отсутствии фазовых превращений можно записать в следующем виде:

$$dQ_{\text{конв}} = dQ_{\text{внутр}}. \quad (2.1)$$

Здесь $dQ_{\text{конв}} = \pi a_s^2 q_{\text{ст}} \cdot dt = \pi \Delta T \lambda_0 \cdot Nu_{10} \cdot a_s \cdot dt$ — поток тепла к частице за счет конвекции; $dQ_{\text{внутр}} = c_{ps} dT_s \rho_s \pi a_s^3 / 6$ — тепло, поглощенное частицей; $Nu_{10} = \alpha_1 a_s / \lambda_s$ — число Нуссельта с учетом влияния разреженности, переменности физических свойств среды и зависимости от числа Рейнольдса; $\Delta T = T_{пл} - T_s$; λ_0 — эффективная теплопроводность плазмы.

В уравнении (2.1) опущен член с лучистым теплообменом, поскольку проведенные оценки показали, что для абсолютно черных частиц размером $1 \div 50$ мкм в плазменном столбе ($T_{пл} = 3500 - 5000$ К) и в периферийной области его величина составляла 2–14% от конвективного потока тепла. Зависимость числа Нуссельта Nu_{00} от числа Рейнольдса, построенного по эффективной вязкости и диаметру частицы, имеет вид [12]

$$Nu_{00} = 2 + 0,35 \cdot Re^{0,58} \cdot Pe^{0,35} + 0,03 Re^{0,51} \cdot Pr^{0,33}. \quad (2.2)$$

При $Re < 1$ уравнение (2.2) преобразуется: $Nu_{00} = 2$.

Влияние разреженности среды на теплообмен частиц с газом будем учитывать по формуле, полученной Кэвено [11]:

$$Nu_{10} = \frac{Nu_{00}}{1 + \xi Nu_{00} \cdot Kn / Pr}. \quad (2.3)$$

Для воздуха коэффициент ξ в (2.3) равен $\xi = 3,42$.

Число Нуссельта Nu_{00} в (2.2) и (2.3) необходимо рассчитывать по эффективной теплопроводности, выражение для которой при линейном изменении λ в зависимости от температуры можно записать

$$\lambda = \lambda_{пл}(1 + T_s/T_{пл})/2. \quad (2.4)$$

С учетом соотношений (2.2)–(2.4) уравнение (2.1) примет вид

$$\frac{\lambda_{пл}(T_{пл} - T_s)(1 + T_s/T_{пл}) Nu_{00}}{1 + \xi Nu_{00} \cdot Kn / Pr} dt = \rho_s \cdot c_{ps} \cdot \frac{a_s^2}{3} dT_s. \quad (2.5)$$

Это уравнение можно преобразовать к виду

$$\frac{dT^*}{(1 - T^*)(1 + T^*)} = A \cdot dt. \quad (2.6)$$

$$\text{Здесь } T^* = T_s/T_{пл}, \quad A = \frac{3\lambda_{пл} \cdot Nu_{09}}{(1 + \xi Nu_{09} Kn/Pr) \rho_s \cdot c_{ps} a_s^2} \quad \text{Интегрируя (2.6)}$$

с учетом начальных условий $t=0, T=T_0$ и обозначая $B = \frac{T_{пл} - T_0}{T_{пл} + T_0}$,
имеем

$$T_s = T_{пл}(1 - Be^{-2At}) / (1 + Be^{-2At}). \quad (2.7)$$

Эта формула дает изменение температуры частицы во времени в процессе прогрева ее в плазменном столбе до момента закипания. В расчетах использовалось среднее значение теплоемкости частицы с учетом теплоты фазового перехода при плавлении. Уравнение энергии при кипении частицы можно записать как

$$dQ_{конт} = dQ_{исп}. \quad (2.8)$$

Количество теплоты, поглощаемое частицей и идущее на ее испарение, запишется в виде

$$dQ_{исп} = -Q_s \rho_s \frac{\pi}{2} a_s^2 da_s, \quad (2.9)$$

где Q_s — удельная теплота фазового перехода при испарении. С учетом (2.2), (2.3) и (2.9) уравнение (2.8) преобразуется:

$$\frac{\lambda_{пл} (T_{пл}^2 - T_{кип}^2) Nu_{09}}{T_{пл} (1 + \xi Nu_{09} Kn/Pr)} dt = -\rho_s Q_s a_s da_s, \quad (2.10)$$

или $2a_s da_s = -C_1 dt$,

$$\text{где } C_1 = \frac{2\lambda_{пл} (T_{пл}^2 - T_{кип}^2) Nu_{09}}{T_{пл} \rho_s Q_s (1 + \xi Nu_{09} Kn/Pr)}. \quad (2.11)$$

$T_{кип}$ — температура кипения частицы. Интегрируя это уравнение от времени начала кипения t_0 , когда частица имеет диаметр a_{s0} , получим изменение диаметра частицы по времени в процессе ее испарения:

$$a_s = \sqrt{a_{s0}^2 - C_1 (t - t_0)}. \quad (2.12)$$

Следует отметить, что задача о прогреве частицы решалась в предположении, что температура частицы постоянна по ее диаметру. Это справедливо при числах Био $Bi = \alpha_1 a_s / \lambda_s = Nu_{19} \cdot \lambda_0 / \lambda_s < 0,1$. Здесь λ_s — теплопроводность частицы.

Согласно уравнениям (2.2), (2.3) может быть определена величина Bi :

$$Bi = \frac{(1 + T_s/T_{пл}) \cdot \lambda_{пл}}{1 + 2\xi Kn/Pr} \cdot \frac{\lambda_{пл}}{\lambda_s}.$$

При прогреве металлических порошков в плазме критерий $Bi \ll 0,1$; для менее теплопроводных частиц, например двуокиси кремния диаметром 1—50 мкм, число Bi находится в интервале $Bi = 0,1 \div 1$; с увеличением температуры плазмы число Био возрастает, и в этом случае необходимо учитывать переменность температуры частицы по ее диаметру. При этом возможны такие ситуации, когда частицы будут снаружи оплавляться, но не будут плавиться внутри. Распределение температуры по диаметру частицы может быть учтено при совместном решении соотношений типа (2.5) и уравнения нестационарной теплопроводности для частиц.

При расчете процесса охлаждения частиц в периферийной области вихревой камеры, где числа Рейнольдса, построенные по диаметру частицы, могут принимать значения $Re > 1$, закон теплообмена описывается формулой (2.3). Уравнение энергии (2.1) для частицы в этом случае может быть преобразовано к виду

$$\frac{dT_s}{dr} = \frac{1}{W_r} \cdot \frac{6\lambda_0 Nu_{19} (T_0 - T_s)}{\rho_s \cdot a_s^2 c_{ps}}, \quad (2.13)$$

где T_0 — температура газа в периферийной области. Теплопроводность λ_0 определялась непосредственно по температуре $T_{эф}$, поскольку Nu_{19} , значение (2.13) необходимо решать совместно с соотношением (2.3) и уравнениями движения частицы (1.2) и (1.3). Подобно течению в плазменные оценки, можно пренебречь.

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА

Расчет проводился для вихревой камеры, имеющей следующие геометрические параметры: длина $L = 0,3$ м, диаметр $D_k = 0,12$ и диаметр выходного отверстия $d_0 = 0,05$ м. Диаметр d_1 , на котором частицы попадали в плазменный столб, составлял 0,01 м, причем в расчетах предположеной скоростью приосевого потока.

Расход плазмообразующего газа $G_1 = 3 \cdot 10^{-3}$ кг/с, а температура плазмы принимала значения 3500 и 5000 К. Расчеты проводились при $G_0 = 8 \cdot 10^{-3}$ кг/с, а его температура $T_0 = 300$ К. Окружная скорость на периферии камеры $V_{sk} = 50$ м/с, соответственно плазменный столб вращался с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = 4800$ 1/с. При таких условиях, как показали эксперименты, наблюдается устойчивая стабилизация плазменного вихря в центре камеры.

Расчет динамики и теплообмена проводился для частиц двуокиси кремния (SiO_2) диаметром $a_s = 1 \div 50$ мкм. Физические свойства двуокиси кремния и азотной плазмы приведены в работах [13—16]. Считалось, что кипение частиц SiO_2 происходило одновременно с диссоциацией $2SiO_2 \rightarrow 2SiO + O_2$, и в теплоту фазового перехода включалась соответственно теплота диссоциации.

На рис. 2 показано изменение температуры частиц T_s различных диаметров на выходе из плазменного столба в периферийный поток при температуре плазмы $T_{пл} = 3500$ К. Штриховые линии на этом рисунке соответствуют температурам плавления и кипения SiO_2 . Частицы диаметром менее 50 мкм, как это следует из графика, в процессе их движения в плазменном столбе расплавлены, а частицы с диаметром менее 25 мкм кипят. Расчеты показали, что при температуре плазмы $T_{пл} = 5000$ К все частицы с диаметром менее 50 мкм кипят, а частицы с диаметром менее 3 мкм полностью испарились.

Кипящие частицы в процессе их миграции к периферии плазменного вихря уменьшаются в диаметре. На рис. 3 представлена зависимость диаметра частицы на выходе из плазменного столба $a_{s\text{вых}}$ от начального ее диаметра. Штриховая линия 1 соответствует неизменности размера частиц в процессе их движения в плазме $a_{s\text{вых}} = a_{s0}$. При достаточно низкой температуре плазменного столба $T_{пл} = 3500$ К (кривая 2) незначительное уменьшение диаметра имеет место только для мелких ($a_s < 10$ мкм) частиц: при $T_{пл} = 5000$ К (кривая 3) частицы уменьшаются во всем их диапазоне $a_{s0} = 1 \div 50$ мкм. Следует ожидать, что с дальнейшим увеличением температуры потеря массы частиц также будет возрастать с одновременным ростом максимального диаметра полностью испарившихся в плазменном вихре частиц.

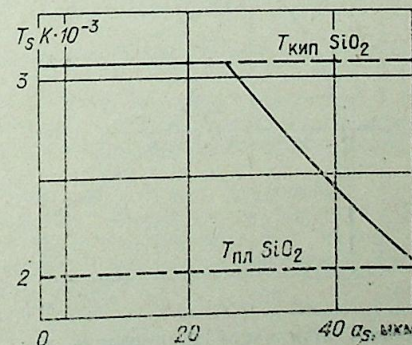


Рис. 2. Температура частиц на границе плазменного столба.

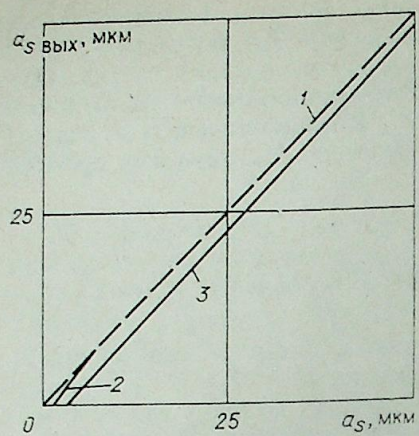


Рис. 3. Изменение диаметра частиц за счет испарения их в плазменном потоке.

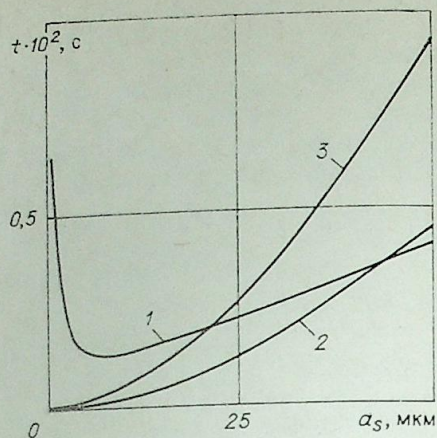


Рис. 4. Сопоставление значений времени плавления, испарения и пребывания частиц в плазменном столбе.

Большой интерес при расчете представляет определение времени удержания частиц в плазменном столбе. Данные по величине этого параметра для частиц различных диаметров при температуре плазмы $T_{пл} = 3500$ К представлены на рис. 4 (кривая 1). Следует отметить, что быстрее всего из плазменного столба выносятся частицы диаметром $a_s \approx 10$ мкм; более крупные частицы из-за инерционности и длительного вовлечения их во вращение и мелкие ($a_s < 10$ мкм) за счет преобладающего влияния сил сопротивления над центробежными выносятся из столба заметно позже. Линиями 2 и 3 на рис. 4 нанесены характерные времена соответственно плавления и вскипания частиц при данной температуре плазмы. Имея эти зависимости, легко проанализировать состояние частиц на границе плазменного столба, а также координату выноса частиц по высоте вихревой камеры, что позволяет подобрать необходимую длину аппарата. Так, для рассчитываемой камеры время истечения плазмы из нее составляет $\tau_{ист} \approx 1,5 \cdot 10^{-2}$ с. Для оптимальной работы камеры длина ее может быть сокращена.

Расчетные данные по распределению температуры частиц по радиусу вихревой камеры свидетельствуют о сложном его характере. Эти результаты приведены на рис. 5. Линии 1 и 2 соответствуют зоне ввода

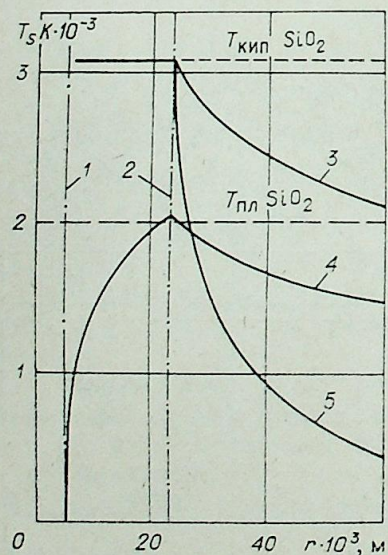


Рис. 5. Изменение температуры частиц по радиусу вихревой камеры.

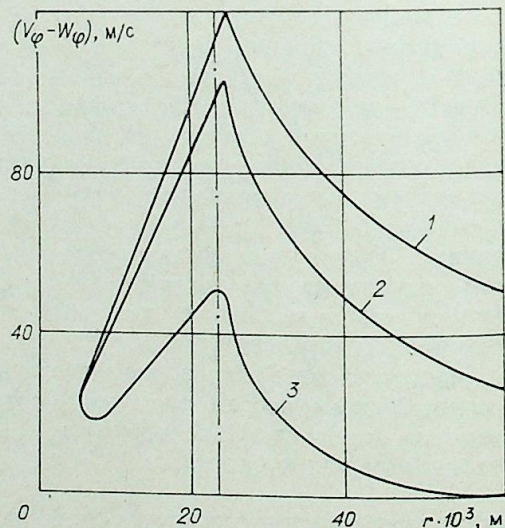
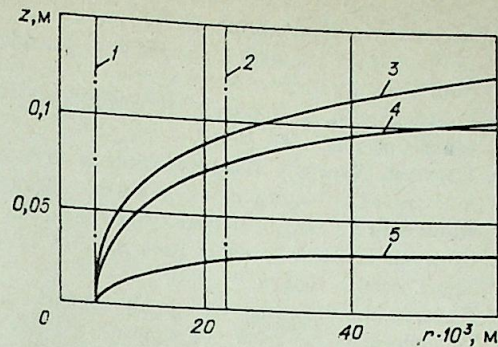


Рис. 6. Распределение относительных окружных скоростей частиц в камере.

Рис. 7. Траектории движения частиц в вихревой камере.



частиц в камеру и границе плазменного столба. Линиями 3 и 4 нанесено изменение температуры частицы диаметром 50 мкм при температурах плазмы $T_{пл} = 5000$ и 3500 К соответственно. Как видно, при высокой температуре плазменного столба ($T_{пл} = 5000$ К) частицы не успевают достаточно быстро остыть в периферийной области и в расплавленном состоянии достигают боковой стенки камеры. Для частиц диаметром $a_s = 10$ мкм (кривая 5, $T_{пл} = 3500$ К) темп охлаждения более значительный и в процессе движения в периферийной зоне их температура от точки кипения снижается до величины температуры окружающего потока.

Отставание частиц по тангенциальной скорости от газового потока показано на рис. 6. Кривая 1 отражает изменение тангенциальной скорости потока по радиусу камеры. Линия 2 дает зависимость скорости скольжения частицы диаметром 50 мкм при температуре плазмы 3500 К. Аналогичная зависимость для частицы диаметром 50 мкм при температуре плазмы 5000 К практически не отличается от кривой 2. На рис. 6 нанесена зависимость (кривая 3) скорости скольжения частицы относительно газового потока при температуре плазмы 3500 К и диаметре частицы 10 мкм. Видно, что и в этом случае отставание частицы по скорости довольно значительное. Следовательно, в таких течениях методы расчета, основанные на гипотезе о слежении частицы за газовым потоком в тангенциальном направлении, неприменимы.

Траектории частиц в вихревой камере показаны на рис. 7; обозначения кривых здесь соответствуют рис. 5. Основное перемещение частиц в осевом направлении имеет место в области плазменного вихря; в периферийной области частицы движутся преимущественно в радиальном направлении.

Таким образом, изложенная методика позволяет рассчитать все необходимые параметры при движении частиц в вихревой камере при наличии плазменного вихря по ее оси и провести качественный анализ влияния различных факторов на динамику и тепломассообмен частиц.

В заключение авторы выражают признательность Э. П. Волчкову за поставку данной работы и полезные обсуждения.

Институт теплофизики СО АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
21/XII 1982

ЛИТЕРАТУРА

- Гольдштик М. А., Леонтьев А. К., Палеев И. И. Движение мелких частиц в закрученном потоке.— ИФЖ, 1960, т. 3, № 2.
- Гроздовский Г. Л. О движении мелких частиц в газовом потоке.— Тр. ЦАГИ, 1976, вып. 1755.
- Рыкалин Н. Н., Петруничев В. А., Кулагин И. Д. и др. Получение сферических пылинкодисперсных порошков в низкотемпературной плазме.— В кн.: Плазменные процессы в металлургии и технологии неорганических материалов. М.: Наука, 1973.
- Николаев А. В. Плазменно-дуговой нагрев вещества.— В кн.: Плазменные процессы в металлургии и технологии неорганических материалов. М.: Наука, 1973.
- Кисель В. И., Балдинов Г. Р. Исследование характеристик вихревых камер с разрядом в приосевой зоне.— В кн.: VIII Всесоюз. конф. по генераторам низкотемпературной плазмы. Тезисы докл. Т. 3. Новосибирск, 1980.
- Добринский Э. К., Урюков Б. А., Фридберг А. Э. Исследование стабилизации плазменной струи газовым вихрем.— Изв. СО АН СССР, 1979, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

7. Rietema K., Krajenbrink H. Theoretical derivation of tangential velocity profiles in flat vertex chamber — influence of turbulence and wall friction.— Appl. Sci. Res., 1959, Sect. A., v. 8.
8. Гольдштик М. А. К теории эффекта Ранка.— Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1963, № 1.
9. Карлсон, Хоглунд. Сопротивление и теплопередача частиц в соплах ракетных двигателей.— Ракетная техника и космонавтика, 1963, № 11.
10. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
11. Kavanau L. Heat transfer from spheres to a rarefied gas in subsonic flow.— Trans. ASME, 1955, v. 77, N 5.
12. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. М.: Атомиздат, 1979.
13. Теплофизические свойства веществ: Справочник/Под ред. Н. Б. Варгафтика. М.: Госэнергоиздат, 1956.
14. Термодинамические свойства индивидуальных веществ/Под ред. В. П. Глушко. Т. 1, 2. М., 1962.
15. Голубев П. Ф. Вязкость газов и газовых смесей. М.: Физматгиз, 1959.
16. Варгафтик Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М., 1963.

УДК 537.527

В. М. ГРАДОВ, Е. Н. ГАЙДУКОВ, Л. Г. САПРЫКИН,
А. А. ЩЕРБАКОВ, М. В. ЩЕДРОВ

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ БАЛАНС РАЗРЯДОВ ВЫСОКОГО ДАВЛЕНИЯ В ПАРАХ ЩЕЛОЧНЫХ МЕТАЛЛОВ

Исследования разнообразных проблем физики плазмы щелочных металлов стимулируются многочисленными применениями этой плазмы в ряде областей науки и техники, связанных, например, с МГД-преобразованием энергии, разработкой высокотемпературных установок для превращения солнечной энергии в электрическую, созданием селективных источников интенсивного оптического излучения.

Круг вопросов, рассмотренных в настоящей работе, относится к проблематике газовых разрядов высокого давления, стабилизированных оболочкой, и включает исследование составляющих энергетического баланса плазменного столба. Наиболее обширная литература по этому вопросу посвящена ксеноновым разрядам (библиография и ряд результатов приведены в [1, 2]). Данные по энергобалансу разрядов в парах щелочных металлов сравнительно менее полные и относятся в основном к натриевым дугам (см. обзор [3]).

Цель настоящей работы — создание замкнутого метода расчета составляющих энергетического баланса разрядов в парах различных щелочных металлов (калия, натрия, смесей калия с рубидием) с учетом стабилизирующей стенки, экспериментальная проверка расчетно-теоретической модели и исследование указанных разрядов в широком диапазоне геометрических размеров и электрических режимов.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Система уравнений, описывающих процессы в разряде и оболочке, формулируется в следующем виде:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left[r \lambda_{\pi}(T, p) \frac{dT}{dr} \right] + \sigma E^2 - \operatorname{div} F = 0, \quad (1)$$

$$F_{\nu} = - \frac{c}{3K_{\nu}} \cdot \frac{du_{\nu}}{dr}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} F_{\nu} = cK'_{\nu}(u_{\nu}^0 - u_{\nu}), \quad (3)$$

$$\operatorname{div} F = \int_0^{\infty} \operatorname{div} F_{\nu} dv, \quad (4)$$

$$E = I \left| \left(2\pi \int_0^R \sigma r dr \right) \right|, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left[r \lambda_c(T_c) \frac{dT_c}{dr} \right] - \operatorname{div} F_c = 0, \quad (6)$$

гласуются с известными экспериментальными данными как для калиевых [7], так и для натриевых разрядов [4, 6, 7], а также для разрядов в смеси паров калия и рубидия [9].

Завершая обсуждение теоретической модели, сделаем несколько замечаний относительно условий на границе разряда, при которых проводилось исследование. Предварительно заметим, что при математической формулировке задачи (1)–(15) разряд рассматривается совместно со стабилизирующей оболочкой, так как характеристики разрядов в парах щелочных металлов обладают заметной чувствительностью к условиям на границе плазменного столба (температуре). Эта чувствительность значительно выше, чем, например, для разрядов в инертных газах — ксеноне и криптоне. Все результаты получены для случая стабилизирующей оболочки из сапфира, охлаждаемой на воздухе в условиях свободной конвекции. Теплофизические свойства сапфира заимствованы из работ [17–19], причем данные по коэффициенту теплопроводности аппроксимировались зависимостью $\lambda_c = 92/T_c$, значение ε_1 принималось равным 0,3, $\nu_r = 0,5 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$, $n_v = 1,7$. Коэффициент отражения ρ_{vc} оценивался значением 0,1. Коэффициент теплоотдачи рассчитывался по методу [20] в соответствии с формулой $\alpha = 10^{-6} T_{ст} + 0,1 \cdot 10^{-2}$, где $T_{ст}$ — температура на внешней поверхности оболочки.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Экспериментально исследовался разряд в парах К и Rb, стабилизированный цилиндрической сапфировой оболочкой. В качестве буферного газа использовался ксенон с начальным давлением 0,1 МПа. Благодаря особой конструкции токовыводов источника работали на воздухе при естественном охлаждении без специальной вакуумированной рубашки. Внутренние радиусы разрядных трубок составляли 0,2 и 0,25 см, толщина стенок 0,16 и 0,14 см, длина разрядного промежутка $L = 6$ см. Сапфировые оболочки вырабатывались методом Степанова, при этом предельная электрическая мощность, рассеиваемая в разряде на единицу площади внутренней поверхности, составляла 70 Вт/см².

Пары металлов вводились в разрядный объем через катодный штенгель, который герметично отделялся от разрядного промежутка за счет расплавления пробки припоя, заложённой в штенгель рядом с катодом. Операция отделения рабочего объема от штенгеля проводилась после откачки и наполнения источника. Это позволяло сместить в разрядный объем, к катоду, холодную зону, температура которой определяет давление паров металлов, и существенно облегчить регулировку напряжения на источнике за счет принудительного подогрева прикатодной зоны. Мощность на подогрев составляла 3–30 Вт и регулировалась в зависимости от мощности, вводимой в разряд.

Источники излучения работали на постоянном токе, диапазон изменения которого составлял 3–7 А. За счет подогрева катодной зоны напряжение поддерживалось 75 ± 2 В. Во время работы разрядная трубка нагревалась до температур, при которых собственное излучение оболочки давало заметный вклад в суммарное излучение источника. В экспериментах измерялись следующие характеристики: мощность, излучаемая источником (т. е. суммарное излучение разряда и оболочки); мощность, излучаемая нагретой оболочкой; температура внешней поверхности стенок в центре разрядного промежутка.

Для определения излучательных характеристик использовался измеритель средней мощности и энергии импульсов ИМО-2 в режиме измерения энергии. По измеренным энергиям излучения W_u , $W_{об}$ мощности излучения источника P_u и оболочки $P_{об}$ находились в соответствии с выражениями: $P_u = \frac{W_u}{t_1}$, $P_{об} = \frac{W_{об}}{t_1}$, где t_1 — время измерения. Временной интервал t_1 устанавливался с помощью вращающегося с постоянной ско-

ростью диска с прорезью, укрепленного перед входным окном прибора ИМО-2. Эксперименты проводились с двумя дисками, прорези которых рещи излучательных свойств оболочки прибора на 1,0 и 2,3 с. При измерении фиксировалось излучение только от диафрагмы. В процессе для чего остальные элементы источника экранировались. Температура внешней поверхности оболочки регистрировалась с помощью прокалиброванного хромель-алюмелевой термопары. Термо-ЭДС измерялась прибором тепла от рабочего спая термопары по ее проводникам, последние плотно охватывали разрядную трубку одним витком по ее окружности.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Полученный в работе комплекс данных представлен на рис. 1–3. Доли излучения источника η_u и разряда η_r от электрической мощности P , вводимой в разряд, определялись по формулам:

$$\eta_u = \frac{2\pi(R + \delta) F_{c1}}{P} = \frac{P_u}{P}; \quad \eta_r = \frac{2\pi B E_1}{P} = \frac{P_r}{P} = \frac{P_u - P_{об}}{P},$$

где F_{c1} — плотность интегрального по спектру потока излучения источника при $r = R + \delta$, F_1 — плотность потока излучения разряда при $r = R$. Величина F_{c1} включает излучение как разряда, так и оболочки, $P = EI = \frac{U - U_{ак}}{L} \cdot I$, $U_{ак}$ — анодно-катодное падение потенциала. При обработке данных экспериментов значение величины $U_{ак}$ принималось равным 5 В.

Из рис. 1 следует, что величина η_u в исследованном диапазоне вкладываемых в разряд электрических мощностей и геометрических размеров разрядной трубки находится в пределах 0,9–0,95 и весьма слабо зависит от P , R , δ , рода плазмообразующей среды и температуры холодной точки. Более заметно от перечисленных параметров зависит η_r , причем в наибольшей степени на η_r влияет электрическая мощность разряда. Практически во всем диапазоне изученных мощностей доля поверхностных потерь энергии на оболочке $\eta_{ст}$ для калиевых, натриевых и калий-рубидиевых разрядов определяется теплопроводностью плазмы, и только незначительный вклад в $\eta_{ст}$ (до 3–5%) при высоких мощно-

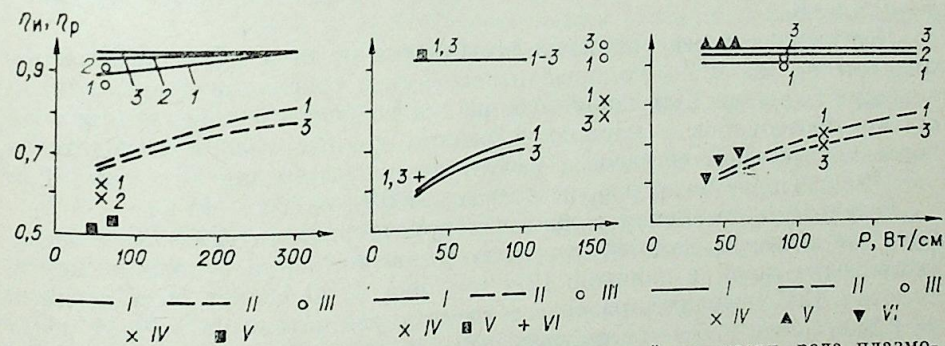


Рис. 1. Зависимость величин η_u и η_r от электрической мощности, рода плазмообразующей среды и параметров R , δ , $T_{хт}$.

$\delta = 0,1$ см (1), 0,2 (2), 0,3 (3).
 а) натриевый разряд; I, III — η_u ; II, IV, V — η_r ; I–IV — теоретические данные настоящей работы; $T_{хт} = 1050$ К, $R = 0,35$ см (I, II), 0,15 см (III, IV); V — эксперимент [21];
 б) калиевый разряд; I, III, V — η_u ; II, IV, VI — η_r ; I–VI — теоретические данные настоящей работы; $T_{хт} = 850$ К (I, II); 1000 (III, IV); 900 К (V, VI);
 в) разряд в смеси паров калия и рубидия; I, III, V — η_u ; II, IV, VI — η_r ; I–IV — теоретические, V, VI — экспериментальные данные настоящей работы. Соотношение К : Rb в жидкой фазе 9 : 1. $T_{хт} = 900$ К (I, II), 950 (III, IV); $R = 0,25$ см (I–IV), 0,225 см (V, VI); $\delta = 0,16$ см.

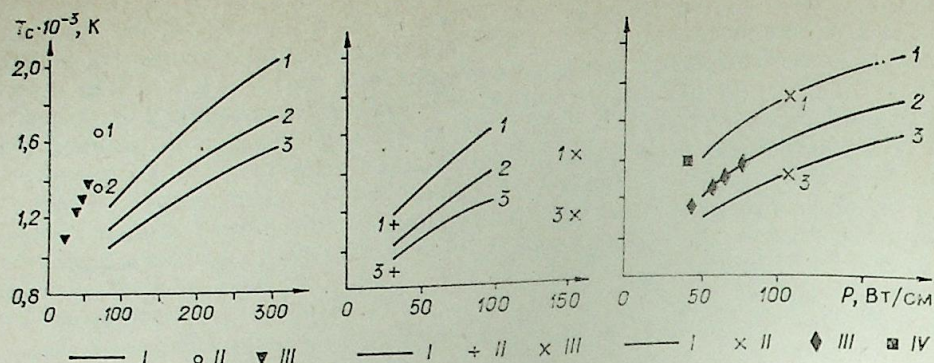


Рис. 2. Зависимость температуры внешней поверхности оболочки от электрической мощности, рода плазмообразующего газа и параметров R , δ , $T_{\text{хт}}$.

$\delta = 0,1$ см (1), 0,2 (2), 0,3 (3).
 а) натриевый разряд; I, II — теоретические данные настоящей работы, $T_{\text{хт}} = 1050$ К, III — эксперимент [22], $R = 0,35$ см (1), 0,15 (II), 0,375 см (III); $\delta = 0,075$ см. б) калиевый разряд; I—III — теоретические данные настоящей работы, $T_{\text{хт}} = 850$ К (I), 900 (II), 1000 (III). $R = 0,225$ см (1), 0,25 (II), 0,35 см (III). в) разряд в смеси калий — рубидий; $R = 0,25$ см, I, II — теоретические; III — экспериментальные данные настоящей работы, соотношение К : Rb в жидкой фазе 9 : 1, $T_{\text{хт}} = 900$ К (I), 950 (II), $\delta = 0,14$ см (III); IV — эксперимент [23], соотношение К : Rb = 3 : 1.

стях вносит излучение за границей пропускания τ_g . Величина η_p обнаруживает устойчивую тенденцию к уменьшению с ростом толщины стенок оболочки, что определяется соответствующим изменением условий на границе разряда, влияющих на температурное распределение в плазме. Рост δ сопровождается снижением температуры внутренней поверхности стенок, увеличением градиента температур в пристеночной зоне дуги, ростом в балансе энергии составляющей, связанной с передачей тепла теплопроводностью плазмы, и сокращением излучающей зоны разряда. В результате η_p снижается, причем тем сильнее, чем больше электрическая мощность. На рис. 2 отчетливо прослеживается отмеченная зависимость температуры стенки от ее толщины (температура внешней поверхности оболочки очень мало, в пределах 3%, отличается от температуры внутренней поверхности).

Рост η_n с увеличением δ в основном определяется возрастанием излучающего объема оболочки.

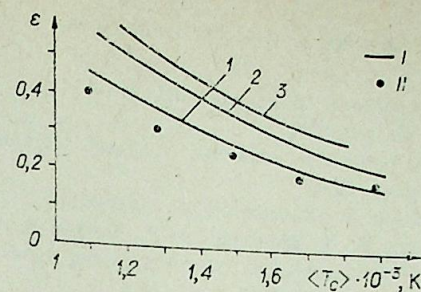
Доля излучения оболочки $\eta_{об} = 1 - \frac{\eta_p}{\eta_n}$ в суммарном излучении разряда и оболочки с ростом мощности от 50 до 200 Вт/см уменьшается от ~0,3 до 0,2.

Достоверность теоретических результатов по всем обсуждаемым параметрам η_n , $\eta_{об}$ и $T_{ст}$ устанавливалась путем сравнения с экспериментальными данными. Для калий-рубидиевых разрядов, эксперименты с которыми проводились в настоящей работе, данные теории находятся в удовлетворительном согласии с результатами измерений (см. рис. 1, а; 2, в). Расхождение по η_n и η_p не превышает 6%, по $T_{ст}$ — 10%.

Результаты сравнения с данными других авторов [21—23] показывают, что в целом имеется разумное согласие теории и эксперимента. Расхождение по η_p с данными [21] (см. рис. 1, а) может быть вызвано тем, что в [21] изучались разряды в смеси паров натрия со ртутью, тогда как в настоящей работе рассмотрен чисто натриевый разряд.

На рис. 3 представлены теоретические зависимости степени черноты поверхности оболочки от средней температуры стенки при различной толщине δ , определенные по формуле $\epsilon = \frac{F_{c2}}{\sigma T_{ст}^4}$, где F_{c2} — плотность потока лучистой энергии на внешней поверхности оболочки при выключенном разряде. Теоретические данные весьма близки к экспериментальной зависимости [21], что дополнительно свидетельствует в пользу метода

Рис. 3. Зависимость степени черноты поверхности разрядной трубки от средней температуры стенки.
 $R = 0,35$ см, $\delta = 0,1$ см (1) — 0,2 (2) — 0,3 (3). I — теоретические данные настоящей работы, II — эксперимент [21], $\delta = 0,1$ см.



расчета и подтверждает точность использованных данных по коэффициенту поглощения санфира [19].

Таким образом, на основе комплексного расчетно-теоретического и экспериментального исследования плазмы паров калия, натрия и их смесей с рубидием получены подробные данные об излучательных свойствах в энергетическом балансе плазменного столба, а также влиянии собственного излучения полупрозрачной оболочки на суммарные радиационные характеристики рассмотренных разрядных устройств. Разработанный метод расчета является достаточно общим и пригоден для исследования источников селективного излучения с другими плазмообразующими средами.

Поступила в редакцию
29/IV 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Импульсные источники света/Под ред. И. С. Маршак. М.: Энергия, 1978.
2. Градов В. М., Дорогов В. Г., Константинов Б. А. и др. Методы расчета систем накачки твердотельных лазеров.—Обзоры по электронной технике, 1978, сер. 4, вып. 10 (539).
3. Wharmby D. O. Scientific aspects of the high-pressure sodium lamp.— IEE Proc., 1980, v. A127, N 3.
4. Waszink J. H. Spectroscopic measurements on a high-pressure Na—Xe discharge and comparison with a nonequilibrium calculation.— J. Appl. Phys., 1975, v. 46, N 7.
5. Градов В. М., Щербаков А. А. Расчет электрофизических характеристик дуговых разрядов в криптоне и ксеноне.— ТВТ, 1979, т. 17, № 6.
6. Groot J. J., van Vliet J. A. J. M. The measurement and calculation of the temperature distribution and spectrum of high-pressure sodium arcs.— J. Phys. D: Appl. Phys., 1975, v. 8, N 6.
7. Schmidt K. Radiation characteristics of high-pressure alkali metal discharges.— Proc. 6th Int. Conf. Ion. Phen. Gases. Paris, 1963, v. 3.
8. Schmidt K. Parameters of the high-pressure sodium discharge column.— Proc. 7th Int. Conf. Ion. Phen. Gases, Beograd, 1965, v. 1.
9. Аваньев А. Ю., Давыдов С. Ф., Колпакова И. В. и др. Дуговые разряды в парах щелочных металлов как перспективные источники накачки лазеров на АИГ; Nd³⁺.— ЖПС, 1979, т. 30, № 4.
10. Митчнер М., Кругер Ч. Частично ионизированные газы. М.: Мир, 1976.
11. Davies D. A., Mason E. A., Munn R. J. High-temperature transport properties of alkali metal vapors.— Phys. Fluids., 1965, v. 8, N 3.
12. Градов В. М., Мак А. А., Щербаков А. А. Расчет оптических характеристик ксеноновой плазмы с учетом влияния продуктов эрозии оболочки.— Оптика и спектроскопия, 1977, т. 43, № 2.
13. Собельман И. И. Введение в теорию атомных спектров. М.: Физматгиз, 1963.
14. Чертопруд В. Е. Инфракрасная система поглощения оптических свойств паров калия при высоких температурах и концентрациях.— ТВТ, 1969, т. 7, № 6.

15. Москвин Ю. В. Сечения фотоионизации отрицательных ионов щелочных металлов и галогенов.— ТВТ, 1965, т. 3, № 6.
16. Вероятности оптических переходов двухатомных молекул/Под ред. Р. В. Хохлова. М.: Наука, 1980.
17. Излучательные свойства твердых материалов/Под ред. А. Е. Шейндлина. М.: Энергия, 1974.
18. Розберг Ф. Справочник по вакуумной технике и технологии. М.: Энергия, 1972.
19. Беляев В. Д., Ванюшин А. В., Петров В. А., Романова Г. И. Исследование спектрального коэффициента поглощения рубина и лейкосапфира при высоких температурах.— ТВТ, 1977, т. 15, № 1.
20. Михеев М. А., Михеева И. М. Основы теплопередачи. М.: Энергия, 1977.
21. Волкова Е. Б., Кобина З. Н., Рохлин Г. Н. Исследование теплового баланса колбы натриевой лампы высокого давления.— Светотехника, 1974, № 8.
22. Рохлин Г. Н., Семенов Н. Я. Экспериментальное определение температуры горелок натриевых ламп высокого давления.— Светотехника, 1978, № 12.
23. Росс М., Фридман П., Абернейти Дж. и др. Оптическая связь в космосе с использованием лазера на АИГ: Nd.— ТИИЭР, 1978, т. 66, № 3.

УДК 681.5: 615

О. Я. НОВИКОВ, В. Ф. ПУТЬКО, В. И. ШАЦКИХ, В. Ф. ЯКОВЛЕВ

МИКРОКОМПЬЮТЕРНАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ ПЛАЗМЕННОЙ УСТАНОВКОЙ

Проведенные ранее исследования электрической дуги во вращающемся магнитном поле (ВМП) [1, 2] показали, что такая магнитная система позволяет в несколько раз увеличивать напряженность электрического поля, а следовательно, и мощность разряда [2], дает возможность изменять профиль энтропии плазменной струи от предельно наполненного до острого, резко выраженного [3], управлять геометрическими размерами плазменного факела [4], стабилизировать разряд в канале плазмотрона [5].

Кроме того, как показали экспериментальные исследования, зависимость линейной скорости движения разряда от параметров магнитного поля имеет экстремум, который соответствует максимальному конвективному выносу энергии из дуги, наибольшему термическому КПД установки. Все это дает возможность использовать ВМП в качестве эффективного инструмента управления. При управлении плазмотроном возникают следующие задачи: 1) стабилизация каждого параметра; 2) управление каждым параметром; 3) оптимальное управление процессом.

Применение ВМП позволяет вести управление: а) по мощности; б) по среднемассовой температуре потока плазмы; в) стабилизировать отдельные параметры на необходимом уровне; г) поддерживать оптимальный режим течения процесса.

На основе сказанного была разработана система управления плазменной установкой, которая использует обратную связь через ВМП по управляемым величинам. Система содержит датчик обратной связи, задающее устройство, устройство сравнения, звенья, обеспечивающие заданные статические и динамические характеристики системы, усилитель и регулирующий элемент. Для определения устойчивости системы была исследована динамика электродуговой установки с ВМП.

Необходимость проведения вычислений в системе, статистическая обработка результатов измерений, оптимальное управление оправдывают использование в такой системе ЭВМ.

Для автоматического контроля и управления экспериментальной электродуговой установкой была создана микрокомпьютерная система. В нее вошли управляющая микро-ЭВМ «Электроника ДЗ-28», цифровой вольтметр В7-16, принтер S3291, интерфейсное устройство, релейный транзисторный источник тока для питания дуги (рабочий ток 0,5—25 А, напряжение в нагрузке до 100 В), генератор вращающегося магнитного поля (индукция регулируется в пределах 0,005—0,02 Т). Генератор ВМП содержит генератор синусоидального напряжения, фазорегулятор, амплитудный модулятор, усилитель мощности (до 50 Вт), индуктор, одеваемый на разрядную камеру (статор однофазного конденсаторного двигателя).

На рис. 1 показана блок-схема системы управления, на рис. 2 — генератор вращающегося магнитного поля. Источник тока и генератор ВМП управляются от ЭВМ через интерфейсное устройство, которое содержит 10-разрядные цифроаналоговые преобразователи К572ПА1Б. Изменение тока источника тока и индукции генератора ВМП производится

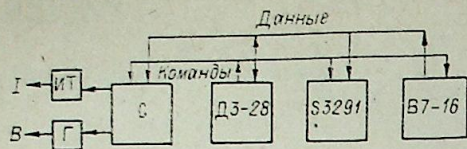


Рис. 1. Блок-схема системы управления. С — интерфейс, Г — генератор ВМП, ИТ — источник тока.

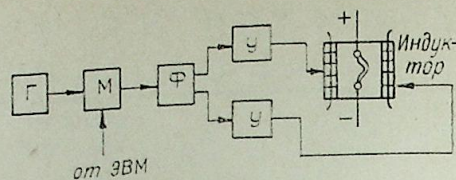


Рис. 2. Генератор вращающегося магнитного поля.

Г — генератор синусоидального напряжения, М — амплитудный модулятор, Ф — фазовращатель, У — усилитель мощности.

с дискретностью $1/1024$ от рабочего диапазона. По шине команд производится выбор периферийного устройства, по шине данных — передача уставок в генератор ВМП и источник тока, ввод информации с вольтметра и выдача данных на печать. В описываемой экспериментальной установке цифровой вольтметр использовался только для измерения напряжения на дуге. Вводя в установку необходимые датчики с электрическим выходом (термопары, расходомеры), можно значительно расширить количество контролируемых параметров и получить более полную информацию о технологическом режиме.

Применение микрокомпьютерной системы управления требует использования математических моделей объекта, предназначенных для использования непосредственно в микро-ЭВМ. Такие модели должны в явном виде задавать связь между входными и выходными параметрами объекта, приводить к простым алгоритмам восстановления параметров моделей по опытным данным. Этим требованиям отвечают полиномиальные регрессионные модели (иногда их называют информационными).

Для получения математического описания электродуговой установки применялся многофакторный активный эксперимент. Использовались полиномиальные регрессионные модели. В нашем случае электродуговая установка описывалась уравнениями:

$$U = U_0 + a_1 I + a_2 B + a_{12} IB + a_{11} I^2 + a_{22} B^2, \quad (1)$$

$$P = P_0 + C_1 I + C_2 B + C_{12} BI + C_{11} I^2 + C_{22} B^2. \quad (2)$$

Здесь U — напряжение на дуге; P — мощность, подводимая к дуге; a_i и C_i — коэффициенты моделей; I — ток дуги; B — индукция ВМП.

Типичные результаты идентификации

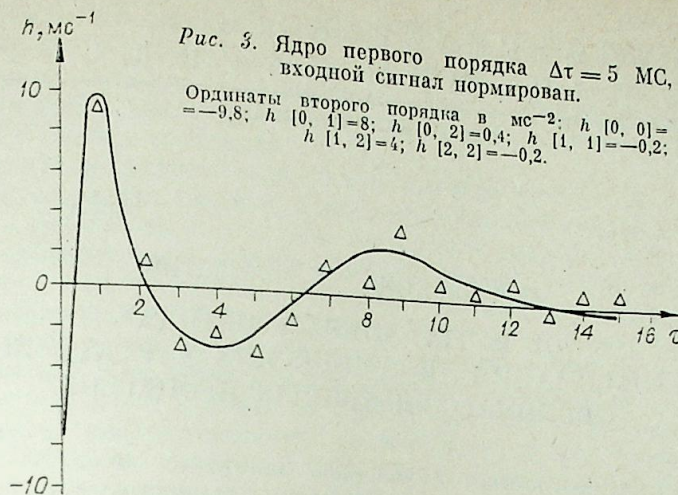
$$U = 27,5 - 1,9I + 3,6B + 1,4I^2 - B^2, \quad (3)$$

$$P = 290 - 39I + 35B - 11I^2 + 8B^2. \quad (4)$$

Для описания объекта в динамике использовался дискретный ряд Вольтерра. Для нахождения оценок a_i и C_i применялись планы B_n и ортогональные композиционные планы [6]. При идентификации электродуговой установки переход от плана эксперимента к тест-сигналу и интерпретация результатов в виде каскадного соединения линейных динамических и нелинейных безынерционных звеньев проводилась аналогично [7].

При модуляции амплитуды индукции в пределах $0,011-0,02T$, при токе дуги $10A$, скорости вращения поля 200 об/с ядро первого порядка ряда Вольтерра имеет вид экспоненциально затухающего колебания, время памяти около 40 мс. Ядро второго порядка затухает значительно быстрее, его область определения — квадрат 15×15 мс. Ядро первого порядка показано на рис. 3.

Микрокомпьютерная система осуществляла стабилизацию мощности дуги, воздействуя на нее полем, а также изменением тока и напряжения дуги во времени по программе. Был опробован режим оптимального управления по максимуму мощности на дуге. Для этого компьютер использовал сначала метод крутого восхождения [6]. Машина сужала диапазон изменения факторов I и B так, что уравнение (2) вырождалось в линей-



ную модель. Факторы изменялись пропорционально коэффициентам C_i , при этом мощность возрастала. Канонический анализ поверхности $P(I, B)$ показал, что точка экстремума лежит вне зоны управления, $P(I, B)$ — седловидная поверхность. Поэтому компьютер прекращал изменение I и B , доводя их до наибольших разрешенных программой значений. Если максимум существует, машина в его окрестности переходит к нелинейной модели и определяет координаты экстремума. Наличие экстремума проявляется в неадекватности линейной модели.

Проводилось определение автокорреляционной функции шумов напряжения на дуге и закона распределения этих шумов. По виду корреляционной функции оказалось возможным различать устойчивые и неустойчивые режимы горения дуги с ВМП. Чем ближе режим к неустойчивому, тем более колебательный характер приобретает корреляционная функция.

Проведенные эксперименты показали эффективность применения микро-ЭВМ для управления и контроля электродуговой установки с ВМП.

Куйбышевский политехнический институт

Поступила в редакцию 10/IX 1982

ЛИТЕРАТУРА

- Егоров В. М., Новиков О. Я., Путько В. Ф. Движение электрической дуги во вращающемся магнитном поле. — В кн.: Материалы VII Всесоюзной конференции по генераторам низкотемпературной плазмы. Т. 1. Алма-Ата, 1977.
- Путько В. Ф. Статистические характеристики электрической дуги во вращающемся магнитном поле. — В кн.: Материалы VII Всесоюзной конференции по генераторам низкотемпературной плазмы. Т. 1. Алма-Ата, 1977.
- Егоров В. М., Новиков О. Я., Путько В. Ф. Способ управления профилем энтальпии плазменной струи. АС № 631037 по М. кл. H05 1/10. 1977. — Открытия, изобретения, пром. образцы и товарные знаки, 1981, № 12.
- Егоров В. М., Новиков О. Я., Путько В. Ф., Соболев В. С. Способ управления плазменной струей. АС № 700934 по М. кл. H05 7/18, H05 1/24. 1978. — Открытия, изобретения, пром. образцы, товарные знаки, 1979, № 44.
- Новиков О. Я., Гурьянов В. К. Способ осуществления электрической дуги. АС № 177537 по М. кл. H05. 1964. — Бюл. изобретений, 1965, № 1.
- Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов. М.: Мпр, 1977.
- Wernstedt J. Development and application of Suboptimal test-Signal sequences. Link Sci. World. Con. 1979, v. 3.

Б. Н. ДЕВЯТОВ, А. Г. ВЕРЕЩАГИН

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МЕТОДАХ
АППРОКСИМАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК
ТЕПЛОМАССОБМЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

Вследствие постоянного повышения единичной мощности технологических аппаратов значительно возрастают материальные и энергетические затраты, связанные с работой оборудования в переходных режимах, когда характеристики процесса еще не вышли на определенные расчетные значения. Влияние на реальные объекты целого комплекса различных возмущающих и управляющих воздействий также приводит к увеличению значимости проблем анализа динамики. Кроме того, определение динамических характеристик необходимо для разработки систем контроля и управления, а также для динамической оптимизации параметров самого объекта.

Усложнение моделей неизбежно привело к использованию численных методов при работе с ними; широкое применение вычислительных машин заставило пересмотреть также традиционные методы расчета статических и динамических характеристик, приспособив их к возможностям ЭВМ. Однако получение численных решений не может решить совокупности всех задач, возникающих при исследовании динамики технологических систем. Так, например, для задачи оптимизации параметров аппаратов и режимов их работы очень важна возможность получения решений в аналитическом виде, как функций данных параметров. Это, как и многие другие преимущества аналитических решений, заставляет исследователей искать новые пути их получения.

В данной статье рассматривается круг вопросов, связанных с выяснением перспектив развития методов исследования динамики сложных технологических процессов. В результате анализа возможностей интегральных методов аппроксимации динамических характеристик тепло-массообменных процессов, рассмотренных в ряде работ, в том числе и наших исследованиях, можно сделать следующие заключения.

Дальнейшее развитие методики аппроксимации, представленной в работах [1, 2], позволяет решить важные проблемы в инженерных задачах исследования моделей динамики. Во-первых, могут быть широко использованы универсальные и удобные для инженерных приложений динамические критерии — инерционности процесса, представляющие собой обобщение понятия постоянной времени объекта. Во-вторых, предложенная в [1, 2] методика аппроксимации приводит к возможности достаточно универсального подхода к задачам упрощения методов решения сложных систем уравнений в частных производных, составляющих математические модели нестационарных тепло-массообменных процессов. Нахождение динамических характеристик, соответствующих данным моделям, в конечном итоге может быть сведено к решению не дифференциальных, а алгебраических уравнений. Важно при этом, что решение соответствующих систем алгебраических уравнений дает возможность находить решение в общем виде как функцию времени и координат процесса для задач практически любой размерности.

Более того, для линейных систем (даже с переменными коэффициентами) решение таких многомерных задач получается в аналитическом

виде не только как функция времени и пространственных координат, но и как функция коэффициентов исходных дифференциальных уравнений, а значит, и всех параметров процесса и аппарата. Несомненно, что такие следования сложных процессов.

Важно, что методика в основном распространяется и на существенно нелинейные задачи статики и динамики технологических процессов.

Первые результаты в этой области нами проверены на конкретных примерах классических уравнений математической физики, а для нелинейных задач — на простейших обыкновенных дифференциальных уравнениях, содержащих существенно нелинейные члены. Такие расчеты показали высокую точность аппроксимации, вполне достаточную для инженерной практики, уже на втором или третьем приближении.

Вернемся, однако, к сложившемуся к настоящему времени положению в вопросах анализа динамики широкого круга тепло-массообменных процессов. Сложность аналитического расчета динамики распределенных объектов вызвала появление работ, в которых предлагались различные приближенные методы, основанные на разных видах физической и математической аппроксимации.

Существуют, как известно, две тенденции в решении задач математического моделирования сложных тепло-массообменных процессов. С одной стороны, в связи с развитием численных методов и совершенствованием вычислительной техники создаются сложные нелинейные модели объектов, описываемые системами дифференциальных уравнений в частных производных или даже системами интегродифференциальных уравнений, которые призваны учесть и отразить максимально возможное количество факторов, определяющих протекание процесса. Подобные модели, очевидно, ориентированы лишь на численный анализ. Стремление же получить решение в виде определенных аналитических выражений, являющихся функциями различных параметров, вместо необходимого количества графиков и таблиц приводит к необходимости создания более простых моделей, отражающих лишь влияние наиболее существенных факторов.

При этом степень простоты и структура модели выбираются с учетом имеющихся у исследователя методов нахождения решения. Так, в практике анализа и синтеза систем автоматического управления промышленными объектами, учитывая хорошо развитый аппарат структурной теории, основанной на применении преобразования Лапласа, математическую модель объекта составляют часто в виде систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Однако при описании ряда процессов оказывается, что их существенным свойством, определяющим протекание процесса, является пространственная распределенность. В соответствии с принятой в теории управления терминологией такие объекты называют объектами с распределенными параметрами. С точки зрения задач управления и контроля, объекты с распределенными параметрами характеризуются тем, что для их описания недостаточно задания соотношений, связывающих входное воздействие с выходным. Из-за пространственного характера рабочих процессов математическая модель таких объектов должна связывать поля параметров процесса (например, поле температуры, концентрации и т. п.) с внешними полями, воздействующими на объект.

Таким образом, уже на этапе создания математической модели процесса исследователь по необходимости вынужден решать своеобразные задачи аппроксимации, когда, исходя из целей и предполагаемых методов исследования, он создает некую модель, аппроксимируя реальный физический процесс некоторым идеализированным процессом. При этом необходимым этапом разработки математической модели часто является создание соответствующей упрощенной физической модели процесса.

Тем не менее желание отразить в модели наиболее характерные особенности объекта (например, его пространственную распределенность) не

позволяет в большинстве случаев создать модели, ориентированные на получение точных аналитических решений. В этом случае надежным инструментом исследования становятся различные методы математической аппроксимации.

Среди множества видов аппроксимации наибольшее значение для практики имеют, пожалуй, методы интегральной аппроксимации, основанные на использовании некоторых интегральных характеристик процесса, являющихся очень удобным средством его представления. Известно, что площади, объемы и моменты различного порядка (статистический момент, момент инерции) от разнообразных величин имеют самое обширное применение во всех областях науки и техники. Не менее часто, чем моменты, встречаются и употребляются интегралы различного порядка от заданной кривой или функции. Так, в вопросах надежности первый интеграл от кривой нагрузки представляет собой срезающую силу, второй — изгибающий момент, третий — угол поворота и т. д.

Классическим примером интегральной аппроксимации является метод Фурье (ряд Фурье, интеграл Фурье).

Методы интегральной аппроксимации в отличие от аппроксимаций, построенных, например, на использовании ряда Тейлора, дают приближение функции не в окрестности какой-либо точки, а на всем рассматриваемом интервале, что и способствует их широкому применению.

Специально методам интегральной аппроксимации посвящены работы [1—4]. В качестве интегральных параметров процесса в них используются инерционности S_n :

$$S_n = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} t^n f'(t) dt,$$

где $f(t)$ — функция переходного процесса, т. е. в математическом смысле инерционности пропорциональны степенным моментам функции. Введенные характеристики и являются основой для построения соответствующих аппроксимаций функций переходных процессов и передаточных функций.

Удобство в использовании данных величины S_n в качестве динамических характеристик обусловлено их простым и наглядным геометрическим и физическим смыслом. Так, инерционность S_1 численно равна площади, заключенной между кривой переходного процесса и прямой, соответствующей новому установившемуся режиму. Инерционность S_2 в свою очередь численно равна площади, ограниченной прямой $y = S_1$ и кривой $y = S_1(t)$,

$$\text{где } S_1(t) = \int_0^{\infty} [f(\infty) - f(t)] dt.$$

Аналогичную геометрическую интерпретацию имеют и инерционности высших порядков.

Основная идея введения таких динамических критериев обусловлена стремлением обобщить очень распространенное понятие постоянной времени объекта, справедливое лишь для сосредоточенных систем и являющееся по сути интегральным критерием, хотя в автоматике оно часто представляется как локальная характеристика, определяемая касательной к кривой переходного процесса в точке $t = 0$.

Для процессов, характер изменения которых во времени описывается экспоненциальной функцией, инерционность S_1 равна величине постоянной времени. Отсюда видно, что мы хорошо соблюдаем преемственность в новых определениях понятия инерционности процесса, следуя от процессов сосредоточенных к процессам с распределенными параметрами. Введенное понятие совокупности инерционностей различных порядков S_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, нужно рассматривать как естественное обобщение простейшей динамической характеристики на случай сложных распределенных процессов, для которых элементарное понятие постоянной времени не имеет смысла.

В работах [1, 2] даны методы определения S_n из исходных дифференциальных уравнений процесса. В частности, показано, что справедливо следующее соотношение:

$$S_n = (-1)^n \frac{1}{n!} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d^n}{dp^n} F(p),$$

где $F(p)$ — передаточная функция, или преобразование Лапласа — Карсона функции $f(t)$. Следовательно, преобразуя исходную систему дифференциальных уравнений для неизвестных функций по Лапласу — Карсону, дифференцируя полученную систему по p и переходя к пределу при $p \rightarrow 0$, будем получать соответствующие системы уравнений для определения инерционностей S_n . Использование же последних для построения аналитических выражений переходных процессов может быть осуществлено, например, с помощью рядов Бурмана — Лагранжа или специальных систем полиномов [3, 4].

Применением рядов Бурмана — Лагранжа трансцендентная передаточная функция, соответствующая распределенной модели динамики, может быть представлена дробно-рациональными выражениями [3]. При этом используется разложение передаточной функции в ряд Бурмана — Лагранжа вида

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \left(\frac{p}{p+\lambda} \right)^n. \quad (1)$$

Коэффициенты d_n выражаются через величины инерционностей:

$$d_n = \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^{n-m} C_{n-1}^m \lambda^{n-m} S_{n-m}, \quad C_{n-1}^m = \frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!}.$$

Ряду (1) соответствует следующее разложение переходной функции:

$$f(t) = d_0 + e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} d_n L_{n-1}(\lambda t), \quad d_0 = S_0 = f(\infty), \quad (2)$$

где $L_{n-1}(\lambda t)$ — полином Лагерра.

Итак, мы всегда будем получать стандартное аналитическое выражение передаточной и переходной функций независимо от величины порядка уравнения с частными производными, описывающего динамику. Инерционности S_n процесса являются обобщенными параметрами, через которые приближенно выражается динамика процесса в принципе с любой желаемой точностью. Для повышения точности просто следует увеличивать количество учитываемых членов разложений (1), (2), имеющих достаточно простую структуру.

Таким образом, задача нахождения функции $f(t)$ из исходной системы дифференциальных уравнений может быть заменена значительно более простой задачей определения ее инерционностей S_n .

Кратко остановимся на проблемах анализа динамики таких сложных технологических процессов, как плазменные. Система управления плазменными процессами может служить хорошим примером пространственно-распределенной системы, где требуется не только распределенный контроль, но и распределенное в пространстве управляющее воздействие, причем из-за очень высоких требований к быстродействию в едином устойчиво функционировании контроля и управления сосредоточить в едином устройстве. Важным и широко распространенным видом плазменных процессов являются процессы в электродуговых нагревателях газа — плазмотронах. Динамические процессы в плазмотроне описываются сложными системами дифференциальных уравнений в частных производных, отражающими протекающие в электродуговой плазме газодинамические и электромагнитные процессы. В частности, течение в канале плазмотрона при соответствующих предположениях может быть описано системой, состоящей из уравнений неразрывности, движения, энергии, сохранения

полного тока и состояния [5], которые в совокупности составляют основу модели процесса. Такая модель характеризуется следующими особенностями: многосвязностью (наличием многих неизвестных функций состояния), многомерностью (наличием нескольких независимых переменных), нелинейностью.

Попытки описания технологического процесса в плазмотроне с химическими реакциями [6] приводят к еще более сложным моделям. В этом случае необходимо рассматривать уравнения динамики сплошной неоднородной среды.

Проблемам анализа динамики электродуговых плазменных процессов посвящаются все больше работ. Для первых исследований этого направления характерно использование элементарного понятия постоянной времени дуги, основанного на аппроксимации динамических свойств дуги с помощью простейшего апериодического звена. Ограниченность такого подхода при анализе динамики плазмы, игнорирующей пространственную распределенность процесса, заставила исследователей искать другие пути аппроксимации динамических свойств дуги. В частности, в работе [7] впервые специально поставлен вопрос о выяснении влияния пространственной распределенности на динамику плазмы. Однако попытка учета пространственной распределенности в рамках использования простейшей динамической характеристики — постоянной времени, предпринятая в [7], не дала существенных результатов. Так, даже учет такого элементарного условия процесса, как отличие от нуля скорости потока газа, приводит к тому, что постоянная времени перестает быть однозначной характеристикой инерционности дуги. При этом, как отмечается в [8], главная беда не в том, что постоянная времени теряет свою однозначность, а в том, что возникает зависимость параметра оператора от частоты. Теряется возможность получения передаточной функции и величины постоянной времени, как главного элемента разгонной характеристики и весь метод теряет свои перспективы.

В связи с этим в [8] впервые использовано понятие инерционностей процесса S_n для анализа динамики дуги. Однако в этой работе проанализирован лишь случай очень упрощенной модели, и процесс рассматривался распределенным лишь по одной пространственной координате. В [9] приведена линейная многомерная модель динамики плазмы, где учитывается распределенность процесса по радиусу канала r и по осевой координате x . Здесь с целью упрощения задачи коэффициенты модели считались функциями лишь радиуса (т. е. тем самым в [9] предполагается, что в стационарном режиме характеристики плазмы сравнительно мало меняются вдоль оси). Исходя из такой модели, в [9] ставилась задача получения аналитической зависимости решения от t и x по r же предполагался численный счет. Нахождение аналитической зависимости от x было основано при этом на обобщении методики получения систем уравнений для инерционностей функции на случай, когда независимой переменной является координата, причем диапазон ее изменения в отличие от времени обычно конечен. Для решения данной задачи использовались моменты функции, заданной на конечном интервале $[0, 1]$:

$$c_i = \int_0^1 x^i f'(x) dx, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

(если функция задана на произвольном интервале $[a, e]$, то с помощью замены переменной последний легко можно преобразовать к интервалу $[0, 1]$). При этом в [9] рассматривался лишь общий алгоритм получения уравнений для степенных моментов функции и не исследовался, например, такой важный вопрос, как замыкание получаемой для моментов системы, которая оказывается неполной.

Учитывая все сказанное, перейдем к рассмотрению основных задач развития методов интегральной аппроксимации, разработанных в [1, 2].

Прежде всего практические задачи, в частности задача моделирования динамики плазмы, ставят нас перед необходимостью обобщения ме-

тодов анализа динамики на многомерные системы, в которых часть независимых переменных имеет бесконечный интервал изменения, а другая — конечный. Важной проблемой при этом, как отмечено выше, является проблема замыкания систем уравнений для моментов, являющихся важной ролью могут сыграть определенные асимптотические свойства моментов, а также результаты работы [10], в которой получены приближенные соотношения для моментов высшего порядка через моменты бо- функций на концах интервала.

Другая актуальная задача — анализ возможностей распространения данного подхода на случай систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и, возможно, нелинейных систем. Обратим внимание, в частности, на то, что именно наличие переменных коэффициентов отказывая от попытки получения приближенных аналитических решений в виде функций не только времени и осевой координаты, но и радиуса. Хотя, как указано в начале статьи, здесь имеется возможность полного решения задачи как многомерной, причем искомые функции могут быть найдены также и в виде аналитической зависимости от конструктивных параметров аппарата и режима его работы. Говоря же о нелинейных задачах, заметим, что даже линеаризация исходных уравнений объекта, являясь методом довольно грубого приближения, не дает в большинстве случаев окончательного решения проблемы. Дело в том, что коэффициенты линеаризованного уравнения выражают исходный статический режим, что, во-первых, приводит, как правило, к уравнениям с переменными коэффициентами, а во-вторых, сохраняется необходимость решения нелинейных уравнений статики, имеющих лишь меньшую на единицу размерность.

В то же время совокупность моментов функции однако полно ее характеризует независимо от того, является ли данная функция решением линейного или нелинейного уравнения. Поэтому возникает задача развития методов определения (хотя бы приближенного) моментов функции на случай нелинейных исходных систем дифференциальных уравнений.

В этом плане возможность распространения подхода к интегральной аппроксимации, развитого ранее для линейных систем, на случай систем с нелинейностями подтверждается также известной теоремой В. С. Кулебакина [11], утверждающей, что всякую функцию из достаточно широкого класса можно со сколь угодно малой погрешностью рассматривать как интеграл линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Следует обратить внимание также на то, что использование моментов функции для ее аппроксимации выгодно отличается от широко распространенного при решении физических задач метода интегрального усреднения. Фактически нахождение среднеинтегрального значения функции аналогично определению одного из ее моментов. И если, применяя метод интегрального усреднения, мы затем практически не можем решить обратную задачу, т. е. найти саму искомую функцию, то по набору моментов функции мы ее можем восстановить с какой угодно точностью (для повышения точности необходимо лишь увеличивать количество используемых моментов).

Кроме рассмотренного круга задач, существует еще много нерешенных вопросов и в отношении уже широко применяющихся методов интегральной аппроксимации для линейных систем небольшой размерности.

Так, применение рядов Бурмана — Лагранжа при анализе динамических характеристик сдерживается следующими обстоятельствами. Для конкретного вида разложения передаточной функции (1), предложенного еще в работе [3], до сих пор не исследовались условия равномерной сходимости соответствующего ряда для изображения функции по Лапласу в области аналитичности. Решение же этого вопроса совершенно необходи-

мо для возможности перехода к оригиналам функций, т. е. для использования ряда (2). В связи с этим в работах [1—3] не накладывается никаких ограничений на параметр λ , входящий в (1). С другой стороны, в работе [12] утверждается, что параметр λ может принимать лишь единственное фиксированное значение, и, таким образом, если это необходимое значение заранее точно не известно, то тем самым ставится под сомнение сама возможность использования ряда (1). Предложенный же в [12] другой подход к построению рядов Бурмана — Лагранжа обладает своими существенными недостатками (в частности, из такого ряда невозможно получить статический режим), что и привело к тому, что он не нашел широкого распространения.

В то же время практика многолетних расчетов показала, что использование ряда (1) дает очень хорошие результаты, причем при выборе параметра λ имеется некоторая свобода. Таким образом, возникает задача обоснования правомерности применения рядов (1) и (2) для аппроксимации как передаточных функций, так и функций переходного процесса и нахождения диапазона возможного варьирования параметра λ . Последнее тем более важно, что величина λ существенно влияет на скорость сходимости указанных рядов.

Кроме того, использованы еще далеко не все возможности в применении специальных систем полиномов для аппроксимации функций переходного процесса на всей полуоси времени [4]. Аппроксимации, использующие данные системы полиномов, не всегда дают желаемую точность, особенно при малых значениях времени. Заметим, что для построения таких систем интерполяционных полиномов могут быть успешно применены методики, аналогичные разработанным для конечного интервала в [10]. При этом в [10] в отличие от ранее упоминавшихся работ для аппроксимации использованы моменты функции следующего вида:

$$M_i = \int_0^1 x^{i-1} f(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Укажем, однако, что моменты (4) связаны с моментами c_i (3) простым и легко выводимым соотношением

$$M_i = \frac{1}{i} (f(1) - c_i), \quad i = 1, 2, \dots \quad (5)$$

(для получения (5) необходимо лишь интеграл в (4) взять по частям).

Таково положение в вопросах использования методов интегральной аппроксимации, развитых в работах [1—4] для решения задач динамики. Нами отмечены основные трудности, препятствующие применению данных методов к анализу динамики сложных технологических тепло-массообменных процессов, в частности плазменных процессов. На основе этого анализа определены задачи развития рассмотренных ранее методов с целью расширения круга их приложения. Для большинства данных задач уже найдены некоторые подходы и даже решения, о которых упомянуто в начале статьи. Такие решения будут представлены в следующих публикациях.

Институт теплофизики СО АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
10/XII 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Девятков Б. Н. Теория переходных процессов в технологических аппаратах с точки зрения задач управления. Новосибирск, 1964.
2. Девятков Б. Н., Демиденко Н. Д., Охорзин В. А. Динамика распределенных процессов в технологических аппаратах, распределенный контроль и управление. Красноярск, 1976.
3. Девятков Б. Н., Корнев Ю. Н. Применение рядов Бурмана — Лагранжа при анализе переходных процессов в химико-технологических аппаратах. — Изв. СО АН СССР, 1962, № 5.

4. Девятков Б. Н. Применение специальной системы полиномов для приближения переходного процесса на бесконечном интервале. — Изв. СО АН СССР, 1960, № 8.
5. Жуков М. Ф., Коротеев А. С., Урюков Б. А. Прикладная динамика термической плазмы. Новосибирск: Наука, 1975.
6. Борискин С. П., Девятков Б. Н., Левченко В. Ф. Научно-инженерный подход к проблеме моделирования и анализа динамики плазматрона как технологического объекта I. — Изв. СО АН СССР, 1980, № 3. Сер. техн. наук, вып. 1.
7. Урюков Б. А., Хайтман С. М. Динамическая характеристика дуги, находящейся в потоке газа. — Изв. СО АН СССР, 1973, № 3. Сер. техн. наук, вып. 1.
8. Девятков Б. Н., Жуков М. Ф., Хайтман С. М. Постоянная времени дуги, инерционность процесса и линейная модель динамики плазмы. — Изв. СО АН СССР, 1980, № 3. Сер. техн. наук, вып. 1.
9. Девятков Б. Н., Перегудов В. С. Общий метод аналитического представления решений многомерных линейных задач динамики плазмы. — Изв. СО АН СССР, 1980, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.
10. Власов В. Г. Интегральное интерполирование и некоторые его приложения. М.: Воениздат, 1946.
11. Кулебакин В. С. Высококачественные инвариантные системы регулирования. — В кн.: Теория инвариантности и ее применение в автоматических устройствах. Киев: ОТН АН УССР, 1959.
12. Айзенберг Л. А., Девятков Б. Н., Солтан Е. Е. К вопросу применения рядов Бурмана — Лагранжа для анализа переходных процессов в химико-технологических аппаратах. — Изв. СО АН СССР, 1971, № 3. Сер. техн. наук, вып. 1.

УДК 62-50 : 66.012-52.001.57

А. Г. ВЕРЕЩАГИН, Б. Н. ДЕВЯТОВ

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ
МНОГОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ
ДИНАМИКИ ТЕПЛОМАССОБМЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

В [1] нами рассмотрены основные задачи по дальнейшему развитию методов интегральной аппроксимации, разработанных в [2, 3]. Первоочередной из них является обобщение методов аналитического представления решений [2, 3] на случай многомерных линейных задач динамики.

Существенная особенность многомерных задач заключается в том, что среди независимых переменных обычно оказываются величины, имеющие ограниченный интервал изменения (пространственные координаты процесса). Методы же интегральной аппроксимации, развитые в [2, 3], применимы для случая, когда независимая переменная (обычно это время) имеет бесконечный интервал изменения. Можно, правда, как и в работе [4], применять аналогичные подходы и для конечного отрезка времени, но в этом случае последний необходимо выбирать с таким расчетом, чтобы можно было считать, что в его пределах переходный процесс заканчивается, т. е. на правом конце этого отрезка все производные искомой функции должны быть равны нулю. Для общего же случая произвольного изменения функции на заданном конечном интервале данный подход неприменим.

Первая попытка рассмотрения с позиций интегральной аппроксимации многомерных задач с конечными интервалами изменения некоторых независимых переменных была предпринята в [5] для аналитического представления решений линейных задач динамики плазмы. Однако работа [5] дает лишь подход к решению данной задачи и не решает ее в окончательном виде. В частности, там не рассматривается один из основных вопросов — замыкание системы уравнений для моментов. Недостаточно внимания уделяется в [5] также приближенному восстановлению функции по ее найденным моментам. Кроме того, существует иная (ее изложение будет дано ниже) по сравнению с предложенной в [5] методика получения уравнений относительно моментов. Существенно, что ее использование, как упомянуто в [1], дает благоприятные возможности для решения задач с переменными коэффициентами и нелинейных задач.

Как и ранее [см. 2, 3], наша цель состоит в нахождении аппроксимаций неизвестных функций, задаваемых неявно в виде систем дифференциальных уравнений в частных производных, с помощью некоторых их интегральных характеристик (моментов). Для построения таких аппроксимаций необходимо обобщить методики получения систем уравнений для моментов функции из исходных систем дифференциальных уравнений на случай конечного интервала изменения независимого переменного. В дальнейшем будем рассматривать функции, заданные на отрезке [0, 1], учитывая, что с помощью замены переменных к нему сводятся произвольные отрезки [a, b]. В качестве интегральных характеристик будем использовать степенные моменты функции следующего вида:

$$c_n = \int_0^1 x^n u'(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Зная же моменты c_n , искомую функцию можно находить, строя, например, ее разложения по любой ортогональной системе полиномов. Коэффициенты разложения при этом будут являться линейными комбинациями чисел c_n . Действительно, коэффициенты разложения k_n функции $u(x)$ по произвольной ортогональной системе полиномов $p_n(x)$ определяются, как известно, следующим соотношением [6]:

$$k_n = \int_0^1 p_n(x) u(x) dx.$$

Вследствие линейности операции интегрирования, получаем, что k_n являются линейной комбинацией моментов M_n , где

$$M_n = \int_0^1 x^{n-1} u(x) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Учитывая же соотношение

$$M_n = \frac{1}{n} (u(1) - c_n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

из [1] убеждаемся в справедливости этого утверждения.

Кроме того, в [4] предлагаются удобные интерполяционные многочлены $\Phi_i(x)$, называемые нами полиномами Каттериджа. Они обладают тем свойством, что при составлении аппроксимирующей функции коэффициентами при этих полиномах являются (с точностью до знака) непосредственно величины

$$S_n = \frac{c_n}{n!}, \quad (4)$$

которые по аналогии с бесконечным интервалом изменения независимого переменного названы в [5] инерционностями функции на конечном интервале (координатными инерционностями). Использование нами в дальнейшем величины S_n вместо пропорциональных им величин моментов c_n обусловлено в основном тремя обстоятельствами. Во-первых, сохраняется преобразование со случаем бесконечного интервала. Во-вторых, когда все изменения функции происходят внутри заданного интервала и вне его, функция ведет себя как постоянная, величины S_n могут рассматриваться как обычные инерционности функции на всем интервале [0, ∞) и соответственно как коэффициенты разложения изображения функции по Лапласу — Карсону по возрастающим степеням p [4]. Этот случай часто встречается на практике, когда характеристики технологического потока изменяются лишь на определенном начальном участке аппарата, а далее по его длине остаются неизменными. В-третьих, как указывается в [1], величины S_n имеют очень простой и наглядный геометрический и физический смысл.

Итак, в [4] предлагаются для аппроксимации такие системы полиномов $\Phi_i(x)$, что с их помощью неизвестная функция $u(x)$ может быть представлена выражением

$$u(x) = u(0) + \sum_{i=0}^{N-1} (-1)^i S_i \Phi_i(x), \quad (5)$$

где N — количество используемых координатных инерционностей S_i .

Отметим, что построение полиномов $\Phi_i(x)$ производится в [4] из условия равенства первых N моментов (или инерционностей) искомой функции, что часто бывает удобно в практических расчетах. В [7] показано, что аппроксимирующее выражение, аналогичное (5), построенное из условия равенства N моментов, является частичной суммой сходящегося ряда, общий вид которого там также приводится. Таким образом, увеличивая N в (5), можно получать все более точное приближение к искомой функции (причем это приближение осуще-

ствляется так, что все большее количество моментов аппроксимирующей функции принимает нужные значения).

Подчеркнем, что именно равенство моментов искомой и аппроксимирующей функций является главной отличительной чертой аппроксимаций с помощью полиномов Каттериджа, так как можно построить множество различных систем полиномов, коэффициентами при которых в соответствующих частичных суммах будут моменты, или пропорциональные им величины инерционных систем полиномов и, учитывая, что ложение по любой из ортогональных систем полиномов и, учитывая, что коэффициенты разложения будут линейными комбинациями моментов, приведем подобные члены, объединяя слагаемые, содержащие одни и те же моменты.

Заметим, наконец, что сами полиномы $\Phi_i(x)$ имеют разный вид для различных значений N . В то же время в работе [7] определяются аналогичные полиномы $\varphi_i(x)$ при использовании моментов $M_i(2)$. Искомая функция представляется при этом в виде

$$u(x) = u(0)\varphi_0(x) + \sum_{i=0}^{N-1} M_i \varphi_{i+1}(x),$$

где $M_0 = u(1)$. Для данных полиномов $\varphi_i(x)$ в [7] приводятся общие выражения в функции от N . Таким образом, учитывая (3) и (5), можно легко найти аналогичные общие выражения для полиномов $\Phi_i(x)$ также в функции от количества используемых моментов.

Итак, рассмотрим более подробно задачу определения интегральных характеристик S_n .

В качестве примера возьмем достаточно простую модель противоточного теплообменника типа «труба в трубе». Динамические процессы теплообмена в нем могут быть описаны следующей системой дифференциальных уравнений в частных производных [2]:

$$\begin{aligned} \tau_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x} &= \alpha_1 (u_2 - u_1), \\ \tau_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial x} &= \alpha_2 (u_1 - u_2), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\alpha_1 = \frac{kpl}{s_1 c_1 \rho_1 v_1}$, $\alpha_2 = \frac{kpl}{s_2 c_2 \rho_2 v_2}$, $\tau_1 = \frac{l}{v_1}$, $\tau_2 = \frac{l}{v_2}$, v_1 , c_1 , s_1 , ρ_1 и v_2 , c_2 , s_2 , ρ_2 — скорость, объемная теплоемкость, площадь поперечного сечения и плотность соответственно первой и второй сред; p — периметр поперечного сечения поверхности раздела сред; k — коэффициент теплопередачи; u_1 и u_2 — температуры движущихся сред; l — длина аппарата; t — время; x — безразмерная координата ($x \in [0, 1]$).

При выводе этих уравнений использован ряд упрощающих допущений [2]. В частности, предполагается, что смещение теплоносителя в направлении движения сред незначительно, а в перпендикулярном ему направлении — полное, за исключением «приведенных» ламинарных слоев у поверхности теплопередачи, к которым искусственно отнесено все тепловое сопротивление в движущейся среде.

Рассмотрим переходные процессы в теплообменнике, возникающие в результате скачкообразного ступенчатого изменения на входе в теплообменник температуры первой среды. Граничные условия при этом будут иметь вид

$$u_1(t, 0) = \eta(t), \quad u_2(t, 1) = 0, \quad (7)$$

где $\eta(t)$ — единичная ступенчатая функция Хевисайда.

Начальные условия примем нулевыми:

$$u_1(0, x) = u_2(0, x) = 0. \quad (8)$$

Итак, для определения функций переходного процесса $u_1(t, x)$ и $u_2(t, x)$ нам необходимо решить систему дифференциальных уравнений в частных производных (6) с начальными и граничными условиями (7),

(8). Данная задача является двумерной, причем одна из независимых переменных (время) имеет бесконечный интервал изменения, другая — координата x — меняется в интервале $[0, 1]$. Соответственно и решать эту задачу мы будем как многомерную, последовательно понижая размерность уравнений на каждом этапе.

Для нахождения динамических характеристик воспользуемся обобщением понятия постоянной времени объекта — инерционностями процесса S_n , которые, как показано в работах [2, 3], позволяют с какой-либо степенью точности находить приближенно все необходимые динамические характеристики объекта (передаточную функцию, функцию переходного процесса и др.). Таким образом, задачу нахождения решений системы (6) $u_1(t, x)$ и $u_2(t, x)$ можно заменить задачей нахождения инерционностей x . При нахождении систем уравнений для инерционностей используем обычную процедуру, описанную в [2, 3].

Преобразовав (6) по Лапласу — Карсону, получим следующую систему уравнений для изображений:

$$\begin{aligned} \frac{dU_1(p, x)}{dx} &= \alpha_1 (U_2(p, x) - U_1(p, x)) - p\tau_1 U_1(p, x), \\ \frac{dU_2(p, x)}{dx} &= \alpha_2 (U_2(p, x) - U_1(p, x)) + p\tau_2 U_2(p, x) \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$U_1(p, 0) = 1; \quad U_2(p, 1) = 0.$$

Учитывая структуру уравнений (5), отражающую допущение о незначительности смещения теплоносителя в направлении движения, заметим, что переходные процессы в обеих средах имеют в каждой точке x по длине аппарата величину запаздывания, равную $\tau_1 x$. Смещая отсчет времени на $\tau_1 x$, т. е. делая подстановку

$$U_1 = U_{11} e^{-p\tau_1 x}, \quad U_2 = U_{21} e^{-p\tau_1 x},$$

и опять обозначая

$$U_{11} \equiv U_1, \quad U_{21} \equiv U_2,$$

а также принимая за единицу времени величину $\tau_1 + \tau_2$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{dU_1}{dx} &= \alpha_1 (U_2 - U_1), \\ \frac{dU_2}{dx} &= \alpha_2 (U_2 - U_1) + pU_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Дифференцируя (9) по p n раз ($n = 0, 1, 2, \dots$) и переходя к пределу при $p \rightarrow 0$, а также умножая обе части уравнений на $1/n!$, получим систему дифференциальных уравнений для инерционностей $S_{1n}(x)$ и $S_{2n}(x)$ (соответственно по первой и второй средам):

$$\begin{aligned} \frac{dS_{1n}(x)}{dx} + \alpha_1 [S_{1n}(x) - S_{2n}(x)] &= 0, \\ \frac{dS_{2n}(x)}{dx} + \alpha_2 [S_{1n}(x) - S_{2n}(x)] &= -S_{2n-1}(x) \end{aligned} \quad (10)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} S_{1n}(0) &= 0 \text{ при } n \neq 0; \quad S_{10}(0) = 1; \\ S_{2n}(1) &= 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

В (10) величина $S_{2n-1}(x)$ при $n = 0$ условно полагается равной нулю. Итак, решение системы дифференциальных уравнений в частных производных (6) мы свели к решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений для инерционностей (10). Заметим, однако, что если исходная система дифференциальных уравнений в частных производных,

описывающая динамику объекта, имеет размерность, большую, чем вторая, то системы уравнений для инерционностей будут также системами дифференциальных уравнений в частных производных только меньшей размерности. Поэтому важно иметь метод, который позволяет последовательно понижать размерность задачи до получения в конечном итоге систем алгебраических уравнений. При этом метод получения систем уравнений для инерционностей должен быть обобщен на случай, когда независимая переменная имеет конечный диапазон изменения.

Для простоты изложения вернемся к рассмотрению процессов в противоточном теплообменнике. Заметим, что, хотя система (10) и является системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, два обстоятельства существенно усложняют ее решение. Во-первых, система (10) неоднородна, причем возмущающими функциями в системе для n -х инерционностей являются инерционности $(n-1)$ -порядка, которые имеют сложный характер зависимости от x . Во-вторых, значительно усложняет решение поставленной задачи то обстоятельство, что граничные условия задаются на обоих концах отрезка $[0, 1]$. И хотя для первых инерционностей известны аналитические решения [2, 3], для инерционностей более высокого порядка и для более сложных систем исходных уравнений в частных производных удается получить лишь численное решение. Кроме того, аналитическое решение дифференциальных уравнений не реализуется на ЦВМ.

Итак, будем решать систему (10) и подобные ей системы, используя понятие моментов функции на конечном интервале $c_n(1)$.

При этом задача состоит в том, чтобы систему дифференциальных уравнений для неизвестных функций (в нашем примере временных инерционностей $S_{1n}(x)$ и $S_{2n}(x)$) свести к системе уравнений для степенных моментов этих функций на конечном интервале.

В [5] эта задача решается с помощью преобразования типа Лапласа — Карсона на конечном интервале:

$$U(q) = q \int_0^1 e^{-qx} u(x) dx. \quad (11)$$

Показано, что справедливы следующие соотношения:

$$\frac{d^m U(0)}{dq^m} = (-1)^m m! S_m + (-1)^{m+1} u(1), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

где S_m — координатная инерционность (4).

Таким образом, применяя к исходной системе дифференциальных уравнений преобразование (11), проводя необходимое количество раз операции дифференцирования по комплексному аргументу q , полагая далее $q = 0$ и используя соотношение (12), можно получить систему уравнений для координатных инерционностей.

Ниже будет показано, что возможна иная процедура, которая открывает возможности для решения более широкого класса задач (в том числе и нелинейных).

Итак, для нашего примера решение системы уравнений (10) относительно неизвестных функций $S_{1n}(x)$ и $S_{2n}(x)$ можно заменить решением соответствующей алгебраической системы линейных уравнений относительно степенных моментов и далее следует воспользоваться (5).

Необходимо обратить внимание на одно существенное обстоятельство: получаемая система уравнений для координатных инерционностей содержит неизвестных больше, чем уравнений. В частности, если, как в нашем примере, исходная система является системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, то в соответствующей алгебраической системе для моментов количество неизвестных превышает количество уравнений на единицу. Эта ситуация существенно отличается от случая получения системы уравнений для временных инерционностей. Дело здесь в том, что при независимой переменной времени мы имели

дополнительную информацию о поведении функции на правом конце: равенство нулю всех производных. В случае же конечного интервала изменения независимой переменной такой информацией мы не располагаем, и система уравнений оказывается незамкнутой.

Таким образом, встает задача замыкания системы уравнений для моментов. В такой ситуации обычно требуется делать какие-либо предположения о свойствах моментов высоких порядков.

Прежде всего заметим, что из определения (1) моментов c_n непосредственно следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$, т. е. с ростом n величины моментов

убывают. Причем для монотонных функций и функций, близких к ним, такая зависимость величины момента c_n от n также монотонна. Еще быстрее с увеличением n убывают координатные инерционности S_n (4).

Данное обстоятельство способствует тому, что замена неизвестных значений моментов высшего порядка их приближенными значениями приводит к очень малым погрешностям.

Кроме того, для замыкания полученных систем уравнений можно в случае монотонных функций использовать следующее предельное соотношение [2]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{c_{n+1}} = 1.$$

Очень удобные для практических расчетов приближенные формулы, выражающие моменты высших порядков через моменты более низкого порядка, приведены в [7]. В настоящей же работе, используя для аппроксимации искомой функции интерполяционные полиномы Каттериджа (5), будем определять координатную инерционность S_N через инерционности S_0, S_1, \dots, S_{N-1} в следующем виде:

$$S_N = \frac{1}{N!} \int_0^1 x^N \sum_{i=0}^{N-1} (-1)^i S_i \Phi_i'(x) dx. \quad (13)$$

Перспективным в смысле замыкания систем уравнений является использование разложений в ряд по моментам значений функции на концах интервала [7].

В целях связи с конкретным примером теплообменника, а также для большей наглядности изложения ограничимся случаем системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для начала рассмотрим даже несколько упрощенный по сравнению с (10) случай.

Пусть задана следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{du}{dx} = Au + b, \quad u(0) = 0, \quad (14)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ll} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_l \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_l \end{pmatrix},$$

$x \in [0, 1]$. Необходимо найти решение системы (14) в виде аналитической зависимости от x , используя понятия степенных моментов функции, заданной на конечном интервале, и аппроксимацию (5).

Проведем следующие преобразования системы (14). Умножим последовательно (14) на x^j , $j = 0, 1, \dots, N-1$, проинтегрируем полученные уравнения по x в пределах от 0 до 1, используем формулу интегрирования по частям и замыкание (13). В результате всех этих операций после несложных преобразований получим следующую линейную алгебраическую систему Nl уравнений:

$$\hat{G}S = \hat{d},$$

где \hat{G} — блочная матрица следующего вида:

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} I - A & A & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -A & 2I & 2A & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -A & 0 & 3I & 3A & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -A + Q_0 & Q_1 & Q_2 & Q_3 & \dots & Q_{N-2} & NI + Q_{N-1} \end{pmatrix}$$

$\hat{d} = \text{col}[b, b, \dots, b]$, I — единичная матрица; R_j — координатные инерционности N -го порядка функций $\Phi_j(x)$, $j = 0, 1, \dots, N-1$, $S = \text{col}[S_{10}, S_{20}, \dots, S_{10}, S_{11}, S_{21}, \dots, S_{1, N-1}]$, S_{ij} — координатная инерционность j -го порядка функции $u_i(x)$, $j = 1, 2, \dots, N-1$, $i = 1, 2, \dots, l$, $Q_j = (-1)^j N! R_j A$.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда исходная система неоднородна, причем возмущающие функции могут быть произвольного характера, а граничные условия задаются на разных концах отрезка $[0, 1]$:

$$\frac{du}{dx} = Au + F(x), F(x) = \text{col}[f_1(x), \dots, f_l(x)], \quad (15)$$

$$u_i(0) = c_i, i = 1, \dots, k; u_i(1) = c_i, i = k+1, \dots, l.$$

Произведем следующую замену переменных: $v_i = u_i - c_i$, $i = 1, \dots, k$; $v_i = u_i - u_i(0)$, $i = k+1, \dots, l$. Очевидно, что степенные моменты функций v_i и u_i равны между собой, и что $u_i(0) = c_i - v_i(1) = c_i - S_{i0}$, $i = k+1, \dots, l$. Таким образом, имеем для $i = k+1, \dots, l$ $v_i = u_i - c_i + S_{i0}$.

Проведя далее те же преобразования, что и в предыдущем случае, получаем

$$GS = d, \quad (16)$$

где

$$G = \begin{pmatrix} I - \tilde{A} & A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{A} & 2I & 2A & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{A} & 0 & 3I & 3A & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\tilde{A} + Q_0 & Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_{N-2} & NI + Q_{N-1} \end{pmatrix}$$

$d = \text{col}[d_1, d_2, \dots, d_N]$; $d_j = -j! S_j^{(f)} + S_0^{(f)} + Ac$, $j = 1, 2, \dots, N$; $c = \text{col}[c_1, c_2, \dots, c_l]$; $S_j^{(f)} = \text{col}[S_{1j}^{(f)}, S_{2j}^{(f)}, \dots, S_{lj}^{(f)}]$, $j = 0, 1, \dots, N$; $S_{ij}^{(f)}$ — координатная инерционность j -го порядка функции $f_i(x)$; за $S_{i0}^{(f)}$ здесь условно принята величина $f_i(1)$;

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{lk} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Приближенное решение системы (15) имеет при этом следующий вид:

$$u_i(x) = c_i + \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j S_{ij} \Phi_j(x), i = 1, \dots, k; \quad (17)$$

$$u_i(x) = c_i - S_{i0} + \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j S_{ij} \Phi_j(x), i = k+1, \dots, l.$$

Анализируя полученные результаты, заключаем, что решение произвольной системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида (15) сводится с помощью данной методики к решению соответствующей системы линейных алгебраических уравнений.

На основе предложенного метода составлена программа на языке ФОРТРАН для решения систем вида (15). Данная программа произво-

дит формирование системы уравнений для координатных инерционностей (16), ее решение и нахождение искомых функций $u_j(x)$ по (17). Для решения системы (16) используется стандартная ФОРТРАН-программа GAUSS.

Возвращаясь к противоточному теплообменнику, отметим, что системы уравнений для временных инерционностей различных порядков (10) имеют вид (15) и могут решаться поэтому с помощью предложенной методики.

Заметим, кроме того, что системы (10) для различных n отличаются друг от друга лишь возмущающими функциями. Кстати, такая ситуация свойственна не только модели противоточного теплообменника, но вообще системам дифференциальных уравнений для инерционностей. Итак, анализируя (10), заключаем, что для нулевых инерционностей имеем однородную систему, а для инерционностей n -го порядка — неоднородную с возмущающими функциями — инерционностями $(n-1)$ -порядка, причем матрица A (15) для всех систем одна и та же. Поэтому матрица G в (16) также одинакова для всех систем.

В соответствии со сказанным были составлены алгоритм и программа на ФОРТРАНе для расчета первых N_1 временных инерционностей теплообменника как функций x . Укрупненная блок-схема программы представлена ниже. Следует подчеркнуть, что в соответствии с предложенным алгоритмом не нужно специально определять моменты возмущающих функций, — они естественным образом находятся в процессе решения задачи как моменты инерционностей, полученных на предыдущем шаге.

В результате решения систем (10) по указанной программе при $\alpha_2 = 2$, $\alpha_1 = 1$, $N = 4$, $N_1 = 3$ получены следующие результаты:

$$S_{10}(x) = 1 - 0,225x - 0,117x^2 - 0,0286x^3 - 0,171x^4,$$

$$S_{20}(x) = 0,775 - 0,450x - 0,233x^2 - 0,0586x^3 - 0,0338x^4,$$

$$S_{11}(x) = 0,293x - 0,222x^2 - 0,0457x^3 + 0,0525x^4,$$

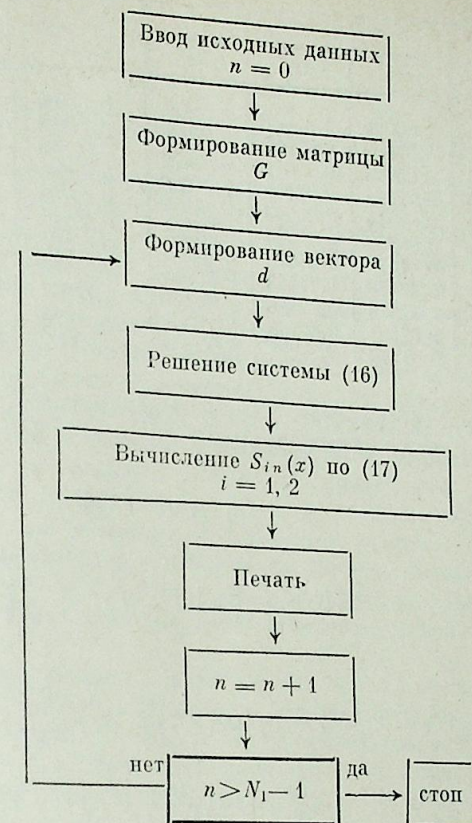
$$S_{21}(x) = 0,295 - 0,190x - 0,211x^2 - 0,0332x^3 + 0,139x^4,$$

$$S_{12}(x) = 0,104x - 0,109x^2 + 0,0224x^3 + 0,00557x^4,$$

$$S_{22}(x) = 0,102 - 0,0830x - 0,154x^2 + 0,194x^3 - 0,0600x^4.$$

Для нулевых и первых инерционностей известны точные решения, найденные аналитически [1, 2]. В таблице приведены данные, позволяющие сравнить точные решения и решения, полученные описанным выше методом. Из этих данных следует, что метод имеет очень высокую точность, которую при необходимости можно неограниченно повышать, увеличивая количество рассчитываемых координатных моментов.

Определив же первые N_1 инерционностей $S_{in}(x)$ и $S_{2n}(x)$, мы можем теперь приближенно восстановить и всю картину переходного процесса



Укрупненная блок-схема программы расчета инерционностей теплообменника.

x	S ₁₀ (x)		S ₂₀ (x)		S ₁₁ (x)		S ₂₁ (x)	
	точн.	прибл.	точн.	прибл.	точн.	прибл.	точн.	прибл.
0	1,00000	1,00000	0,77460	0,77460	0,00000	0,00000	0,29518	0,29518
0,1	0,97630	0,97632	0,72719	0,72723	0,02712	0,02711	0,27428	0,27424
0,2	0,95010	0,95011	0,67479	0,67480	0,04944	0,04941	0,24878	0,24873
0,3	0,92114	0,92114	0,61688	0,61686	0,06701	0,06705	0,21930	0,21930
0,4	0,88914	0,88913	0,55289	0,55285	0,07995	0,08001	0,18662	0,18664
0,5	0,85378	0,85378	0,48216	0,48212	0,08842	0,08846	0,15176	0,15176
0,6	0,81470	0,81472	0,40399	0,40396	0,09272	0,09275	0,11599	0,11600
0,7	0,77150	0,77153	0,31760	0,31756	0,09322	0,09320	0,08084	0,08078
0,8	0,72376	0,72380	0,22213	0,22207	0,09044	0,09039	0,04820	0,04819
0,9	0,67101	0,67105	0,11661	0,11654	0,08502	0,08499	0,02035	0,02033
1,0	0,61270	0,61276	0,00000	-0,00008	0,07781	0,07781	0,00000	0,00001

в теплообменнике. Так, используя разложение в ряд Бурмана — Лагранжа передаточных функций $U_1(p, x)$ и $U_2(p, x)$ [2, 3], получим

$$U_j(p, x) = \sum_{n=0}^{N_1-1} d_{jn}(x) \frac{p}{p + \lambda_j(x)};$$

$$u_j(t, x) = d_{j0}(x) + e^{-\lambda_j(x)t} \sum_{n=1}^{N_1-1} d_{jn}(x) L_{n-1}(\lambda_j(x)t);$$

где

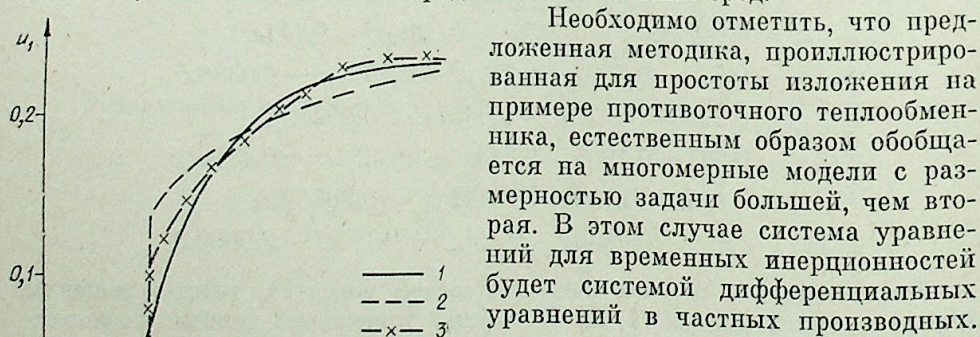
$$d_{j0}(x) = S_{j0}(x) = u_j(\infty, x); \quad d_{jn}(x) = \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^{n-m} C_{n-1}^m \lambda_j^{n-m}(x) S_{jn-m}(x);$$

$$C_{n-1}^m = \frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!}; \quad \lambda_j(x) = \frac{S_{N_1-2}(x)}{S_{N_1-1}(x)};$$

$L_n(z)$ — полиномы Лагерра; $j = 1, 2$.

Учитывая запаздывание и возвращаясь к исходному масштабу времени, найдем искомые решения уравнений (6) с начальными и граничными условиями (7) и (8).

На рисунке представлены результаты расчетов кривой переходного процесса в первой среде на выходе из аппарата (т. е. в точке $x = 1$) для следующих значений параметров: $\alpha_1 = 2,074$; $\alpha_2 = 1,294$; $\tau_1 = 18,48$ с $\tau_2 = 11,55$ с. Там же приведены экспериментальные данные из работы [2], соответствующие тем же значениям α_1 , α_2 , τ_1 и τ_2 . Сравнение расчетных и экспериментальных кривых показывает, что уже приближение, полученное с использованием трех координатных моментов и трех временных, дает достаточную для практики точность аппроксимации. Расхождение расчета с экспериментом в начале кривой переходного процесса объясняется неучетом в модели (6) продольного смещения сред.



Кривые переходного процесса в первой среде на выходе из аппарата.

1 — экспериментальная кривая; 2 — расчетная кривая ($N=N_1=2$); 3 — расчетная кривая ($N=N_1=3$).

В такой ситуации предлагаемую методику необходимо применять поэтапно, последовательно по каждому независимому переменному (при этом операторы дифференцирования по другим переменным $\frac{\partial}{\partial x_i}$ можно формально рассматривать как множители и оперировать с ними подобно тому, как с элементами матрицы A в (15)).

Таким образом, нами предлагается метод приближенного нахождения динамических характеристик объектов, описываемых линейными дифференциальными уравнениями в частных производных, путем последовательного понижения размерности исходной системы уравнений до получения систем линейных алгебраических уравнений. Это позволяет определять решения задач динамики в аналитической зависимости от времени и пространственных координат. Причем точность решения можно последовательно увеличивать, рассматривая моменты функции более высоких порядков. Подчеркнем также, что, сводя задачу в конечном итоге к решению систем линейных алгебраических уравнений, мы получаем возможность, используя алгоритмы аналитических преобразований на ЦВМ, находить решения задач в аналитическом виде и в зависимости от параметров объекта (т. е. от коэффициентов исходных уравнений в частных производных). Для теплообменника, например, такими параметрами являются α_1 и α_2 . Последнее в свою очередь открывает большие возможности для проведения динамической оптимизации параметров аппарата и режима его работы.

Данная методика может быть обобщена и на случаи систем с переменными коэффициентами и нелинейных систем. Актуальность подобного обобщения может быть продемонстрирована на рассмотренном примере противоточного теплообменника. Так, для более точного описания динамики процесса целесообразно считать коэффициенты α_1 и α_2 функциями пространственной координаты x , учитывая, что при движении среды с изменением температуры вдоль оси x меняются и условия теплообмена сред. Еще лучшее описание процесса можно получить, непосредственно рассматривая величины α_1 и α_2 как функции от температуры, т. е. $\alpha_1 = \alpha_1(u_1)$, $\alpha_2 = \alpha_2(u_2)$. Таким образом, приходим к нелинейной системе дифференциальных уравнений в частных производных.

В заключение обратим внимание еще на одно обстоятельство. Матрицы систем уравнений для координатных инерционностей имеют определенную структуру и содержат большое количество нулевых элементов (см. (16)). Это позволяет создавать экономные по затратам машинного времени алгоритмы расчета.

Результаты расчетов дают на первых примерах очень высокую точность приближения, доказывая практическую эффективность методики.

Институт теплофизики СО АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
10/XII 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Девятков Б. Н., Верещагин А. Г. Об интегральных методах аппроксимации динамических характеристик тепломассообменных процессов. — Изв. СО АН СССР, настоящей номер.
2. Девятков Б. Н. Теория переходных процессов в технологических аппаратах с точки зрения задач управления. Новосибирск, 1964.
3. Девятков Б. Н., Демиденко Н. Д., Охорзин В. А. Динамика распределенных процессов в технологических аппаратах, распределенный контроль и управление. Красноярск, 1976.
4. Каттеридж О. П. Д. Применение специальных систем полиномов для приближенного вычисления переходной характеристики. — В кн.: Труды I конгресса ИФАК, т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1961.
5. Девятков Б. Н., Перегудов В. С. Общий метод аналитического представления решений многомерных линейных задач динамики плазмы. — Изв. СО АН СССР, 1980, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.
6. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.
7. Власов В. Г. Интегральное интерполирование и некоторые его приложения. М.: Воениздат, 1946.

УДК 62.50+532.546

Н. Д. ДЕМИДЕНКО, А. М. АВДЕЕВ

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО
УПРАВЛЕНИЯ ХИМИКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ
С РЕЦИРКУЛЯЦИЕЙ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПОТОКОВ

Существует много работ по решению задач оптимального управления объектами, описываемыми дифференциальными уравнениями в частных производных. Результаты этих работ часто сводятся к получению необходимых (а иногда достаточных) условий оптимальности. Однако важной и вместе с тем сложной проблемой остается аналитическое и численное определение управляющих воздействий из этих условий оптимальности [1]. Формальный перенос разработанных методов определения оптимальных управлений для систем с сосредоточенными параметрами на распределенные системы не дает желаемого результата. В публикациях намечается переход от решения задач оптимального управления химико-технологическими процессами к задачам по определению оптимальных режимных и конструктивных параметров. Своеобразный подход к решению этих задач состоит также в использовании оптимального распределенного контроля [2, 3].

Одна из основных трудностей решения задач оптимального управления распределенными процессами связана с отсутствием простых математических моделей, адекватных реальному процессу в достаточно широком диапазоне и конструктивных параметров. При стремлении к общности результатов необходимо настолько точно учитывать особенности конкретного класса аппаратов, чтобы приблизить эти результаты к реализации в промышленных условиях.

В данной работе рассматривается задача оптимального управления процессом массообмена при разделении многокомпонентных смесей в многотарельчатых ректификационных колоннах. Рассматриваемый класс химико-технологических объектов характеризуется, в частности, тем, что управляемый процесс происходит с рециркуляцией взаимодействующих потоков. Учет последнего обстоятельства в задачах анализа нестационарных режимов и синтеза систем оптимального контроля и управления приводит, с одной стороны, к результатам, внедряемым в промышленных установках [3], с другой — к оригинальным краевым задачам и задачам оптимального управления [3, 4], решение которых способствует развитию теории систем с распределенными параметрами.

Значение решения задач оптимального управления для этого класса объектов состоит также в следующем. Известно [5], что процесс разделения в колоннах ректификации целесообразно проводить в нестационарном пульсирующем (или циклическом) режиме. Для этого необходимо знать оптимальные параметры управляющих потоков: амплитуду, частоту пульсаций и т. д. Названные параметры можно определить путем решения задачи оптимального управления.

В работе используется математическая модель процесса многокомпонентной ректификации [4], которая служит основой решения задачи оптимального управления. Эта модель, в частности, описывает неэквивалентный процесс массообмена, что обуславливает зависимость потоков и удерживающих способностей жидкости и пара от временной и пространственной координат.

В качестве примера приводится решение задачи оптимального управления для промышленной колонны К-101, разделяющей многокомпонентные смеси.

1. Модель управляемого процесса. Рассмотрим противоточный процесс массообмена для разделения многокомпонентных смесей, который описывается системой одномерных дифференциальных уравнений в частных производных [4]:

$$\frac{\partial \rho_{1i}}{\partial t} + c_1 \frac{\partial \rho_{1i}}{\partial z} = k_y (y_i - y_i^*) + \rho_{1fi}, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\frac{\partial \rho_{2i}}{\partial t} - c_2 \frac{\partial \rho_{2i}}{\partial z} = k_y (y_i^* - y_i) + \rho_{2fi}, \quad t \in [0, T], \quad z \in [0, 1]. \quad (1)$$

Здесь ρ_{1i} , ρ_{2i} — средние плотности компонентов, составляющие разделяемую смесь, $i = 1, \dots, N$; N — число компонентов; $L/H_x = c_1$, $V/H_y = c_2$, ρ_{1fi} , ρ_{2fi} — слагаемые, обусловленные подачей сырья в одной или нескольких точках по длине аппарата; k_y — коэффициент массопередачи, y_i — концентрации i -го компонента; y_i^* — равновесные концентрации в паровой фазе.

Дополним систему (1) начальными и граничными условиями:

$$\rho_{1i}(z, 0) = \varphi_{1i}(z), \quad \rho_{2i}(z, 0) = \varphi_{2i}(z), \quad (2)$$

где $\varphi_{1i}(z)$, $\varphi_{2i}(z)$ — заданные функции.

$$z = 0: \rho_{2i}(0, t) = V_0(t)y_i(0, t)/c_2, \quad (3)$$

$$H_{x_h}(t) \frac{dy_i(t)}{dt} = c_1 \rho_{1i}(0, t) - y_i(0, t)c_i \sum_{j=1}^N \rho_{1j}(0, t), \quad (4)$$

$$y_i(0, 0) = \varphi_{2i}(0) / \sum_{j=1}^N \varphi_{2j}(0); \quad (5)$$

$$\frac{dH_{x_h}(t)}{dt} = c_1 \sum_{j=1}^N \rho_{1j}(0, t) - V_0(t) - W(t), \quad (6)$$

$$H_{x_h}(0) = c_3; \quad (7)$$

$$z = l: \rho_{1i}(l, t) = L_d(t)x_i(l, t)/c_1, \quad (8)$$

$$H_{x_d} \frac{dx_i(l, t)}{dt} = c_2 \rho_{2i}(l, t) - c_2 x_i(l, t) \sum_{j=1}^N \rho_{2j}(l, t); \quad (9)$$

$$x_i(l, 0) = \varphi_{1i}(l) / \sum_{j=1}^N \varphi_{1j}(l); \quad (10)$$

$$\frac{dH_{x_d}(t)}{dt} = c_2 \sum_{j=1}^N \rho_{2j}(l, t) - L_d(t) - D(t), \quad (11)$$

$$H_{x_d}(0) = c_4. \quad (12)$$

В (3)—(12) приняты те же обозначения, что и в [2—4]. Таким образом, система (1) имеет постоянные коэффициенты, что существенно упрощает численный анализ краевой задачи (1)—(12). Другая особенность задачи (1)—(12) состоит в том, что она расщепляется на две последовательно решаемые задачи для определения концентраций и потоков.

Систему (1)—(12) необходимо еще дополнить соотношением, связывающим потоки F , D и W , для соблюдения баланса вводимых и выводимых из колонны потоков, т. е.

$$\int_0^T (F - D - W) dt = 0,$$

где T — время управления.

2. Постановка задачи оптимального управления. В качестве управлений выбираем потоки жидкости и пара [3]. Не умаляя общности результатов, будем считать управлением отбор целевого продукта вверху колонны $D(t)$. Выбор этого воздействия $D(t)$ связан с ограничением

$$0 \leq D(t) \leq D_{\max}. \quad (13)$$

Введя дополнительное управление $u(t)$, сведем (13) к равенству

$$D(t)[D_{\max} - D(t)] - u^2 = 0. \quad (14)$$

Функции $F(t)$, $L_d(t)$, $W(t)$, $V_0(t)$, ρ_{1fi} , ρ_{2fi} заданы. За критерий качества управления принимаем минимум средненнтегрального отклонения концентрации целевого продукта вверху колонны:

$$S = \int_0^T \sum_{i=1}^N k_i [x_{di}(l, t) - \theta_i^*]^2 dt. \quad (15)$$

Сформулируем задачу оптимального управления: в множестве кусочно-непрерывных функций $D(t)$, удовлетворяющих (13), найти такую, чтобы соответствующее решение задачи (1)–(12) минимизировало интеграл (15). Необходимые условия оптимальности таких систем рассматриваются, например, в работах [6, 7], где получены необходимые условия типа принципа максимума. Однако применение их в задаче (1)–(15) или невозможно, или затруднительно из-за особенностей, связанных с уравнениями (1) и граничными условиями (3)–(12). Подробно этот вопрос обсуждается в [3].

3. Решение задачи оптимального управления. На основе метода вариационного исчисления получены следующие необходимые условия оптимальности в форме Лагранжа — Эйлера:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t} - c_1 \frac{\partial \xi_i}{\partial z} = \frac{c_6 \sum_{j=1}^N \rho_{2j}}{P'_z \sum_{j=1}^N \rho_{1j}} \left[(\xi_i - \eta_i) P_i + \sum_{k=1}^N (\xi_k - \eta_k) \rho_{1k} \frac{P'_k \sum_{\sigma=1}^N P_{1j} - P_k}{\sum_{j=1}^N \rho_{1j}} \right], \quad (16)$$

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial t} + c_2 \frac{\partial \eta_i}{\partial z} = c_6 (\eta_i - \xi_i) \sum_{k=1}^N \left[c_6 \rho_{1k} (\xi_k - \eta_k) \frac{P_k}{P_z \sum_{j=1}^N \rho_{1j}} \right],$$

начальные условия:

$$\xi_i(T, z) = 0, \quad \eta_j(T, z) = 0, \quad (17)$$

граничные условия:

$$z = 0: \frac{\lambda_{ki}^{(2)}}{H_{x_k}} - \frac{\sum_{k=1}^N \lambda_{kk}^{(2)} y_k(0, t)}{H_{x_k}} + \lambda_k^{(3)} - \xi_k(0, t) = 0, \quad (18)$$

$$\lambda_{ki}^{(1)} = c_2 \eta_i(0, t), \quad (19)$$

$$\frac{d\lambda_{ki}^{(2)}(t)}{dt} = - \frac{\lambda_{ki}^{(1)} V_0(t)}{c_2} + \frac{\lambda_{ki}^{(2)} c_1 \sum_{j=1}^N \rho_{1j}}{H_{x_k}} + k_i 2 (x_i - \theta_i^*), \quad (20)$$

$$\lambda_{ki}^{(2)}|_{t=T} = 0,$$

$$\frac{d\lambda_{ki}^{(3)}}{dt} = \frac{c_1}{H_{x_k}^2} \sum_{i=1}^N \lambda_{ki}^{(2)} \left(y_i \sum_{j=1}^N \rho_{1j} - \rho_{1i} \right), \quad (21)$$

$$\lambda_{ki}^{(3)}(T) = 0.$$

где $P_k = A_k \tau^2 + B_k \tau + C_k$, $P'_k = \frac{\partial P_k}{\partial \rho_{1k}}$, τ — температура в колонне. $z = l$:

$$\frac{\lambda_{di}^{(2)}}{H_{x_d}} - \frac{\sum_{k=1}^N x_k \lambda_{dk}^{(2)}}{H_{x_d}} + \lambda_d^{(3)} - \eta_i(l, t) = 0, \quad (22)$$

$$\lambda_{di}^{(1)} = c_1 \xi_i(l, t), \quad (23)$$

$$\frac{d\lambda_{di}^{(2)}}{dt} = - \frac{\lambda_{di}^{(1)} L_d}{c_1} + \frac{\lambda_{di}^{(2)} c_2 \sum_{j=1}^N \rho_{2j}}{H_{x_d}}, \quad \lambda_{di}^{(2)}(T) = 0, \quad (24)$$

$$\frac{d\lambda_d^{(3)}}{dt} = \frac{c_2}{H_{x_d}^2} \sum_{i=1}^N \lambda_{di}^{(2)} \left(x_i \sum_{j=1}^N \rho_{2j} - \rho_{2i} \right), \quad \lambda_d^{(3)}(T) = 0, \quad (25)$$

$$\lambda_d^{(3)} + \gamma (D_{\max} - 2D) = 0, \quad (26)$$

$$\gamma u = 0. \quad (27)$$

Здесь $\xi_i(z, t)$, $\eta_i(z, t)$, $\lambda_{ki}^{(1)}(t)$, $\lambda_{ki}^{(2)}(t)$, $\lambda_{ki}^{(3)}(t)$, $\lambda_{di}^{(1)}(t)$, $\lambda_{di}^{(2)}(t)$, $\lambda_d^{(3)}(t)$ множители Лагранжа и являются решением сопряженной системы (16)–(27). Из (27) следует, что одна из функций γ , u или обе одновременно равны 0. Если значения оптимального управления внутри области (13), то из (14) вытекает, что $u \neq 0$, а потому $\gamma = 0$. Тогда из (26) получаем $\lambda_d^{(3)} = 0$.

На некоторых отрезках времени последнее условие может выполняться вне области (13), поэтому, достигнув своего граничного значения, управление $D(t)$ на этом отрезке остается постоянным, равным D_{\max} , а $\lambda_d^{(3)} \neq 0$. Из (14) при этом следует $u = 0$, а из (26) $\gamma \neq 0$. Условия $u = 0$ и $\gamma = 0$ выполняются в некоторые моменты времени $t \in [0, T]$, например, когда управление достигает своего граничного значения или возвращается внутрь области (13). В этом случае $\lambda_d^{(3)} = 0$ и $u = 0$, а $\gamma = 0$.

4. Алгоритм численного решения задачи оптимального управления. Аналитически решить задачу (1)–(27) не удастся, поэтому для этой цели разработан численный метод. Основные моменты численного метода состоят в следующем. При заданном начальном управлении $D = D_0$ решается система (1)–(12) методом конечных разностей [4]. Затем с начальными условиями при $t = T$ в обратном направлении решается задача (16)–(27) в области $\Omega = [0 \leq z \leq l, 0 \leq t \leq T]$. На каждом временном шаге проверяется выполнение условия $\lambda_d^{(3)} = 0$. Если последнее условие не выполняется, то осуществляется корректировка управления $D(t)$ и повторяется весь расчет при скорректированном $D(t)$. Решение системы (1)–(12) на последующих итерациях начинается с момента времени, в который происходит корректировка управляющей функции. Это обуславливает экономичную схему расчета оптимального управления. Корректировка управляющего параметра осуществляется по приращению функционала качества ΔS из необходимого условия Вейерштрасса:

$$\Delta S = \int_0^T \lambda_d^{(3)} \Delta D dt. \quad (28)$$

Так как по условию задачи определяется минимум функционала S , то $\Delta S \geq 0$, т. е. $\lambda_d^{(3)} \Delta D \geq 0$.

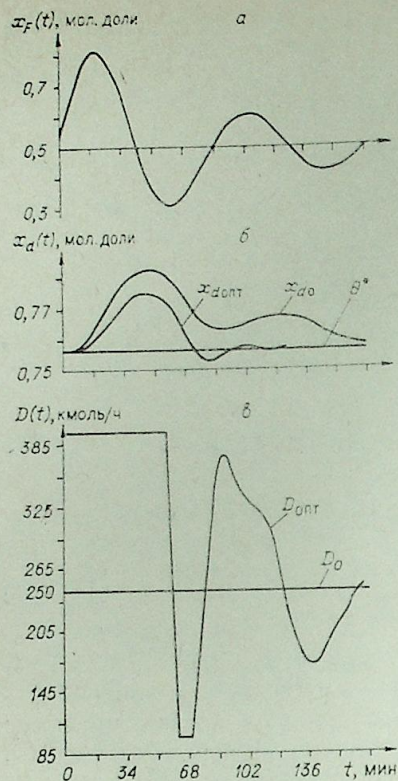


Рис. 1. Графики затухающего возмущения (а), начальной и оптимальной концентраций (б) и управления (в) для колонны К-101.

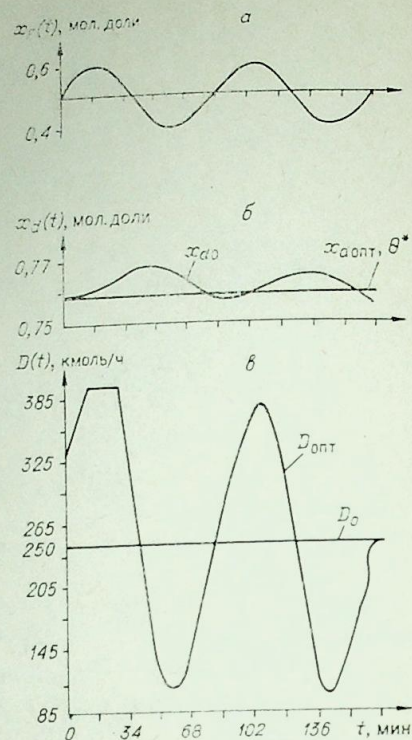


Рис. 2. Графики незатухающего возмущения (а), начальной и оптимальной концентраций (б) и управления (в) для колонны К-101.

На рис. 1, 2 приведены примеры расчета оптимального управления колонной К-101 при разделении смеси из шести компонентов, причем поток смеси $F = 973,351$ кмоль/ч. Возмущение задано по концентрации исходной смеси, которое изменяется по синусоидальному закону. На рис. 1 колебания возмущения затухающие и начинаются с большей амплитудой, поэтому управление вначале принимает граничное значение. Для начального управления $S^0 = 0,3402$, а для оптимального $S^{opt} = 0,1090$, т. е. улучшение критерия качества достигнуто более чем в 3 раза. Примерно в средней точке отрезка $[0, T]$ управляемый параметр x_a выходит на требуемое значение, равное θ^* , и остается близким к θ^* до конца управления. Уменьшив значения возмущения x_F (см. рис. 2), можно добиться такого положения, что оптимальное управление $D(t)$ на всем отрезке $[0, T]$ выводит $x_a(t)$ на требуемое значение θ^* . При начальном управлении $S^0 = 0,03754$, а при оптимальном $S^{opt} = 0,00004298$.

ВЫВОДЫ

1. Получены необходимые условия оптимальности управления массообменными процессами при разделении многокомпонентных смесей.
2. Разработан численный алгоритм решения задачи оптимального управления процессами с рециркуляцией взаимодействующих потоков.
3. Рассчитаны оптимальные управления для промышленной ректификационной колонны, разделяющей многокомпонентные смеси.

Вычислительный центр СО АН СССР,
Красноярск

Поступила в редакцию
9/II 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.
2. Девятков Б. Н., Демиденко Н. Д., Охорзин В. А. Динамика распределенных процессов в технологических аппаратах, распределенный контроль и управление. Красноярск: Кн. изд-во, 1976.
3. Демиденко Н. Д., Ушатинская Н. П. Моделирование, распределенный контроль и управление процессами ректификации. Новосибирск: Наука, 1978.
4. Авдеев А. М., Демиденко Н. Д. Численный метод исследования нестационарных режимов многокомпонентной ректификации.— Изв. СО АН СССР, 1981, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.
5. Böhme V., Zirlin A. M. Über die Ursachen der Effektivitätserhöhung bei der zyklischen Rektifikation.— Chem. Techn., 1977, Heft 3, 29. Jg.
6. Егоров А. И. Условия оптимальности систем, содержащие звенья с распределенными параметрами.— Докл. АН СССР, 1966, т. 171, № 6.
7. Лурье К. А. Оптимальное управление в задачах математической физики. М.: Наука, 1975.

УДК 621.311.016.32

В. В. БУШУЕВ, Я. М. ШЛЕМЕНЗОН

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ПРИ ОЦЕНКЕ КАЧЕСТВА РАБОТЫ СИСТЕМ КОНТРОЛЯ И УПРАВЛЕНИЯ ЭНЕРГООБЪЕКТАМ

Улучшение технико-экономических показателей работы электроэнергетического оборудования, совершенствование эффективности и качества управления сложным электроэнергетическим хозяйством страны — одна из основных задач современной электроэнергетики. Успешное решение этой задачи может быть достигнуто только при использовании высокоэффективных средств контроля и управления во всех звеньях общей неразрывной цепи производства, распределения и потребления электроэнергии.

Бурный рост мощности и сложности энергообъектов, введение классов сверхвысокого и ультравысокого напряжений, необходимость координации работы многочисленных устройств на разных уровнях управления в условиях ограниченности квалифицированного обслуживающего персонала выдвинули необходимость применения в совокупности с общеприятными конструктивными, эксплуатационными и схемными мероприятиями автоматизированных систем контроля и управления энергообъектами (АСКУЭ) на базе мини- и микро-ЭВМ.

Такие системы, выполняя сложные алгоритмы переработки входной информации, позволяют обеспечить комплексный контроль и управление режимами и оборудованием.

Для обоснования способов построения и выбора отдельных узлов, блоков и общих структур АСКУЭ необходимо иметь совокупные критерии качества работы таких систем.

В большинстве случаев такой критерий является аддитивной суммой отдельных составляющих [1]

$$K = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i, \quad (1)$$

где α_i — относительная оценка i -го показателя; b_i — важность достижения максимума (минимума) i -го показателя.

Для нормирования величины K относительная оценка определяется как

$$\alpha_i = \frac{A_i \max - a_i}{a_i \max - a_i \min} \quad (2)$$

при необходимости достижения минимума α_i или

$$\alpha_i = \frac{a_i - a_i \min}{a_i \max - a_i \min} \quad (3)$$

при необходимости достижения максимума этого показателя.

Здесь $a_i \max$, $a_i \min$ и a_i — соответственно максимальное, минимальное и текущее значения i -го показателя.

Успешный выбор рациональной структуры АСКУЭ во многом определяется правильным обоснованием числа и вида параметров, входящих в совокупный критерий. В качестве таких параметров обычно использу-

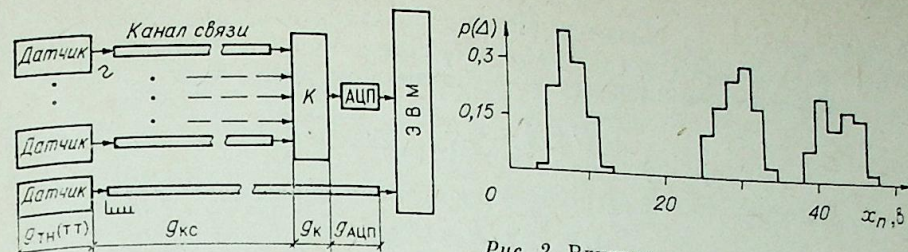


Рис. 1. Блок-схема подсистемы ввода данных в АСКУЭ.

Рис. 2. Влияние текущего значения измеряемой величины на закон распределения погрешностей измерения.

ются характеристики средств вычислительной техники (СВТ), такие как время решения задачи, время ответа на запрос, объем оперативной памяти и т. д. [2]. Однако в связи с бурным развитием и совершенствованием СВТ, позволяющим уже сейчас решать практически любые задачи, возлагаемые на АСКУЭ, характеристики СВТ начинают играть все меньшую роль и в настоящее время не являются определяющими при разработке системы. Кроме того, они не учитывают особенностей работы АСКУЭ, заключающихся в трудностях передачи информации по территории энергообъектов. Последние обуславливаются протяженными линиями связи, значительной территориальной разобщенностью оборудования, высоким уровнем постоянно присутствующих электрических полей и помех, необходимостью сбора и обработки большого числа режимных и технологических параметров различной физической природы.

Эти затруднения в основном влияют на принципы построения подсистемы ввода информации в АСКУЭ (рис. 1). Поскольку все элементы рассматриваемой подсистемы служат единой цели сбора, преобразования и передачи информации, в качестве главных характеристик отдельных элементов цепи (сигнал, датчик, линия связи, преобразователь) и всей системы в целом целесообразно использовать именно информационные оценки, которые обеспечивают возможность единого количественного подхода к определению показателей работы звеньев различной физической природы.

Существенным представляется и то, что информационные оценки позволяют учитывать статистические характеристики не только полезных сигналов, но и реальных случайных погрешностей и помех, что имеет особое значение по отношению к условиям работы аппаратуры на энергообъектах. Использование информационных оценок дает возможность осуществить согласование требований к пропускной способности, точности и быстродействию отдельных элементов общей информационной цепи, исходя из совокупных интегральных критериев качества работы всей АСКУЭ.

В качестве таких оценок для отдельных узлов и блоков АСКУЭ предлагаются три основных показателя:

1. Абсолютная оценка — потеря информации в элементе

$$\Delta g = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_{\text{вх}}) \cdot H(\Delta X/x_{\text{вх}}) dx_{\text{вх}}, \quad (4)$$

где

$$H(\Delta X/x_{\text{вх}}) = - \int_{-\infty}^{\infty} p(\Delta x/x_{\text{вх}}) \log_2 p(\Delta x/x_{\text{вх}}) d\Delta x \quad (5)$$

— условная энтропия закона распределения основного воздействия Δx , искажающего информацию в данном элементе при задании на входе элемента конкретного значения $x_{\text{вх}}$. Если при этом во всем рабочем диапазоне конкретного устройства статистические свойства искажающего воздействия постоянны, то Δg также постоянна и равна $\log_2(2\Delta x)$, в про-

тивном случае — Δg равна средневзвешенному в соответствии с распределением $p(x_{\text{вх}})$ значению условной энтропии.

2. Относительный показатель — информационный КПД

$$N = 1 - \frac{\Delta g}{H(X_{\text{вых}})} \quad (6)$$

3. Динамический показатель — пропускная способность элемента

$$C = 2\Delta f \cdot H_{\text{max}}(X_{\text{вых}}), \quad (7)$$

где Δf — рабочий диапазон частот элемента; $H_{\text{max}}(X_{\text{вых}})$ — максимальная энтропия сигнала на выходе элемента.

Для оценки количественных характеристик этих показателей с помощью специально разработанной аппаратуры проведена регистрация реальных параметров режима энергообъектов, погрешностей измерения и помех в различных узлах и блоках АСКУЭ [3, 4]. Обработка результатов эксперимента показала зависимость параметров и вида закона распределения погрешностей от текущего значения измеряемой величины (рис. 2), что не позволяет однозначно определять ее значение. Следовательно, в дальнейших расчетах необходимо использовать величину энтропийного значения погрешности, позволяющей любую случайную погрешность с произвольным законом распределения заменить полностью эквивалентной ей в информационном смысле погрешностью с равномерным законом распределения с помощью выражения [5]

$$\Delta = \sigma\beta, \quad (8)$$

где β — коэффициент, зависящий от закона распределения погрешностей; σ — среднее квадратичное значение погрешностей.

Анализ результатов показал следующее.

1. Для основных первичных датчиков АСКУЭ трансформаторов тока (ТТ) и трансформаторов напряжения (ТН) погрешность мультипликативна и распределена нормально.

2. Для кабельных линий связи погрешность аддитивна и распределена нормально.

3. Для аналого-цифровых преобразователей (АЦП) погрешность аддитивна и распределена равномерно.

При этом, исходя из выражения (4), потери информации в названных блоках определяются:

а) для ТН и ТТ

$$\Delta g = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{x_{\text{min}}}^{x_{\text{max}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right) \log_2(2\Delta x) dx; \quad (9)$$

б) для АЦП

$$\Delta g_{\text{ацп}} = \log_2(2\beta_{\text{ацп}} \cdot \sigma_{\text{ацп}}); \quad (10)$$

в) для кабельных линий связи (КС)

$$\Delta g_{\text{кс}} = \log_2(2\beta_{\text{кс}} \cdot \sigma_{\text{кс}}); \quad (11)$$

г) для дискретных сигналов

$$\Delta g_{\text{диск}} = -p_0 \log_2 p_0 - (1 - p_0) \log_2(1 - p_0), \quad (12)$$

где p_0 — вероятность ошибки в канале передачи данных.

По предлагаемой методике с учетом экспериментально полученных характеристик проведен сравнительный анализ качества работы различных узлов АСКУЭ. При этом было показано, что наибольшими потерями информации и наименьшим N обладают кабельные линии передачи непрерывной информации (табл. 1). Пропускная способность кабельных линий передачи данных также резко ограничивает возможности системы. Следовательно, для повышения качества работы АСКУЭ необходимо ог-

Таблица 1
Информационные показатели различных узлов и блоков АСКУЭ

Наименование элемента	Δg , бит	N	C , бит/с
Трансформаторы тока	0,3÷0,4	0,73÷0,78	$(0,18\div 1,2) \cdot 10^6$
Трансформаторы напряжения	0,26	0,75÷0,8	$(0,2\div 1,34) \cdot 10^6$
Кабельные линии при передаче непрерывных данных	0,63	0,36÷0,62	$1,3 \cdot 10^4$
Кабельные линии при передаче дискретных данных	0,22	0,73÷0,9	$1,3 \cdot 10^4$
АЦП	0,17	0,83	$0,6 \cdot 10^6$
Коммутатор	0	1	$1 \cdot 10^6$
Дублирующие контакты коммутационной аппаратуры	0,12	0,95	0,1
Оптические каналы передачи данных	0,03	0,99	10^8

раничивать использование каналов передачи аналоговых данных, вводя цифровые способы передачи сигналов и оптические каналы связи.

При разработке критериев качества работы всей АСКУЭ в целом, учитывая особенности ее функционирования на энергообъектах, целесообразно применять следующие основные составляющие: 1) повышение надежности работы электроэнергетических объектов за счет применения АСКУЭ; 2) суммарные потери информации в подсистеме ввода данных АСКУЭ; 3) приведенные затраты на сооружение и эксплуатацию АСКУЭ.

Статистическое моделирование работы некоторых функций, выполняемых АСКУЭ, показало зависимость надежности работы энергообъектов от количества информации I , поступающей в систему управления. Эта зависимость имеет вид:

$$B(I) = B_1 + B_0(1 - e^{-mI}), \quad (13)$$

где B_1 — надежность работы энергообъекта с использованием традиционной системы управления, без применения АСКУЭ; B_0 и m — некоторые постоянные коэффициенты. Вид $B(I)$ подтверждает положение, выдвинутое академиком В. А. Трапезниковым, об экспоненциальной зависимости надежности от информации [6].

Естественно предположить, что потери информации в подсистеме ввода данных уменьшают надежность работы энергообъектов (при использовании АСКУЭ) согласно выражению (13).

Поскольку АСКУЭ выполняют на энергообъектах несколько функций, каждая из которых характеризуется соответствующим влиянием на выбранные показатели i , то критерий качества работы всей АСКУЭ в целом может быть определен как

$$K = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} b_{ij} \quad (14)$$

при условии

$$\sum_{i=1}^n b_{ij} = 1, \quad (15)$$

где j — текущий номер функции, выполняемой АСКУЭ на энергообъекте.

В этом случае K изменяется от 0 до 1, а важность достижения максимума (минимума) показателя α_i при выполнении функции j на конкретном энергообъекте определяется коэффициентами b_{ij} .

В соответствии с изложенным, критерий качества работы АСКУЭ может быть при $n=2$ согласно выражению (14) представлен как

$$K = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m b_{1j} \frac{\Delta B_j - \Delta B(\Delta g) - \Delta B_{j \text{ min}}}{\Delta B_{j \text{ max}} - \Delta B_{j \text{ min}}} + b_{2j} \cdot \frac{C_{j \text{ max}} - C_j}{C_{j \text{ max}} - C_{j \text{ min}}}. \quad (16)$$

Таблица 2

Важность выполнения основных функций АСКУЭ на подстанции 500 кВ

j	b_{ij}	
	b_{1j}	b_{2j}
Контроль режимных и технологических параметров по предельным значениям и заданному графику	0,6	0,4
Управление оперативными переключениями цепи 500 кВ	0,85	0,15
Комплексное регулирование напряжения и реактивной мощности	0,9	0,1
Определение ресурса и диагностика текущего состояния оборудования	0,8	0,2

Здесь ΔB_j — повышение надежности работы оборудования энергообъекта за счет выполнения АСКУЭ функции j ; $\Delta B_j(\Delta g)$ — снижение надежности работы оборудования энергообъектов за счет потерь информации Δg в подсистеме ввода данных, при выполнении АСКУЭ функции j ; C_j — приведенные затраты на сооружение и эксплуатацию подсистемы АСКУЭ, обеспечивающей выполнение функции j .

На основании анализа работы системы контроля и управления одной из реальных подстанций 500 кВ для основных задач с соответствующими условно заданными коэффициентами (см. табл. 2) и для двух типов структур при разных способах передачи информации с использованием проводных и оптических линий связи определены значения K :

Централизованная система с аналоговыми линиями передачи данных	0,6
Централизованная система с проводными цифровыми линиями передачи данных	0,72
Централизованная система с оптическими каналами связи	0,86
Децентрализованная система с проводными цифровыми каналами	0,91
Децентрализованная система с оптическими линиями связи	0,89

Анализ показывает, что в настоящее время наибольшее значение K имеют централизованные структуры АСКУЭ с проводными цифровыми каналами передачи данных. Это позволяет рекомендовать их в качестве основной структуры при создании АСКУЭ. Следует, однако, заметить, что более низкое значение K при децентрализованной системе управления с оптическими каналами связи объясняется в основном значительной стоимостью последних. Все остальные составляющие обобщенного критерия имеют гораздо более высокие показатели по сравнению с другими структурами. Вероятно, стоимость оптических линий связи будет уменьшаться, и использование в будущих разработках системы световой передачи данных на территории энергообъектов получит широкое распространение.

ВЫВОДЫ

1. Для оценки качества работы отдельных узлов, блоков и общих структур АСКУЭ весьма удобным показателем могут служить информационные оценки — потери информации, информационный КПД, пропускная способность элементов системы. В качестве обобщенного интегрального критерия работы АСКУЭ можно использовать комплексный критерий, связывающий экономические и информационные характеристики АСКУЭ с надежностью работы энергообъекта.

2. Исследование с помощью предложенных критериев характеристик АСКУЭ реальных высоковольтных подстанций показало, что основным

ограничивающим элементом в такой системе являются кабельные линии передачи непрерывных данных. Это требует разработки новых принципов передачи данных по территории энергообъектов, в качестве которых могут служить оптические линии связи и цифровые методы.

3. Оценки величины совокупного критерия для различных структур АСКУЭ выявили перспективность использования для децентрализованных систем с цифровыми проводными каналами передачи данных, обладающих наибольшим значением K .

Использование оптических линий связи в таких структурах весьма перспективно.

Сибирский научно-исследовательский институт энергетики, Новосибирск

Поступила в редакцию
26/IV 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Юрлов Ф. Ф. Техничко-экономическая эффективность сложных радиоэлектронных систем. М.: Сов. радио, 1980.
2. Гончуков В. В., Островский В. У. Управляющие вычислительные комплексы АСУ ТП подстанций. М.: Информэнерго, 1979.
3. Шлемензон Я. М. Экспериментальное исследование каналов ввода непрерывной информации в ЭВМ.—ЭИ. Средства и системы управления в энергетике. М.: Информэнерго, 1980, № 2.
4. Бушуев В. В., Новиков Н. Л., Коростышевский Е. А. Оценка состояния и режимных параметров объединенных энергосистем как объектов управления по частоте и активной мощности.—В кн.: Статистическая обработка оперативной информации в электроэнергетических системах. Иркутск, 1979.
5. Дорогуцев В. Г., Овчаренко Н. И. Элементы автоматических устройств энергосистем. М.: Энергия, 1979.
6. Трапезников В. А. Автоматическое управление и экономика.—Автоматика и телемеханика, 1966, № 1.

УДК 621.311.016

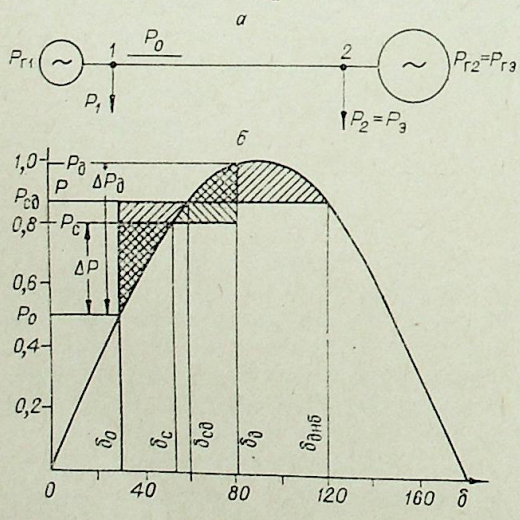
А. Х. КАЛЮЖНЫЙ

УПРОЩЕННАЯ ОЦЕНКА ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ
ПРИ ВНЕЗАПНЫХ НЕБАЛАНСАХ МОЩНОСТИ В ЭНЕРГОСИСТЕМЕ

Аварийные возмущения приводят в большинстве случаев к возникновению внезапных небалансов мощности в тех или иных узлах энергосистемы. При отключении генератора или нагрузки небаланс возникает в одном узле. Отключение межсистемной связи приводит к разноименным небалансам в узлах примыкания этой связи. Для анализа допустимости аварийного возмущения обычно проводятся расчеты динамической устойчивости. Однако практика расчетов показывает, что в современных энергосистемах тяжесть возмущения определяется в основном не коротким замыканием, а возникающим в результате его отключения внезапным небалансом мощности. На этом основании представляется возможным допустимость внезапного небаланса оценивать упрощенно, без расчетов динамической устойчивости, по величинам запасов статической устойчивости доаварийного режима.

При внезапном небалансе наибольшим оказывается обычно первоначальный наброс мощности, обусловленный первым циклом качаний. Величина первоначального наброса определяет динамическую устойчивость энергосистемы. С учетом энергетических соотношений в работе рассмотрена взаимосвязь между ступенчато вводимым небалансом и первоначальным наибольшим набросом мощности. Исследована возможность определения допустимого по условиям динамической устойчивости внезапного небаланса мощности как функции запаса статической устойчивости.

Рассмотрим возникновение внезапного небаланса мощности в одном из энергоузлов и определим наибольший наброс мощности на линии, связывающей этот узел с энергосистемой. С этой целью, выделив исследуемый узел, заменим остальную часть системы другим, эквивалентным узлом. Тогда вся энергосистема сведется к двухузловой схеме (рис. 1, а),



где $P_{r2} \gg P_{r1}$. Пусть мощность передается из энергоузла в систему $P_{r1} - P_1 = P_0$.

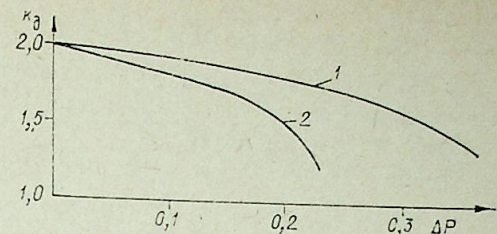
Пренебрежем для простоты потерями в эквивалентной линии электропередачи 1—2 и положим, что ее сопротивление намного больше внутренних сопротивлений энергоузлов 1 и 2. Тогда характеристика мощ-

Рис. 1. Определение максимальных набросов ($\Delta P_{нб}$) и допустимых внезапных небалансов ($\Delta P_{сд}$) мощности.

а) расчетная схема; б) применение метода площадей для определения $\Delta P_{сд}$ и $\Delta P_{нб}$.

Рис. 2. Соотношение между максимальными набросами и внезапными небалансами мощности.

1 — $P_0=1,0$; $\delta_0=30^\circ$; 2 — $P_0=1,4$; $\delta_0=45^\circ$.



ности генератора 1 может быть представлена в виде $P = P_m \sin \delta$ (рис. 1, б). Определим наибольший наброс мощности на эквивалентную линию 1—2 при отключении части нагрузки $\Delta P = -\Delta P_1$. Внезапный небаланс, который можно представить ступенчатым увеличением мощности турбины на $\Delta P_c = \Delta P$ (рис. 1, б), приведет к ускорению генератора Г1 и увеличению угла δ между ЭДС E_1 и E_2 . После того, как угол δ превысит значение δ_c , соответствующее новому положению равновесия, электромагнитная мощность превысит мощность турбины и будет иметь место торможение генератора. Если не учитывать демпфирующих свойств системы, то энергия, затраченная на ускорение генератора, будет равна энергии, идущей на его торможение. Площади, пропорциональные энергии ускорения и торможения, определяются в результате интегрирования:

$$\Delta W_y = \int_{\delta_0}^{\delta_c} (P + \Delta P) d\delta - \int_{\delta_0}^{\delta_c} P_m \sin \delta d\delta,$$

$$\Delta W_T = \int_{\delta_c}^{\delta_d} P_m \sin \delta d\delta - \int_{\delta_c}^{\delta_d} (P + \Delta P) d\delta,$$

где P_m — предел по линии или приближенно аperiodический предел мощности.

Из условия равенства площадей

$$\Delta W_y = \Delta W_T \tag{1}$$

находится наибольшее значение угла δ_d , которого достигает ротор генератора Г1. Величина δ_d зависит от параметров исходного и послеаварийного режимов (δ_0, δ_c) и согласно (1) может быть определена из следующего тригонометрического уравнения:

$$\delta_d \sin \delta_c + \cos \delta_d = \delta_0 \sin \delta_c + \cos \delta_0. \tag{2}$$

Если $\delta_d \leq 90^\circ$, то соответствующая углу δ_d мощность P_d является наибольшей мгновенной мощностью $P_{нб}$, переданной по линии. При этом $P_{нб} = P_d \leq P_m$. В том случае, когда $\delta_d > 90^\circ$, наибольший мгновенный переток равен аperiodическому пределу $P_{нб} = P_m$, а $P_d < P_{нб}$.

Коэффициент $k_d = \Delta P_{нб} / \Delta P_c$ характеризует, во сколько раз наибольший мгновенный наброс мощности $\Delta P_{нб}$ больше исходного небаланса ΔP_c . При малых возмущениях теоретически $k_d \rightarrow 2,0$. Однако при конечных возмущениях с учетом реального затухания в системе $1,0 < k_d < 1,8$. На рис. 2 построены кривые изменения k_d в зависимости от ΔP_c при отсутствии затухания и разных P_0 .

Допустимому из условия сохранения динамической устойчивости внезапному небалансу мощности $\Delta P_{сд}$ соответствуют условия

$$\frac{\pi}{2} - \delta_{сд} = \delta_{днб} - \frac{\pi}{2},$$

$$\sin \delta_{сд} = \sin \delta_{днб},$$

как это видно из рис. 1, б. Тогда угол $\delta_{сд}$ и соответствующий ему допустимый небаланс мощности $\Delta P_{сд}$ определяются из следующих уравнений:

$$(\pi - \delta_0 - \delta_{сд}) \sin \delta_{сд} - \cos \delta_{сд} = \cos \delta_0, \tag{3}$$

$$\Delta P_{сд} = P_m(\sin \delta_{сд} - \sin \delta_0). \quad (4)$$

В общем случае, когда учитываются потери в линии и внутренние сопротивления энергоузлов, характеристика мощности описывается выражением $P_r = P_{11} + P_{12} \sin(\delta - \alpha)$.

Однако уравнения (2) и (3) при этом остаются практически такими же:

$$\delta_d \sin(\delta_c - \alpha) + \cos(\delta_d - \alpha) = \delta_0 \sin(\delta_c - \alpha) + \cos(\delta_0 - \alpha), \quad (2a)$$

$$(\pi - \delta_{сд} - \delta_0) \sin(\delta_{сд} - \alpha) - \cos(\delta_{дс} + \alpha) = \cos(\delta_0 - \alpha). \quad (3a)$$

Поскольку обычно $\delta \gg \alpha$, то можно пользоваться упрощенными уравнениями (2) и (3).

Ранее предлагалось запас статической устойчивости генераторов определять с учетом реакции всей системы по частоте*. При этом исследуемый генератор нагружается или разгружается, а дополнительная мощность воспринимается всеми элементами энергосистемы с учетом их регулирующих эффектов по частоте. Предельному режиму, характеризующему предельной по апериодической устойчивости загрузкой генератора, соответствует частота, несколько отличающаяся от исходной. Если в исходном режиме определен таким образом коэффициент запаса статической устойчивости генератора k_c , то он характеризует допустимый статический небаланс мощности в этом узле, т. е. небаланс, создаваемый бесконечно медленно

$$\Delta P_{см} = P_0 k_c = P_m(1 - \sin \delta_0). \quad (5)$$

Допустимый статический небаланс $\Delta P_{см}$ больше допустимого динамического или внезапного небаланса мощности $\Delta P_{сд}$, прикладываемого ступенчато. Соотношение между $\Delta P_{сд}$ и $\Delta P_{см}$ может быть определено из (4) и (5)

$$k_{дд} = \frac{\Delta P_{сд}}{\Delta P_{см}} = \frac{\sin \delta_{сд} - \sin \delta_0}{1 - \sin \delta_0} < 1, 0 \quad (6)$$

Используя динамический коэффициент $k_{дд}$, можно определить допустимый небаланс мощности $\Delta P_{сд}$ как функцию параметров исходного режима

$$\Delta P_{сд} = P_0 k_c k_{дд}. \quad (7)$$

Коэффициент $k_{дд}$ зависит от k_c или δ_0 . Однако, как показывает совместный анализ выражений (3) и (6), величина $k_{дд}$ остается практически неизменной. Так, в случае незагруженной линии, когда $\delta_0 = 0$, $\Delta P_{см} = P_m$ и $\delta_{сд} = 46,6^\circ$, коэффициент $k_{дд} = 0,73$. При загруженной линии, когда запас статической устойчивости равен нормативному ($k_c = 0,2$), $k_{дд} = 0,75$. Следовательно, динамический коэффициент меняется в диапазоне $k_{дд} = 0,73 \div 0,75$, и можно приближенно считать его неизменным:

$$k_{дд} \approx 0,74 = \text{const}. \quad (8)$$

Благодаря постоянству $k_{дд}$ отпадает необходимость в решении уравнения (3) и определении $\delta_{сд}$. Таким образом, допустимый из условия сохранения динамической устойчивости внезапный небаланс мощности $\Delta P_{сд}$ может быть достаточно точно определен по величине коэффициента запаса статической устойчивости согласно выражению (7) с использованием (8).

Предлагаемый метод определения допустимых внезапных небалансов в энергоузлах применим и в случае сложной схемы. При этом нет необходимости приводить ее к двухузловой схеме. В случае определения запасов статической устойчивости генератора с учетом реакции всей системы по частоте, дополнительная мощность, прикладываемая в исследуемом энергоузле, воспринимается всей остальной частью системы как эквивалентным узлом. Следует иметь в виду, что набросы мощности на отдельные линии в сложной схеме в случае внезапного небаланса и в случае определения запасов статической устойчивости с учетом реакции по частоте взаимосвязаны. В первом случае они определяются взаимными сопротивлениями и инерционными постоянными, во втором случае — регулируемыми эффектами по частоте. В обоих случаях эти факторы зависят от установленной мощности энергоузлов. Поэтому приближенно возможно использовать запасы статической устойчивости, учитывающие реакцию системы по частоте, для определения допустимых внезапных небалансов мощности. С этой целью достаточно найти абсолютную величину предельного статического небаланса в узле $\Delta P_{см i}$ или коэффициент запаса статической устойчивости $k_{с i} = \frac{\Delta P_{см i}}{P_{г i}}$. Тогда допустимый внезапный небаланс в i -м узле равен

$$\Delta P_{сд i} = \Delta P_{см} k_{дд} = P_{г i} k_{с i} k_{дд}. \quad (9)$$

Аналогично могут быть определены допустимые внезапные небалансы во всех других узлах сложной энергосистемы.

Если внезапный небаланс ΔP_i , возникающий в энергоузле, меньше или равен допустимому, то динамическая устойчивость в этом случае сохраняется. Следовательно, условие сохранения динамической устойчивости при внезапных небалансах мощности характеризуется неравенством

$$\Delta P_i \leq \Delta P_{сд i}, \quad (10)$$

где величина $\Delta P_{сд i}$ определяется согласно (9).

Определив реально возможные внезапные небалансы мощности в различных узлах и сравнив их с допустимыми, можно судить о динамической устойчивости в сложной энергосистеме. Если для каких-то узлов не соблюдается неравенство (10), то в этих узлах следует предусмотреть работу противоаварийной автоматики (отключение нагрузок или генераторов, импульсная разгрузка турбин и т. п.). Объем противоаварийной автоматики можно оценить, используя выражения (8)–(10). В результате удается определить расположение, характер и объем управляющих воздействий, предотвращающих нарушение динамической устойчивости.

Таким образом, зная коэффициенты запаса статической устойчивости для основных станций в исходном режиме, можно приближенно оценить динамическую устойчивость сложной энергосистемы при внезапных небалансах мощности и выбрать управляющие воздействия противоаварийной автоматики, обеспечивающие сохранение устойчивости сразу после возмущения.

Сибирский научно-исследовательский институт энергетики, Новосибирск

Поступила в редакцию
5/IV 1982

* Лукашов Э. С., Каложный А. Х. Новый принцип исследования статической устойчивости сложных электроэнергетических систем. — Изв. СО АН СССР, 1974, № 13. Сер. техн. наук, вып. 2.

Рогонин Н. П., Кабов О. А. Влияние капиллярного удерживания жидкости на теплообмен при конденсации на оребренных трубах.— Изв. СО АН СССР, 1983, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

Представлены результаты экспериментального исследования теплообмена при конденсации на оребренных трубах с прямоугольными ребрами. Эксперименты проводились на хладоне-12 при температурах насыщения 20, 40 и 70°C. Установлено, что при конденсации на оребренных поверхностях, у которых расстояние между ребрами по отношению к капиллярной постоянной жидкости меньше единицы, нижняя часть оребренной трубы покрыта постоянно удерживающимся слоем конденсата. Высота этого слоя хорошо совпадает с высотой капиллярного поднятия в бесконечной вертикальной щели той же ширины. Установлено существенное (до 3 раз) изменение теплоотдачи в зависимости от безразмерного расстояния между ребрами. Табл. 2, рис. 4, библиогр. 11.

Хозе А. Н., Дьяченко Ю. В. Влияние инертного газа на теплообмен при конденсации в динамическом двухфазном слое.— Изв. СО АН СССР, 1983, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

Приведены результаты экспериментального исследования влияния инертного газа на процесс конденсации в динамическом двухфазном слое на одиночной охлаждающей трубе и трубном пучке. В рассмотренном диапазоне содержания инертного газа (до 16%) его влияние незначительно.

Выполнен анализ структуры пристенной области динамического слоя для разработки представлений о механизме процесса конденсации. Рис. 3, библиогр. 12.

Ледеков В. И., Петухов Ю. И., Фурсенко А. А. Модель эволюции напряженно-деформированного состояния шарового тепловыделяющего элемента.— Изв. СО АН СССР, 1983, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

Решается задача о развитии во времени напряжений и деформаций в тонкостенной оболочке сферически-симметричного тепловыделяющего элемента под действием изменяющихся внутренних сил, обусловленных распуханием топлива и давлением газа во внутренней полости, а также внешних сил, связанных с давлением в теплоносителе. В топливном слое учитываются только явления ползучести и радиационного распухания. В оболочке твэла рассматриваются упругие, пластические деформации и деформации ползучести. Считается, что оболочка жестко связана с топливным слоем.

Привяты известные из литературы соотношения, связывающие величины напряжений с величинами пластических деформаций и скоростями деформаций ползучести. Замыкание системы уравнений осуществляется с помощью известной гипотезы о равенстве давлений газа в межзерновых пузырьках и величины среднего напряжения в топливе.

Предложен алгоритм численного решения полученных интегродифференциальных уравнений и приведены примеры расчетов эволюции деформаций и напряжений в рассматриваемой системе. Рис. 2, библиогр. 10.

Лежнин С. И., Прибатурин Н. А. Нестационарные волны давления для различных режимов течения парожидкостной смеси.— Изв. СО АН СССР, 1983, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

Изучены закономерности распространения волн давления при пузырьковом, расслоенном и спиральном режимах течения парожидкостной смеси. Получены основные критерии подобия, характеризующие волновой процесс. Экспериментально изучена структура и эволюция волн давления различной длительности и интенсивности для пузырькового режима в широком диапазоне изменений теплофизических свойств кипящей жидкости.

Результаты работы характеризуются общими закономерностями, поэтому их можно использовать для анализа динамики прохождения волн через любые вскипающие жидкости при различных режимах течения. Рис. 2, библиогр. 15.

Павлюченко А. М., Максимова Е. М. Численный метод обработки летного эксперимента на метеорокете типа «Облако» с учетом теории турбулентных пятен Эммонса.— Изв. СО АН СССР, 1983, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

Приведены результаты сравнения расчетных и летных данных по изменению температур стенки из различных материалов и разной толщины на головной части метеорокеты типа «Облако» для чисел Маха $M_\infty < 2$ и Рейнольдса по длине $Re_L < 2 \cdot 10^7$, высоты полета $H < 8$ км. На основе анализа летных данных по температурам стенки с привлечением теории устойчивости Ван-Дриста сделан вывод о существовании ламинарного и переходного режимов течения в сжимаемом пограничном слое. Методика расчета температуры поверхности на ЭВМ основана на численном решении нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения, описывающего баланс энергии на обтекаемой тонкой стенке. Теплообмен в переходной области пограничного слоя рассчитывался с использованием коэффициента перемежаемости, который определялся с учетом теории турбулентных пятен Эммонса. Табл. 1, рис. 11, библиогр. 36.

Петров Г. В. Характеристики устойчивости пограничного слоя газа, рекомбинирующего на охлаждаемой стенке.— Изв. СО АН СССР, 1983, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

Приведены результаты расчета характеристик линейной устойчивости пограничного слоя газа, каталитически рекомбинирующего на охлаждаемой поверхности пластины, полученные в диапазоне изменения числа Маха $2 + 3$ и степени диссоциации газа в набегающем потоке $0 + 0,6$. Показано, что вследствие рекомбинации увеличивается температура стабилизации возмущений первой моды, но возрастает неустойчивость по отношению к возмущениям второй моды. Рис. 6, библиогр. 5.

Заславский Б. П., Юрьев Б. В. Экспериментальное исследование процесса трансформации свободного шарообразного объема легкого газа в вихревое кольцо.— Изв. СО АН СССР, 1983, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

Оптическими методами исследуется процесс трансформации в вихревое кольцо первоначально неподвижного шарообразного объема со свободными границами, заполненного средой более легкой, чем внешняя. Используется оптический нож, образованный лучом мощного аргонного лазера, фотоаппарат с открытым в течение эксперимента затвором со стробирующим устройством и кинокамера. Начальный объем получается с помощью мыльного пузыря с азотногелиевой смесью заданной плотности.

На основании законов сохранения выводятся формулы, определяющие параметры всплывающего кольцевого вихря, полученного в результате трансформации. Приводятся сравнение этих формул с результатами экспериментов. Рис. 6, библиогр. 12.

Довгаль А. В., Козлов В. В. Восприимчивость пограничного слоя на телах с затупленным носиком к акустическим колебаниям потока.— Изв. СО АН СССР, 1983, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

Экспериментально исследована генерация волн Толлмина—Шлихтинга пограничного слоя на осесимметричных телах с затупленной передней кромкой при наложении акустического поля. Эксперименты выполнены на малотурбулентной аэродинамической трубе дозвуковых скоростей. При возбуждении звуковых колебаний внешнего потока в пограничном слое обнаружены волны завихренности со свойствами волн Толлмина—Шлихтинга. Генерация колебаний пограничного слоя происходит в районе носика модели. Ниже по потоку возбужденные колебания нарастают, попадая в область неблагоприятного градиента давления. Рис. 6, библиогр. 14.

Елисеев В. И. Пространственная устойчивость радиальной пленки.— Изв. СО АН СССР, 1983, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

В рамках модели линейной теории устойчивости проанализировано поведение симметричных радиальных возмущений. В основу анализа положен асимптотический метод, позволяющий учесть непараллельность основного течения и зависимость параметров струи от радиуса. Рис. 1, библиогр. 5.

Бедриковенский П. Г., Дорфман Я. Е. Распространение волн концентрации компонентов при вытеснении нефти спиртовым раствором.— Изв. СО АН СССР, 1983, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

Рассматривается задача трехкомпонентной фильтрации при вытеснении нефти спиртовым раствором произвольной концентрации и оторочкой такого раствора, продаваемой по пласту водой. Получена система уравнений, описывающая процесс фильтрации трехкомпонентной системы как в двухфазной, так и в однофазной области. Исследована задача Римана о распаде произвольного разрыва для полученной системы, что позволило получить аналитические решения задачи о вытеснении нефти раствором спирта. Получено точное решение задачи о вытеснении нефти оторочкой спиртового раствора, для чего исследованы взаимодействия различных нелинейных волн. Предложена графоаналитическая техника определения различных показателей процесса разработки. Рис. 4, библиогр. 10.

Чернов Ю. П. О потенциальном обтекании диафрагм электрическим током.— Изв. СО АН СССР, 1983, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

Проведен расчет структуры электрического поля в области при потенциальном обтекании диафрагмы с цилиндрическим отверстием (случай задачи Неймана для уравнения Пуассона).

Расчет краевой задачи выполнен методом разделения переменных, в качестве источника тока выбран точечный источник, заданный с помощью функции Грина в сплюснутой сферической системе координат.

Приводится оценка коррекции сопротивления электрическому току для открытого конца отверстия диафрагмы. Расчет краевой задачи, выполненный для сравнения численным методом интегральных уравнений для цилиндра с соосным цилиндрическим отверстием, выявил существование характерных различий в решениях, которые говорят о невозможности получения аккуратной аппроксимации решения для диафрагмы методом интегральных уравнений посредством подобной аппроксимации границ. Рис. 3, библиогр. 7.

Дворников Н. А., Терехов В. И. Динамика и тепломассообмен частиц в вихревой камере с притоком плазменным потоком.— Изв. СО АН СССР, 1983, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

Проведен анализ динамики и тепломассообмена мелкодисперсных частиц в вихревой камере при наличии в ней плазменного шнура в притоковой области. Расчеты проводились с учетом влияния разреженности и неизотермичности течения на законы теплообмена и трения при различных режимах обтекания частиц. Разработанная методика позволяет определить основные параметры процесса нагрева частиц в плазменном столбе и охлаждения их в периферийной области — температуру, изменение диаметра за счет испарения, скорости скольжения фаз, траектории и т. д. Приводится подробное обсуждение результатов расчета. Рис. 7, библиогр. 16.

Градов В. М., Гайдуков Е. Н., Сапрыкин Л. Г., Щербаков А. А., Щедров М. В. Энергетический баланс разрядов высокого давления в парах щелочных металлов.— Изв. СО АН СССР, 1983, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

Проведено комплексное расчетно-теоретическое и экспериментальное исследование радиационных свойств разрядной плазмы паров щелочных металлов. Сформулирована замкнутая математическая модель, позволяющая определять характеристики стабилизированных оболочек разрядов в парах щелочных металлов (калия, натрия, смеси калия и рубидия). Получены данные по зависимости лучистой и тепловой составляющих энергетического баланса плазменного столба от вкладываемой в разряд электрической мощности, а также геометрических размеров разрядных трубок. Рассмотрено влияние собственного излучения нагретой оболочки на результирующее излучение разрядов. Рис. 3, библиогр. 23.