

# ИЗВЕСТИЯ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

СЕРИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

Год основания журнала 1957 Год основания серии 1963	Периодичность журнала 15 номеров в год Периодичность серии 3 номера в год	№ 13 (343) вып. 3	Октябрь 1981
--	--	----------------------	-----------------

## СОДЕРЖАНИЕ

### ТЕРМОДИНАМИКА И ТЕПЛОБМЕН

- А. Д. Полянин, В. Д. Полянин, Ю. А. Сергеев. О поле концентраций и температур, возникающих при обтекании химически активной реагирующей частицы потоком жидкости . . . . . 3
- Н. М. Расторгуева, Н. А. Рубцов. Интегральные полусферические излучательные способности кварца марок КИ, КВ и КУ в области температур 110—330 К . . . . . 10
- А. В. Багинский. Об исследовании теплопроводности полупрозрачных веществ в тонких слоях. II. Высокочастотная плоская тепловая волна . . . . . 17
- В. А. Старовойтов. Охлаждение электрических машин с помощью ферромагнитных жидкостей . . . . . 21

### ПРИКЛАДНАЯ ГАЗО- И РЕОДИНАМИКА

- А. В. Анцупов, В. М. Миронов. Исследование аэродинамики вихревой камеры 26
- Э. П. Волчков, А. П. Кардаш, В. И. Терехов. Гидродинамика вихревой камеры с гиперболическими торцевыми крышками . . . . . 33
- В. П. Лысенко, А. А. Маслов, Н. В. Семенов. Экспериментальное исследование влияния нагрева на переход и устойчивость сверхзвукового пограничного слоя . . . . . 42
- Г. С. Хакимзянов, И. К. Яушев. О численном расчете дозвуковых установившихся осесимметричных течений идеальной сжимаемой жидкости в каналах сложной формы . . . . . 50
- Г. А. Ведерников, В. П. Звезинцев. Метод измерения сил при испытаниях в импульсной аэродинамической трубе . . . . . 58
- Н. М. Бычков, А. Г. Иштулов, В. М. Коваленко. Влияние вращения на аэродинамические характеристики осесимметричных тел большого удлинения при сверхзвуковых скоростях . . . . . 65
- В. М. Коваленко, А. М. Махнин. Аэродинамические характеристики вращающегося осесимметричного тела с перфорацией хвостовой части при  $M=2$  75
- А. Ф. Латыпов, Б. Н. Сорока. О математической модели дозвукового транспортного самолета . . . . . 83

### НИЗКОТЕМПЕРАТУРНАЯ ПЛАЗМА

- А. Л. Баранников, С. Д. Гришин, М. М. Капустин, В. А. Кошелев. Плазменный трансформатор постоянного тока . . . . . 89
- И. Ш. Абдуллин, Ф. А. Сальянов. Расчет характеристик индукционного диффузного разряда . . . . . 100
- С. А. Юхимчук. Стабилизация положения дуги в коаксиальном зазоре плазмотрона . . . . . 104



В. А. Стрельцов, П. П. Малюшевский, В. Н. Пастухов. Исследование характеристик генератора низкотемпературной плазмы с рабочими веществами различной плотности	108
Э. В. Горожанки, Ю. С. Дудников, В. С. Кушнир, В. Ф. Левченко, Н. Ф. Лобанов. Плазмотрон с диффузорной МЭВ в поперечном магнитном поле	111
<b>МОДЕЛИ ТЕПЛО- И МАССОБМЕННЫХ ПРОЦЕССОВ И ВОПРОСЫ УПРАВЛЕНИЯ</b>	
В. П. Карлов, Н. Д. Демиденко. Метод решения нестационарной задачи массообмена в сложной ректификационной колонне	114
<b>ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ</b>	
В. В. Бушуев, Н. Л. Новиков, Е. А. Коростышевский. Метод анализа устойчивости сложных электрических систем при учете статистической природы параметров и возмущающих воздействий	122
В. З. Манусов, Ю. Н. Кучеров, О. Н. Шепилов. Расчет интегральных показателей режимов работы электрических систем вероятностными методами	130
К шестидесятилетию академика Н. Н. Яненко	137
Список статей, опубликованных в серии технических наук в 1981 г.	138

А. Д. ПОЛЯНИН, В. Д. ПОЛЯНИН, Ю. А. СЕРГЕЕВ

### О ПОЛЕ КОНЦЕНТРАЦИИ И ТЕМПЕРАТУР, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ОБТЕКАНИИ ХИМИЧЕСКИ АКТИВНОЙ РЕАГИРУЮЩЕЙ ЧАСТИЦЫ ПОТОКОМ ЖИДКОСТИ

**1. Постановка задачи.** Рассматривается тепломассообмен обтекаемой вязкой несжимаемой жидкостью частицы, на поверхности которой протекает поверхностная химическая реакция, сопровождающаяся выделением (поглощением) тепла. На большом расстоянии от частицы поток жидкости предполагается однородным, поэтому скорость жидкости, концентрация реагирующего вещества и температура потока имеют постоянные значения  $U$ ,  $C_0$  и  $t_0$  соответственно (см. рисунок).

Считаем, что скорость химической реакции на поверхности частицы равна  $k'f'(C, T)$ , где  $k'$  — константа скорости реакции,  $C$  и  $T$  — концентрация и температура на поверхности частицы. Функция  $f'$  определяется механизмом реакции. Зависимостью характеристик жидкости от температуры и стефановским потоком вещества, связанным с химическими превращениями, пренебрегается.

В случае двумерного обтекания (в плоском или осесимметричном случае) в ортогональной системе координат  $\xi, \eta, \lambda$ , связанной с поверхностью тела  $\Gamma$ :  $\xi = 0$  безразмерные уравнения конвективной теплопроводности и диффузии могут быть записаны в виде ( $g_{\xi\xi} = g_{\eta\eta} = 1$ ,  $g_{\lambda\lambda}$  — компоненты метрического тензора; в плоском случае  $g_{\lambda\lambda} = 1$ )

$$\Delta c - P(v\nabla)c = 0, \quad 0 < \xi < +\infty; \quad (1.1)$$

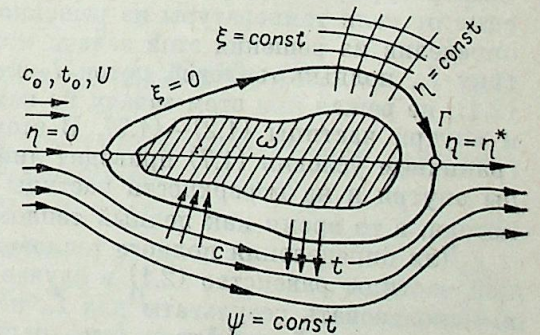
$$\Delta t_+ - PL^{-1}(v\nabla)t_+ = 0, \quad 0 < \xi < +\infty; \quad (1.2)$$

$$\Delta t_- = 0, \quad -\xi_0 < \xi < 0; \quad (1.3)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{g_{\lambda\lambda}}} \left( -\frac{\partial\psi}{\partial\eta}, \frac{\partial\psi}{\partial\xi} \right), \quad \Delta = \frac{1}{\sqrt{g_{\lambda\lambda}}} \left[ \frac{\partial}{\partial\xi} \left( \sqrt{g_{\lambda\lambda}} \frac{\partial}{\partial\xi} \right) + \frac{\partial}{\partial\eta} \left( \sqrt{g_{\lambda\lambda}} \frac{\partial}{\partial\eta} \right) \right],$$

где  $t'_+ = t_0 t_+$  и  $t'_- = t_0 t_-$  — температура вне и внутри частицы,  $c' = c_0 c$  — концентрация,  $P = aUD^{-1}$  — число Пекле,  $L = \chi D^{-1}$  — число Льюиса,  $a$  — характерный размер частицы (например, радиус сферы),  $D$  — коэффициент диффузии,  $\chi$  — коэффициент температуропроводности. Предполагается, что поле скоростей жидкости известно из решения соответствующей гидродинамической задачи об обтекании и определяется функцией тока

$$\xi \rightarrow 0, \quad \psi \rightarrow \xi^2 f(\eta) + O(\xi^2). \quad (1.4)$$



Здесь и в дальнейшем для удобства принято, что во всей рассматриваемой области введены единые ортогональные координаты, причем внешняя область задается неравенством  $0 < \xi < +\infty$ , а внутренняя  $-\xi_0 < \xi < 0$ , где  $\xi_0$  — некоторая положительная величина (например, для сферы радиуса единицы  $\xi = r - 1$ ,  $\eta = \theta$ , где  $r, \theta$  — сферические координаты, внутренняя область задается значением  $\xi_0 = 1$ ). Предполагается, что на поверхности частицы имеются лишь две критические точки  $\eta = 0$  и  $\eta = \eta^*$ , при этом значению  $\eta = 0$  соответствует критическая точка натекания (см. рисунок).

Граничные условия, выражающие однородность температуры и концентрации вдали от частицы, непрерывность температуры, химическую реакцию и баланс тепла на ее поверхности, имеют вид

$$\xi \rightarrow +\infty, c \rightarrow 1, t_+ \rightarrow 1; \quad (1.5)$$

$$\xi = 0, t_+ = t_-; \quad (1.6)$$

$$\xi = 0, \partial t_+ / \partial \xi - \delta \partial t_- / \partial \xi = -\sigma \partial c / \partial \xi; \quad (1.7)$$

$$\xi = 0, \partial c / \partial \xi = kF(c, t_+); \quad (1.8)$$

$$\delta = \lambda_1 \lambda^{-1}, \sigma = h [c_p L t_0]^{-1}, k = k' a D^{-1};$$

$$F(c, t_+) \equiv c_0^{-1} F'(c_0 c, t_0 t_+); \quad F(0, t_+) = 0.$$

Здесь  $\lambda_1$  и  $\lambda$  — коэффициенты теплопроводности частицы и жидкости,  $h$  — теплота реакции,  $c_p$  — теплоемкость жидкости.

2. Связь между полным тепловым и диффузионным потоками. Интегрируя граничное условие (1.7) по всей поверхности частицы  $\Gamma$  в силу гармоничности функции  $t_-$  в области  $-\xi_0 < \xi < 0$ , получаем следующее интегральное соотношение между тепловым и диффузионным потоками

$$I_T = -\sigma I_c, \quad (2.1)$$

$$I_T = \int_{\Gamma} \frac{\partial t_+}{\partial \xi} ds, \quad I_c = \int_{\Gamma} \frac{\partial c}{\partial \xi} ds \left( \int_{\Gamma} \frac{\partial t_-}{\partial \xi} ds = 0 \right).$$

Равенство нулю интеграла, стоящего в скобках, доказывается путем использования тождества Грина для функций 1 и  $t_-$  в произвольной замкнутой области  $\omega$ , ограниченной гладкой поверхностью  $\partial\omega$  и лежащей внутри области  $-\xi_0 < \xi < 0$  с последующим предельным переходом  $\partial\omega \rightarrow \Gamma$  (см. рисунок).

Отметим, что соотношение (2.1) носит самый общий характер и выражает интегральный закон сохранения тепла и массы реагента. Оно является справедливым в любом диапазоне чисел Пекле и Льюиса для произвольной формы поверхности частиц и кинетики реакции, а также при наличии других реагирующих частиц в дисперсной системе.

В случае, когда скорость поверхностной реакции зависит только от концентрации реагента вблизи поверхности  $F = F(C)$  и не зависит от температуры, распределение концентрации в потоке определяется независимо от поля температуры из решения задачи (1.1), (1.5), (1.8). Поэтому, определив из решения этой задачи полный диффузионный поток на частицу  $I_c$ , полный тепловой поток  $I_T$  можно вычислять сразу по формуле (2.1), не решая при этом задачу по нахождению поля температур в потоке и внутри частицы (1.2) — (1.7). В этом случае изменение параметра  $\delta$  в граничном условии (1.7) приводит лишь к перераспределению температуры внутри и на поверхности частицы и изменению локального теплового потока, в то время как полный тепловой поток остается неизменным.

Для определения полного теплового потока на поверхность реагирующей частицы равенство (2.1) в случае  $F = F(C)$  позволяет непосредственно использовать результаты для  $I_c$ , полученные ранее во многих работах по конвективной диффузии (см., например, [1—9]). Например, при малых числах Пекле и Рейнольдса в случае полного поглощения реагента

поверхностью сферы, обтекаемой однородным потоком, использование формулы (2.1) сразу приводит к результату работы [10].

3. Тепло- и массообмен цепочки реагирующих сфер в случае предельного поглощения. Используем соотношение (2.1) для определения полных тепловых потоков на поверхности сфер одинакового радиуса, движущихся с одинаковой скоростью на равном расстоянии одна от другой, в случае бесконечной скорости поверхностной химической реакции  $c(\xi = 0) = 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Считаем, что диффузионное число Пекле велико (за характерный масштаб длины выбирается радиус сферы), число Рейнольдса — мало, а безразмерное расстояние между сферами удовлетворяет неравенству  $O(1) < l < O(P^{1/3})$ . Левая часть неравенства с точностью до главных членов позволяет вблизи поверхностей сфер для распределения скоростей жидкости пользоваться соответствующими результатами для одиночной сферы; правая часть неравенства означает, что диффузионный пограничный слой каждой  $k$ -й сферы (нумерация ведется от впереди идущей частицы) взаимодействует с конвективно-пограничной областью диффузионного следа предыдущей  $(k-1)$ -й сферы [11].

Использование формулы (2.1) и результатов [11] для  $I_{ck}$  приводит к следующим выражениям для полных тепловых потоков на поверхности сфер:

$$I_{T_k} = I_{T_1} [k^{2/3} - (k-1)^{2/3}], \quad (3.1)$$

$$(k \rightarrow \infty, I_{T_k} \rightarrow 2/3 I_{T_1} k^{-1/3}).$$

Из формулы (3.1) видно, что в цепочках частиц происходит существенное торможение интенсивности процессов тепломассообмена по сравнению с изолированными частицами; при этом полный тепловой поток на частицу быстро уменьшается с ростом ее порядкового номера в цепочке  $k \rightarrow \infty$ ,  $I_{T_k} \rightarrow 0$ . Отметим, что в случае предельного поглощения реагента поверхностями сфер и больших чисел Пекле формула (3.1) справедлива при любых значениях числа Льюиса и параметра  $\delta$ .

4. Пограничное приближение. Поле температур в потоке жидкости и внутри частицы в случае бесконечной скорости поверхностной реакции. В дальнейшем ограничимся изучением случаев, когда тепловое и диффузионное числа Пекле велики по сравнению с единицей  $P \gg 1$ ,  $PL^{-1} \gg 1$ , а весь температурный пограничный слой целиком лежит внутри области, в которой тангенциальная скорость жидкости хорошо представляется в виде линейной зависимости от поперечной координаты  $\xi$ . Такая ситуация является типичной в случае больших чисел Прандтля  $Pr = \nu \chi^{-1}$  для очень вязких жидкостей типа смазочных масел и может иметь место при средних числах Прандтля (для жидкостей типа воды) и больших числах Рейнольдса, когда развитие температурного пограничного слоя начинается внутри развитого гидродинамического пограничного слоя (например, в случае плоской пластинки, когда реакция происходит на участке достаточно удаленном от ее начала) [12].

В переменных

$$\zeta = P^{1/3} \psi^{1/2}, \quad \tau = \tau(\eta) = \frac{1}{2} \int_0^{\eta} (g \lambda \lambda_{\xi=0}^{1/2} f^{1/2}(\eta) d\eta) \quad (4.1)$$

уравнения и граничные условия (1.1) — (1.8) в приближении теплового и диффузионного пограничного слоя записываются в виде

$$\partial c / \partial \tau - \zeta^{-1} \partial^2 c / \partial \zeta^2 = 0, \quad 0 < \zeta < +\infty, \quad (4.2)$$

$$\partial t_+ / \partial \tau - L \zeta^{-1} \partial^2 t_+ / \partial \zeta^2 = 0, \quad 0 < \zeta < +\infty, \quad (4.3)$$

$$\Delta t_- = 0, \quad -\xi_0 < \xi < 0, \quad (4.4)$$

$$\tau = 0 \quad (\zeta \neq 0), \quad c = 1, \quad t_+ = 1, \quad (4.5)$$

$$\xi \rightarrow \infty, c \rightarrow 1, t_+ \rightarrow 1, \quad (4.6)$$

$$\xi = 0, t_+ = t_-, \quad (4.7)$$

$$\xi = 0, g(\tau) \partial(t_+ + \sigma c) / \partial \xi - \delta P^{-1/3} \partial t_- / \partial \xi = 0, \quad (4.8)$$

$$g(\tau) = f^{1/2}(\eta(\tau)) \quad (F(0, t_+) = 0, F(c, t_+) \neq 0, c \neq 0). \quad (4.9)$$

Рассмотрим сначала простейший случай полного поглощения растворенного вещества реагирующей поверхностью, что соответствует предельному переходу при  $k \rightarrow \infty$  в граничном условии (4.9)

$$\xi = 0, c = 0. \quad (4.10)$$

Граничное условие (4.10) существенно проще условия (4.9), так как в этом случае распределение концентрации в потоке определяется из решения задачи (4.2), (4.5), (4.6), (4.10) и имеет вид [3]

$$c(\xi, \tau) = \Gamma^{-1}(1/3) \gamma(1/3, \xi^3/9\tau), \quad \Gamma(1/3) = \gamma(1/3, +\infty), \quad (4.11)$$

где  $\gamma$  — неполная гамма-функция.

Используя это выражение, по формуле (2.1) можно сразу определить полный тепловой поток на поверхность частицы. Однако для анализа общего случая с граничным условием (4.9) в дальнейшем понадобится знать распределение температуры в этом простейшем случае с полем концентрации (4.11).

Решение задачи (4.3) — (4.8) при условии (4.11) ищем в виде

$$t_+(\xi, \tau) = A + B \Gamma^{-1}(1/3) \gamma(1/3, \xi^3/9L\tau), \quad (4.12)$$

$$t_- = A. \quad (4.13)$$

Непосредственная проверка показывает, что выражения (4.12), (4.13) при произвольных значениях констант  $A$  и  $B$  удовлетворяют уравнениям (4.3), (4.4). Фигурирующие в них неизвестные постоянные определяются из решения соответствующей линейной алгебраической системы, которая получается в результате подстановки (4.12), (4.13) в граничные условия (4.5) — (4.8). Окончательно получим

$$A = 1 + \sigma L^{1/3}, B = -\sigma L^{1/3}. \quad (4.14)$$

Формулы (4.12) — (4.14) показывают, что при полном поглощении реагента температура на поверхности и внутри частицы будет постоянна  $t_+(\xi = 0) = 1 + \sigma L^{1/3}$  и больше, чем вдали от нее:  $t_+(\infty) < t_+(0)$ .

Рассуждая аналогичным образом, можно показать, что в случае тепло- и массообмена цепочки сфер при условии полного поглощения реагирующего вещества на их поверхностях (подробности см. в разделе 3) распределение температуры вне (в тепловом пограничном слое) и внутри сфер задается формулами

$$t_{+,k}(\xi, \tau) = 1 + \sigma L^{1/3} - \sigma L^{1/3} \Gamma^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \gamma\left(\frac{1}{3}, \frac{\xi}{9L} [(k-1)\tau_0 + \tau(\eta)]^{-1}\right), \quad (4.15)$$

$$t_{-,k} = t_{-,1} = 1 + \sigma L^{1/3}, \quad (4.16)$$

где  $\tau_0 = \tau(\eta_*)$ , а  $\eta_* = \pi$  соответствует критической точке вытекания на поверхности сферы.

Из выражений (4.15), (4.16) видно, что температура внутри и на поверхности всех частиц постоянна и одинакова для всех сфер.

**5. Произвольная кинетика поверхностной химической реакции. Уравнение температуры на поверхности частицы.** Рассмотрим здесь задачу (4.1) — (4.9) о совместном конвективном теплообмене движущейся в жидкости реагирующей частицы при произвольной кинетике поверхностной химической реакции, т. е. считаем, что вид функции  $F$ , фигурирующей в граничном условии (4.9), произволен.

Решение задачи (4.1) — (4.9) аналогично [4—6] ищем в виде

$$c = c_* + \Lambda(\xi, \tau) * \Phi(\tau), t_+ = t_* + \Lambda(\xi L^{-1/3}, \tau) * \psi(\tau),$$

где оператор  $\Lambda(\xi\tau)$  определяется выражением

$$\Lambda(\xi, \tau) * u(\tau) \equiv \frac{2^{-1/3}}{\Gamma(2/3)} \int_0^\tau u(\lambda) (\tau - \lambda)^{-2/3} \exp\left\{-\frac{\xi^3}{9(\tau - \lambda)}\right\} d\lambda, \quad (5.1)$$

$$t_- = - \int_\Gamma \frac{\partial G}{\partial \xi} T ds \quad (t_-(\Gamma) = T(\tau)), \quad (5.2)$$

где  $c_*$  и  $t_*$  соответствуют решению задачи (4.11), (4.12) при условии полного поглощения вещества на поверхности частицы (4.10);  $G$  — функция Грина для уравнения Лапласа (4.4) в области  $-\xi_0 < \xi < 0$ , которая здесь считается известной (например,  $G$  хорошо известна для сферы и круга; в плоском случае для многих областей она успешно может определяться с помощью методов теории функций комплексного переменного [13]).

Функции (5.1), (5.2) удовлетворяют уравнениям (4.2) — (4.4) и граничным условиям (4.5), (4.6) для любых ядер  $\Phi$ ,  $\psi$  и  $T$  и в интервале  $0 < \tau < \tau_0$  обладают свойствами [14]

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \Lambda(\xi, \tau) * u(\tau) = \Lambda(0, \tau) * u(\tau), \quad (5.3)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \xi} [\Lambda(\xi, \tau) * u(\tau)] = -\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} u(\tau).$$

Подставляя выражения (5.1), (5.2) в граничные условия (4.7) — (4.9) с учетом свойств (5.3), приходим к системе интегральных уравнений для определения неизвестных функций  $\Phi(\tau)$ ,  $\psi(\tau)$  и  $T(\tau)$

$$1 + \sigma L^{1/3} + \Lambda(0) * \psi = T \quad (\Lambda(0) \equiv \Lambda(0, \tau)), \quad (5.4)$$

$$\Phi - \Gamma^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{\tau}\right)^{1/3} + \left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} k P^{-1/3} g^{-1}(\tau) F(\Lambda(0) * \Phi, 1 + \sigma L^{1/3} + \Lambda(0) * \psi) = 0, \quad (5.5)$$

$$\psi + \sigma L^{1/3} \Phi + (2/3)^{1/3} \delta P^{-1/3} L^{1/3} g^{-1}(\tau) Q * T = 0, \quad (5.6)$$

где  $Q * T \equiv [\partial t / \partial \xi]_{\xi=0}$ , а зависимость  $t_- = t_-(T)$  определена равенством (5.2).

Система интегральных уравнений (5.4) — (5.6) сводится к одному уравнению для температуры  $T$  на поверхности частицы

$$H(T) - \left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} k P^{-1/3} \Lambda(0) * \{g^{-1}(\tau) F(1 - H(T), T)\} = 0, \quad (5.7)$$

$$H(T) \equiv \frac{T - 1}{\sigma L^{1/3}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} \sigma^{-1} \delta P^{-1/3} \Lambda(0) * \{g^{-1}(\tau) Q * T\}.$$

В случае полного поглощения вещества на поверхности частицы при  $k \rightarrow \infty$  в силу свойства  $F(0, T) = 0$  должно иметь место предельное уравнение  $H(T) = 1$ , решение которого следует искать в виде  $T(\tau) = T_0 = \text{const}$ . Тогда в силу свойств оператора  $Q$  выполняется равенство  $Q * T_0 = 0$  (ввиду равенства  $t_- = T_0$  во всей области  $-\xi_0 < \xi < 0$  и  $\partial t_- / \partial \xi = 0$ ) и решение задается формулой  $T_0 = 1 + \sigma L^{1/3}$ , что совпадает с полученным ранее выражением (4.12) при  $\xi = 0$ .

В дальнейшем ограничимся анализом предельного случая малой теплопроводности частицы  $\delta(P/L)^{1/3} \ll 1$ . Это соответствует уравнению для поверхностной температуры (5.7) при  $H(T) \approx \sigma^{-1} L^{-1/3} (T - 1)$ .

Учитывая соотношения

$$C = \Lambda(0) * \Phi, T = 1 + \sigma L^{1/3} + \Lambda(0) * \psi, (C = c(\xi = 0)),$$

$$j_c = (\partial c / \partial \xi)_{\xi=0} = P^{1/3} g(\tau) [3^{1/3} \Gamma^{-1}(1/3) \tau^{-1/3} - (3/2)^{1/3} \Phi(\tau)],$$

$$j_T = (\partial t_+ / \partial \xi)_{\xi=0} = P^{1/3} g(\tau) [-\sigma 3^{1/3} \Gamma^{-1}(1/3) \tau^{-1/3} - (3/2)^{1/3} L^{-1/3} \psi(\tau)], \quad (5.8)$$

получаем интегральные уравнения для определения поверхностной концентрации  $C$  и локального диффузионного потока  $j_c$  на частицу

$$C = 1 - (2/3)^{1/3} k P^{-1/3} \Lambda(0) * \{g^{-1}(\tau) F(C, 1 + \sigma L^{1/3} - \sigma L^{1/3} C)\} = 0, \quad (5.9)$$

$$j_c = k F(1 - z(j_c), 1 + \sigma L^{1/3} z(j_c)),$$

$$z(j_c) = (2/3)^{1/3} P^{-1/3} \Lambda(0) * \{g^{-1}(\tau) j_c\}.$$

Поверхностная температура  $T$  и локальный тепловой поток  $j_T$  выражаются через решения уравнений (5.9) следующим образом:

$$T = 1 + \sigma L^{1/3} - \sigma L^{1/3} C, \quad j_T = -\sigma j_c. \quad (5.10)$$

Кроме того, уравнение для поверхностной концентрации (5.9) может быть записано в эквивалентном виде

$$g(\tau) \Lambda^{-1}(0) * (1 - C) = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} k P^{1/3} F(C, 1 + \sigma L^{1/3} - \sigma L^{1/3} C), \quad (5.11)$$

$$\Lambda^{-1}(0) * u \equiv \frac{2^{1/3}}{\Gamma(1/3)} \frac{d}{d\tau} \int_0^\tau u(\lambda) (\tau - \lambda)^{-1/3} d\lambda, \quad (\Lambda^{-1}(0) * [\Lambda(0) * u] \equiv u).$$

Уравнения типа (5.9), (5.11) неоднократно встречались ранее [1, 2, 4—6, 8], и алгоритм их численного решения содержится, например, в работах [1, 2, 15]. Из формулы (5.10) видно, что если поверхностная концентрация реагента монотонно уменьшается с увеличением расстояния вдоль поверхности частицы от критической точки натекания (с ростом параметра  $\tau$ ), то поверхностная температура монотонно возрастает таким образом, что линейная комбинация  $C$  и  $T$  остается постоянной.

Из уравнений (5.9), (5.11) аналогично [4—6] можно показать, что поверхностная концентрация в передней критической точке тела ( $\tau = 0$ ) определяется из трансцендентного уравнения

$$j_c(0) (1 - C) = k F(C, 1 + \sigma L^{1/3} - \sigma L^{1/3} C),$$

$$j_c(0) = \frac{3^{1/3}}{\Gamma(1/3)} P^{1/3} \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[ \frac{f^{1/2}(\eta)}{\tau^{1/3}(\eta)} \right], \quad (5.12)$$

где  $j_c(0)$  — локальный диффузионный поток в передней критической точке тела в случае предельного (диффузионного) режима реакции при  $k = \infty$  [3].

Из уравнения (5.12) видно, что концентрация и температура в передней критической точке, вообще говоря, отлична от концентрации в натекающем потоке; при этом в зависимости от вида функции  $F$  может существовать несколько режимов реакции. При  $F = F(C)$  уравнения (5.9), (5.12) совпадают с [4—6].

Авторы благодарят Ю. П. Гупало и Ю. С. Рязанцева за полезное обсуждение.

Институт проблем механики  
АН СССР,  
Москва

Поступила в редакцию  
17/VII 1980

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Chambre P. L., Acrivos A. On chemical surface reactions in laminar boundary layer flows.— J. Appl. Phys., 1956, v. 27, N 11.
2. Acrivos A., Chambre P. L. Laminar boundary layer flows with surface reactions.— Ind. Engng Chem. Fundamentals, 1957, v. 49, N 6.
3. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959.

4. Полянин А. Д., Сергеев Ю. А. О диффузии к поглощающей частице при смешанной кинетике.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 4.
5. Полянин А. Д., Сергеев Ю. А. Конвективная диффузия к частице в жидкости при нелинейной кинетике.— ПММ, 1976, т. 43, вып. 1.
6. Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С., Сергеев Ю. А. Конвективная диффузия к частице при нелинейной кинетике в случае трехмерного обтекания вязкой жидкостью.— Докл. АН СССР, 1979, т. 245, № 3.
7. Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С., Сергеев Ю. А. Конвективная диффузия к твердой частице в потоке газа при нелинейной кинетике гетерогенной химической реакции.— Докл. АН СССР, 1977, т. 237, № 1.
8. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1967.
9. Броунштейн Б. И., Фишбейн Г. А. Гидродинамика, массо- и теплообмен в дисперсных системах. Л.: Химия, 1977.
10. Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С., Чалюк А. Т. О поле температур, возникающем при движении реагирующей сферы при малых конечных числах Пекле и Рейнольдса.— ПМТФ, 1972, № 2.
11. Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С. О массообмене частиц, расположенных на оси потока, при больших числах Пекле.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 2.
12. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
13. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1972.
14. Sutton W. G. L. On the equation of diffusion in a turbulent medium.— Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1943, v. 182, N 988.
15. Агачев Ю. Р., Леонов А. И. К приближенному решению интегральных уравнений со слабой особенностью.— Изв. ВУЗов. Математика, 1979, № 7.

Н. М. РАСТОРГУЕВА, Н. А. РУБЦОВ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПОЛУСФЕРИЧЕСКИЕ  
ИЗЛУЧАТЕЛЬНЫЕ СПОСОБНОСТИ КВАРЦА  
МАРОК КИ, КВ И КУ  
В ОБЛАСТИ ТЕМПЕРАТУР 110—330 К

Кварцевое стекло обладает комплексом таких ценных физико-химических свойств, как огнеупорность, термостойкость, кислотоупорность, значительная диэлектрическая прочность, прозрачность в широком диапазоне ультрафиолетовых, видимых, инфракрасных длин волн и радиочастот, высокое удельное электросопротивление. Эти свойства определяют широкое использование материала в прецизионном приборостроении, светотехнике, металлургии, авиационной технике, в атомной энергетике и, наконец, во многих областях криогенной техники. При низких температурах кварцевые стекла применяются для изготовления прозрачных элементов летательных аппаратов (смотровые люки, защитные экраны), для оболочек интенсивных источников света, стекловолокон и оптических деталей различных приборов. Благодаря малому коэффициенту термического расширения материал оказывает значительное сопротивление тепловым ударам.

Использование кварца при низких температурах связано с определением оптических свойств материала и, в частности, с изучением интегральных полусферических излучательных способностей ( $\epsilon$ ) при  $T < 300$  К. Известные результаты исследований кварцевых стекол относятся в основном к спектральным величинам, изучаемым в области температур 400 К и выше [1—4].

В работе [5] рассчитаны интегральные нормальные ( $\epsilon_n$ ) и полусферические излучательные способности стекол КИ и КСГ в широком интервале толщин при температурах 295, 673, 873 и 1073 К. Для определения названных свойств привлекались оптические константы в области спектра от 0,6 до 200 мкм. Вычисление указанных характеристик для более низких температур связано с необходимостью расширения диапазона измерений в длинноволновой области спектра. Эксперимент здесь выгодно отличается от расчетов возможностью получить результаты без привлечения косвенной дополнительной информации, вытекающей также из опыта.

В литературе опубликованы данные двух измерений при низких температурах. Значение  $\epsilon$  плавленого кварца при  $T = 70—310$  К определялось методом регулярного теплового режима [6] с привлечением экспериментальных результатов по теплоемкости материала; оптические характеристики кварца не приводятся.  $\epsilon_n$  кварцевых образцов при температуре  $T = 100—1000$  К [7] исследовалось с ошибкой измерения в 10—12%; метод неизвестен.

В настоящей работе  $\epsilon$  кварцевых стекол различных марок определялось калориметрическим способом с применением расчетной методики для полупрозрачных материалов, изложенной в [8]. Для определения  $\epsilon$  ока-

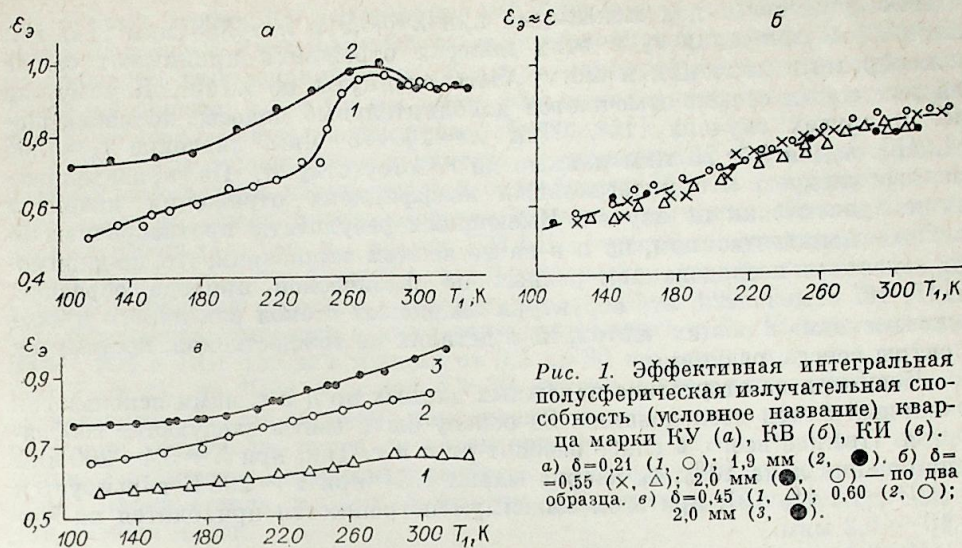


Рис. 1. Эффективная интегральная полусферическая излучательная способность (условное название) кварца марки КУ (а), КВ (б), КИ (в). а)  $\delta = 0,21$  (1,  $\circ$ ); 1,9 мм (2,  $\bullet$ ). б)  $\delta = 0,55$  (X,  $\triangle$ ); 2,0 мм ( $\bullet$ ,  $\circ$ ) — по два образца. в)  $\delta = 0,45$  (1,  $\triangle$ ); 0,60 (2,  $\circ$ ); 2,0 мм (3,  $\bullet$ ).

залось достаточным тех немногочисленных сведений по оптическим свойствам материала, которые представлены сейчас в литературе, поскольку такое привлечение носило качественный характер.

Образцы диаметром 20 мм с оптической обработкой поверхностей крепились к золоченому нагревателю согласно [8]. Давление в установке поддерживалось равным  $2,7 \cdot 10^{-5}$  Па, температуры измерялись манганин-константановыми термопарами диаметром 50 мкм.

На рис. 1 приводятся экспериментальные значения излучательных способностей  $\epsilon_0$ , полученные в предположении непрозрачности материала. Оказалось, что кварц марки КУ в области  $T = 295—330$  К и кварц КВ при  $T = 110—330$  К для рассматриваемых толщин непрозрачны, так как  $\epsilon_0$  одинаковы для всех образцов в пределах погрешности эксперимента ( $\epsilon_0 = \epsilon$ ). Пластины из кварца КИ при всех  $T$  и кварца КУ при  $T = 110—295$  К полупрозрачны и их  $\epsilon$  зависят от состава стекла, температуры и толщины слоя.

Для приближенного вычисления  $\epsilon$  в [8] предполагалось, что коэффициент отражения материала мал:  $r \rightarrow 0$ , а показатель преломления  $n \rightarrow 1$ . Для кварца эти условия выполняются не точно. Определить меру приближения затруднительно в силу недостаточной изученности материала. Остановимся подробнее на принятых при этом допущениях.

В литературе приводятся следующие сведения о спектральном показателе преломления ( $n_\lambda$ ). В интервале длин волн 0,3—7 мкм  $n_\lambda$  аппроксимируется линейной зависимостью и принимает значения от 1,45 до 1,33 [2]. По другим источникам [9]  $n_\lambda \approx 1$  при  $\lambda = 4,3—7$  мкм. В области 7—11 мкм у кварца отмечается полоса поглощения валентных Si—O—Si колебаний. На этом участке  $n_\lambda$  изменяется от 1,05 до 1,80, проходя через несколько минимумов, равных 0,40, и максимум в 2,80 [10]. Согласно [11], экстремальные значения  $n_\lambda$  в этой полосе составляют 0,23 и 2,4. В области  $\lambda = 11—17$  мкм среднее значение  $n_\lambda$  порядка 1,72 и  $n \sim 1$  в диапазоне 17—20 мкм [12]. Длинноволновая часть спектра исследована слабее, среднее значение  $n_\lambda = 1,93$  при  $\lambda = 20—400$  мкм [12, 13]. Неоднозначность сведений о  $n_\lambda$  кварца в наиболее изученной области спектра и слабо исследованная зависимость  $n_\lambda$  от  $T$  свидетельствуют о том, что интегральный показатель преломления ( $n$ ) кварца при низких  $T$  не определен в количественном отношении.

Спектральная отражательная способность ( $r_\lambda$ ) плавленого кварца в области  $\lambda = 0,2—2,6$  мкм меняется от 0,06 до 0,01 [7]. На участке 7,6—

25 мкм существует два максимума при  $\lambda = 8,9$  и  $\lambda = 20,8$  мкм [14, 15]. Абсолютные значения  $r_\lambda$  в этих полосах отражения принимают самые разнообразные значения и могут быть сдвинуты по  $\lambda$  [15]. К тому же для некоторых стекол отмечаются дополнительные полосы, не наблюдаемые в других случаях [15]. При  $\lambda = 14-18$  мкм значение  $r_\lambda \leq 0,04$  [14, 15], а для  $\lambda > 25$  мкм данные по  $r_\lambda$  отсутствуют. Из приведенного анализа следует, что интегральный коэффициент отражения кварца также практически не изучен. Имеющиеся результаты противоречивы не только в количественном, но и в качественном отношении, что, по-видимому, связано с исследованием разных по физической природе образцов. В [15, 16] отмечается, что структура кварцевых стекол различного производства сходна в общих чертах, но в деталях не тождественна, поэтому их спектры всегда различны.

Несмотря на отсутствие надежных данных по  $n$  и  $r$ , нами использован названный метод исследования. За основу были взяты следующие соображения. Прежде всего,  $\epsilon$  слабо зависит от  $n$  и  $r$ . Так, при  $\lambda = 3,4-200$  мкм и изменение  $n$  на 10%,  $\epsilon_n$  кварца марки КСГ при  $T = 295$  К варьируется от 0,01 до 1,1% [5], при этом максимум погрешности приходится на  $\lambda = 10-19,2$  мкм.

Коэффициенты отражения при изменении  $n$  от 1 до 1,4 принимают значения  $r = 0$  и  $r = 0,028$  соответственно в предположении, что показатель поглощения материала  $\kappa = 0$ . Это условие для кварца осуществляется всюду, за исключением полосы  $\lambda = 7-10,75$  мкм, где среднее значение  $\kappa = 0,8973$ , а среднее значение  $n = 1,27$  [10], с учетом которых  $r = 0,147$ . При этом отклонение от точного решения для  $\epsilon_x$  кварца КИ, с  $\delta = 2$  мм при  $T = 316$  К возрастает от 2,5 ( $r = 0,028$ ) до 11,4% ( $r = 0,147$ ). Поскольку значения  $\epsilon_x$  кварца, с которыми возможно сопоставление, имеют погрешности от 8,8 до 12% и выше [6,17], то такая ошибка вполне допустима. Учет рассмотренных обстоятельств позволяет определить  $\epsilon$  в предположении  $r \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow 1$  и  $\kappa = 0$ .

$\epsilon$  кварца марок КИ и КУ (рис. 2) и кварца КВ (см. рис. 1, б) значительно различаются между собой, что объясняется, по-видимому, неоднородностью оптических свойств исследованных стекол в области  $\lambda \gg \gg 4,5$  мкм. Отдельные данные о пропускательной и отражательной способности кварца в длинноволновом участке спектра относятся к зарубежным образцам [18]. О том, насколько указанная область спектра может оказаться неисследованной, можно судить по отсутствию определенных закономерностей в изменении пропускания ( $\tau$ ) кварцев даже в наиболее изученном коротковолновом диапазоне. Так, для четырех «идентичных» образцов, аналогичных кварцу КУ [16], получены существенно различные результаты по  $\tau$ , при этом повторные процессы очистки поверхностей образцов не изменили первоначальных данных. Обнаружено также [19],

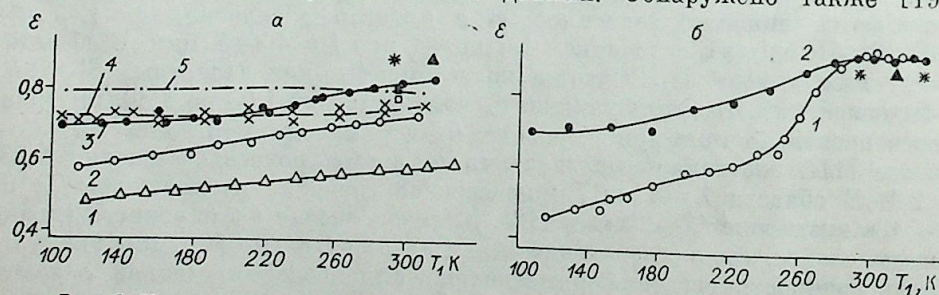


Рис. 2. Интегральная полусферическая излучательная способность кварца. а) Кварц марки КИ (1,  $\Delta$ , 2,  $\circ$ , 3,  $\bullet$ ,  $\blacksquare$ ,  $\square$ ); кварц марки Корнинг 7940 (5); марки неизвестны (4,  $\times$ ,  $\triangle$ );  $\epsilon$  усреднено по маркам (ГОСТ 15130-79) (\*);  $\delta = 0,45$  мм (1,  $\Delta$ ); 0,60 (2,  $\circ$ ); 2,0 (3,  $\bullet$ ); 3,3 и 6,4 [6] (4,  $\times$ ); 12,7 [7] (5); 2,0 [5] ( $\blacksquare$ ); 0,50 [5] ( $\square$ );  $\delta$  неизвестна [21] ( $\triangle$ ). б) кварц марки КУ (1,  $\Delta$ , 2,  $\circ$ , 3,  $\bullet$ ,  $\blacksquare$ ,  $\square$ ); кварц марки Корнинг 7940 (5); марки неизвестны (4,  $\times$ ,  $\triangle$ );  $\epsilon$  усреднено по маркам (ГОСТ 15130-79) (\*);  $\delta = 0,21$  (1,  $\Delta$ ); 0,2 (2,  $\circ$ ); 1,90 (3,  $\bullet$ ); 10,0 мм (\*);  $\delta$  неизвестна [21] ( $\triangle$ ).

что  $\tau$  слоев стекла КВ толщиной  $\delta = 0,7$  мм для  $\lambda = 250-400$  нм ниже, чем у образцов с  $\delta = 0,9$  мм. Вблизи коротковолновой границы ( $\lambda < 250$  нм) соотношение пропусканий этих образцов меняется на противоположное. Здесь же образец с  $\delta = 1,9$  мм имел большую пропускательную способность по сравнению с предыдущими образцами.

Результаты исследования характера температурной зависимости спектральной нормальной излучательной способности ( $\delta_{\lambda n}$ ) и  $\epsilon$  кварцев также разнообразны. Здесь прослеживается влияние толщины образца на конечный результат. Так,  $\epsilon_{\lambda n}$  кварца КВ [4] возрастает с увеличением  $T$  от 20 до  $800^\circ$  С для  $\delta = 10$  мм, а в [3] отмечается, что  $\epsilon_{\lambda n}$  той же марки кварца снижается с ростом температуры от 300 до  $900^\circ$  С для  $\delta = 2$  мм. Оба результата относятся к диапазону длин волн  $\lambda = 3-12$  мкм.  $\epsilon$  стекол марок КИ и КСГ [5] для толщин от 0,5 до 30 мм снижается при изменении  $T$  от 295 до 1073 К, а для  $\delta > 30$  мм наблюдается обратный ход этой зависимости. Таким образом, понятие оптически тонкого слоя зависит как от марки материала, так и от характеристик  $\epsilon_{\lambda n}$  или  $\epsilon$ . Так как значительные отличия в оптических свойствах наблюдаются при рассмотрении одной марки стекла, то допустимо, что аналогичная картина сохранится для разных марок.

В целом  $\epsilon$  исследованных кварцевых стекол уменьшается с понижением  $T$ , от 330 до 110 К, что, вероятно, объясняется значительной пропускательной способностью тонких слоев кварца при  $\lambda = 40-500$  мкм [18, 20]. Так, слои с  $\delta = 4,55$  мм пропускают более 40% в области  $\lambda = 100-500$  мкм [18], а при  $\delta = 0,2$  мм пропускательная способность возрастает от 5 до 70% для  $\lambda = 40-200$  мкм [20]. Поскольку вклад области  $\lambda = 24,4-200$  мкм в  $\epsilon$  составляет 20% даже при  $T = 295$  К [5], то при низких значениях  $T$  роль длинноволнового диапазона возрастает.

При сопоставлении  $\epsilon$  кварца КИ толщиной 2 мм с опытными данными [6] обнаруживается совпадение в пределах 3% для  $T = 105-240$  К. В [6] изучались более толстые образцы, поэтому значительное снижение  $\epsilon$  возможно при условии идентичности материалов. В [7] исследовались образцы с  $\delta$ , превышающими 2 мм. По-видимому, этим может объясняться более высокий уровень кривой 5 по сравнению с кривой 3 (рис. 2, а) при  $T = 110-260$  К. Однако для  $T = 260-316$  К эти кривые сближаются, что может свидетельствовать о существовании отличий в оптических свойствах материалов вблизи полосы поглощения 8,9 мкм. Подобное сравнение может оказаться неправомерным, если при увеличении  $\delta$  меняется характер зависимости  $\epsilon$  от  $T$ . При 295 К возможно сравнение с результатами, полученными для аналогичного образца в [5] (различие составляет 2%).

$\epsilon$  кварца КИ резко снижается с уменьшением толщины слоя. Здесь расхождение с расчетами [5], проведенными для  $\delta = 0,5$  мм, при  $T = 295$  К порядка 9,5 и 37% при сравнении с кривыми 2 и 1 (см. рис. 2, а). Таким образом, отклонение наших экспериментальных результатов от [5] увеличивается по мере уменьшения толщины образца. Рассмотрим наиболее вероятные причины этого явления. Прежде всего следует отметить, что точность измерения на калориметрической установке возрастает по мере увеличения  $T$  [8] и снижения  $\delta$ . Удовлетворительное согласование для кварца КИ с  $\delta = 2$  мм с литературными данными наблюдается при всех  $T$ , следовательно, различия в  $\epsilon$  для тонких образцов могут быть вызваны приближениями, принятыми в настоящей расчетной методике, усреднением экспериментальных результатов по оптическим свойствам кварцев, использованным в [5], а также возможной неадекватностью сравниваемых материалов. Вопрос о согласовании значений  $\epsilon$  тонких слоев кварца, найденных различными способами в области  $T = 270-320$  К, осложняется следующими причинами. В рассматриваемом температурном диапазоне основная доля излучения ( $\sim 80\%$ ) приходится на  $\eta = 4,8-24,4$  мкм [5], а максимум функции Планка соответствует  $\eta = 8,8-$

$\lambda$ , мкм	$n_\lambda$	$\kappa_\lambda$	$\kappa_\lambda^2 + 1$	$n_\lambda^2$	$r'_\lambda = \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}$ , %	$r''_\lambda = \frac{(n-1)^2 + \kappa^2}{(n+1)^2 + \kappa^2}$ , %
7,00*	1,05	0,05	1,0025	1,1025	0,06	0,12
7,75	0,55	0,11	1,0121	0,3025	8,43	8,89
8,85	0,40	1,56	3,4336	0,1600	18,37	64,27
9,00	0,80	2,20	5,8400	0,6400	1,23	60,40
9,25	2,20	2,42	6,8564	4,8400	14,06	45,33
10,00*	2,30	0,46	1,2116	5,2900	15,52	17,13
10,75*	1,80	0,27	1,0729	3,2400	8,16	9,01

Примечание. Звездочками отмечены  $\lambda$ , для которых  $\kappa_\lambda^2 + 1 < n_\lambda^2$ .

10,7 мкм. Область 7—11 мкм принадлежит к основной полосе поглощения, где существуют многочисленные переходы по абсолютным значениям  $n_\lambda$  и показатель поглощения  $\kappa_\lambda \neq 0$ , поэтому расчеты  $r_\lambda$  следует производить с учетом  $\kappa_\lambda$  [10]. Это приводит к большим значениям  $r_\lambda$ . Кроме того, при выполнении неравенства  $\kappa_\lambda^2 + 1 < n_\lambda^2$  увеличение  $n_\lambda$  сопровождается увеличением  $r_\lambda$ , а при  $\kappa_\lambda^2 + 1 > n_\lambda^2$  рост  $n_\lambda$  ведет к снижению  $r_\lambda$ . Оба случая наблюдаются для основной полосы поглощения. Сравнительные расчеты для  $r_\lambda$ , выполненные с помощью [10], помещены в таблицу.

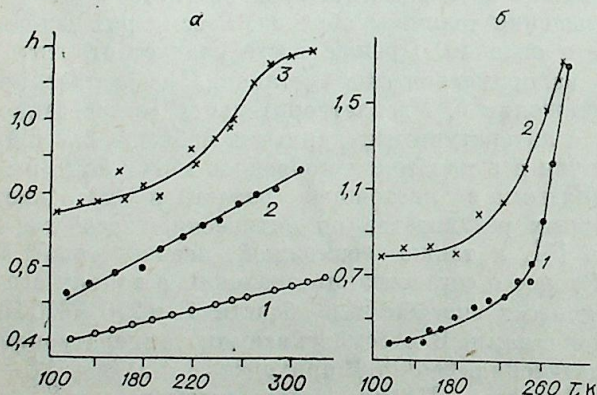
Таким образом, сложная, непрерывно меняющаяся связь между  $n$ ,  $r$  и  $\kappa$  на одном из основных участков недостаточно изученного спектра свидетельствуют о трудностях теоретических оценок  $\epsilon$ . В данном эксперименте погрешность в определении  $\epsilon$  может только снижаться с уменьшением толщины слоя, поэтому расхождения с [5] могут быть вызваны в основном исследованием разных по структуре стекол. Строгий учет действительных значений  $n$  и  $r$  может привести к дальнейшему снижению  $\epsilon$ . Следует также отметить, что кривая 1 для  $\epsilon_0$  (см. рис. 1, в), полученная из эксперимента (без пересчета по методике), расположена значительно ниже точки взятой для сравнения из [5].

Вследствие отсутствия данных о  $\epsilon$  для кварца КУ, на рис. 2, б приводятся две точки, рассчитанные по усредненным оптическим свойствам (расхождение составляет 5%). Нет сведений и о значениях  $\epsilon$  кварца КВ. При сопоставлении между собой всех полученных результатов отмечается совпадение излучательных способностей кварцев КИ и КУ с  $\delta = 2$  мм при  $T = 110-180$  К, КИ и КВ с  $\delta = 2$  мм при  $T = 180-330$  К, КИ ( $\delta = 0,6$  мм) и КВ при  $T = 110-200$  К. Совсем не обнаружено общих закономерностей в свойствах КУ и КВ. Объяснить подобные результаты не представляется возможным, так как известные различия между мар-

ками стекол находятся в области длин волн, практически не участвующих в формировании  $\epsilon$  для рассматриваемого диапазона температур.

Рис. 3а, б. Оптическая толщина ( $h$ ) кварцевых стекол в зависимости от  $T_1$ .

а) Кварц марки КИ,  $\delta = 0,45$  (1, ○); 0,60 (2, ●); 2,0 мм (3, ×); б) кварц марки КУ,  $\delta = 0,21$  (1, ●); 1,9 мм (2, ×).



В процессе определения  $\epsilon$  уточнялись значения оптических толщин ( $h$ ) кварцевых стекол, температурный ход которых приводится на рис. 3. Наблюдается линейный рост  $h$  от  $T_1$  для тонких слоев кварца КИ. Для образцов КИ с  $\delta = 2,0$  мм и всех слоев КУ эта зависимость носит более сложный нелинейный характер, что, по-видимому, объясняется увеличением роли процессов внутреннего переотражения как по мере роста  $\delta$ , так и с изменением марки исследуемого материала. Линейная связь между  $h$  и  $T_1$  может быть использована для ускорения вычисления  $\epsilon$ . Для этого достаточно провести замеры и соответствующие расчеты для трех точек  $\epsilon$  при повышенных  $T$  (минимальная погрешность), построить график  $h$  от  $T_1$  и простым пересчетом определить  $K_3$  (экспоненциальные интегралы) и  $\epsilon$  [8]. Область, где подобное упрощение допустимо, находится предварительно, и в нашем случае лежит между кривыми 1 и 2 (см. рис. 3, а).

Возможные погрешности определения  $\epsilon$  найдены ранее в [8].

## ВЫВОДЫ

1. Используя простейшую калориметрическую технику и специальную расчетную методику, изложенную в [8], удалось приближенно оценить излучательную способность тонких кварцевых стекол различных марок в области 110—330 К. Показано, что процесс определения  $\epsilon$  значительно упрощается для случая линейной связи между  $h$  и  $T$ .
2. Результаты по  $\epsilon$  следует рассматривать в качестве определяющих только для исследованных материалов, поскольку структура каждого образца обуславливается его происхождением. Следовательно, достоверные заключения о  $\epsilon$  кварцевых стекол можно вынести только из экспериментов.
3. Обнаружено, что расхождения между экспериментальными и расчетными значениями  $\epsilon$  кварца КИ возрастают по мере снижения  $\delta$ , что, по-видимому, объясняется большим проявлением специфики материала в случае малых толщин.
4. Согласно косвенным оценкам (расчеты и сопоставления с имеющимися результатами), точность определения  $\epsilon$  в настоящей работе не хуже, чем в других методах. Однако явная простота всей методики в целом делает этот способ доступным в случае индивидуальной калибровки стекол, необходимой в точных расчетах. Данный подход может оказаться полезным и при исследовании широкого класса полимерных материалов, обладающих малыми значениями  $n$  и  $r$  и слабой зависимостью  $\tau$  от  $T$ .

Институт теплофизики  
СО АН СССР,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
12/III 1981

## ЛИТЕРАТУРА

1. Пухонин В. В., Чайкин А. С. Спектральная излучательная способность кристаллов LiF, CaF<sub>2</sub>, NaCl и плавленного кварца в диапазоне 2—25 мкм.— ЖПС, 1972, т. 16, вып. 1.
2. Мень А. А., Сеттарова З. С. Степень черноты кварцевого стекла.— ТВТ, 1972, т. 10, № 2.
3. Сеттарова З. С., Сергеев О. А. О спектральном коэффициенте излучения кварцевого стекла при высоких температурах.— В кн.: Теплофизические свойства твердых веществ. М.: Наука, 1971.
4. Безрукова Е. Н., Мень А. А., Сергеев О. А., Сеттарова З. С. Исследование характеристик переноса энергии в полупрозрачных материалах.— В кн.: Теплофизические свойства твердых веществ. М.: Наука, 1973.
5. Петров В. А., Степанов С. В. Радиационные характеристики кварцевых стекол. Интегральная излучательная способность.— ТВТ, 1975, т. 13, вып. 6.

6. Schleiger E. R. Measurement of total hemispherical emittance of transparent materials at low temperature.— *Appl. Optics*, 1967, v. 6, N 5.
7. Olson O. H., Shurin J. S., Morriss J. S.— *Report WADC, TR56-222*, 1958.
8. Расторгуева Н. М., Рубцов Н. А. Интегральные полусферические излучательные способности фторопласта-4 в области температур 125—320 К.— *Изв. СО АН СССР*, 1981, № 3. Сер. техн. наук. вып. 1.
9. Петров В. А., Степанов С. В. Радиационные характеристики кварцевых стекол. Спектральная излучательная способность.— *ТВТ*, 1975, т. 13, № 2.
10. Пришивалко А. П. Отражение света от поглощающих сред. Минск: Изд-во АН БССР, 1963.
11. Гирин О. П., Кондратьев Ю. Н., Раабен Э. Л. Оптические постоянные и спектральные микрохарактеристики стекол системы  $\text{Na}_2\text{O} - \text{SiO}_2$  в инфракрасной области спектра.— *Оптика и спектр.*, 1970, т. 29, вып. 4.
12. Попова С. И., Толстых Т. С., Воробьев В. Т. Оптические характеристики аморфного кварца в области  $1400-200 \text{ см}^{-1}$ .— *Оптика и спектр.*, 1972, т. 33, вып. 4.
13. Богенс Р. К., Жуков А. Г. Оптические постоянные плавленного кварца далекой инфракрасной области.— *ЖПС*, 1966, т. 4, вып. 1.
14. Структура и физико-химические свойства неорганических стекол/Под ред. А. Г. Власова, В. А. Флоринской. Л.: Химия, 1974.
15. Инфракрасные спектры неорганических стекол и кристаллов/Под ред. А. Г. Власова, В. А. Флоринской. Л.: Химия, 1972.
16. Edwards O. J. Optical transmittance of fused silica at elevated temperatures.— *J. Opt. Soc. America*, 1966, v. 56, N 10.
17. Латышев Л. Н., Петров В. А., Чеховский В. Я., Шестаков Е. Н. Излучательные свойства твердых материалов. М.: Энергия, 1974.
18. Lorenzelli M. V. Substances transparentes dans l'infrarouge lointain et leur application a la spectrometrie.— *J. de Physique et le Radium*, 1962, v. 23, N T-5.
19. Воробьев А. Н., Даниэль Е. В. К вопросу о температурных измерениях пропускания кварца в видимой и ультрафиолетовой областях спектра при нагреве до  $1100^\circ\text{C}$ .— *ЖПС*, 1970, т. 12, вып. 2.
20. Czerny M., Röder H. Fortschritte auf dem Geliete der Ultrarottechnik.— *In: Ergebnisse Der Exakten Naturwissenschaften*. Berlin, Julius Springer, 1938.
21. Спарроу Э. М., Сесс Р. Д. Теплообмен излучением. Л.: Энергия, 1971.

УДК 536.24.083

А. В. БАГИНСКИЙ

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ  
ПОЛУПРОЗРАЧНЫХ ВЕЩЕСТВ В ТОНКИХ СЛОЯХ.  
II. ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ ПЛОСКАЯ ТЕПЛОВАЯ ВОЛНА

В первой части настоящей работы [1] рассмотрен случай стационарного радиационно-кондуктивного теплообмена (РКТ) в оптически тонком плоском слое «серой» среды и получены соотношения вида  $\eta(\tau_0, N, \varepsilon) = (\lambda_{\text{эф}} - \lambda)/\lambda$ , позволяющие рассчитать молекулярную теплопроводность  $\lambda$  по измеренному значению  $\lambda_{\text{эф}}$  эффективной теплопроводности. Соответственно условие  $\eta \ll 1$  позволяет оценить параметры эксперимента, при которых  $\lambda_{\text{эф}}$  мало отличается от  $\lambda$ , т. е. эксперимент является прямым.

Однако возможность применения стационарной методики для прямых измерений теплопроводности ограничена сложностью изготовления образца необходимо малой толщины. Значительно более перспективен в этом смысле метод высокочастотных тепловых волн (ВЧТВ). В этом случае в результате быстрого затухания тепловой волны удается в массивном образце реализовать условия, характерные для теплообмена в оптически тонком слое. Таким образом, можно ожидать, что при соответствующем выборе частоты тепловой волны измеряемая в эксперименте величина эффективной теплопроводности  $\lambda_{\text{эф}}$  будет лишь незначительно отличаться от истинной теплопроводности  $\lambda$ . Экспериментальные результаты работы [2] подтверждают справедливость такого вывода.

В предположении, что температурное распределение в условиях ВЧТВ не слишком отличается от температурного распределения в непрозрачной среде, задача была рассмотрена С. Н. Кравчуном и Л. П. Филипповым [3]. В настоящей работе при решении задачи используется подход, предложенный в [1].

Рассмотрим задачу РКТ в полупространстве, ограниченном непрозрачной стенкой, температура на которой меняется по гармоническому закону

$$\frac{\partial^2 \Theta(\tau, t)}{\partial \tau^2} - 2N\Theta(\tau, t) + N \int_0^\infty \Theta(\xi, t) E_1(|\tau - \xi|) d\xi + (1 - \varepsilon)N \int_0^\infty \Theta(\xi, t) E_1 \times \\ \times (\tau + \xi) d\xi + \varepsilon N \Theta(0, t) E_2(\tau) = \frac{1}{\alpha^2 a} \frac{\partial \Theta(\tau, t)}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\Theta(0, t) = \Theta_0 \exp(-i\omega t), \quad (2)$$

$$\Theta(\infty) = 0. \quad (3)$$

Здесь  $a$  — температуропроводность;  $n, \alpha$  — показатель преломления и коэффициент поглощения;  $\tau = \alpha z$  — оптическая толщина;  $\varepsilon$  — степень черноты поверхности;  $T(\tau, t) = T_0 + \Theta(\tau, t)$  — температура;  $\sigma$  — постоянная Стефана-Больцмана;  $N = 8n^2\sigma T_0^3/\alpha\lambda$ ;  $E_n(x)$  — интегроэкспоненциальные функции [6].

Как отмечалось выше, в случае достаточно больших частот величина  $\Theta(\xi, t)$  отлична от нуля лишь в тонком пристенном слое  $\tau_0 \ll 1$ . Вследствие этого интегральные члены в (1) невелики, и в первом приближении ими можно пренебречь. Таким образом, в первом приближении процесс радиационно-кондуктивного теплообмена в условиях высокочастотной тепловой волны описывается простым дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial^2 \Theta(\tau, t)}{\partial \tau^2} - 2N\Theta(\tau, t) + \varepsilon N\Theta(0, t) E_2(\tau) = \frac{1}{\alpha^2 a} \frac{\partial \Theta(\tau, t)}{\partial t}. \quad (4)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее граничным условиям (2), (3), имеет вид

$$\Theta(\tau, t) = A_0 \exp(\kappa\tau - i\omega t) + \frac{\Theta_0 \varepsilon N}{\kappa^2} \left[ E_2(\tau) - \frac{\exp(\kappa\tau) Ei(-\tau(1+\kappa)) - \exp(-\kappa\tau) Ei(-\tau(1-\kappa))}{2\kappa} \right] \exp(-i\omega t), \quad (5)$$

где  $\kappa = \sqrt{2N - i\omega/\alpha^2 a} = -k_1 + ik_0$ ,  $k_1 = \sqrt{N + \sqrt{N^2 + (\omega/2\alpha^2 a)^2}}$ ,  
 $k_0 = \sqrt{-N + \sqrt{N^2 + (\omega/2\alpha^2 a)^2}}$ ,  $A_0 = \Theta_0 \left[ 1 - \frac{\varepsilon N}{\kappa^2} \left( 1 - \frac{1}{2\kappa} \ln \frac{1+\kappa}{1-\kappa} \right) \right]$ ,

$Ei(-x)$  — интегральноэкспоненциальная функция [6].

Сравнение приближенного решения (5) с функцией

$$\Theta^*(z, t) = \Theta_0 \exp \left\{ -\sqrt{\frac{\omega}{2a}} z + i \left[ \sqrt{\frac{\omega}{2a}} z - \omega t \right] \right\}, \quad (6)$$

описывающей профиль тепловой волны в непрозрачной среде, позволяет сделать некоторые качественные выводы о степени влияния излучения на процесс распространения тепловой волны в полупрозрачной среде.

В частности, в предельном случае  $N \gg \omega/2\alpha^2 a$  основную роль в теплообмене играет теплопередача излучением. Температурное распределение при этом описывается осциллирующей функцией, и тепловая волна в полупрозрачной среде распространяться не может ( $K_0 \approx 0$ ).

Напротив, в случае

$$N \ll \omega/\alpha^2 a \quad (7)$$

радиационный теплообмен приводит лишь к незначительной деформации профиля тепловой волны в полупрозрачной среде относительно профиля тепловой волны в непрозрачной среде, что указывает на подавляющее преобладание кондуктивного механизма теплопередачи над радиационным.

Количественные оценки могут быть получены из сравнения потоков тепла в полупрозрачной и непрозрачной средах по методу работы [1]. Выражения для кондуктивной  $q_c$  и радиационной  $q_r$  компонент теплового потока на стенке  $\tau = 0$  имеют вид

$$q_c(0) = \alpha \lambda \Theta_0 \left[ \kappa - \frac{\varepsilon N}{\kappa} + \frac{\varepsilon N}{\kappa^2} \ln(1-\kappa) \right], \quad (8)$$

$$q_r(0) = 4n^2 \sigma T_0^3 \Theta_0 \varepsilon \left[ 1 - 2 \int_0^\infty \frac{\Theta(\tau)}{\Theta_0} E_2(\tau) d\tau \right]. \quad (9)$$

Будем считать выполненным условие (7). Тогда

$$q_c(0) \approx \alpha \lambda \Theta_0 (1-i) b_0 \left\{ 1 + x \left[ i \frac{1-\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon(1-i)}{4b_0} \ln \sqrt{1+2b_0+2b_0^2} - \frac{\varepsilon}{4b_0} \operatorname{arctg} \frac{b_0}{1+b_0} (1+i) \right] \right\},$$

$$q_r(0) \approx 4\varepsilon n^2 \sigma T_0^3 \Theta_0 \left\{ 1 - \frac{2}{b_0} \left[ 1 + i + \frac{1-i}{2} \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2} \ln \sqrt{1+2b_0+2b_0^2} x - \varepsilon \left( 1 - \frac{4}{3} \ln 2 \right) x \right) \right] \right\},$$

где  $b_0 = \sqrt{\omega/2\alpha^2 a}$ ,  $x = N/b_0^2$ .

Заметим, что при  $\varepsilon = 1$  («черная» стенка) кондуктивный поток  $q_c(0)$  с точностью до членов  $b_0^{-2}$  совпадает с потоком  $q_0 = \lambda \Theta_0 (1-i) \sqrt{\omega/2a} = \alpha \lambda \Theta_0 (1-i) b_0$  в непрозрачной среде с теми же теплофизическими параметрами.

Введем, как это было сделано в [1], величины

$$\eta_1 = \frac{q_c(0) - q_0}{q_0} \quad \text{и} \quad \eta_0 = \frac{q_r(0)}{q_0},$$

характеризующие отличие кондуктивных потоков в полупрозрачной и непрозрачной средах и относительную величину радиационного потока. С точки зрения прямого эксперимента модули этих величин определяют погрешность замены реального температурного распределения в полупрозрачной среде температурным распределением (6) в непрозрачной среде и погрешность учета радиационных потерь с поверхности датчика. Модуль  $|\eta_1 + \eta_0|$  дает значение общей погрешности.

С точностью до  $b_0^{-2}$  получим

$$|\eta_1| = \frac{(1-\varepsilon)N}{2} \left( \frac{\omega}{2\alpha^2 a} \right)^{-1}, \quad (10)$$

$$|\eta_0| = \frac{\varepsilon N}{2} \left( \frac{\omega}{2\alpha^2 a} \right)^{-1/2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{2\alpha^2 a} \right)^{-1/2} \right], \quad (11)$$

$$|\eta_1 + \eta_0| = \frac{\varepsilon N}{2} \left( \frac{\omega}{2\alpha^2 a} \right)^{-1/2} + \frac{N}{2} \left( \frac{1}{2} - \varepsilon \right) \left( \frac{\omega}{2\alpha^2 a} \right)^{-1}. \quad (12)$$

Область применимости соотношений (10) — (12) можно оценить из сравнения их с соответствующими выражениями, полученными в [1]. Так, если в качестве характерного размера выбрать длину  $\tau_0 = (\omega/2\alpha^2 a)^{-1/2}$ , на которой тепловая волна затухает в  $l = 2,728 \dots$  раз, то выражения (10) — (12) совпадут с соответствующими результатами в [1]. Исходя из этого, с учетом анализа, представленного в [1], можно сделать вывод, что расчет по формулам (10) — (12) не будет приводить к заметным ошибкам при  $\tau_0 = (\omega/2\alpha^2 a)^{-1/2} \leq 0,3$  или при  $\omega \geq 20\alpha^2 a$ . Как показывают оценки, эти условия хорошо выполняются в диапазоне рабочих частот метода ВЧТВ практически для любых веществ.

Вопросы, связанные с возможностью технической реализации метода ВЧТВ, достаточно подробно рассмотрены в монографии Л. П. Филиппова [4]. Там же рассмотрены и некоторые аспекты задачи комплексного исследования свойств веществ методом ВЧТВ и представлен один из возможных вариантов измерительной схемы метода. Следует отметить, что метод ВЧТВ фактически является обращением известного модуляционно-го метода измерения теплоемкости металлов. Поэтому некоторые схемные решения, используемые в установках для измерения теплоемкости модуляционным методом [5], могут быть с незначительными изменениями применимы и в ВЧТВ экспериментах. В частности, одна из таких схем была использована в работе [2].

Институт теплофизики  
СО АН СССР,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
10/V 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Багинский А. В. Об исследовании теплопроводности полупрозрачных веществ в тонких слоях. I. Стационарный теплообмен в плоском слое.— Изв. СО АН СССР, 1981, № 8, Сер. техн. наук, вып. 2.
2. Vagchenko A. A. Measurement of Thermal Properties of Liquids by the Method of Radial Temperature Waves.— In: Thermal Conductivity 15. N. Y.: Plenum Press, 1977.
3. Кравчун С. Н., Филиппов Л. П. О радиационно-кондуктивном переносе тепла в режиме температурных волн.— ИФЖ, 1978, т. 35, № 6.
4. Филиппов Л. П. Исследование теплопроводности жидкостей. М.: МГУ, 1970.
5. Крафтмахер Я. А. Теплоемкость при высоких температурах и образование вакансий в тугоплавких металлах.— В кн.: Исследования при высоких температурах. Новосибирск, 1966.
6. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1977.

ИЗВЕСТИЯ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ  
АКАДЕМИИ НАУК СССР

№ 13, вып. 3

СЕРИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

1981

УДК 621.313.33+62-713.4

В. А. СТАРОВОЙТОВ

ОХЛАЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН  
С ПОМОЩЬЮ ФЕРРОМАГНИТНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Стремление снизить массу и габариты электрических машин при одновременном наращивании их единичной мощности нередко противоречит возможностям систем охлаждения. Наиболее эффективно для машин как большой, так и малой мощности жидкостное и испарительное охлаждение [1, 2]. Каждая из используемых систем охлаждения реализуется с помощью различного рода нагнетательных элементов и специальных устройств, иногда достаточно сложных, поэтому представляет определенный интерес рассмотреть систему охлаждения с помощью ферромагнитной жидкости, предполагающую отсутствие указанных элементов и впервые предложенную в [3].

Ферромагнитные жидкости представляют собой в общем случае двухфазную композицию из ферро- или ферричастиц размерами порядка  $30 \div 200 \text{ \AA}$  и жидкости-носителя, как правило непроводящей (масло, толуол, керосин, кремнийорганические соединения) и обладающей необходимыми характеристиками. Такие размеры частиц феррофазы в сочетании с покрытием их поверхностно-активными веществами, препятствующими коагуляции, позволяют в настоящее время синтезировать достаточно устойчивые и однородные по структуре ферромагнитные жидкости, сохраняющие свои свойства в диапазоне рабочих температур от  $-80$  до  $160^\circ \text{ C}$ .

Характерной чертой таких жидкостей является достаточно сильное взаимодействие их с магнитными или электромагнитными полями различной силы и конфигурации. Следствием этого является ряд интересных эффектов. Одним из них можно назвать эффект увлечения бегущим полем и, если поле перемещается в азимутальном направлении, что характерно для обмоток электродвигателей переменного тока, то феррожидкость вовлекается во вращательное движение вслед за полем. Впервые ротационный эффект наблюдался экспериментально при вращении феррожидкости в стакане [4, 5] в расточке статора. Именно этот эффект и положен в основу рассматриваемого способа охлаждения электродвигателя.

Следует отметить, что не существует единого мнения о механизме ротационного эффекта. Различные аспекты этого вопроса рассматриваются в [5, 6]. Ротационный эффект сопровождается не только видимым (гидродинамическим) движением, но и возникновением микроконвективных вихрей [7]. Суммарное воздействие процессов микроконвективного теплопереноса и макроскопической конвекции и предполагает интенсификацию теплообмена в зоне лобовых частей обмотки электродвигателя.

В качестве объекта исследований был выбран трехфазный асинхронный электродвигатель типа АО42-4/2 мощностью  $P_2 = 2,1/2,8$  кВт. Двухслойная всыпная обмотка статора позволяла переключать скорость вращения бегущего поля  $\omega_n$  от значения  $157 \text{ с}^{-1}$  до  $314 \text{ с}^{-1}$ . Регулирование тока в обмотке статора  $I_1$  осуществлялось нагрузкой на вал электродвигателя.

Анализ режимов работы двигателей данного типа показал, что средние перегревы, т. е. превышение температур рассматриваемых частей над температурой охлаждающей среды, лобовых частей  $\Theta_{л}$  значительно превышают перегревы в пазовой части обмотки  $\Theta_{п}$  (иногда на 20%). При этом перегревы в зоне действия вентилятора несколько ниже, чем со стороны привода. Следует отметить, что длина лобовых частей  $l_{л}$  превышает длину пазовой части  $l_{п}$  обмотки приблизительно в 1,5 ÷ 2 раза и это обстоятельство в сочетании с эффективным охлаждением лобовых частей обмотки, обладающей, как правило, хорошей теплопроводностью, дает возможность существенно влиять на величину среднего перегрева всей обмотки.

В настоящей работе охлаждению ферромагнитной жидкостью подвергались только лобовые части обмотки электродвигателя. Вентилирующее действие крыльчатки было нейтрализовано тонкостенными стаканами из дюралюминия, служащими одновременно стенками камеры, где размещалась феррожидкость (рис. 1). Двигатель устанавливался вертикально и наложение за движением феррожидкости осуществлялось через окна в крышке, что позволяло контролировать практически всю ее свободную поверхность со стороны привода. Измерение температур обмотки и охлаждающей среды производилось с помощью девяти хромель-копелевых термомпар.

В качестве теплоносителя использовался маловязкий коллоидный раствор магнетита  $Fe_3O_4$  в керосине с характеристиками: начальная магнитная восприимчивость  $\kappa = 10,4$ ; объемная концентрация  $c_v = 0,079$ ; намагниченность насыщения  $M_s = 31 \cdot 10^3$  А/м, а также аналогичный раствор с  $M_s = 69 \cdot 10^3$  А/м.

Исследования топографии магнитного поля лобовых частей обмотки электродвигателя показало, что поле обладает существенной неоднородностью, поэтому в качестве характерных приняты осредненные значения напряженности  $H_c$ , эквипотенциальные поверхности которых показаны на рис. 1. При подаче тока в обмотку статора и наборе скорости ротором происходило всухание поверхности феррожидкости над затопленной обмоткой, уровень жидкости у стакана и крышки соответственно понижался, образуя заметный скос у стенок, как у поверхностей хорошо смачиваемых. То же самое наблюдается и при понижении начального уровня ферромагнитной жидкости (обмотка незатоплена). Во всех режимах наблюдалось устремление ее к обмотке. Наиболее интенсивно оно в момент пуска, что, очевидно, связано с броском тока  $I_{пуск}$ , достигающего больших значений, и становится значительно слабее при холостом ходе электродвигателя. Профиль феррожидкости несколько искажается при ее движении, однако обмотка всегда остается смоченной.

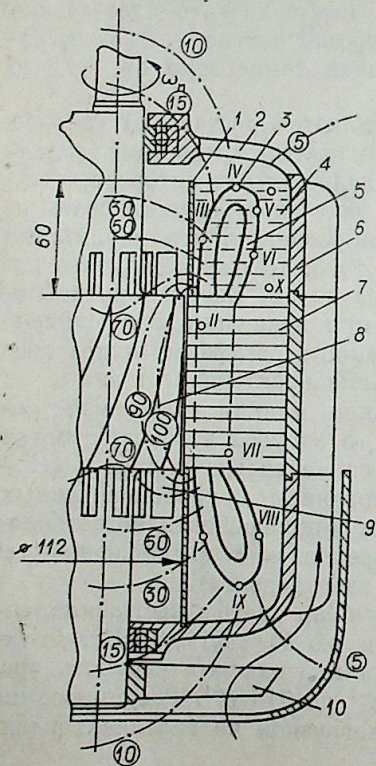
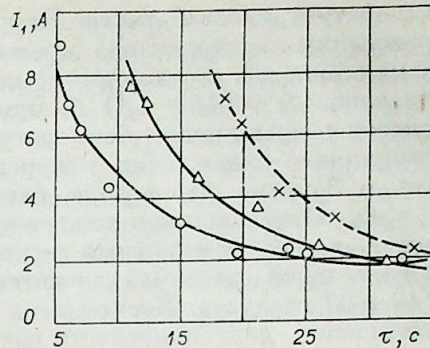


Рис. 1. Схема охлаждения электродвигателя и размещение термомпар.  
1 — стакан; 2 — окно смотровое; 3 — термомпара; 4 — ферромагнитная жидкость; 5 — обмотка; 6 — корпус; 7 — магнитопровод; 8 — ротор; 9 — крыльчатка; 10 — вентилятор.

Рис. 2. Зависимость времени начала движения феррожидкости от тока в обмотке.  
 $\omega = 157c^{-1}$  ( $\Delta$ );  $314$  ( $\circ$ );  $314c^{-1}$  для феррожидкости с добавлением трансформаторного масла ( $\times$ ).



Видимое движение ферромагнитной жидкости начинается не сразу, а через некоторый промежуток времени  $\tau$ , зависящей от нагрузки, т. е. величины тока в обмотке статора  $I_1$  и скорости вращения поля  $\omega_n$  (рис. 2). При токах  $I_1 \approx 2$  А время начала движения рассматриваемой жидкости, определяющее быстрое действие системы, практически не зависит от  $\omega_n$ . Если же нагрузка превышает эти значения, то как при  $\omega_n = 157$  с<sup>-1</sup>, так и при  $\omega_n = 314$  с<sup>-1</sup> запаздывание  $\tau = \varphi(I_1, \omega_n)$ . Движение феррожидкости происходило по направлению поля и одновременно по всей поверхности. Влияния центробежных сил, характерного для вращающихся масс жидкости, а также вращения феррожидкости против направления поля, зарегистрированного в [4], не наблюдалось.

Следует отметить, что в переходных режимах в диапазоне токов  $I_1 = (1,8 \div 2,5)$  А имели место пульсации свободной поверхности фмж непосредственно у проводников обмотки и притормаживание у поверхности крышки. Движение зарегистрировано по всему объему феррожидкости. При этом измерения показали, что температура феррожидкости у пакетов стали, т. е. в зоне с большей напряженностью  $H_c$ , несколько ниже (на 5—6 градусов), чем на поверхности.

Присутствие в области лобовой части обмотки замкнутого объема феррожидкости вместо используемого там ранее воздуха также ограниченного объема и обладающего более низкими теплофизическими характеристиками позволило существенно улучшить условия охлаждения обмотки и, благодаря хорошей теплопроводности меди проводников, снизить

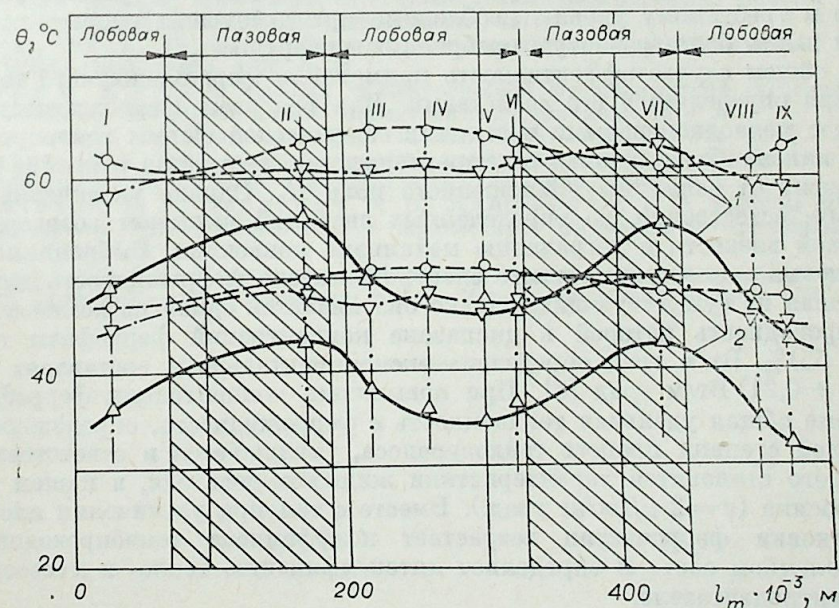


Рис. 3. Нагрев обмотки статора электродвигателя при токах:  
1 —  $I_1 = 1,1$ ,  $I_{II} = 7,0$  А; 2 —  $I_1 = I_{II} = 6,3$  А. С воздушным охлаждением ( $\circ$ ), феррожидкостным ( $\Delta$ ), масляным ( $\nabla$ ).

температуру пазовой части. На рис. 3 представлены характерные для проведенных исследований превышения температур  $\Theta_{\phi}$  по длине одного витка обмотки в соответствии с показаниями термопар по сечениям I—IX для токов  $I_1 = (0,6 \div 1,1) I_n$  при  $\omega_n = 314 \text{ с}^{-1}$ . Там же для сравнения показаны превышения температур  $\Theta_b$  в этой же обмотке при обычном (воздушном) охлаждении, измеренных перед реконструкцией электродвигателя. Заметно, что в зоне, охлаждаемой феррожидкостью, перегревы  $\Theta_{\phi} < \Theta_b$ . Интенсивность теплоотвода от обмоток увеличивается с ростом тока  $I_1$  в них. Аномальный режим (режим перегрузки) характеризуется максимальной разницей превышений температур, достигая  $\Theta_b - \Theta_{\phi} = 19 \div 20$  градусов. Несмотря на большую, чем при обычном воздушном охлаждении, неравномерность распределения локальных температур феррожидкостному охлаждению соответствуют более низкие значения средних перегревов обмотки ( $51^{\circ}\text{C}$  против  $62^{\circ}\text{C}$ ), что позволяет эксплуатировать электродвигатель с перегрузкой до  $15 \div 20\%$  от его номинальной мощности.

Реализация режима вынужденной конвекции в феррожидкости выгодно отличает данную систему охлаждения не только от воздушного, но и от простого заполнения камер и обмотки обычной жидкостью (например, маслом), не дающего сколько-нибудь заметного выигрыша. Наличие феррожидкости по сравнению с воздухом (даже при турбулизации его с помощью крыльчатки нельзя обеспечить коэффициенты теплоотдачи выше  $\alpha_b = (300 \div 500) \text{ Вт/м}^2 \text{ град}$ ) позволяет реализовать по проведенным оценкам значения коэффициента теплоотдачи на порядок выше  $\alpha_{\phi} = (2500 \div 2900) \text{ Вт/м}^2 \text{ град}$ . Это соответствует коэффициентам теплоотдачи при принудительном жидкостном охлаждении, для которого необходимы специальные нагнетательные устройства. Однако сдерживающими факторами применения феррожидкостного охлаждения следует назвать низкие коэффициенты теплоотдачи от корпуса электродвигателя к обдуваемому его воздуху, скорость и расход которого определяется числом оборотов. Так, исследования теплового режима двигателя при  $\omega_n = 157 \text{ с}^{-1}$  не позволили полностью реализовать преимущества феррожидкостного охлаждения. Очевидно, для приведения возможностей наружного теплоотвода к требуемому уровню необходимо при небольших скоростях вращения иметь более развитую оребренную поверхность.

В общем случае эффективность применения ферромагнитного теплоносителя определяется его свойствами. Для реальных феррожидкостных систем с мелкодисперсными частицами сферической формы теплопроводность, как наиболее важная их характеристика, изотропна и крайне слабо зависит от величины приложенного поля  $H_n$ . Однако увеличение последнего, естественно, до определенных значений вызывает возрастание сдвиговой вязкости и деградацию механизма конвекции. Выбранная для охлаждения экспериментального электродвигателя феррожидкость далеко не лучшая из существующих, однако она является одной из композиций, теплопроводность которой в диапазоне концентраций феррофазы  $c_v = (5 \div 55)\%$  Вт/м град определена экспериментально и составляет  $\lambda = (0,12 \div 0,21) \text{ Вт/м град}$  [8]. При повышении концентрации феррофазы в системе общая удельная теплоемкость с феррожидкости, определяющая в немалой степени процесс теплопереноса, уменьшается и ответственными за него становятся характеристики жидкости-носителя, в нашем случае керосина ( $c = 2 \text{ кДж/кг град}$ ). Вместе с тем при увеличении плотности упаковки феррочастиц возрастает коэффициент теплопроводности, что в конечном счете и определяет интенсификацию тепло- и массообмена в электродвигателе.

Таким образом, существует реальная возможность управления теплофизическими характеристиками за счет целенаправленного выбора режимных параметров и компонентов феррожидкостных систем. Последний

ограничивается номенклатурой материалов феррофазы, однако может быть расширен за счет большого разнообразия жидкостей-носителей.

Одновременно с синтезированием феррожидкостей с необходимыми характеристиками при повышенных напряжениях в обмотках более жесткие требования должны предъявляться к их электротехническим характеристикам. Наиболее полно этим требованиям удовлетворяют феррожидкости на основе кремнийорганических соединений, хотя нельзя исключать возможность использования и принятой в рассматриваемой системе охлаждения ферромагнитной жидкости на основе керосина с электропроводностью  $\sigma_{\phi} = 2 \cdot 10^9 \div 1,3 \cdot 10^{-8} \text{ Ом}^{-1} \text{ см}^{-1}$  и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 12$ , что по порядку величин соответствует уровню современных электроизолирующих материалов.

Достаточно высокие электротехнические и теплофизические характеристики позволяют говорить о феррожидкостях как о весьма перспективных теплоносителях, которые в сочетании с использованием ротационного эффекта дают возможность без применения каких-либо сложных устройств существенно снизить перегревы в активных элементах электрических машин и повысить их единичную мощность. Охлаждение с помощью ферромагнитных жидкостей можно использовать как отдельно, так и в совокупности с другими известными системами охлаждения на машинах и аппаратах большой и малой мощности, где имеются не только вращающиеся, но и линейные электромагнитные поля.

Кузбасская региональная лаборатория  
прикладной теплофизики  
Института теплофизики  
СО АН СССР,  
Кемерово

Поступила в редакцию  
24/XII 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кутателадзе С. С., Романов В. В. Опыт работы низкотемпературного охлаждения турбогенератора.— *Электричество*, 1974, № 4.
2. Науменко В. И., Ключков О. Г. Авиационные электрические машины с интенсивным охлаждением. М.: Машиностроение, 1977.
3. Вислович А. Н. и др. Закрытая электрическая машина. Авторское свид. № 534833.— *Бюл. изобр.*, 1976, № 41.
4. Коган И. Я. и др. О течении диэлектрической ферромагнитной суспензии во вращающемся магнитном поле.— *Магнитная гидродинамика*, 1973, № 2.
5. Moskowitz D., Rosensweig R. E.— *Appl. Phys. Letters*, 1969, 11, 10.
6. Глазов О. А. Роль высших гармоник при движении ферросуспензии во вращающемся магнитном поле.— *Магнитная гидродинамика*, 1975, № 4.
7. Баштовой В. Г., Вислович А. Н., Кашевский Б. Э. Явление микроконвективного теплопереноса в жидкостях с внутренними вращениями.— *ПМТФ*, 1978, № 3.
8. Кронкалис Г. Е. Измерение коэффициента теплопроводности и электропроводности феррожидкости в магнитном поле.— *Магнитная гидродинамика*, 1977, № 3.

УДК 532.525.2.533.6.05

А. В. АНЦУЛОВ, В. М. МИРОНОВ

### ИССЛЕДОВАНИЕ АЭРОДИНАМИКИ ВИХРЕВОЙ КАМЕРЫ

Вихревые камеры широко применяются во многих технических устройствах различного назначения. Исследованию аэродинамики вихревой камеры посвящено значительное число теоретических и экспериментальных работ [1—15]. В зависимости от назначения вихревые камеры имеют конструктивные отличия, которые могут оказывать существенное влияние на их аэродинамику.

В данной работе приведены результаты экспериментального исследования аэродинамики вихревой камеры, имеющей форму простейшей центробежной форсунки (рис. 1), с целью выявления картины течения в ее приосевой зоне, а также определения возможных режимов течения при изменении геометрии сопла и расхода через камеру.

1. Опыты проводили с двумя моделями, представляющими собой короткий цилиндр 1 длиной  $L = 20$  и  $25$  мм, диаметром  $D = 80$  и  $90$  мм соответственно. Воздух подавался через цилиндрические сменные каналы 2, расположенные по касательной к боковой поверхности цилиндра на середине его длины. Внутренний диаметр каналов  $d_r$  изменялся от 4 до 8 мм. Число каналов  $j$  изменялось от 2 до 4. Сток воздуха осуществлялся через осесимметричное сменное сопло 3, расположенное в центре одной из торцевых стенок камеры. Схема исследованных сопел с указанием основных геометрических параметров приведена на рис. 1. Расход воздуха через вихревую камеру измерялся мерным соплом 4, установленным перед коллектором подачи воздуха 5 в тангенциальные каналы. Задняя торцевая стенка вихревой камеры по всему радиусу препарирована приемниками статического давления.

В опытах проводили измерения давления перед мерным соплом  $p_{ш}$  и за ним  $p_0$ , по радиусу задней торцевой стенки  $p(r)$  и параметров потока в выходном сечении сопла. Определяли статическое давление на стенке сопла  $p_a$ , полное давление  $p_{0a}$  в истекающем закрученном потоке; величину и направление вектора скорости на выходе из сопла измеряли

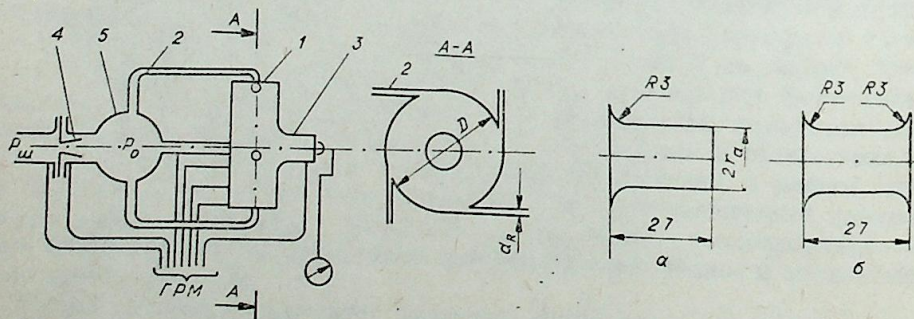


Рис. 1. Схема вихревой камеры.

а) Сопло с острой кромкой на срезе; б) сопло с закругленной кромкой на срезе.

трехтрубчатый насадком. Насадок изготовлен из тонких медицинских игл. Все его три приемные отверстия располагались в одной плоскости. Оси крайних трубок составляли угол  $45^\circ$  относительно оси средней трубки. Отверстие центральной трубки было раззенковано под общим углом  $120^\circ$ .

Вращая насадок и наблюдая за показаниями манометров, добивались равенства давлений  $p_1$  и  $p_3$ , воспринимаемых крайними приемниками насадки. Зная нулевое положение насадка и положение, которому соответствует равенство  $p_1$  и  $p_3$ , по лимбу координатника отсчитывали угол скоса потока  $\varphi$  в измерительной плоскости насадка. Такие приемники чувствительны к изменению скоса потока во всем диапазоне изменения его скорости [16]. Порог чувствительности при измерении угла скоса потока данным насадком составлял  $\pm 0,1^\circ$ . Индивидуально изготовленный насадок был протарирован в осесимметричной струе, истекающей из профилированного сужающегося сопла с практически равномерным потоком в выходном сечении. Относительная ошибка в измерениях коэффициента скорости  $\lambda$  не превышала  $\pm 5\%$ .

Истекающая из сопла закрученная струя фотографировалась тепловым прибором. Качественную структуру струи также определяли по картине распределения вязкого визуализирующего состава (сажа + масло) на поверхности плоской стенки, установленной нормально оси струи.

2. На рис. 2 представлены результаты измерения статического давления, отнесенного к максимальному значению  $\left(\bar{p} = \frac{p(r)}{p_R}\right)$ , по радиусу задней торцевой стенки вихревой камеры при различных отношениях полного давления газа на входе в тангенциальные каналы к атмосферному давлению  $\left(N = \frac{p_0}{p_{ат}}N$  статическое давление на торцевой стенке монотонно убывает к центру от максимального значения  $p_R$  на периферии до минимального значения  $N$  было меньше атмосферного. Из рис. 2 следует, что эпюры относительного статического давления  $\bar{p}$  во всем диапазоне изменения  $r/R$ , за исключением области с давлением меньше атмосферного, которая расположена в центральной части торцевой стенки, начиная с некоторого  $N$  ложатся на единую кривую, т. е. устанавливается автомодельность по  $N$ . Эпюра статического давления на торцевой стенке в области автомодельности, как видно из рис. 2, в основном определяется относительным размером выходного сопла. Максимальное статическое давление  $p_R$  пропорционально полному давлению на входе в тангенциальные каналы

$$p_R = \delta \cdot p_0.$$

Коэффициент пропорциональности  $\delta$  для вихревой камеры с параметрами  $L/D = 0,278$ ,  $d_r = 0,004$ ,  $j = 4$  для рассмотренных каналов с  $r_a/R = 0,127; 0,222; 0,311$  соответственно составлял  $\delta = 0,90; 0,71; 0,55$ . При постоянном расходе через вихревую камеру эпюра статического давления на торцевой стенке не зависит от числа тангенциальных каналов, т. е. от суммарной площади их проходных сечений. В идеальном потоке момент количества движения должен оставаться постоянным по радиусу плоского вихревого потока (закон сохранения циркуляции  $\frac{\lambda_\varphi r}{R} = \text{const}$ , где  $\lambda_\varphi$  — коэффициент вращательной компоненты вектора скорости). В плоском вихревом потоке вязкого газа на торцевых стенках нарастает пограничный слой, что приводит к потерям на трение и перетокам газа через пограничный слой в радиальном направлении. Это нарушает потенциальное течение по всей длине вихревой камеры, что подтверждается изме-

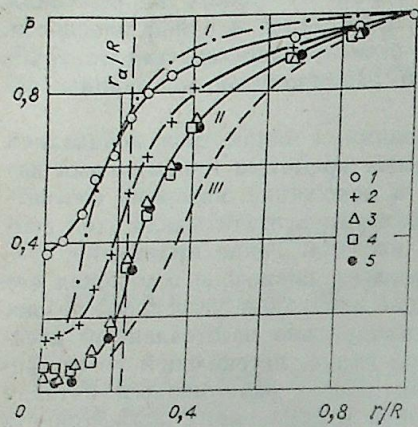


Рис. 2. Эпюры относительного статического давления на задней торцевой поверхности вихревой камеры.  $N=1,00$  (I); 4,00 (2); 9,10 (3); 13,00 (4); 30,30 (5).  $L/D=0,278$ ;  $d_R=0,004$  м;  $j=4$ ;  $r_a/R=0,222$ ;  $r_a/R=0,127$  (I), 0,222 (II), 0,311 (III) — эпюры в области автомодельности.

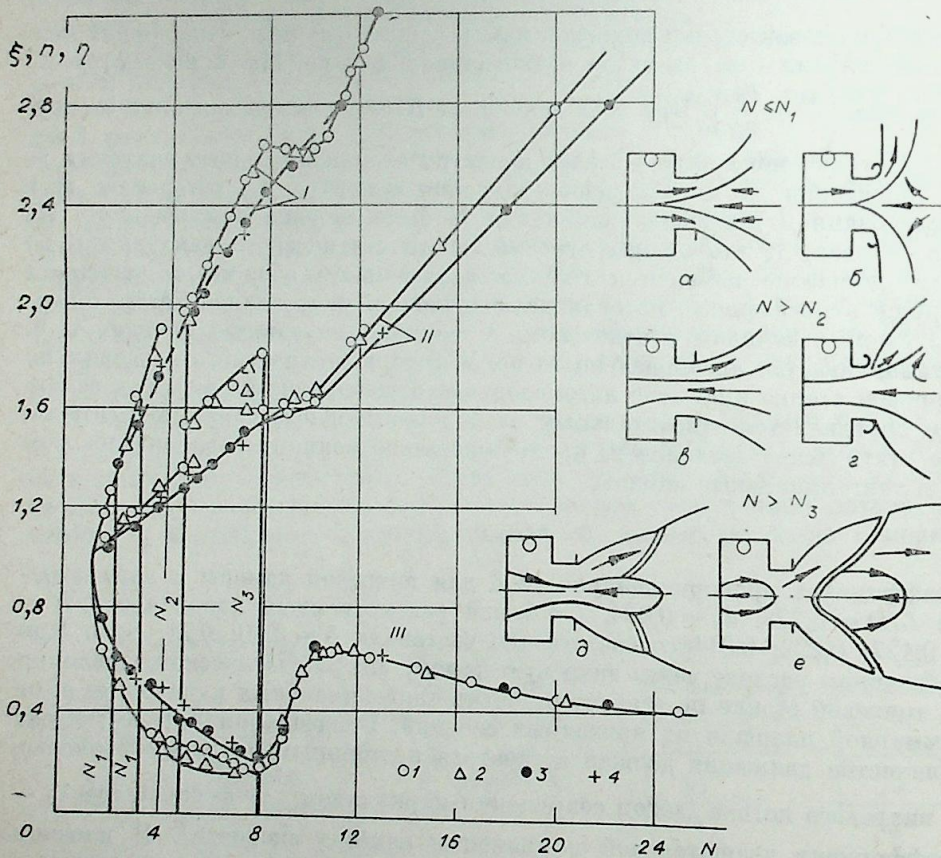


Рис. 4. Зависимость параметров  $\eta$ ,  $\xi$ ,  $n$  от  $N$  и схемы течения в осевой области.  $L/D=0,278$ ;  $d_R=0,004$  м,  $j=4$ ,  $r_a/R=0,222$ . I —  $\xi$ ; II —  $n$ ; III —  $\eta$ . Сопло б — 1, 2, сопло а — 3, 4; 1, 3 — прямой ход, 2, 4 — обратный ход, скачок уплотнения — а, б —  $N < N_1$ ; в, е —  $N > N_2$ ; д, е —  $N > N_3$ .

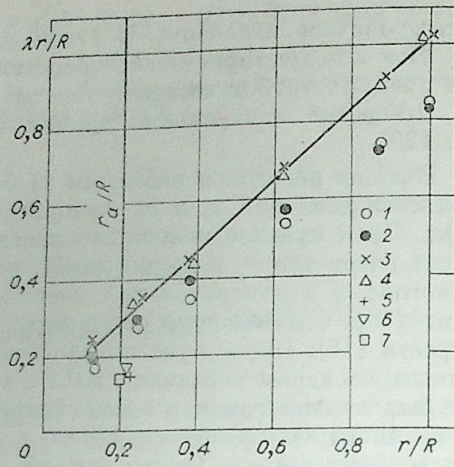


Рис. 3. Изменение циркуляции по радиусу вихревой камеры в ядре потока, невозмущенного пограничными слоями.  $L/D=0,25$ ;  $d_R=0,0078$  м;  $j=3$ ;  $r_a/R=0,225$ ; 1—4 соответствуют значениям расхода  $G=0,031$ ; 0,045; 0,197; 0,493 кг/с; 5—7 соответствуют значениям циркуляции  $\Gamma_a$ , рассчитанной по параметрам на срезе сопла для  $G=0,031$ ; 0,045; 0,197 кг/с.

нением циркуляции  $\Gamma = \frac{\lambda \cdot r}{R}$  по радиусу в ядре потока вихревой камеры (рис. 3). Коэффициент скорости  $\lambda$  получен в предположении, что в невозмущенном пограничном слое ядре вихревого потока полное давление остается постоянным.

На рис. 3 приведено также значение циркуляции, определенное по результатам измерения параметров потока трехрожковым насадком на

$$\text{срезе сопла } \Gamma_a = \frac{\int_0^{r_a} V_{\varphi} r dG}{d_* R \int_0^{r_a} dG}. \text{ Это осредненное значение, как и следовало}$$

ожидать, заметно меньше измеренного по параметрам в ядре потока.

3. Для характеристики закрученного потока в центральной области вихревой камеры и истекающей из нее струи взяты следующие безразмерные параметры: относительное статическое давление в центре задней торцевой стенки  $\eta = \frac{p_m}{p_H}$ ; относительное давление на торцевой поверхности на радиусе, равном радиусу сопла  $\xi = \frac{p(r_a)}{p_H}$ ; относительное давление на стенке сопла  $n = \frac{p_a}{p_H}$  — степень нерасчетности. На рис. 4 представле-

ны зависимости этих безразмерных параметров от  $N$ . Видно, что характер изменения всех параметров связан с наличием различных режимов течения в центральной части закрученного потока. В идеальном потоке в силу условия  $\lambda_{\varphi} r = \text{const}$  при уменьшении радиуса до нуля вращательная компонента вектора скорости  $\lambda_{\varphi}$  должна непрерывно расти, а статическое давление стремится к нулю. В реальном случае из-за сил вязкости вращательная компонента вектора скорости растет только до определенного радиуса, вследствие чего давление в центральной области вихревой камеры падает ниже атмосферного до определенной величины. Под действием возникшего разрежения в центральной области вихревого течения атмосферный воздух начинает проникать через осевую область внутрь камеры. Вследствие сил вязкого трения обратный поток раскручивается, образуя вынужденный вторичный вихрь. Наличие обратного течения хорошо видно по направлению шелковинок, внесенных в область среза сопла.

На рис. 4 приведены схемы течения в осевой области вихревой камеры, соответствующие различным режимам истечения вихревого потока из вихревой камеры через цилиндрическое сопло. Исследование зависимости параметров  $n$ ,  $\eta$ ,  $\xi$  от  $N$  проводилось как при возрастании  $N$  (прямой ход), так и при уменьшении  $N$  (обратный ход). В результате исследований обнаружен эффект, заключающийся в гистерезисном характере изменения степени нерасчетности при истечении газа через цилиндрическое сопло с закругленной на срезе кромкой (см. рис. 4, кривая II). Также выявлено существенное влияние формы кромки сопла на течение в районе оси вихревой камеры и на структуру закрученной струи. При истечении газа из вихревой камеры через цилиндрическое сопло с закругленной на срезе кромкой, с увеличением  $N$  от 0 до некоторой величины  $N_3$  закрученная струя в результате действия центробежной силы распространяется в радиальном направлении, так что граница струи не отрывается от торцевой поверхности сопла (см. рис. 4, б, е). Закрученная струя, истекающая из сопел с острой кромкой на срезе, распространяется в осевом направлении во всем исследуемом диапазоне изменения  $N$  (см. рис. 4, а, в, д). При некотором значении  $N = N_1$  в обратном потоке возникает сверхзвуковое течение, однако появление этого

режима не приводит к изменению характера зависимостей, так как в прямом потоке продолжает существовать дозвуковое течение.

Момент установления сверхзвуковой скорости в обратном потоке при увеличении параметра  $N$  определялся по отношению давления в центре торцевой стенки  $p_m$  к давлению в окружающей пространии (атмосфере). В обратном потоке внешнее давление  $p_n$  является полным давлением, а статическое давление в приосевой области вихревой камеры принималось равным давлению, измеренному в центре торцевой стенки  $p_m$ . В газе с показателем адиабаты  $\kappa = 1,4$  при  $\eta = \frac{p_m}{p_n} \leq 0,528$  устанавливается сверхзвуковое течение.

Момент возникновения сверхзвуковой скорости в периферийном потоке, истекающем из вихревой камеры при увеличении параметра  $N$ , определялся как по отношению давления в атмосфере  $p_n$  к давлению на торцевой стенке на радиусе  $r$ , равном радиусу сопла  $r_a$ , так и с помощью трехтрубчатого насадка. При этом давление на торцевой поверхности, соответствующей периферийному потоку, считалось равным полному давлению на том же радиусе. Известно, что в потоке с  $\kappa = 1,4$  при  $\xi = \frac{p(r_a)}{p_n} \geq 1,89$  устанавливается сверхзвуковое течение. Из рис. 4 следует, что в сопле с закругленной кромкой сверхзвуковое течение в обратном потоке формируется при меньшем значении  $N$ , чем в сопле с острой кромкой. Переход от дозвукового течения к сверхзвуковому в периферийном потоке, истекающем из сопла с закругленной кромкой, сопровождается скачкообразным изменением степени нерасчетности на некоторую величину  $\Delta n$  (см. рис. 4). Такое изменение степени нерасчетности происходит как с увеличением расхода, так и с его уменьшением, причем при одном и том же значении  $N_2$ . Величина перепада  $\Delta n$  также не зависит от направления изменения расхода. В этом режиме область обратного течения достигает задней торцевой стенки вихревой камеры. Эпюра статического давления на торцевой стенке, соответствующая области обратного течения, при таком режиме практически равномерная. Этот режим существует в небольшом диапазоне изменения  $N$ . Область вынужденного течения на таком режиме, по мере увеличения  $N$ , сужается, но поток еще выходит веерообразно и область обратного течения открыта. С дальнейшим увеличением  $N$  давление в центре торцевой стенки вихревой камеры достигает минимального значения. При этом истекающая из сопла струя мгновенно схлопывается (см. рис. 4, *д*), а степень нерасчетности в сопле с закругленной кромкой падает скачком до значения, соответствующего соплу с острой кромкой. При  $N \geq N_3$  область внутреннего течения становится замкнутой и вытекающая струя формируется вдоль оси (см. рис. 4, *д*, *е*). В периферийном сверхзвуковом потоке закрученной струи зарождается скачок уплотнения, который по мере увеличения  $N$  охватывает все сечение струи, принимая воронкообразную форму. Согласно рис. 2 и 4, эпюра относительного статического давления на радиусе торцевой стенки становится автомодельной по  $N$ , начиная с  $N > N_3$ . Закругление кромки на срезе сопла приводит к уменьшению давления в осевой области вихревой камеры в диапазоне изменения  $N$  от 0 до  $N_3$ . При больших расходах ( $N > N_3$ ) влияние закругления на кромке цилиндрического сопла на течение практически не сказывается.

Для подтверждения рассматриваемых схем течения, реализующихся в приосевой области вихревой камеры и истекающей из нее закрученной струи, нормально оси струи за срезом сопла устанавливалась плоская преграда, покрытая визуализирующим составом (сажа + масло). На фотографии растекания визуализирующего состава на преграде (рис. 5) четко выделяются два вихря: внешний, соответствующий растеканию по преграде прямого потока, и внутренний — вынужденный вихрь, соответ-

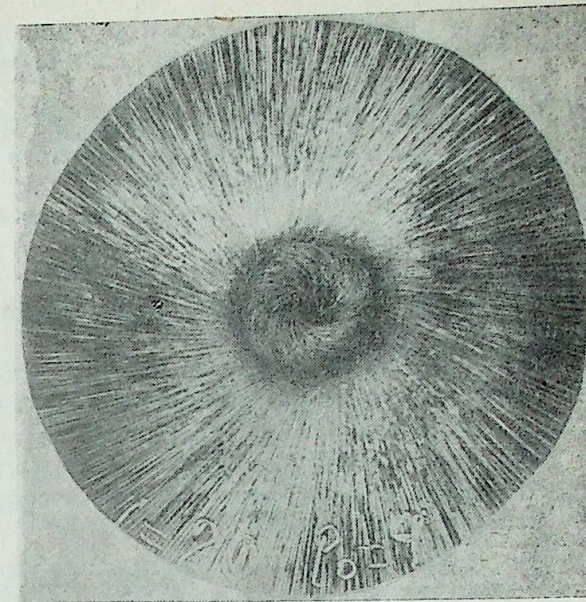
ствующий обратному потоку. Внутренний вихрь на преграде наблюдается на всех режимах истечения газа из вихревой камеры через цилиндрическое сопло.

Результаты исследований позволяют сделать некоторые выводы:

1. В исследуемых вихревых камерах нарушается закон сохранения циркуляции.

2. При увеличении расхода через вихревую камеру происходит переход от веерного разомкнутого истечения газа на выходе из сопла к осевому сомкнутому. При осевом течении имеется автомодельность относительного статического давления на стенках вихревой камеры.

3. Закругленная кромка на выходе цилиндрического сопла приводит к количественному и качественному изменению течения в осевой области закрученного потока. В частности, переход от веерного течения к осевому при росте расхода происходит скачкообразно.



Поступила в редакцию  
22/VIII 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Данлеп Р. Исследование закрученного течения во вращающихся РДТТ с торцевым горением топлива.— Ракетная техника и космонавтика, 1969, т. 7, № 12.
2. Нортон Д. Ж., Фаркуар Б. В., Гоффман Ж. Д. Теоретическое и экспериментальное исследование вихревого течения в соплах.— Ракетная техника и космонавтика, 1969, т. 7, № 10.
3. Гродзовский Г. Л., Кузнецов Ю. Е. К теории камеры для вихревого охлаждения газового потока.— Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 10.
4. Дубинский М. Г. Вихревые аппараты.— Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 8.
5. Меркулов А. П. Вихревой эффект и его применение в технике. М.: Машиностроение, 1969.
6. Вопросы аэродинамики и теплопередачи в котельно-топочных процессах. Сб. статей/Под ред. Г. Ф. Кнорре. М.: Госэнергоиздат, 1958.
7. Струйная автоматика в системах управления/Под ред. Б. В. Орлова. М.: Машиностроение, 1975.
8. Структура пристеночного пограничного слоя. Сб. науч. трудов/Под ред. С. С. Кутателадзе, Е. М. Хабахпашевой. Новосибирск, 1978.
9. Жуков М. Ф., Смоляков В. Я., Урюков Б. А. Электродуговые нагреватели газа (плазмотроны). М.: Наука, 1973.

10. Гостинцев Ю. А., Илюхин В. С., Похил П. Ф. О зоне обратных течений в сильно вращающихся сверхзвуковых газовых потоках и струях.— Инж.-физ. журн., 1970, т. 20, № 6.
11. Гостинцев Ю. А., Зелепцов В. В., Илюхин В. С., Похил П. Ф. О структуре сверхзвуковой закрученной струи газа при истечении с недорасширением.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 5.
12. Swartz J. R. Effect of rotating flows on combustion and jet noise.— AIAA paper, N 72-645.
13. Woerner C. J., Sparrow E. M., Scott C. J. Compressible swirling flow through convergent-divergent nozzles.— Wärme- und Stoffübertragung, 1972, v. 5, N 2.
14. Левеллен В. С., Бернс В. Ж., Стрикленд Х. Ж. Околозвуковое течение с закруткой.— Ракетная техника и космонавтика, 1969, т. 7, № 7.
15. Соу К. Л. Явление завихренности в коническом диффузоре.— Ракетная техника и космонавтика, 1967, т. 5, № 6.
16. Петунин А. Н. Методика и техника измерений параметров газового потока. М.: Машиностроение, 1972.

УДК 533.9.07+533.527

Э. П. ВОЛЧКОВ, А. П. КАРДАШ, В. И. ТЕРЕХОВ

### ГИДРОДИНАМИКА ВИХРЕВОЙ КАМЕРЫ С ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ ТОРЦЕВЫМИ КРЫШКАМИ

Закрученные течения находят широкое применение в современных энергетических устройствах. Использование закрутки позволяет существенно интенсифицировать тепломассообмен между несущей и дисперсной фазой при сушке различных материалов, в процессах химической технологии и других областях техники.

Для проведения ряда тепломассообменных процессов в [1, 2] предложено использовать вихревую камеру с торцевыми крышками, имеющими форму гиперboloида вращения. На рис. 1 представлена схема такой камеры. Подача газа в вихревую камеру осуществляется равномерно через кольцевой завихритель 1, расположенный на боковой ее поверхности. Торцевые крышки 2 имеют такую форму, что площадь проходного сечения камеры при перемещении к центру остается постоянной, т. е.  $2\pi rh = 2\pi R_0 h_0 = \text{const}$ . Выброс газа из камеры осуществляется через отверстие в одном или обоих торцах камеры. В данной работе основное внимание уделено исследованию камер с одним выходным отверстием; при теоретическом анализе рассматривались также и аппараты с одинаковыми отверстиями в обеих торцевых крышках.

При создании вихревых аппаратов определяющее значение имеет проблема расчета гидродинамики таких устройств. К настоящему времени рядом авторов [3—9] предложены различные инженерные методики расчета гидродинамики вихревых камер с плоскими торцевыми крышками. Как правило, эти методы базируются на определенных предположениях, основные из них следующие: течение по окружной скорости является плоским и неизменным по высоте камеры; отсутствуют вторичные течения и торцевые пограничные слои. При таких условиях решение сложного трехмерного течения в вихревой камере значительно упрощается [3—7] и по некоторым параметрам дает качественное и количественное соответствие с экспериментом.

В настоящей работе в аналогичной постановке решается задача о течении в вихревой камере с гиперболическими крышками; результаты расчетов сопоставляются с экспериментальными профилями окружных скоростей, циркуляций и давлений, а также с данными, полученными для плоских камер.

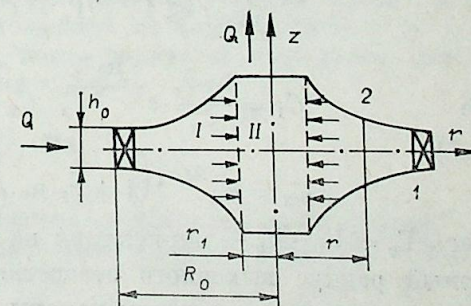


Рис. 1.

# 1. РАСЧЕТ ПОЛЕЙ СКОРОСТЕЙ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ВИХРЕВОЙ КАМЕРЕ

Методика расчета полей скоростей в гиперболической камере основывается на одномерной модели, которая использовалась в работах [3—5] для анализа течения в вихревой камере с плоскими торцевыми стенками. Предполагая, что распределение окружной скорости по высоте камеры не изменяется, уравнение движения для тангенциальной составляющей скорости при условии постоянства вязкости по радиусу камеры можно записать [4, 5]

$$\rho u_r \frac{1}{r} \frac{d\Gamma}{dr} = \mu \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d\Gamma}{dr} \right), \quad (1.1)$$

где  $u_r$  — радиальная компонента скорости,  $\Gamma = V_\varphi \cdot r$  — текущая циркуляция,  $\mu$  — динамическая вязкость. Следуя работам [3—5], разобьем вихревую камеру (см. рис. 1) на две зоны: I — зона основного вихря ( $r_1 \leq r \leq R_0$ ) и II — область выходного отверстия ( $0 \leq r \leq r_1$ ),  $r_1$  и  $R_0$  — радиусы выходного отверстия и камеры соответственно.

В пренебрежении влиянием пограничных слоев, образующихся на торцевых поверхностях, при условии постоянства радиальной скорости по высоте камеры величина ее в зоне I по радиусу также будет постоянной  $\rho u_r(z, r) = \text{const}$ .

В области выходного отверстия II осевая скорость по радиусу этой зоны принимается постоянной. Тогда, используя уравнение неразрывности, можно показать, что радиальная составляющая скорости, как и для плоской камеры [4, 5], не зависит от координаты  $z$  и определяется выражением

$$\rho u_r = \rho_1 u_{r1} \cdot r/r_1, \quad (1.2)$$

где  $\rho_1 u_{r1}$  — массовая радиальная скорость на границе отверстия. Следует отметить, что соотношение (1.2) справедливо как для камер с одним выходным отверстием, так и при наличии отверстий радиусом  $r_1$  в обеих торцевых крышках.

В качестве граничных условий при решении уравнения (1.1), как и в работе [4], используем:  $\Gamma = 0$  при  $r = 0$ ,  $\Gamma = \Gamma_0$  при  $r = R_0$ ; циркуляция и производная циркуляции на границе между зонами выходного отверстия и основного вихря равны между собой  $\Gamma_I = \Gamma_{II}$ ,  $\frac{d\Gamma_I}{dr} = \frac{\partial \Gamma_{II}}{\partial r}$  при  $r = r_1$ . Тогда, интегрируя (1.1) с использованием условия постоянства радиальной скорости в зоне основного вихря и уравнения (1.2) в области выходного отверстия, получим расчетные соотношения для распределения относительных циркуляций по радиусу камеры

$$0 \leq \bar{r} \leq \bar{r}_1 \quad \Gamma/\Gamma_0 = C_1 \left( 1 - e^{-\frac{Re \bar{r}^2}{2\bar{r}_1}} \right), \quad (1.3)$$

$$\bar{r}_1 \leq r \leq 1 \quad \Gamma/\Gamma_0 = C_2 - \frac{(1 + \bar{r} Re) e^{-Re \bar{r}}}{C_3}, \quad (1.4)$$

где

$$C_1 = \frac{Re \cdot \bar{r}_1}{C_3} \cdot e^{-\frac{Re \bar{r}_1}{2}}, \quad C_2 = 1 + \frac{e^{-Re} (1 + Re)}{C_3},$$

$$C_3 = e^{-Re \cdot \bar{r}_1} \left( 1 + \bar{r}_1 \cdot Re \cdot e^{-\frac{Re \cdot \bar{r}_1}{2}} \right) - e^{-Re} (1 + Re).$$

Здесь  $\Gamma_0 = V_{\varphi_0} \cdot R_0$  — циркуляция на входе в камеру,  $\bar{r}_1 = r_1/R_0$  — безразмерный радиус выходного отверстия,  $Re = \rho_0 u_{r_0} \cdot R_0/\mu$  — число Рейнольдса, построенное по радиусу камеры, радиальной скорости на этом радиусе и вязкости рассматриваемого течения.

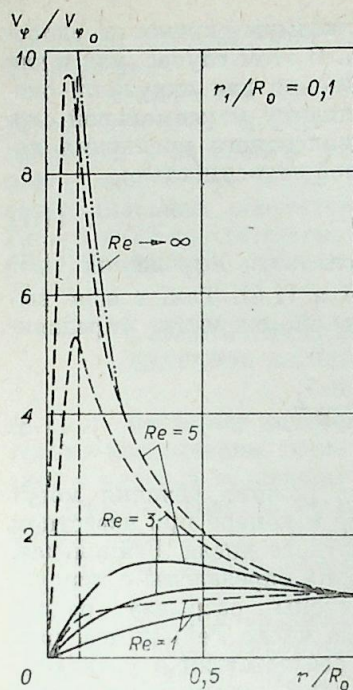


Рис. 2.

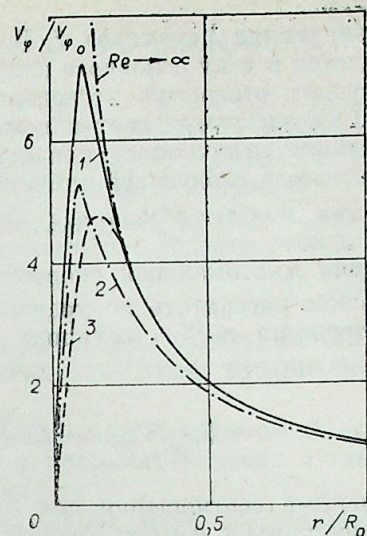


Рис. 3.

Полученные соотношения (1.3) и (1.4) можно также использовать и для расчета полей скоростей в вихревых камерах с выходными отверстиями в обоих торцах. При этом легко показать, что при ламинарном режиме течения профили тангенциальных

скоростей в камерах с одним и двумя одинаковыми выходными отверстиями совпадают между собой.

На рис. 2 сопоставляются результаты расчета профилей окружных скоростей в вихревой камере с гиперболическими (сплошные линии) и с плоскими торцами (штриховые линии) при одинаковых числах Рейнольдса ( $Re = 1, 3, 5$ ). Расчеты распределения скоростей для плоской камеры были проделаны по формулам, полученным в работе [4]. Из рис. 2 следует, что при одинаковом числе Рейнольдса и крутке  $\sigma = V_{\varphi_0}/u_{r_0}$  на входе уровень окружных скоростей в плоской камере значительно выше, чем в гиперболической. С увеличением числа Рейнольдса величина окружной скорости возрастает, а в предельном случае при бесконечно малой вязкости потока ( $Re \rightarrow \infty$ ) в зоне основного вихря как в плоской, так и в гиперболической камерах реализуется потенциальное течение  $\Gamma = \text{const}$ ; в зоне выходного отверстия при этом имеет место квазитвердое вращение  $\omega = \Gamma/r^2 = \text{const}$ .

Максимальное значение окружной составляющей скорости, как это следует из рис. 2, в гиперболической и плоской камерах может располагаться как внутри отверстия, так и в зоне основного вихря. Радиус максимума окружной скорости можно определить из выражений (1.3) и (1.4) при условии  $dV_\varphi/dr = 0$ . Для случая, когда радиус максимальных скоростей лежит в зоне выходного отверстия  $r_{\text{max}} \leq r_1$

$$r_m^* = 1,585 (\bar{r}_1 \cdot Re)^{-0,5}, \quad (1.5)$$

где  $r_m^* = r_m/r_1$ , а  $r_m$  — радиус максимальной скорости. Из соотношения (1.5) следует, что максимум окружных скоростей располагается на границе выходного отверстия при условии

$$\bar{r}_1 \cdot Re = 2,51. \quad (1.6)$$

При значениях параметра  $\bar{r} \cdot Re < 2,51$  максимум окружных скоростей смещается в зону основного вихря  $r_{\max} > r_1$ . В этом случае, как и для зоны выходного отверстия, исследование выражения для окружной скорости (1.4) на экстремум дает положение и величину максимальной скорости. Решение полученного при этом трансцендентного уравнения хорошо описывается следующей аппроксимационной зависимостью:

$$r_m^* = 0,344 + 1,65/Re \cdot \bar{r}_1. \quad (1.7)$$

Значения максимальной скорости  $V_{\varphi m}$ , используя выражения (1.5) и (1.7), можно рассчитать по уравнениям (1.3) и (1.4). Так, в зоне выходного отверстия  $r_m < r_1$  величина максимальной скорости определяется

$$V_{\varphi m}/V_{\varphi 0} = 0,45 \frac{Re^{3/2} \cdot \bar{r}_1^{1/2}}{C_3} e^{-\frac{Re \cdot \bar{r}_1}{2}}. \quad (1.8)$$

Полученные соотношения для ламинарного режима течения могут быть распространены и на турбулентное течение в камере при известном значении турбулентной вязкости или турбулентного числа Рейнольдса. Как показано в работе [5], их значения могут быть определены с использованием гипотезы о равенстве радиуса «зоны разрыва» радиусу максимальной тангенциальной скорости. Тогда число Рейнольдса, рассчитанное по турбулентной вязкости потока, в соответствии с уравнением (1.5) будет определяться только геометрическими параметрами гиперболической вихревой камеры

$$Re_t = 2,51/r_m^{*2} \cdot \bar{r}_1. \quad (1.9)$$

Относительный радиус максимальной скорости  $r_m^*$  связан с геометрической характеристикой  $m$ , как и в плоской камере, уравнением, полученным в работе [10]

$$m^2 = \frac{(1 - r_m^{*2})^2 + 2r_m^{*2}(1 - r_m^{*2}) \ln r_m^*}{2r_m^{*2}}, \quad (1.10)$$

где геометрическая характеристика  $m$  для камеры с одним выходным отверстием равна  $m = \frac{n \cdot b \cdot h_0}{\pi r_1 \cdot R_0}$ , а  $n$  — число тангенциальных щелей,  $b$  — ширина щелей. Можно показать, что для вихревой камеры с выходными отверстиями радиусом  $r_1$  в обоих торцах геометрическая характеристика  $m$  будет в два раза меньше, чем в камере с одним отверстием.

В рассматриваемых условиях, в отличие от камеры с плоскими торцевыми крышками, турбулентное число Рейнольдса  $Re_t$ , как это следует из уравнения (1.9), зависит и от отношения радиуса выходного отверстия к радиусу камеры  $\bar{r}_1$ . Следовательно, турбулентные числа Рейнольдса в гиперболической вихревой камере, имеющей такую же начальную высоту  $h_0$ , радиус камеры  $R_0$ , радиус выходного отверстия  $r_1$  и тот же закручивающий аппарат, как и у плоской камеры, будет выше на величину  $1/\bar{r}_1$ .

На рис. 3 представлены результаты расчета распределения тангенциальных скоростей в гиперболической (кривая 1) и плоской (кривая 2) вихревых камерах с  $r_1/R_0 = 0, 1$ . Расчет проводился для камер, имеющих кроме профилирования торцевых стенок у гиперболической камеры одинаковую геометрию; при этом  $Re_t = 30$  и 3 для гиперболической и плоской камер соответственно. Уровень окружных скоростей в такой гиперболической камере, как это следует из рис. 3, выше, чем в плоской и

максимальные значения окружных скоростей отличаются приблизительно в 1,3 раза.

С увеличением числа Рейнольдса (для плоской при  $Re_t \geq 5$ , а для гиперболической камеры  $Re_t \geq 5 \cdot \bar{r}_1^{-1}$ ) расчетные профили окружных скоростей в плоской и гиперболической камерах практически совпадают между собой. Это видно из рис. 3, где линией 3 представлен профиль тангенциальных скоростей в плоской и гиперболической камерах при  $Re = 5$  и 23 соответственно при относительном радиусе выходного отверстия  $\bar{r}_1 = 0,22$ .

## 2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АЭРОДИНАМИКИ ВИХРЕВОЙ КАМЕРЫ С ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ КРЫШКАМИ

Для проверки полученных аналитических зависимостей экспериментально исследованы поля скоростей в вихревых камерах с гиперболической и плоской торцевыми крышками.

Опыты проводились на вихревой камере, имеющей следующие параметры (см. рис. 1): начальная высота  $h_0 = 6 \cdot 10^{-2}$  м, радиус камеры  $R_0 = 0,18$  м, радиус выходного отверстия  $r_1 = 4 \cdot 10^{-2}$  м, а относительный радиус  $\bar{r}_1 = r_1/R_0 = 0,22$ ; торцевые стенки камеры были спрофилированы по гиперболоиду вращения. Воздух в камеру подавался по боковой поверхности через цилиндрический завихритель, имеющий 36 щелей размерами  $3,1 \times 60 \cdot 10^{-3}$  м; угол наклона щелей к радиусу камеры составлял  $90^\circ$ . При изучении плоской вихревой камеры геометрия завихрителя, размеры камеры и выходного отверстия были такими же, как и для гиперболической.

Измерение профилей скоростей и давлений в камере производилось двумя способами: по отбору статического давления на торце камеры через отверстия  $\sim 0,3$  мм и одноканальным цилиндрическим зондом  $d \approx 3$  мм, протянутым по диаметру камеры на половине ее высоты. Приемное отверстие зонда 0,3 мм. Такое расположение измерительного зонда позволяло измерять профили окружных и осевых скоростей и распределение полного и статического давлений по радиусу вихревой камеры. Методика измерения и обработки результатов при помощи цилиндрического зонда подробно изложена в работе [11]. При обработке экспериментальных данных учитывалась также поправка на торможение потока зондом.

При измерении давления в гиперболической камере необходимо учитывать, что вследствие кривизны линий тока давление по высоте будет изменяться. Оценим величину градиента давления по высоте вихревой камеры. Для этого запишем уравнение движения в осевом направлении, считая в первом приближении это течение невязким

$$u_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (2.1)$$

Осевая компонента скорости  $V_z$  для зоны основного вихря может быть найдена из уравнения неразрывности для этой области с учетом, что  $u_r(z, r) = \text{const}$ :

$$V_z = U_{r_0} \frac{z}{r}. \quad (2.2)$$

Осевая скорость  $V_z$  принимает максимальное значение на радиусе, равном выходному отверстию  $r = r_1$  и  $z = h/2$

$$\frac{V_{z \max}}{V_{\varphi 0}} = Ro_0/4\pi, \quad (2.3)$$

где число Россби, характеризующее интенсивность крутки потока на вхо-

де в камеру, равно  $Ro_0 = Q_0/V_{\varphi_0} R_0^2$ , а  $Q = u_{r_0} \cdot 2\pi R_0 \cdot h_0$  — объемный расход через вихревую камеру.

Решением (2.1) с использованием (2.2) будет

$$P = P_{\pi} - \frac{3\rho u_{r_0} z^2}{4r^2}, \quad (2.4)$$

где  $P_{\pi}$  — давление в средней плоскости камеры ( $z=0$ ) для текущего значения радиуса  $r$ . Величину давления  $P_{\pi}$  можно найти, проинтегрировав уравнения движения в радиальном направлении

$$P_{\pi} - P_0 = \int_{R_0}^r \frac{\rho V_{\varphi}^2}{r} dr. \quad (2.5)$$

Здесь  $P_0$  — статическое давление на периферии камеры. При изменении окружной скорости по закону  $V_{\varphi} \cdot r^n = \text{const}$ , используя (2.5), из (2.4) получим распределение давления по высоте камеры

$$\frac{P - P_0}{V_{\varphi_0}^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{n} - \frac{3z^2}{8\pi} Ro_0^2 \right). \quad (2.6)$$

$\rho \neq \frac{1}{2}$

Для вихревой камеры, используемой в экспериментах, число  $Ro_0 \approx 0,15$ , при этом максимальное значение осевой составляющей скорости не превышало 1,5% от тангенциальной скорости на периферии камеры. Максимальное изменение давления по высоте камеры, как показали оценки по (2.6), было не более 0,6% от давления при  $z=0$ .

Результаты измерений распределения статического давления при помощи отбора на торцевой стенке камеры и цилиндрическим зондом в средней плоскости камеры практически совпали между собой. Это подтверждает данные проведенных оценок.

Однако при  $Ro_0 \gg 1$  осевая компонента скорости и градиент давления по высоте камеры могут достигать больших величин, и влияние кривизны линий тока на эти параметры в гиперболической камере необходимо учитывать. Следует отметить, что результаты измерений окружной составляющей скорости, полученные при помощи зонда, практически совпадали с измерениями статического давления по радиусу камеры.

Один из распространенных способов опытного определения тангенциальной составляющей скорости в вихревой камере основан на использовании уравнения движения газа в радиальном направлении

$$u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{V_{\varphi}^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}, \quad (2.7)$$

при этом градиент статического давления по радиусу камеры находится непосредственно из эксперимента.

Для гиперболической камеры первый член соотношения (2.7) в зоне основного вихря равен нулю, следовательно, такой способ определения  $V_{\varphi}$  является корректным. При измерениях в плоской камере с распределением окружной составляющей скорости  $V_{\varphi} \cdot r^n = \text{const}$  (2.7) можно представить

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = \frac{V_{\varphi_0}^2}{r^{2n+1}} \left[ 1 + \frac{Ro_0^2 \cdot r^{2n}}{h_0^2 \cdot 4\pi^2} \right]. \quad (2.8)$$

Здесь  $h_0 = h_0/R_0$ .

Интегрируя (2.8), получим

$$\frac{P_{\pi} - P_0}{\rho V_{\varphi_0}^2} = \frac{1}{2n} (1 - \bar{r}^{-2n}) + \frac{Ro_0^2}{4\pi^2 h_0^2} \ln \bar{r}. \quad (2.9)$$

Второй член в правой части уравнения (2.9) вызван ускорением течения в плоской камере в радиальном направлении; для гиперболической камеры этот член отсутствует. Оценки, проведенные по соотношению (2.9), показали, что для исследованных камер изменение давления по радиусу камеры за счет радиального течения невелико и не превышает 0,5% от локального значения статического давления. Этот вывод подтвержден экспериментально — профили окружных скоростей, измеренные с помощью зонда и по отбору статического давления, как в гиперболической, так и в плоской камерах совпали с хорошей точностью.

На рис. 4 представлены результаты измерений распределения статического давления по радиусу гиперболической (точки 1) и плоской (точки 2) камер при одном и том же расходе воздуха  $G = 90$  г/с. Штриховой линией здесь и на последующих рисунках нанесена граница выходного отверстия камеры. Видно, что значение статических давлений в гиперболической камере значительно выше, чем в плоской: в гиперболической камере соответственно возрастает градиент давления по ее радиусу. Линия 3 на рисунке соответствует расчету по формуле

$$\Delta P = \int_1^{\bar{r}} \frac{\rho V_{\varphi}^2}{r} d\bar{r} \quad (2.10)$$

с использованием теоретических зависимостей (1.3) и (1.4) для распределения циркуляций по радиусу гиперболической камеры. Число Рейнольдса для камеры, используемой в экспериментах, рассчитанное по формулам (1.8) и (1.9), равно 23,7. Сопоставление расчетных и опытных данных свидетельствует о хорошем их соответствии.

Для плоской камеры результаты расчета профиля давления по (2.10) представлены на рис. 4 кривой 4. Турбулентное число Рейнольдса для этой камеры составляло 5, 11. Формулы для распределения циркуляций в расчетах брались из работы [5]. В этом случае совпадения расчетных и экспериментальных данных не наблюдается.

На рис. 5 представлены экспериментальные данные по окружной составляющей скорости в гиперболической (точки 1, 2) и плоской (точки 3) вихревых камерах. Значения окружных скоростей на этом рисунке отне-

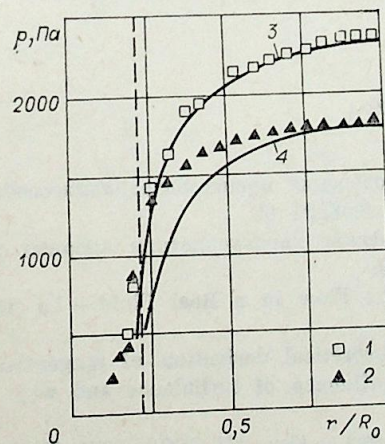


Рис. 4.

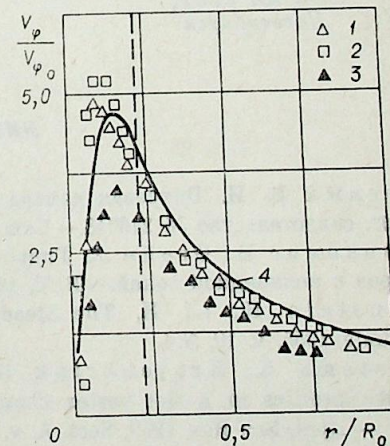


Рис. 5.

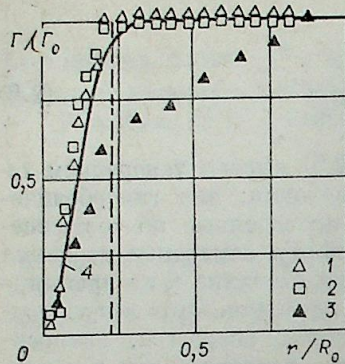


Рис. 6.

Особенно наглядно это отличие между опытными данными, полученными в плоской и гиперболической камерах, можно проследить на рис. 6, где представлено измерение относительной циркуляции по радиусу. Обозначения на этом рисунке такие же, как на рис. 5. Величина  $\Gamma_0$  есть расчетная циркуляция потока на входе в вихревую камеру. В гиперболической камере до радиуса выходного отверстия циркуляция по радиусу остается постоянной и равной ее значению на входе, а в зоне выходного отверстия она практически линейна; в плоской же камере в области основного вихря течение значительно отличается от потенциального ( $\Gamma = \text{const}$ ).

Выше показано, что в исследованных камерах число Россби на периферии мало ( $Ro_0 \approx 0,15$ ), поэтому в соответствии с зависимостью (2.9) влияние градиента радиальной скорости на распределение давлений и скоростей будет пренебрежимо малым.

Такое сильное торможение потока в плоских камерах некоторые авторы [12—14] объясняют перетечками газа по торцевой поверхности камеры. В гиперболической камере вращение потока в этой зоне, как это следует из рис. 6, происходит практически без потерь момента количества движения, что объясняется, по всей вероятности, значительно меньшим влиянием торцевых пограничных слоев. Однако для подтверждения этого экспериментального факта необходимы детальные измерения торцевых пограничных слоев для камеры с гиперболическими крышками.

Институт теплофизики  
СО АН СССР,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
29/XII 1980

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кислых В. И. Вихревая камера для проведения процессов теплообмена. Авт. свидетельство № 216618.— Бюл. изобр., 1968, № 15.
2. Джекомис В., Огейн Х. Гидродинамические характеристики ядерных реакторов с коллоидной зоной.— ВРТ, 1971, № 9.
3. Einstein H., Li H. The Steady Vortex Flow in a Real Fluid.— La Houill Blande, 1955, v. 10, N 4.
4. Rietema K., Krajenbrink H. J. Theoretical derivation of tangential velocity profiles in a flat vortex chamber— influence of turbulence and wall friction.— Appl. Sci. Res, 1959, Sect. A, v. 8.
5. Гольдштик М. А. К теории эффекта Ранка.— Изв. АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение, 1963, № 1.

6. Шваб В. А. К вопросу обобщения полей скорости турбулентного потока в циклонной камере.— ИФЖ, 1963, т. 6, № 2.
7. Коваль В. П., Михайлов С. Л. Распределение скоростей и давления жидкости в вихревой камере.— Теплоэнергетика, 1972, № 2.
8. Вулис Л. А., Устименко Б. П. Об аэродинамике циклонной топочной камеры.— Теплоэнергетика, 1954, № 9.
9. Штым А. Н., Михайлов П. М. К аэродинамике закрученного потока в циклонно-вихревых камерах.— Изв. ВУЗов. Сер. Энергетика, 1965, № 11.
10. Гольдштик М. А., Леонтьев А. К., Палеев В. И. Аэродинамика вихревой камеры.— Теплоэнергетика, 1961, № 2.
11. Смольский И. И. Об особенностях измерения скорости и давления в вихревой камере.— В кн.: Теплофизика и физическая гидродинамика. Новосибирск, 1978.
12. Уормли Д. Аналитическая модель несжимаемого потока в коротких вихревых камерах.— Теорет. основы инж. расчетов, 1969, № 2.
13. Левеллен В., Росс Д., Розенцвейг М. Ограниченные вихревые течения при взаимодействии с пограничным слоем.— РТИК, 1966, № 3.
14. Сухович Е. П. Аэродинамика вихревой камеры.— Изв. Латв. ССР. Сер. физ.-техн. наук, 1969, № 4.

В. П. ЛЫСЕНКО, А. А. МАСЛОВ, Н. В. СЕМЕНОВ

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ НАГРЕВА  
НА ПЕРЕХОД И УСТОЙЧИВОСТЬ  
СВЕРХЗВУКОВОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Положение перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный существенно зависит от температуры поверхности модели, изменяя которую, можно управлять течением в пограничном слое, т. е. делать его по необходимости либо ламинарным, либо турбулентным. Влияние температуры поверхности модели на переход пограничного слоя экспериментально исследовалось многими авторами, но полученные результаты неоднозначны [1]. Наиболее многочисленны и противоречивы эксперименты по изучению влияния охлаждения поверхности обтекаемого тела на положение перехода. Причины некоторых противоречий обнаружены и объяснены в работах [2, 3]. Влияние нагрева поверхности на переход исследовано меньше, но полученные результаты также неоднозначны. В работах [4, 5] небольшое увеличение температуры поверхности (относительно ее значения в случае адиабатического нагрева) приводило к уменьшению числа Рейнольдса перехода, а в [6, 7] — к увеличению.

Возникновение турбулентного режима в пограничном слое существенно зависит от характера развития возмущений в предпереходной области, и для того, чтобы разобраться во влиянии на переход тех или иных факторов, недостаточно фиксировать только число Рейнольдса перехода. Более оправданным будет исследование перехода совместно с устойчивостью пограничного слоя. Именно такой подход позволил понять причины дестабилизирующего влияния охлаждения поверхности на переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный при гиперзвуковых скоростях [3].

Такой подход уже давно рекомендуется в литературе, но работа [5] пока единственная, где эти рекомендации осуществлены. Для нагретых моделей экспериментально исследовался только переход пограничного слоя, исследований устойчивости не проводилось.

В данной работе ставилась задача провести комплексное экспериментальное исследование перехода и устойчивости (включая линейную и нелинейную фазы развития возмущений) пограничного слоя на пластине с изменяемой температурой поверхности.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОБОРУДОВАНИЕ

Эксперименты были проведены в аэродинамической трубе ИТПМ СО АН СССР Т-325 с сечением рабочей части 200 × 200 мм. Описание этой трубы приведено в [8], в [9] даны характеристики турбулентности потока в рабочей части Т-325.

Температура в форкамере, статическое давление в рабочей части и полное в форкамере определялись стандартной аппаратурой, которой

оборудованы аэродинамические трубы, что позволяло найти единичное число Рейнольдса, рассчитанное на 1 м,  $Re_1$  со среднеквадратичной погрешностью, не превышающей  $\pm 2\%$ .

Исследуемая модель представляла собой плоскую пластину длиной 450, шириной 200 и толщиной 9 мм с углом скоса передней кромки  $20^\circ$ . Материал пластины — нержавеющая сталь Х18Н9Т. Пластина устанавливалась в центральной плоскости рабочей части аэродинамической трубы под нулевым углом атаки.

В экспериментах поверхность модели нагревалась от температуры восстановления до  $140^\circ\text{C}$ . Температурный фактор  $T_w$  (отношение температуры поверхности к температуре восстановления) изменялся в пределах  $1,0 < T_w < 1,56$ . Изменение температуры поверхности осуществлялось с помощью электронагревателя — внутри пластины была уложена лента высокого сопротивления из стали Х15Н60, через которую пропускался электрический ток. Длина нагреваемого участка, начинавшегося практически от передней кромки, — 200 мм.

Температура поверхности модели определялась с помощью одиннадцати термопар «нержавеющая сталь — константан». Константановый провод припаивался заподлицо с поверхностью нагреваемого участка, вторым выводом была сама модель. Термоэлектродвижущая сила термопар регистрировалась многоканальной измерительной системой DACQ-2ВВ. Погрешность определения температурного фактора для каждой термопары не превышала  $\pm 1\%$ .

ВЛИЯНИЕ НАГРЕВА НА ПЕРЕХОД

В первой серии экспериментов определялся характер изменения чисел Рейнольдса перехода при увеличении температуры поверхности модели. Подробные параметрические исследования по влиянию числа Маха и единичного числа Рейнольдса  $Re_1$  на положение перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный при охлаждении модели на этой же установке и пластине точно таких же геометрических размеров проведены в [10]. Поэтому в данной работе проведены измерения только для

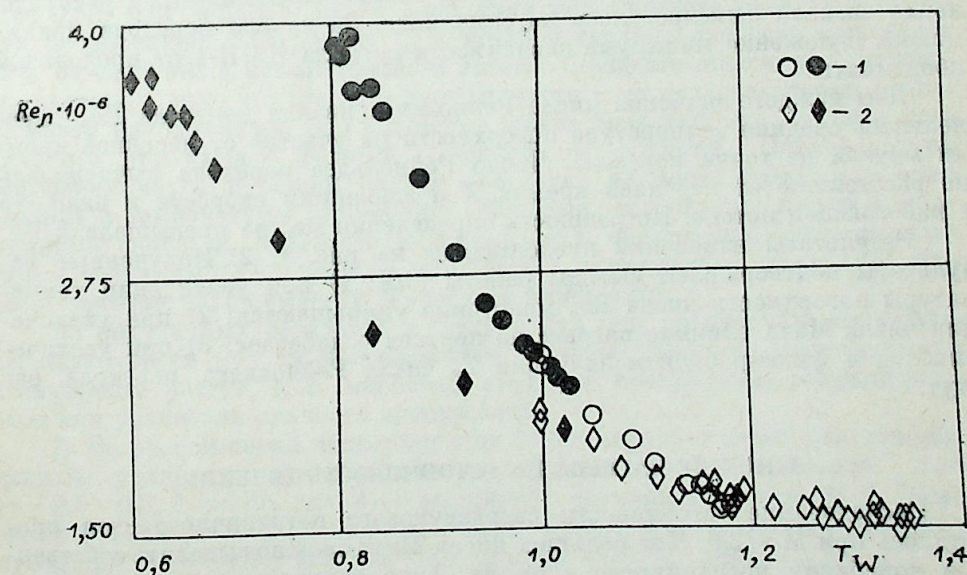


Рис. 1.

$Re_1 = 25 \cdot 10^6$  1/м;  $M = 2,0$  (1); 4,0 (2). Заштрихованные значки — данные [10].

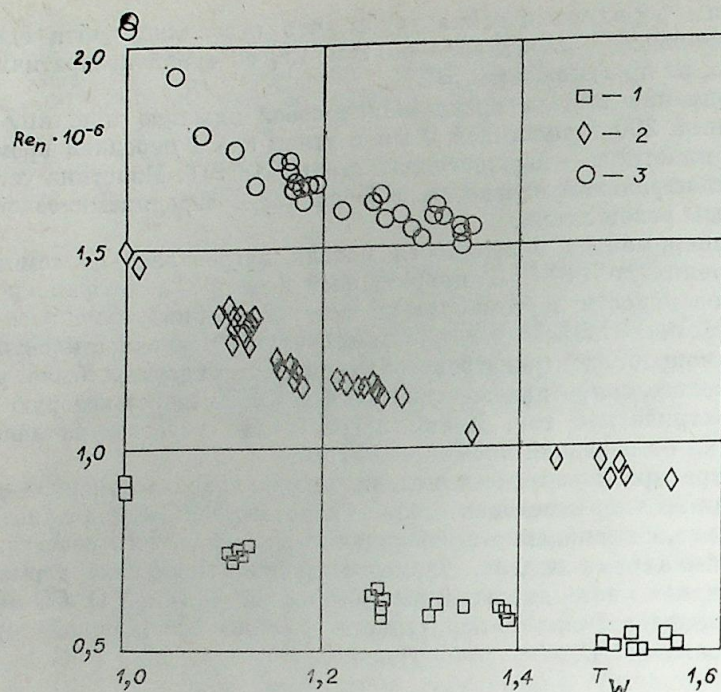


Рис. 2.  
 $M=4,0$ ;  $Re_1=10$  (1); 15 (2),  $25 \cdot 10^6$  1/м (3).

двух значений числа Маха и трех единичных чисел Рейнольдса, чтобы проверить для значений  $T_w > 1$  основные выводы работы [10].

Как и в [10], передняя кромка пластины была затуплена до 0,1 мм, а положение перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный на модели определялось по распределению полного давления вдоль ее поверхности. Использовалась трубка полного напора с внешними размерами  $1,3 \times 0,3$  мм и внутренними  $1,2 \times 0,2$  мм, датчик ДМИ-1 и преобразователь ИВП-2. Трубка скользила вдоль поверхности модели, а распределение сигнала фиксировалось на самописце. За начало перехода принималось положение минимума зависимости сигнала ДМИ-1 от продольной координаты.

Для каждого значения числа Рейнольдса начала перехода  $Re_n$  определялась средняя температура поверхности на участке от передней кромки модели до точки перехода. Число Рейнольдса перехода вычислялось по расстоянию от передней кромки  $X$  и значениям скорости и вязкости в набегающем потоке. Погрешность определения  $Re_n$  не превышала  $\pm 6\%$ .

Результаты измерений представлены на рис. 1, 2. Полученные результаты подтверждают выводы работы [10]: 1) при увеличении температуры поверхности числа  $Re_n$  монотонно уменьшаются; 2) при увеличении числа Маха влияние нагрева на переход ослабевает; 3) при увеличении  $Re_1$  и фиксированном значении  $T_w$  числа Рейнольдса перехода растут.

#### ВЛИЯНИЕ НАГРЕВА НА УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ

Исследование устойчивости сверхзвукового пограничного слоя проводилось при  $M = 2,0$ . Для больших чисел Маха сложно выделить собственные колебания пограничного слоя на фоне сильного звукового поля, излучаемого турбулентным пограничным слоем стенок сопла и рабочей части аэродинамической трубы [11, 12].

Измерения характеристик устойчивости проводили термоанемометром постоянного тока ТПТ-2 [13] и датчиками с золоченой вольфрамовой нитью диаметром 6 мкм и длиной 1,5 мм. В экспериментах использовали среднеквадратичные вольтметры фирм «DISA» и «Brüel & Kjaer» (тип 2606), анализаторы спектра FAT-1 фирмы «Rohde & Schwarz» и С4-12. Измерения производили как непосредственно во время эксперимента, так и при анализе записей, сделанных во время эксперимента на видеоманитофонах объединения ЛОМО и «Электроника-501-Видео».

Передняя кромка модели была заострена до величины  $\leq 0,02$  мм. Значения температурного фактора вычисляли для участка поверхности, на котором измеряли характеристики устойчивости. Кривые нейтральной устойчивости определяли по методике, описанной в [12].

Полученные в работе результаты представлены в безразмерных переменных. За характерный линейный размер принята величина  $(Re_1/x)^{-1/2}$ , тогда число Рейнольдса определялось соотношением  $Re = (Re_1 \cdot x)^{1/2}$ ; поперечная координата (переменная Блазиуса)  $\eta = y(Re_1/x)^{1/2}$ , где  $y$  — расстояние по нормали к поверхности пластины; безразмерный частотный параметр  $F = 2\pi f / (Re_1 \cdot U)$ , здесь  $f$  — частота возмущения,  $U$  — скорость в невозмущенном потоке. Погрешность определения для  $Re$  не превышала 4%; для  $F$  — 3%; для  $\eta$ , соответствующего максимальным возмущениям, — 6%.

1. В первой серии экспериментов измерены распределения интенсивности возмущений поперек пограничного слоя для различных температур поверхности. Значение  $Re_1$  выдерживалось в пределах  $(4,6 \div 4,7) \times 10^6$  1/м. Измерения проводили в сечении  $x = 100$  мм, где пограничный слой был заведомо ламинарным. Число Рейнольдса  $Re$  изменялось от 680 до 696. Результаты измерений отражены на рис. 3,  $A = \langle e \rangle / \langle e \rangle_\infty$  — безразмерная амплитуда возмущения (отношение среднеквадратичного значения пульсаций напряжения на нити датчика термоанемометра к значению в невозмущенном потоке).

Как видно из рисунка, интенсивность пульсаций в пограничном слое существенно превышает интенсивность пульсаций в невозмущенном потоке. Для всех измерений внутри пограничного слоя отмечается четкий максимум, который при нагреве поверхности сдвигается к границе пограничного слоя, занимая последовательно положения, соответствующие 0,58; 0,68 и 0,658, где  $\delta$  — толщина пограничного слоя, определенная по значению координаты  $\eta$ , в которой средняя скорость составляет 99% от скорости в невозмущенном потоке. Смещение максимума, вероятно, связано с тем, что профиль пограничного слоя становится при нагреве менее наполненным. Это смещение может быть вызвано также и увеличением при нагреве фазовой скорости возмущений. Однако датчик термоанемометра в общем случае реагирует на возмущения массового расхода и температуры торможения. Фазовые соотношения между возмущениями скорости, плотности и температуры неизвестны. Поэтому максимум величины  $\langle e \rangle$  может не совпадать с критическим слоем (где скорость течения равна фазовой скорости возмущений).

Из полученных результатов следует, что при увеличении температуры поверхности модели максимальные по слою значения интенсивности возмущений растут, т. е. меняются свойства ламинарного пограничного слоя как усилителя внешних возмущений.

2. Во второй серии экспериментов более подробно измерены коэффициенты усиления возмущений, определяемые соотношением:  $\alpha_i = -0,5 \cdot d(\ln A_i) / d Re$ , где  $A_i$  — амплитуда возмущения частоты  $f$ . Измерения проведены в слое, где амплитуда возмущения  $A$  достигала максимума, при  $Re_1 = (4,4 \div 4,9) \cdot 10^6$  1/м, т. е.  $Re = (650 \div 690)$ .

Как видно из рис. 4, при последовательном нагреве поверхности модели последовательно возрастают значения коэффициентов усиления возмущений в пограничном слое. При нагреве увеличивается диапазон не-

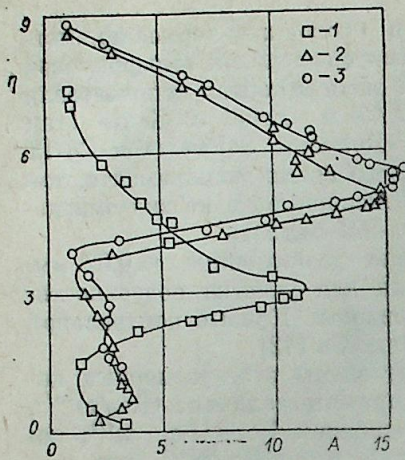


Рис. 3.

$T_w = 1,0$  (1); 1,27 (2); 1,45 (3).

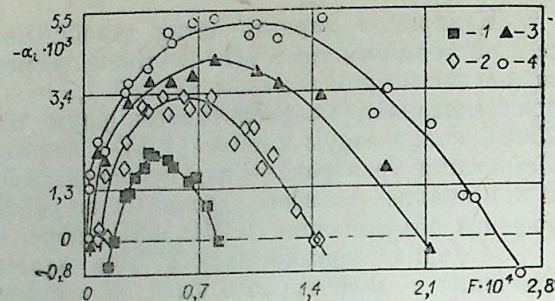


Рис. 4.

$T_w = 1,0$  (1); 1,15 (2); 1,31 (3); 1,44 (4).

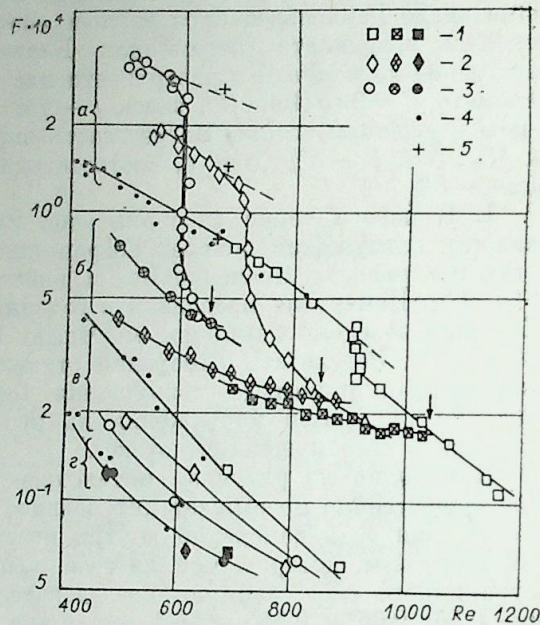


Рис. 5.

$T_w = 1,0$  (1); 1,15 (2); 1,43 (3). Точки 4 из [10] для случая теплоизолированной поверхности при  $T_w = 1,0$ ,  $M = 2,0$  и  $3 < Re_1 \cdot 10^{-6} < 12$ .

устойчивых частот, причем в основном за счет высоких частот, и увеличивается частота, соответствующая максимальным значениям коэффициентов роста. Такое поведение коэффициентов усиления возмущений при изменении температуры поверхности полностью соответствует выводам линейной теории устойчивости по отношению к возмущениям первой моды [11].

3. В последней серии экспериментов исследовалась нелинейная фаза развития возмущений в пограничном слое. Измерения проведены при  $Re_1 = (9,5 \div 9,9) \cdot 10^6$  1/м. В этой серии исследований строились нейтральные кривые, ограничивающие область нарастания возмущений в плоскости ( $F$ ,  $Re$ ). Измерения велись в слое с максимальными амплитудами возмущений. Полученные результаты представлены на рис. 5: *a* — верхние ветви нейтральных кривых; *b* — положение максимальных амплитуд в спектре возмущений; *z* — нижние ветви нейтральных кривых; *z* — нейтральная звуковая ветвь (положение максимума, вызванного взаимодействием звука со сверхзвуковым пограничным слоем [12]).

Положение верхней и нижней ветвей кривых нейтральной устойчивости существенно зависит от величины температурного фактора. На положение нейтральной звуковой ветви (насколько можно судить по небольшому числу полученных точек) изменение температуры поверхности оказывает значительно меньшее влияние, что согласуется с результатами расчетов, проведенных в [15, 16].

Рассмотрим данные, полученные для  $T_w = 1,0$ . Для  $Re < 800$  результаты данной работы полностью совпадают с результатами работы [14],

где исследовалась линейная фаза развития возмущений. Для  $Re = 900$  верхняя ветвь нейтральной кривой отклоняется вниз, что свидетельствует об интенсивных нелинейных процессах. При числе Рейнольдса, соответствующем пересечению линии максимальных амплитуд с верхней ветвью, резко возрастали суммарные среднеквадратичные пульсации напряжения на датчике термоанемометра, что указывает начало перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный (стрелки на рис. 5).

Аналогичная картина развития возмущений наблюдалась и для других значений  $T_w$ . Следует отметить только, что при увеличении  $T_w$  расширяется область неустойчивых частот, и вследствие увеличения коэффициентов роста линия максимальных амплитуд смещается вверх, нелинейные процессы наступают при меньших числах  $Re$  и протекают более интенсивно.

Полученные в данной работе верхние ветви нейтральных кривых отделяют область роста возмущений от области затухания. Пока возмущения малы, их амплитуда изменяется по линейным законам и возмущения обмениваются энергией со средним течением. Продолжение верхней ветви в область нелинейного взаимодействия отделяет область роста возмущений от области затухания, вызванного дисперсией (перераспределением энергии по спектру).

До тех пор, пока возмущения растут по линейным законам, спектр возмущений деформируется таким образом, что его максимум сдвигается в область низких частот. По мере того, как амплитуды возмущений растут, нелинейные процессы замедляют рост возмущений с максимальными амплитудами, приближая линию максимальных амплитуд к верхней ветви нейтральной кривой, которая также деформируется в результате нелинейных взаимодействий.

Первые признаки турбулентного режима наступают в том случае, когда дисперсия охватывает низкие частоты — частоты, соответствующие максимальным амплитудам и меньше, до нижней ветви кривой нейтральной устойчивости.

Отмеченные в данной работе закономерности, видимо, носят достаточно общий характер. Так, в [3] аналогичные выводы были сделаны при исследовании устойчивости и перехода гиперзвуковых пограничных слоев на охлаждаемом конусе. Отличие от наблюдений данной работы состояло в том, что переход вызывался возмущениями второй моды, а верхняя ветвь продолжалась в область нелинейного взаимодействия плавно, без изломов и изгибов. Более подробно результаты работы [3] представлены в [1].

## ОБСУЖДЕНИЕ

Полученные в данной работе результаты показывают, что при испытаниях в аэродинамической трубе Т-325 переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный на модели определяется устойчивостью исходного ламинарного течения. Переход вызывается возмущениями первой моды, на которую нагревание оказывает дестабилизирующее влияние, увеличивая коэффициенты роста возмущений и расширяя диапазон неустойчивых частот.

Можно выделить два основных фактора, оказывающих влияние на положение перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный: 1) свойства пограничного слоя как усилителя внешних возмущений (его восприимчивость, коэффициенты усиления, полоса пропускания и т. п. [17]); 2) спектральный состав и интенсивность внешних возмущений, т. е. начальные данные для возникновения турбулентности.

В экспериментах при фиксированном режиме аэродинамической трубы (фиксированных  $M$  и  $Re_1$ ), но различном  $T_w$ , состав внешних возму-

щений не изменялся. Слабо менялась восприимчивость пограничного слоя, так как возмущения в пограничном слое вызывались звуком, излучаемым турбулентным пограничным слоем сопла и рабочей части [9], на взаимодействие которого со сверхзвуковым пограничным слоем изменение температуры поверхности оказывает слабое влияние (см. положение звуковой нейтральной ветви на рис. 5 и расчеты [15]). Сильно изменяются характеристики пограничного слоя как усилителя внешних возмущений — расширяется диапазон неустойчивых частот, больше становятся коэффициенты усиления. Возмущения в пограничном слое на нагретой поверхности растут более интенсивно, вызывая преждевременное начало нелинейных процессов.

При изменении  $Re_1$ , но фиксированном значении  $T_w$ , изменяются состав и амплитуда внешних возмущений, а свойства пограничного слоя не изменяются. В данных исследованиях распределение амплитуды в спектре возмущений было таким, что начало нелинейных процессов определяется амплитудами возмущений с частотами  $0,5 < F \cdot 10^5 < 4$  (эти частоты попадают во внутреннюю часть кривой нейтральной устойчивости непосредственно перед началом перехода).

Достаточно подробные исследования состава турбулентности в рабочей части Т-325 проведены в [9]. Для рассматриваемого диапазона безразмерных частот и  $Re_1 > 10 \cdot 10^6$  1/м интенсивность возмущений в этой установке при увеличении  $Re_1$  падает, что уменьшает уровень начальных возмущений в пограничном слое и затягивает начало перехода. При уменьшении единичных чисел Рейнольдса меньше величины  $10 \cdot 10^6$  1/м интенсивность возмущений также начинает падать, что должно привести к увеличению чисел Рейнольдса перехода. Наиболее отчетливо такое увеличение должно проявиться при больших нагревах поверхности.

Действительно, на рис. 5 нанесены нейтральные точки (5) для верхней ветви, полученные для  $Re_1 = 5 \cdot 10^6$  1/м во второй серии экспериментов. Для  $T_w = 1,0$  и  $1,15$  они совпадают с данными для  $Re_1 = 10 \cdot 10^6$  1/м; для  $T_w = 1,43$  — с продолжением верхней ветви, т. е. для  $Re_1 = 10 \cdot 10^6$  1/м уже наступили нелинейные процессы, а для  $Re_1 = 5 \cdot 10^6$  1/м возмущения еще развиваются по линейным законам.

В целом, зависимость чисел Рейнольдса перехода от единичного числа Рейнольдса может принимать самый различный характер, определяемый тем, каков спектральный состав внешних возмущений. Так в [10] при глубоком охлаждении поверхности числа  $Re_1$  немонотонно зависели от  $Re_1$ , что также находилось в полном соответствии с измерениями спектрального состава возмущений в рабочей части установки.

Наиболее сложно сопоставить измерения перехода при различных числах Маха. В этом случае изменяются как внешние возмущения, так и пограничные слои на модели. Наиболее трудными остаются вопросы о выделении собственных колебаний пограничного слоя на фоне сильного звукового поля и о механизме возбуждения собственных колебаний звуком. Для решения этих вопросов пока нет ни теоретических предположений, ни экспериментальных наблюдений.

## ВЫВОДЫ

В данной работе исследованы линейная и нелинейная фазы развития возмущений в сверхзвуковом ламинарном пограничном слое, что позволило выявить особенности перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный на модели с нагревом поверхности при испытаниях в аэродинамической трубе. Во всех экспериментах переход вызывался возмущениями первой моды. При увеличении температурного фактора росли коэффициенты усиления возмущений и расширялся диапазон неустойчи-

вых частот, что вызывало преждевременные нелинейные процессы. Первые признаки перехода наступали при числах Рейнольдса, соответствующих пересечению верхней ветви кривой нейтральной устойчивости и линии максимальных амплитуд. Влияние единичных чисел Рейнольдса на переход было связано с изменением интенсивности и спектрального состава возмущений в рабочей части установки.

Институт теоретической  
и прикладной механики  
СО АН СССР,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
21/XI 1980

## ЛИТЕРАТУРА

- Гапонов С. А., Маслов А. А. Развитие возмущений в сжимаемых потоках. Новосибирск: Наука, 1980.
- Лысенко В. И., Маслов А. А. Экспериментальное исследование перехода в сверхзвуковом пограничном слое на охлаждаемой пластине. Препринт № 4. Новосибирск: ИТПМ, 1980.
- Demetriades A. New experiments on hypersonic boundary layer stability including wall temperature effects. Proc. of the 1978 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, University Press, 1978.
- Eber G. R. Recent investigation of temperature recovery and heat transmission on cones and cylinders in axial flow NOL Aeroballistics Wind Tunnel.— J. Aeronaut. Sci., 1952, 19, 1.
- Ричардс Б. Е., Столлер Д. Л. Новые эксперименты по обратному движению точки перехода при гиперзвуковых скоростях.— РТнК, 1966, 4, 12.
- Харвей, Стейнбек, Андерс, Кэри. Исследование возмущений в истекающем потоке и перехода пограничного слоя на стенках сопла с числом Маха 5.— РТнК, 1975, 13, 3.
- Мэдделон Д. В. Влияние переменной температуры стенки и температуры торможения на число Рейнольдса перехода при  $M=6$ , 8.— РТнК, 1969, 7, 12.
- Багаев Г. И., Лебига В. А., Приданов В. Г., Черных В. В. Сверхзвуковая аэродинамическая труба Т-325 с пониженной турбулентностью.— В кн.: Аэрофизические исследования. Новосибирск: ИТПМ, 1972.
- Лебига В. А. Экспериментальные исследования характеристик турбулентных течений при сверхзвуковых скоростях. Канд. дис. Новосибирск, 1977.
- Лысенко В. И., Маслов А. А. Экспериментальное исследование влияния чисел Маха, Рейнольдса и притупления передней кромки на переход пограничного слоя при охлаждении поверхности модели.— Препринт № 18. Новосибирск: ИТПМ, 1980.
- Кендолл Дж. М. Экспериментальное исследование процесса перехода к турбулентному режиму в сверхзвуковом и гиперзвуковом пограничных слоях на модели в аэродинамической трубе.— РТнК, 1975, 13, 3.
- Лебига В. А., Маслов А. А., Приданов В. Г. Экспериментальное исследование устойчивости сверхзвукового пограничного слоя плоской пластины с притуплением передней кромки.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 4.
- Елфимов А. Г., Лебига В. А., Черных В. В. Термоанемометр постоянного тока ТПТ-2 для измерения пульсаций в сверхзвуковых потоках.— Всесоюз. симпозиум по методам аэродин. исследований. Тез. докл. Новосибирск: ИТПМ, 1976.
- Lebiga V. A., Maslov A. A., Pridanov V. G. Experimental investigation of the stability of supersonic boundary layer on a flat insulated plate.— Archives of Mechanics, 1979, 31, № 3.
- Мак Л. М. Линейная теория устойчивости и проблемы перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный при сверхзвуковом течении.— РТнК, 1975, 13, 3.
- Гапонов С. А. Взаимодействие сверхзвукового пограничного слоя с акустическими возмущениями.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 6.
- Решотко Е. Устойчивость ламинарного пограничного слоя и его переход в турбулентный.— В кн.: Вихревые движения жидкости. М.: Мир, 1979.

Г. С. ХАКИМЗЯНОВ, И. К. ЯУШЕВ

О ЧИСЛЕННОМ РАСЧЕТЕ ДОЗВУКОВЫХ  
УСТАНОВИВШИХСЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ  
ИДЕАЛЬНОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛАХ  
СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

1. Предлагаемый алгоритм предназначен для расчета таких дозвуковых течений, направление потока в которых может сильно изменяться, вызвано, во-первых, сложной геометрией канала, во-вторых, взаимодействием встречных потоков газа, втекающих в канал через проникаемые участки границы. Методы установления при применении к расчету таких течений сходятся обычно очень медленно вследствие присутствия в поле течения значительных областей с малыми скоростями [1], что ведет к большим затратам машинного времени, необходимого для получения решения стационарных уравнений газовой динамики. Поэтому разработка итерационных методов для стационарных уравнений газовой динамики с большой (или приемлемой для нужд практики) скоростью сходимости является актуальной.

В работе в качестве примера приводится расчет дозвуковой части течения в установке с утопленным в камеру соплом. Если во взятом примере в расчет включить трансзвуковую и сверхзвуковую части течения, то приводимый здесь алгоритм может использоваться как элемент итерационного процесса. При этом на каждом шаге итерационного процесса вся область течения разбивается на две пересекающиеся подобласти, в одной из которых течение чисто дозвуковое и для его расчета используется рассматриваемый алгоритм, а в другой — трансзвуковое и сверхзвуковое, где для расчета течения можно использовать другие широко известные методы.

2. Рассматриваемые течения газа описываются следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\operatorname{div} \rho \vec{v} = f_1, \quad (1)$$

$$\rho(\vec{v}, \nabla) \vec{v} + \nabla p = \vec{f}_2, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \rho r H \vec{v} = f_3, \quad (3)$$

где  $\rho$  — плотность;  $p$  — давление;  $\vec{v}$  — вектор скорости с компонентами  $u$  и  $v$ ;  $H$  — полная энтальпия,  $H = e + p/\rho + |\vec{v}|^2/2$ ;  $e$  — удельная внутренняя энергия газа, которая связана с  $p$  и  $\rho$  уравнением состояния  $e = p/\rho(\gamma - 1)$ ;  $\gamma$  — отношение удельных теплоемкостей газа. Функции  $f_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) в правых частях уравнений (1)–(3) определяют влияющие на газ внешние возмущения. Величины  $f_i$  могут определяться из каких-то своих уравнений и зависеть от параметров газа, тогда рассматриваемый

алгоритм можно включить в итерационный процесс, на одном шаге которого по известным  $f_i$ , взятым с предыдущего шага, вычисляются параметры газа, которые используются на другом шаге процесса для вычисления величин  $f_i$ . В данной работе величины  $f_i$  считаются заданными.

Математически задача заключается в нахождении решения уравнений (1)–(3), определенного в области  $\Omega$  плоскости  $x, r$ , где  $x$  и  $r$  — осевая и радиальная координаты. Область  $\Omega$  может иметь несколько входов  $\Gamma_{1,i}$  ( $i = 1, 2, \dots, N_1$ ), иметь выход  $\Gamma_2$ , часть  $\Gamma_0$  ее границы может быть непроницаемой. На выходе  $\Gamma_2$  считается заданной нормальная составляющая вектора потока массы

$$\rho v_n = v_2(s) > 0, \quad (4)$$

где  $v_n = (\vec{v}, \vec{n})$ ;  $\vec{n}$  — внешняя нормаль к границе  $\Gamma$ ;  $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ,  $\Gamma_1 = \bigcup_{i=1}^{N_1} \Gamma_{1,i}$ ;  $s$  — длина дуги границы, отсчитываемая от некоторой точки. На  $\Gamma_0$  задается условие непротекания

$$v_n |_{\Gamma_0} = 0. \quad (5)$$

На входе  $\Gamma_1$  можно задать вектор потока массы и полную энтальпию втекающего газа:

$$\rho \vec{v} |_{\Gamma_1} = \vec{v}_1(s), \quad (6)$$

$$H |_{\Gamma_1} = H_1(s). \quad (7)$$

Предполагается, что выполняется соотношение баланса массы, которое является необходимым условием разрешимости задачи

$$\oint_{\Omega} v r ds = \int_{\Omega} f_1(x, r) dx dr,$$

где

$$v(s) = \begin{cases} \vec{v}_1(s) \cdot \vec{n}(s), & s \in \Gamma_1, \\ 0, & s \in \Gamma_0, \\ v_2(s), & s \in \Gamma_2. \end{cases}$$

Для численного решения поставленной задачи (1)–(7) совершается переход к новым переменным  $\psi, Q, \omega$ , которые вводятся с помощью соотношений

$$\rho u r = \frac{\partial \psi}{\partial r} + \int_{x_0}^x f_1(\xi, r) d\xi, \quad \rho v r = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial x} + \varphi_u - f_{2,1}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial r} - \varphi_v + f_{2,2}, \quad (9)$$

$$\omega = -\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (10)$$

где  $x_0$  — произвольное число,  $f_1(\xi, r) = 0$  при  $(\xi, r) \notin \Omega$ ;  $\varphi_u, \varphi_v$  — компоненты вектора  $\vec{\Phi} = \rho(\vec{v}, \nabla) \vec{v}$ ;  $f_{2,1}, f_{2,2}$  — компоненты вектора  $\vec{f}_2$ . Функцию  $\psi$  будем называть аналогом функции тока, так как при  $f \equiv 0$   $\psi$  совпадает с обычной функцией тока. Вектор-функцию  $\vec{\delta} = \left( \frac{\partial Q}{\partial r}, \frac{\partial Q}{\partial x} \right)$  назовем невязкой градиента давления, смысл которой пояснен ниже,  $\omega$  — функция вихря. В работах [1–3] при численном решении системы стационарных уравнений газовой динамики в качестве независимых брались переменные  $x$  и  $\psi$ . Здесь этот метод неприемлем, так как преобразования пе-

ременных  $(x, r) \rightarrow (x, \psi)$  и  $(x, r) \rightarrow (r, \psi)$  в случае каналов сложной формы являются вырожденными. Переход к независимым переменным  $\varphi, \psi$  [4], где уравнение  $\varphi = \text{const}$  определяет кривую, ортогональную к линии тока  $\psi = \text{const}$ , затруднителен в случае уравнений (1)–(3) с ненулевыми правыми частями, поэтому в рассматриваемой задаче независимые переменные  $x$  и  $r$  оставляют прежними. Для зависимых переменных  $\psi, \omega, Q, H$  составляются уравнения в интегральной форме, так как правые части уравнений (1)–(3) могут быть разрывными функциями, и тогда зависимые переменные либо их производные будут иметь разрывы и дифференциальная форма уравнений теряет смысл.

$$\oint_C \frac{1}{\rho r} \frac{\partial \psi}{\partial n} ds = - \int_{D_C} \omega dx dr - \oint_C \frac{1}{\rho r} \left( \int_{x_0}^x f_1(\xi, r) d\xi \right) n_2 ds, \quad (11)$$

$$\oint_C \rho v_n \omega ds = \oint_C \left( \frac{|\vec{v}|^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + f_{2,\tau} \right) ds, \quad (12)$$

$$\oint_C \frac{\partial Q}{\partial n} ds = \oint_C (-\Phi_\tau + f_{2,\tau}) ds, \quad (13)$$

$$\oint_C r \rho v_n H ds = \oint_{D_C} f_3 dx dr, \quad (14)$$

где  $C$  — произвольный контур, лежащий в области  $\Omega$ , направление обхода которого таково, что ограничиваемая им область  $D_C$  остается слева;  $\vec{n} = (n_1, n_2)$  — внешняя нормаль;  $\vec{\tau}$  — касательный вектор к  $C$ ,  $\frac{\partial \psi}{\partial n} = (\nabla \psi, \vec{n})$ ,  $\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = (\nabla \rho, \vec{\tau})$ ,  $\Phi_\tau = (\vec{\Phi}, \vec{\tau})$ ,  $f_{2,\tau} = (f_2, \vec{\tau})$ .

Заметим, что если решение уравнений (11)–(14) достаточно гладкое, то эти уравнения можно переписать в дифференциальной форме. Тогда уравнения (11) и (13) соответствуют уравнениям эллиптического типа второго порядка, а уравнения (12) и (14) приводят к уравнениям гиперболического типа первого порядка. Достоинством описываемого подхода является то, что систему уравнений газовой динамики удалось расщепить на отдельные уравнения различных типов, для численного решения которых имеются эффективные методы [5]. Разностные уравнения, составленные на основе уравнений (11)–(14) в интегральной форме, почти не отличаются от тех, которые рассматривались в работе [6], посвященной численному расчету квазидвумерных дозвуковых течений газа в каналах сложной формы, поэтому они здесь не приводятся.

Разностные аналоги уравнений (11), (13) решаются методом последовательной верхней релаксации с постоянным выбираемым заранее параметром релаксации, а аналоги уравнений (12) и (14) решаются либо методом бегущего счета, либо методом установления. Первый из этих методов применяется в том случае, когда течение таково, что одна из компонент скорости знакопостоянна во всей области  $\Omega$ , или если область  $\Omega$  можно разбить на конечное число подобластей  $D_i$  так, что в каждой из них какая-нибудь из компонент скорости знакопостоянна и эти подобласти можно перенумеровать так, что при  $i < j$  газ будет перетекать из области  $D_i$  в область  $D_j$ , но не наоборот. Если в области течения есть замкнутые траектории, то такое разбиение невозможно. В таких случаях аналоги уравнений (12) и (14) решаются методом установления.

Разностные аналоги уравнений (11)–(14) решаются на каждом шаге итерационного процесса в такой же последовательности, как в работе [6].

Отметим, что при восстановлении давления  $p$  в точке  $X = (x, r) \in \Omega$  используются формулы (9), при этом в некоторой точке  $X_0 = (x_0, r_0) \in \Gamma_1$   $p$  считается заданным и давление определяется по формуле

$$p(X) = p(X_0) + \int_{\gamma(X_0, X)} \left( \frac{\partial Q}{\partial r} - \varphi_u + f_{2,1} \right) dx + \left( -\frac{\partial Q}{\partial x} - \varphi_v + f_{2,2} \right) dr, \quad (16)$$

где  $\gamma(X_0, X)$  — произвольная кривая, лежащая в  $\Omega$  и соединяющая точки  $X_0$  и  $X$ . Можно показать, что если  $\gamma'(X_0, X)$  — другая кривая, соединяющая точки  $X_0$  и  $X$ , то давление в точке  $X$  ввиду выполнения уравнения (13) будет таким же, как для кривой  $\gamma$ . Невязка градиента давления  $\delta$  была введена с той целью, чтобы при вычислении давления на очередном шаге итерационного процесса его значение не зависело от пути, соединяющего точки  $X_0$  и  $X$ . Это свойство сохраняется и на разностном уровне. Если не вводить функцию  $\delta$ , а давление на очередном шаге  $k$  итерационного процесса вычислять непосредственно из уравнений (2), т. е. используя соотношения

$$\nabla p^k = -\vec{\Phi}^k + \vec{f}_2,$$

то можно показать, что

$$\oint_C \frac{\partial p^k}{\partial x} dx + \frac{\partial p^k}{\partial r} dr = \left\{ \oint_C \left( \frac{\partial \rho^{k-1}}{\partial \tau} \frac{|\vec{v}^k|^2}{2} + f_{2,\tau} - \rho^{k-1} v_n^k \omega^k \right) ds \right\} + \oint_C \rho^{k-1} v_n^k (\omega^k - \omega^{k-1}) ds.$$

Выражение в фигурных скобках равно нулю ввиду (12), а  $\oint_C \rho^{k-1} v_n^k \times (\omega^k - \omega^{k-1}) ds = 0$  только после того, как процесс сошелся, поэтому величина давления будет зависеть от пути  $\gamma(X_0, X)$ . На разностном уровне эта зависимость может быть еще большей из-за того, что контуры  $C$  интегрирования уравнений (12) и (13) берутся различными. Эти причины и побудили нас ввести невязку градиента давления  $\delta$ . Из формул (9) следует, что на точном решении  $\nabla Q = 0$ . Исходя из этого соображения полагаем  $Q|_\Gamma = Q_0 = \text{const}$ . Значение  $\psi$  на  $\Gamma$  определяется из соотношения

$$\psi(s) = \psi_0 + \int_{M_0}^M \left[ v r(s) - n_1 \int_{x_0}^{x(s)} f_1(\xi, r(s)) d\xi \right] ds, \quad (18)$$

где  $M_0 \in \Gamma$  — точка, от которой отсчитывается длина дуги  $s$  границы  $\Gamma$ ;  $M$  — точка границы  $\Gamma$ , соответствующая параметру  $s$ .

Граничные значения для  $H$  известны (7). Но в первоначальной постановке нет граничных условий для функции вихря  $\omega$ . Поэтому вместо постановки граничных условий в точках  $\Gamma_1$  поступим следующим образом. К каждому из участков входа  $\Gamma_{1,i}$  ( $i = 1, 2, \dots, N_1$ ) присоединим с внешней стороны от  $\Omega$  область  $\Omega_i$  и расположим в  $\Omega_i$  непрерывно распределенные источники массы и энергии. Область  $\Omega_i$  имеет непроницаемые границы и выход  $\Gamma_{1,i}$ , который совпадает с одним из участков входа в область  $\Omega$ . Будем рассматривать течение газа в области  $\tilde{\Omega}$ , полученной объединением области  $\Omega$  со всеми областями  $\Omega_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N_1$ ). Область  $\tilde{\Omega}$  характеризуется тем, что у нее нет входов, а есть только непроницаемые границы и выход  $\Gamma_2$ , течение газа в такой области осуществляется за счет наличия источников массы и энергии. Уравнения, описывающие это течение, имеют тот же вид (1)–(3), где вместо правых частей  $f_1, f_2, f_3$

стоят соответственно функции  $g_1, \vec{g}_2, g_3$ :  $g_1 = f_1 + J_0 r$ ,  $\vec{g}_2 = \vec{f}_2 - J_0 \vec{v}$ ,  $g_3 = f_3 + J_0 r H_0$ , где  $J_0$  и  $H_0$  — интенсивность источников массы и энергии соответственно. Функции  $J_0 = J_0(x, r)$  и  $H_0 = H_0(x, r)$  можно выбирать различными способами, в данной работе они взяты кусочно-постоянными, причем  $J_0(x, r) = 0$  и  $H_0(x, r) = 0$  при  $(x, r) \in \Omega$ , а в областях  $\Omega_i$  функции  $J_0$  и  $H_0$  отличны от нуля и постоянны.

Значения постоянных  $J_{0,i} = J_0(x, r)|_{(x,r) \in \Omega_i}$ ,  $H_{0,i} = H_0(x, r)|_{(x,r) \in \Omega_i}$  вычисляются по формулам

$$J_{0,i} = - \int_{\Gamma_{1,i}} v(s) r(s) ds \Big|_{\dot{\Omega}_i} \int_{\dot{\Omega}_i} r dx dr, \quad (19)$$

$$H_{0,i} = - \int_{\Gamma_{1,i}} v(s) r(s) H_1(s) ds / J_{0,i} \int_{\dot{\Omega}_i} r dx dr. \quad (20)$$

Так как в области  $\tilde{\Omega}$  нет входов, а есть только выход и непроницаемые участки границы, то граничные значения для функций  $H$  и  $\omega$  задавать не нужно; граничные значения для  $Q$  и  $\psi$  определяются так же, как и в случае области  $\Omega$ , только в формуле (18)  $f_1$  заменяется на  $g_1$ .

3. Описанная методика применялась для численного расчета течения газа в докритической части установки с утолщенным в камеру соплом. К настоящему времени выполнен большой объем экспериментальных исследований по изучению газодинамики утолщенных сопел (см., например, [7], [8]), из исследований по применению численных методов расчета этих установок нам известна лишь работа [9], в которой решение ищется методом установления с использованием схемы Мак-Кормака.

Если при моделировании газодинамических процессов в таких установках применить квазистационарный подход и сделать предположение об осесимметричности течения, то уравнения, описывающие течение идеального газа, будут иметь вид (1)–(3). Рассмотрим результаты численного расчета течения газа в области, изображенной на рис. 1, проведенного при условии, что правые части уравнений (1)–(3) равны нулю. Газ втекает в область  $\Omega$  через вход  $\Gamma_1 = A_1 B_1 \cup A_2 B_2$  и вытекает через выход  $\Gamma_2 = FK$ , который расположен на некотором положительном расстоянии от критического сечения сопла. Полагаем  $\rho v_n|_{\Gamma_2} = v_2(r) = \text{const}$ , тогда расход через сечение  $FK$  будет равен  $G = \pi \cdot FK^2 \cdot v_2$ . Пусть  $G_1$  и

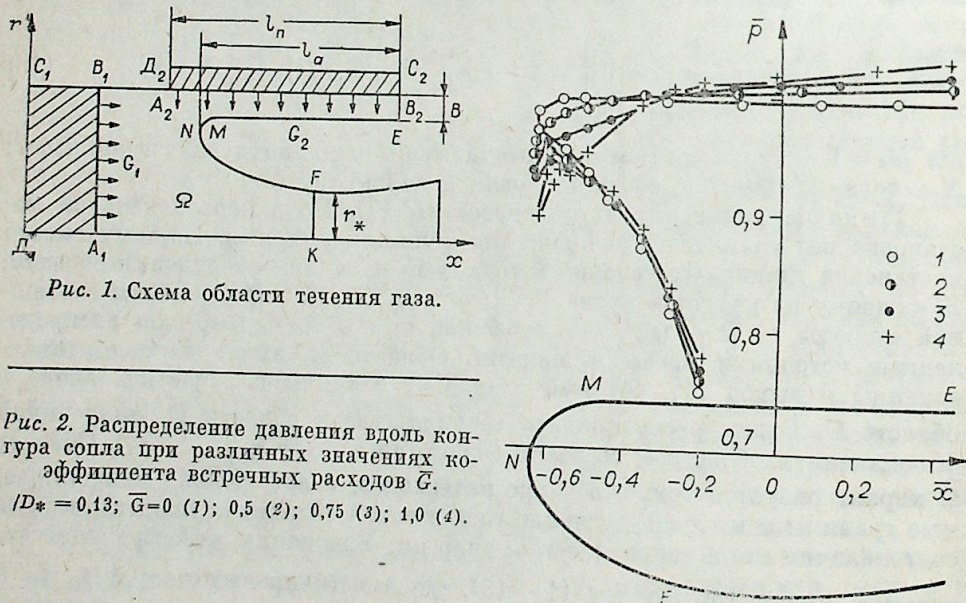


Рис. 1. Схема области течения газа.

Рис. 2. Распределение давления вдоль контура сопла при различных значениях коэффициента встречных расходов  $\bar{G}$ .  
 $D_* = 0,13$ ;  $\bar{G} = 0$  (1); 0,5 (2); 0,75 (3); 1,0 (4).

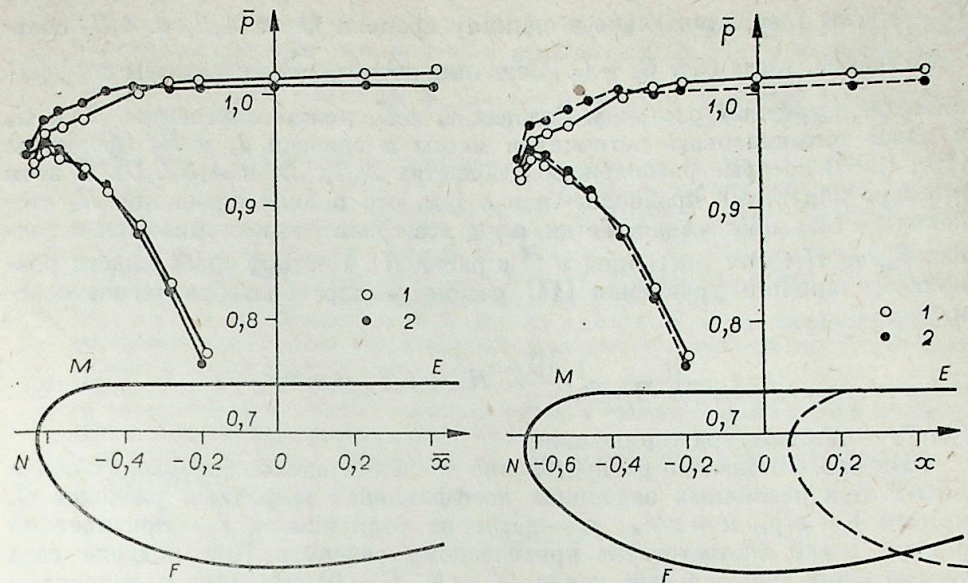


Рис. 3. Распределение давления вдоль контура сопла при различной ширине надсопловой канала.  
 $\bar{G} = 0,75$ ;  $\bar{B} = 0,13$  (1); 0,26 (2).  
 Рис. 4. Распределение давления вдоль контура сопла при разных степенях утолщения.  
 $\bar{t}_a = 2,55$  (1); 1,87 (2).

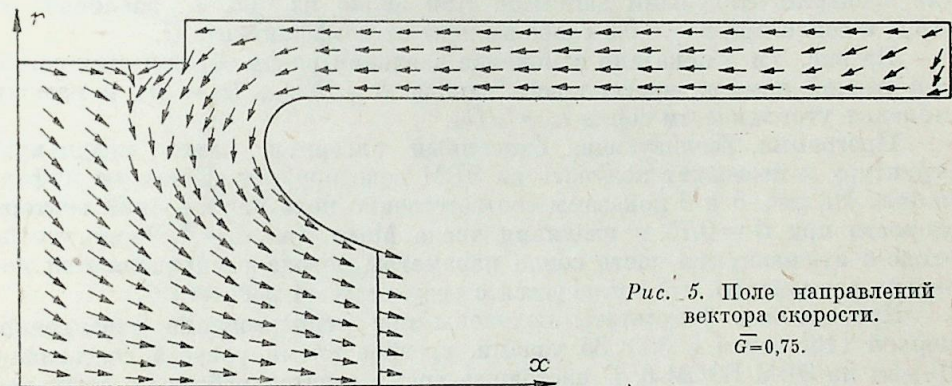


Рис. 5. Поле направлений вектора скорости.  
 $\bar{G} = 0,75$ .

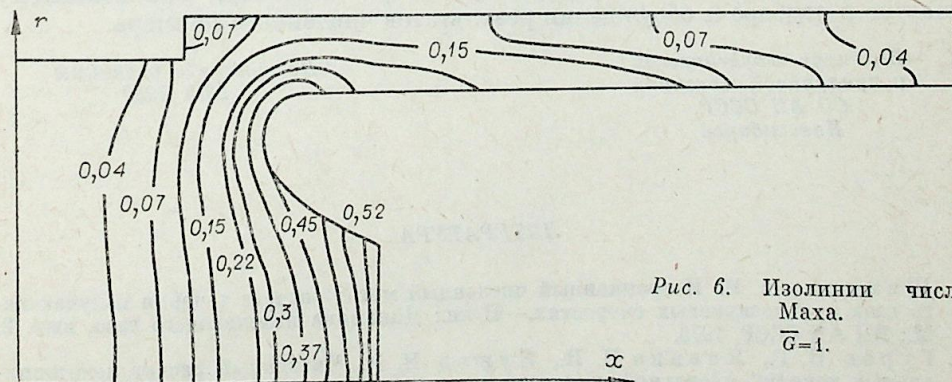


Рис. 6. Изолинии числа Маха.  
 $\bar{G} = 1$ .

$G_2$  — массы газа, втекающие в единицу времени через  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  соответственно, тогда  $G_1 + G_2 = G$ . Величину  $\bar{G} = \frac{G_2}{G_1 + G_2}$  назовем коэффициентом встречных расходов. Задавая  $v_2$  и  $\bar{G}$ , можно определить  $G_1$  и  $G_2$  и далее интенсивность источников массы и энергии  $J_0$  и  $H_0$  (формулы (19), (20)), которые расположим в областях  $A_1B_1C_1D_1$  и  $A_2B_2C_2D_2$ . В этом примере допустимо предположение о том, что полная энтальпия  $H_1$  втекающего газа постоянная. Тогда, если, все траектории начинаются в точках  $\Gamma_1$ , то  $H$  будет постоянна в  $\bar{\Omega}$  и равна  $H_1$ . Поэтому здесь вместо разностного аналога уравнения (14) рассматривалось алгебраическое соотношение

$$\frac{\gamma p}{\rho(\gamma - 1)} + \frac{|\vec{v}|^2}{2} = H_1 = c_p T_0 = \text{const.}$$

где  $T_0$  — температура торможения.

На рис. 2 показано распределение давления вдоль образующих сопла  $EMNF$  при различных значениях коэффициента встречных расходов  $\bar{G}$ , причем  $\bar{p} = p/p_0$ ,  $\bar{x} = x/r_*$ ,  $p_0$  — давление торможения,  $r_*$  — критический радиус,  $x = 0$  соответствует критическому сечению. При подводе газа только через центральный канал ( $\Gamma_2 = \emptyset$ ,  $\bar{G} = 0$ ) давление в кольцевом надсопловом канале практически не отличается от давления торможения. С увеличением  $\bar{G}$  градиент давления в кольцевом канале растет, на образующей сопла  $MNF$  (см. рис. 1) давление падает, но не монотонно; за точкой разворота  $N$  на небольшом участке стенки сопла давление возрастает, затем снова падает, что качественно согласуется с имеющимися у нас экспериментальными данными. Как видно из рис. 2, давление на входе в сопло при  $\bar{x} > -0,3$  слабо зависит от коэффициента  $\bar{G}$ .

На рис. 3 и 4 показано изменение давления вдоль образующих сопла при разной ширине надсоплового канала  $B = B/D_*$ ,  $D_* = 2r_*$  и разных степенях утолщения сопла  $l_a = l_a/D_*$ .

Программа, реализующая описанный алгоритм, имеет модульную структуру и позволяет получать на ЭВМ некоторую графическую информацию. На рис. 5 и 6 показаны соответственно поле направлений вектора скорости при  $\bar{G} = 0,75$  и изолинии числа Маха при  $\bar{G} = 1$ . Видно, что на входе в сужающуюся часть сопла параметры потока распределяются довольно равномерно, что согласуется с результатами работы [9].

Приведенные результаты получены при использовании квазиравномерной [10] сетки с  $35 \times 35$  узлами, среднее время расчета составляло 10 мин на ЭВМ БЭСМ-6. В настоящее время ведется работа по стыковке данной программы с программами расчета трансзвуковой и сверхзвуковой частей течения.

Авторы выражают благодарность А. Д. Рычкову, принимавшему участие в подборе и обсуждении результатов численного примера.

Институт теоретической  
и прикладной механики  
СО АН СССР,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
28/X 1980

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шипилин А. В. Итерационный численный метод расчета течения излучающего газа при дозвуковых скоростях. — В кн.: Динамика излучающего газа, вып. 2. М.: ВЦ АН СССР, 1976.
2. Гуров Б. Г., Яненко Н. Н., Яушев И. К. Численный расчет непотенциальных течений идеальной жидкости в плоских каналах. — В кн.: Численные методы механики сплошной среды, 1970, т. 2, № 1.

3. Шипилин А. В., Шулишнина Н. П. Расчет осесимметричного дозвукового течения излучающего газа в канале произвольной формы с центральным телом. — В кн.: Динамика излучающего газа, вып. 2. М., 1976.
4. Осипов И. Л., Пащенко В. П., Шипилин А. В. Расчет течений невязкого газа в каналах с сильно изменяющейся геометрией. — ЖЭМ и МФ, 1978, т. 18, № 4.
5. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980.
6. Яушев И. К., Хакимзянов Г. С. О численном расчете стационарных плоскопараллельных течений идеальных жидкости и газа в каналах сложной конфигурации. — Изв. СО АН СССР, 1977, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.
7. Дуплищев М. И., Кравец В. В., Махин В. А., Чухало Н. А. Влияние структуры течения в докритической области утолщенных сопел на расходные характеристики. — ИВУЗ. Авиационная техника, 1973, № 3.
8. Чухало Н. А., Дуплищев М. И., Кравец В. В. и др. Экспериментальное определение расходных характеристик утолщенных сопел. — В кн.: Гидроаэромеханика и теория упругости. М., 1973, вып. 16.
9. Данилов Ю. М., Кондратьев В. В. Расчет смешанного до- и сверхзвукового течения газа в каналах сложной формы с частично проницаемой стенкой. — ИВУЗ. Авиационная техника, 1980, № 1.
10. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные схемы газовой динамики. М.: Наука, 1975.

Г. А. ВЕДЕРНИКОВ, В. И. ЗВЕГИНЦЕВ

МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ СИЛ ПРИ ИСПЫТАНИЯХ  
В ИМПУЛЬСНОЙ АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

Применение импульсных аэродинамических труб [1] позволяет существенно упростить технику аэрофизического эксперимента, особенно в гиперзвуковом диапазоне скоростей. Однако короткое время существования рабочего режима в таких трубах (0,05—0,10 с) и постепенное уменьшение в несколько раз скоростного напора набегающего потока за время режима (при постоянном по времени значении числа Маха) затрудняют проведение измерений из-за существующей инерционности реальных измерительных систем. Этим объясняется необходимость разработки и анализа быстродействующих измерительных средств.

Применяемые при испытаниях методы измерения действующих на модель аэродинамических сил можно разбить на две группы: 1) методы с уравниванием измеряемых сил силами реакций опор;

2) методы без уравнивания измеряемых сил.

К первой группе относятся, например, известные тензометрические методы, где, в сущности, измеряются силы реакции опор, равные (в состоянии статического равновесия) приложенным к модели аэродинамическим силам. Методы этой группы в настоящее время составляют основу весовых измерительных систем, применяемых в аэродинамических трубах.

Методы второй группы названы в [2] методами свободно перемещающихся моделей (СПМ). Общим для них является то, что модель в течение измерительного цикла перемещается без сопротивления опор в направлении измеряемой компоненты аэродинамической силы. При этом измеряется какой-либо параметр такого перемещения (путь  $X$ , скорость  $\dot{X}$  или ускорение  $\ddot{X}$ ) в зависимости от времени, а по измеренному параметру вычисляется значение силы  $R(t)$ , действующей на модель:

$$R(t) = m\ddot{X}(t), \quad (1)$$

здесь  $m$  — масса модели.

Различные модификации методов СПМ применяются в экспериментальной аэродинамике для измерения сил, например, в свободном полете [3] или в баллистических установках [4]. Для импульсных труб применение методов СПМ представляет интерес из-за отсутствия державок, искажающих процесс обтекания, а также благодаря возможностям применения массивных моделей при измерениях быстропереключаемых нагрузок, что следует из анализа, сделанного в [2, 5], и подтверждено экспериментом в [5]. При этом наиболее простыми по технике исполнения представляются методы с измерением положения модели в зависимости от времени, т. е. траектории модели  $X(t)$ . Тогда для определения действующих сил необходимо произвести двойное дифференцирование полученной траектории. Эта задача, как известно из [6], является некорректной по Адамару, т. е. в получаемом решении в зависимости от применяемого метода обработки возможны значительные погрешности вследствие неизбежных неточностей в измерениях траектории. Поэтому выбор метода обработки для таких задач приобретает решающую роль.

Погрешности решения некорректных задач можно уменьшить, используя априорную информацию для ограничения класса функций, в котором отыскивается это решение. В [5] рассмотрен вариант метода СПМ для определения аэродинамического коэффициента силы  $C_R$ :

$$C_R = \frac{2 \cdot R}{\rho_n W_n^2 S}, \quad (2)$$

здесь  $\frac{\rho_n W_n^2}{2} = q_n(t)$  — скоростной напор набегающего на модель потока;  $S$  — характерная площадь. При обработке коэффициент  $C_R$  в соответствии с физическим смыслом явления предполагался постоянным в течение измерительного цикла и вычислялся по измерению времени перемещения модели на заданное расстояние  $X$ .

Такой метод показал хорошие результаты при испытаниях в импульсной трубе массивных (до 4,5 кг) моделей простых форм (конусов и шара), для которых  $C_R$  действительно оставался постоянным в течение измерительного цикла.

В ряде случаев необходимо определять аэродинамические коэффициенты и когда  $C_R$  изменяется во времени, например, для модели, меняющей угол атаки в процессе эксперимента. Ниже рассматривается метод определения зависимости  $C_R(t)$  при помощи аппроксимирующей функции с ограниченным числом параметров, подлежащих определению (число параметров намного меньше числа экспериментальных точек). Такой путь приводит к значительному уменьшению погрешности в получаемом решении по сравнению с известными методами (регуляризация по Тихонову [6], дифференцирование сплайн-функций и т. д.), где число искоемых величин сопоставимо с числом экспериментальных точек.

Искомое решение  $C_R(t)$  аппроксимируется полиномом

$$C_R(t) \approx \sum_{i=0}^n a_i t^i = \bar{C}_R(n, a_i, t) \quad (3)$$

с неизвестными коэффициентами  $a_i$  и неизвестной степенью  $n$ . Полиномы здесь выбраны потому, что физический смысл задачи не дает предпочтения каким-либо определенным функциям, в то же время использование полиномов позволяет применить наиболее простой вариант метода наименьших квадратов для отыскания коэффициентов  $a_i$ .

Выбранная аппроксимация  $\bar{C}_R(t)$  при известной зависимости скоростного напора  $q_n$  от времени однозначно определяет некоторую приближенную траекторию  $\bar{X}(t)$ , отличие которой от траектории  $X(t)$ , измеренной в эксперименте, позволяет судить о степени приближения аппроксимирующей функции  $\bar{C}_R(t)$  к истинному значению  $C_R(t)$ . Траектория  $X(t)$  получена в эксперименте и, следовательно, является заданной для моментов времени  $t_j$  ( $j = 1, \dots, p$ ) и имеет случайную погрешность  $\delta X_j$  с известной дисперсией  $\sigma X$ , т. е.

$$X(t_j) = X_j = X_j + \delta X_j, \quad (4)$$

здесь  $X_j$  — истинное значение траектории,  $\delta X_j$  — статистически независимые погрешности измерения.

Приближенная траектория  $\bar{X}(t)$  определяется из уравнения (1) с учетом (2) и (3), которое после интегрирования приводится к виду

$$\bar{X}(n, a_i, t) = \left\{ \frac{t-t_p}{t_p-t_1} \int_{t_1}^t (\tau-t_1) q_n(\tau) \sum_{i=0}^n a_i \tau^i d\tau - \frac{t-t_1}{t_p-t_1} \int_{t_1}^{t_p} (t_p-\tau) \times \right. \\ \left. \times q_n(\tau) \sum_{i=0}^n a_i \tau^i d\tau \right\} \cdot \frac{S}{m} + \frac{t-t_1}{t_p-t_1} \bar{X}_p + \frac{t_p-t}{t_p-t_1} \bar{X}_1. \quad (5)$$

В качестве граничных условий здесь взяты крайние точки траектории:  $\bar{X}(t_1) = \bar{X}_1$ ,  $\bar{X}(t_p) = \bar{X}_p$ , причем влияние погрешностей этих точек на определение  $C_R(t)$  такое же, как и погрешностей остальных точек траектории.

Вначале, считая степень полинома  $n$  известной (способ определения степени  $n$  описан ниже), будем искать только коэффициенты  $a_i$ . Для этого используем метод наименьших квадратов, который заключается в минимизации следующего функционала:

$$\Theta_n(a_i) = \sum_{j=2}^{p-1} [\bar{X}(n, a_i, t_j) - \tilde{X}_j]^2. \quad (6)$$

Можно показать, что минимум функционала (6) достигается при решении уравнения

$$\sum_{i=0}^n a_i K_{li} = F_l \quad (l = 0, \dots, n). \quad (7)$$

Здесь

$$K_{li} = \sum_{j=2}^{p-1} f_l(t_j, t_1, t_p) f_i(t_j, t_1, t_p); \quad F_l = \sum_{j=2}^{p-1} \left( X_j - \frac{t_j - t_1}{t_p - t_1} \tilde{X}_p - \frac{t_p - t_j}{t_p - t_1} \tilde{X}_1 \right) \cdot f_l(t_j, t_1, t_p);$$

$$f_l(t_j, t_1, t_p) = \frac{t_j - t_1}{t_p - t_1} \int_{t_1}^{t_j} (\tau - t_1) q_n(\tau) \tau^l d\tau - \frac{t_1 - t_j}{t_p - t_1} \int_{t_j}^{t_p} (t_p - \tau) q_n(\tau) \tau^l d\tau.$$

Решая систему (6), получаем искомые коэффициенты  $a_i$  при заданной степени  $n$ . Определение степени полинома  $n$  производится из условий: 1) приближенная траектория  $\bar{X}(n, a_i, t)$  должна отличаться от экспериментальной  $\tilde{X}(t)$  не более чем на погрешность измерения траектории  $\delta X_j(t)$ , т. е.  $\Theta_n(a_i) \leq \sum_{j=2}^{p-1} (\delta X_j)^2$ ; 2) используется наименьшая степень полинома, соответствующая первому условию. После того как найдена зависимость  $\bar{C}_R(t)$  в виде (3), несложно найти аэродинамические силы  $R(t)$  по формуле (2).

Оценим доверительный интервал полученного решения, который в общем случае зависит от принятого метода математической обработки и от уровня погрешностей исходных данных. Для этого запишем преобразование траектории  $\tilde{X}(t)$  в искомую зависимость  $C_R(t_i)$  в следующем виде:

$$\bar{C}_R(t_i) = C_i = \sum_{j=1}^p A_{ij} \tilde{X}(t_j). \quad (8)$$

Матрицу  $A_{ij}$  в (8) можно получить из матричного произведения

$$A = T \cdot K^{-1} \Phi \cdot V, \quad (9)$$

здесь  $T$  — матрица времени  $T_{ij} = t_i^{j-1}$  ( $i = 1, \dots, p$ ;  $j = 1, \dots, n+1$ );  $K^{-1}$  — обратная введенной ранее матрице  $K$  (см. (7));  $\Phi$  — матрица правой части  $\Phi_{ij} = f_i(t_j, t_1, t_p)$  ( $i = 1, \dots, n+1$ ;  $j = 1, \dots, p$ );  $V$  — матрица граничных условий:  $V_{j1} = -\frac{t_p - t_j}{t_p - t_1}$ ;  $V_{jp} = -\frac{t_j - t_1}{t_p - t_1}$ ;  $V_{ii} = 1$ ; ( $i = 2, \dots, p-1$ ;  $j = 1, \dots, p$ ); остальные коэффициенты матрицы  $V$  равны 0. Перепишем (8) с учетом наличия погрешностей (4):

$$C_i + \delta C_i = \sum_{j=1}^p A_{ij} X_j + \sum_{j=1}^p A_{ij} \delta X_j \quad (10)$$

или

$$\delta C_i = \sum_{j=1}^p A_{ij} \delta X_j, \quad (11)$$

здесь  $\delta C_i$  — погрешность  $C_R(t_i)$ .

Осредняя  $(\delta C_i)^2$  с учетом статистической независимости  $\delta X_j$ , получим выражения для дисперсии  $\sigma C_i$  погрешности определения  $C_R(t_i)$  в зависимости от дисперсии измерения  $\sigma X_j$ :

$$\sigma C_i = \sum_{j=1}^p A_{ij}^2 \sigma X_j. \quad (12)$$

Аналогичный результат может быть получен из анализа информационной матрицы Фишера [7].

Для расчетов по приведенному алгоритму использовалась ЭВМ БЭСМ-6. Отладка и проверка программы производились на тестовых задачах, где для типичных условий испытаний в импульсной трубе ИТ-301 [8] моделировались различного рода зависимости  $C_R(t)$ .

Для выбранной зависимости  $C_R(t)$  и заданной зависимости  $q_n(t)$  рассчитывалась истинная траектория движения модели  $X(t)$ . Затем с помощью специальной процедуры к каждому значению  $X(t_j)$  добавлялось случайное отклонение  $\delta X_j$ , распределенное по нормальному закону с заданной дисперсией  $\sigma X$ . Полученная таким образом «экспериментальная» траектория  $\tilde{X}(t)$  являлась исходным материалом для обработки по указанному алгоритму.

Результат работы программы — расчет коэффициентов полинома (3) с заданной степенью  $n$ , траектории  $\tilde{X}(t)$ , соответствующей полученной аппроксимации для  $C_R(t)$  и нормы отклонения  $\varepsilon^{(n)}$  траектории  $\tilde{X}(t)$  от исходной траектории  $X(t)$ :

$$\varepsilon^{(n)} = \sqrt{\frac{\int_{t_1}^{t_p} (\tilde{X} - X)^2 dt}{p_1 \int_{t_1}^{t_p} \tilde{X}^2 dt}}. \quad (13)$$

Полученные нормы отклонений  $\varepsilon^{(n)}$  для различных степеней  $n$  приведены в таблице. Аналогично оценивалась норма экспериментальной погрешности измерения траектории  $\varepsilon_\sigma$ :

$$\varepsilon_\sigma = \sqrt{\frac{\int_{t_1}^{t_p} \sigma X dt}{\int_{t_1}^{t_p} \tilde{X}^2 dt}}. \quad (14)$$

При сравнении  $\varepsilon^{(n)}$  и  $\varepsilon_\sigma$  подбиралась минимальная степень полинома, для которой выполняется условие  $\varepsilon^{(n)} \leq \varepsilon_\sigma$ .

На рис. 1—3 приведены результаты расчета отдельных тестовых задач. Здесь показаны исходная зависимость  $C_R(t)$ , «экспериментальная» траектория  $\tilde{X}(t)$ , рассчитанная зависимость  $\bar{C}_R(t)$  и доверительный интервал  $\pm \sqrt{\sigma C}$ .

Из расчетов тестовых задач видно, что доверительный интервал  $\sqrt{\sigma C}$  уменьшается при повышении точности измерений (уменьшении  $\sigma X$ ) и при уменьшении степени аппроксимирующего полинома  $n$ . В рассмотренных случаях оказалось, что для  $n = 0$  величина доверительного ин-

№	Исходная информация	$\sqrt{\sigma X}$ , мм	$e_{\sigma}$	$e(n)$					
				n=0	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5
Тестовые задачи									
1	$C_R = 0,1 + 167 \cdot t^2$	1,0	0,1462	0,1977	0,1866	0,1835	0,1827	0,1801	0,1797
2		0,1	0,01515	0,06887	0,01441	0,01331	0,01321	0,01290	0,01280
3		0,08	0,01210	0,06743	0,01230	0,01068	0,01060	0,01033	0,01025
4		0,01	0,001514	0,06083	0,008036	0,001502	0,001501	0,001461	0,001420
5		0,0001	0,000015	0,06111	0,007359	0,000011	0,000011	0,000011	0,000011
6	$C_R = 0,5 \cdot \sin(125 \cdot t)$	1,0	0,08788	0,1379	0,07432	0,07245	0,06988	0,06890	0,06806
7		0,1	0,008766	0,09417	0,02052	0,01692	0,008613	0,008122	0,007355
8		0,01	0,000876	0,09494	0,01820	0,01259	0,001348	0,001045	0,000762
9		0,0001	0,000088	0,09482	0,01824	0,01237	0,001068	0,000727	0,000038
10	$C_R = 0,5$	0,50	0,4710	0,1040	0,1037	0,1032	0,1030	0,1029	0,1025
11		0,20	0,01890	0,01768	0,01688	0,01334	0,01232	0,01003	—
12	$C_R = \text{вал}$	0,11	0,01647	0,05085	0,01802	0,01398	0,01344	0,01203	0,001082
13		0,20	0,01647	0,05085	0,01802	0,01398	0,01344	0,01203	0,001082
Эксперимент									
14	$C_R = \text{вал}$	0,20	0,01890	0,01768	0,01688	0,01334	0,01232	0,01003	—
15		0,11	0,01647	0,05085	0,01802	0,01398	0,01344	0,01203	0,001082

Примеры. Пример № 3 см. на рис. 1, № 7 — на рис. 2, № 10 — на рис. 3, № 11 — на рис. 5, № 12 — на рис. 6.

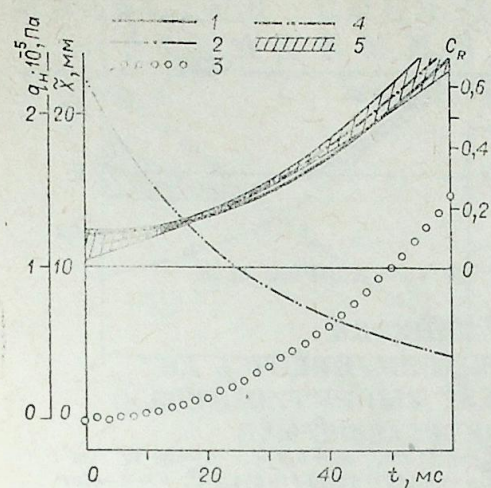


Рис. 1.

$\sqrt{\sigma X} = 0,08$  мм,  $m = 5$  кг,  $S = 20 \cdot 10^{-1}$  м<sup>2</sup>.  
 1 —  $C_R = 0,1 + 167 \cdot t^2$ ; 2 —  $\bar{C}_R = 0,063 + 2,54 t + 148 \cdot t^2$ ; 3 —  $\tilde{X}(t)$ ; 4 —  $q_H(t)$ ; 5 —  $\pm \sqrt{\sigma C}(t)$ .

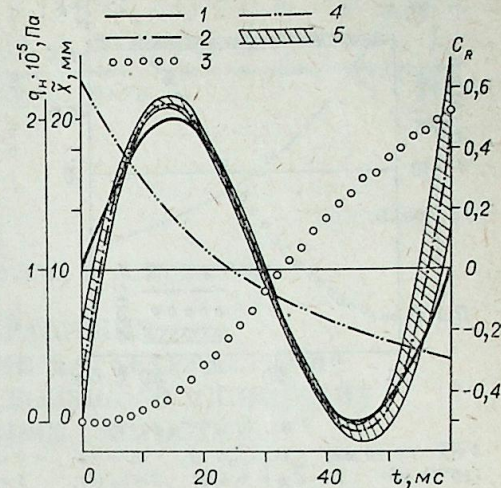


Рис. 2.

$\sqrt{\sigma X} = 0,10$  мм,  $m = 5$  кг,  $S = 20 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>.  
 1 —  $C_R = 0,5 \sin \frac{2\pi t}{h(n-1)}$ ,  $h = 0,002$  с,  $n = 31$ ;  
 2 —  $\bar{C}_R = -0,344 + 141,2 \cdot t - 6524 \cdot t^2 + 73120 \cdot t^3$ ;  
 3 — 5 — обозначения те же, что на рис. 1.

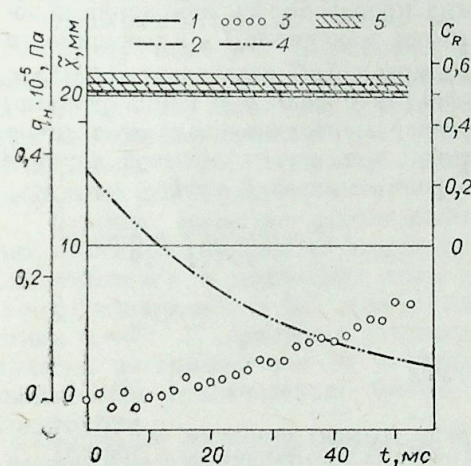


Рис. 3.

$\sqrt{\sigma X} = 0,50$  мм,  $m = 5$  кг,  $S = 20 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>.  
 1 —  $C_R = 0,5$ ; 2 —  $\bar{C}_R = 0,527$ ; 3 — 5 — обозначения те же, что на рис. 1.

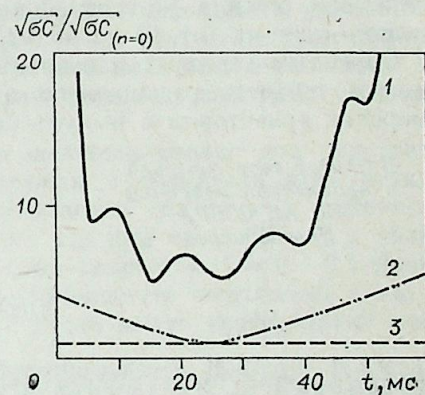


Рис. 4.

$n = 5$  (1); 1 (2); 0 (3).

тервала может быть найдена из простой зависимости  $\sqrt{\sigma C} = 0,058 \sqrt{\sigma X}$  (здесь  $\sqrt{\sigma X}$  в миллиметрах).

Повышение степени полинома увеличивает доверительный интервал  $\sqrt{\sigma X}$ , что показано на рис. 4. Видно, например, что при степени полинома  $n = 5$  доверительный интервал возрастает в 6—8 раз в середине режима и более чем в 20 раз на концах.

На рис. 5, 6 приведены результаты обработки реальных экспериментов в импульсной трубе. Модель массой 5,3 кг перемещалась по оси трубы под действием набегающего потока. Траектория модели определялась путем скоростной (с частотой 500 кадров в 1 с) киносъемки движения модели и последующего измерения положения модели на полученных кинограммах. Видно, что в первом случае (см. рис. 5), когда из

Н. М. БЫЧКОВ, А. Г. ИШТУЛОВ, В. М. КОВАЛЕНКО

ВЛИЯНИЕ ВРАЩЕНИЯ  
НА АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ  
ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ БОЛЬШОГО УДЛИНЕНИЯ  
ПРИ СВЕРХЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ

При исследовании физических явлений в атмосфере и за ее пределами важная роль принадлежит метеорологическим ракетам, которые характеризуются в настоящее время большими удлинениями (до  $\lambda = 40$  и более), относительно сложной конфигурацией, высокими скоростями полета (числа  $M$  до  $6 \div 8$ ) и наличием вращения, создаваемого для стабилизации положения ракеты в полете.

Экспериментальные данные по аэродинамическим характеристикам осесимметричных тел, имеющиеся в известной литературе, относятся в основном к невращающимся телам относительно небольшого удлинения [1—4]. Для тел большого удлинения (до  $\lambda = 40$ ) при отсутствии вращения аэродинамические характеристики в широком диапазоне чисел  $M$  исследованы в [5], при этом обнаружены довольно заметные отличия с данными для коротких тел.

Влияние вращения исследовалось в основном только для определения боковых сил, действующих по нормали к плоскости угла атаки. Сопротивление и подъемная сила вращающихся тел малого удлинения ( $\lambda = 6$ ) измерялись в [6], откуда следует, что при числе  $M = 2$  и углах атаки  $\alpha = 0 \div 7^\circ$  вращение с относительной скоростью  $\theta = 0 \div 0,1$  практически не сказывается на величине коэффициента подъемной силы и лишь очень незначительно (около 1%) увеличивает коэффициент сопротивления.

Вопрос о влиянии вращения на аэродинамические характеристики тел большого удлинения до настоящего времени остается малоисследованным. В значительной мере это связано с трудностями измерения аэродинамических сил на вращающихся телах, особенно с учетом донного давления.

В данной работе при числах  $M = 2 \div 4$  измерены сопротивление, подъемная сила и ее момент вращающихся и неподвижных моделей метеорокет различной конфигурации: оперенных и неоперенных удлиненным  $\lambda = 18,8 \div 42,8$  — всего 8 вариантов. Определены основные закономерности изменения указанных характеристик в зависимости от различных параметров, в том числе под влиянием вращения.

1. МОДЕЛИ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОБОРУДОВАНИЕ

Испытания проведены в сверхзвуковой аэродинамической трубе Т-313 ИТПМ СО АН СССР. Рабочая часть этой трубы сечением  $0,6 \times 0,6 \text{ м}^2$  и длиной 2 м оборудована подвеской для крепления моделей,

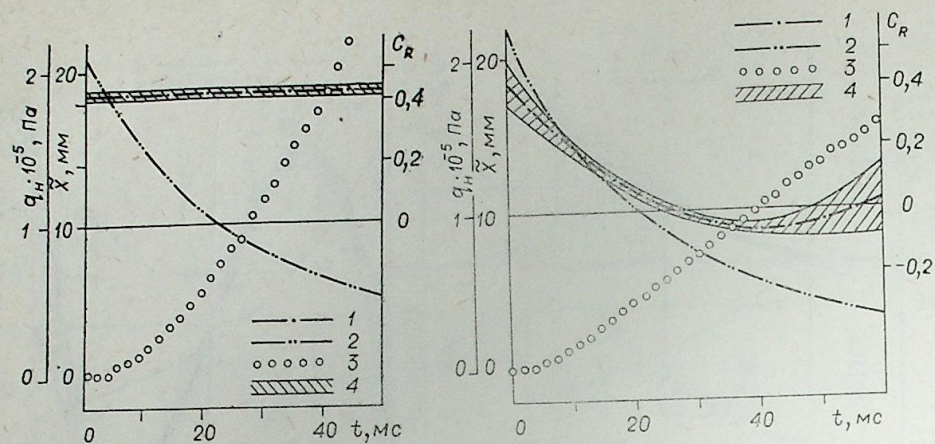


Рис. 5.

$V\sqrt{S} = 0,20 \text{ мм}$ ,  $m = 5,3 \text{ кг}$ ,  $S = 20 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ .  
1 —  $C_R = 0,423$ ; 2 —  $q_H(t)$ ;  
3 —  $\tilde{X}(t)$ , 4 —  $\pm V\sqrt{SC}(t)$ .

Рис. 6.

$V\sqrt{S} = 0,11 \text{ мм}$ ,  $m = 5,3 \text{ кг}$ ,  $S = 20 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ .  
1 —  $C_R = 0,412 - 22,73 \cdot t + 271,4 \cdot t^2$ ; 2 — обозначения те же, что на рис. 5.

физических соображений можно было ожидать  $C_R = \text{const}$  (геометрия модели в опыте не изменялась, обтекание модели оставалось квазиустановившимся), расчеты действительно показали  $C_R = 0,423 = \text{const}$ . Доверительный интервал  $\sqrt{SC}$  составил  $\pm 0,0116$ , или  $\pm 2,7\%$ .

Во втором случае (см. рис. 6), когда производилось изменение условий обтекания модели, расчеты показывают изменение  $C_R$  в зависимости от времени режима. Доверительный интервал  $\sqrt{SC}$  составляет  $\pm 0,015$  в середине режима (от 10 до 40 мс) и  $\pm 0,1$  в начале и в конце режима.

Обработка тестовых и реальных экспериментов показала достаточно высокую точность рассмотренного метода при весьма простой технике измерения траектории в импульсной аэродинамической трубе.

Институт теоретической  
и прикладной механики  
СО АН СССР,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
12/VII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Поуп А., Гойн К. Аэродинамические трубы больших скоростей. М.: Мир, 1968.
2. Затолока В. В., Звегинцев В. И. О весовых испытаниях тяжелых моделей в импульсных аэродинамических трубах. — В кн.: Вопросы газодинамики. Новосибирск, ИТПМ СО АН СССР, 1975.
3. Применение свободно летающих моделей для исследования динамики полета. — Обзоры БНИ ЦАГИ, 1974, № 352.
4. Красильщиков А. П., Подобин В. П. Экспериментальное исследование аэродинамических характеристик шара в свободном полете до чисел  $M \sim 15$ . — Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 4.
5. Дмитриев В. А., Затолока В. В., Звегинцев В. И. Весовые испытания тяжелых моделей в импульсной аэродинамической трубе. — Изв. СО АН СССР, 1978, № 3. Сер. техн. наук, вып. 1.
6. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974.
7. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. М.: Физматгиз, 1958.
8. Аэродинамическая импульсная труба гиперзвуковых скоростей ИТ-301. — В кн.: Аэрофизические исследования. Новосибирск, ИТПМ СО АН СССР, 1972.

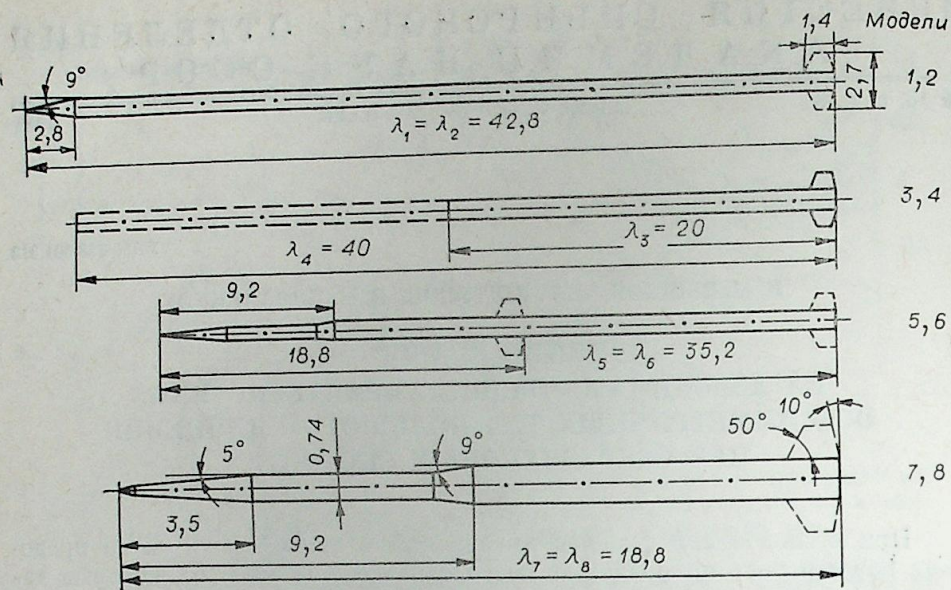


Рис. 1. Исследуемые модели 1—8.

Штриховые линии относятся к моделям 2, 4, 6, 8. Все линейные размеры указаны в калибрах.

которая связана с механическими весами типа АВ-313 М для измерения аэродинамических сил в плоскости угла атаки.

Общий вид исследуемых моделей восьми разновидностей, объединенных попарно, изображен на рис. 1. Модели 1, 5, 7 были неоперенными, а 3 и 4 отличались друг от друга удлинением. Модели 7 и 8 представляли головные ступени моделей 5 и 6, но выполнены в два раза большем масштабе. Диаметр моделей 1—6 17,5 мм, для 7 и 8  $d = 35$  мм. Все оперения моделей имели одинаковую форму и относительные размеры.

Крепление моделей в рабочей части аэродинамической трубы осуществлялось с помощью подшипников на удлиненной хвостовой державке, жестко связанной с подвеской трубы. Модели приводились во вращение со скоростью до 12 тыс. об/мин и более посредством реверсивного электродвигателя, который располагался сзади подвески и практически не оказывал влияния на работу весов. Электродвигатель и державка закрывались обтекателем, длина которого на участке с относительно малым диаметром непосредственно за моделью составляла 150 мм, т. е.  $(5 \div 8) d$  — в зависимости от диаметра модели.

## 2. МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ИСПЫТАНИЙ И ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

При испытаниях измеряли сопротивление  $X$ , подъемную силу  $Y$  и момент тангажа  $M_z$  относительно носка модели. По этим величинам определялись коэффициенты  $c_x = X/q \cdot S$ ,  $c_y = Y/q \cdot S$ ,  $m_z = M_z/q \cdot S \cdot l$ , а также координата центра давления  $\bar{X}_{п.д} = X_{п.д}/l$ , где  $q$  — скоростной напор,  $S = \pi d^2/4$ ,  $l$  — полная длина модели.

Процесс измерений и обработки результатов был полностью автоматизирован и осуществлялся по отработанной в ИТПМ программе с использованием ЭВМ М-32.

При обработке результатов из измеренного суммарного сопротивления исключалось слагаемое, обусловленное влиянием донного давления  $P_d$ , которое устанавливалось за моделью в присутствии хвостовой дер-

жавки и обтекателя. Аналогичная поправка вводилась и при вычислении других аэродинамических характеристик. При этом для моделей 7 и 8, имеющих наибольший наружный диаметр, давление  $p_d$  измерялось непосредственно в донной области. Для моделей большого удлинения из-за малых габаритов их донной области вместо  $p_d$  использовалась близкая величина — давление  $p_1 \approx p_\infty$ , которое измерялось под обтекателем на относительно большом расстоянии от модели. Возникающая при этом погрешность для коэффициента сопротивления по приближенным оценкам не превосходила 2—3%. На коэффициент подъемной силы донное давление практически не влияло.

Максимальная среднеквадратичная величина дорожки разброса коэффициентов  $c_x$ ,  $c_y$  и  $m_z$  при повторяющихся режимах ( $\alpha = \text{const}$ ,  $\omega = \text{const}$ ) находилась, как правило, в пределах  $\pm(0,005 \div 0,012)$  в зависимости от геометрии моделей. С увеличением  $\lambda$  разброс точек возрастал, и наоборот. Вращение моделей в большинстве случаев способствовало стабилизации их положения в потоке и, как следствие, некоторому уменьшению разброса данных.

## 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ИСПЫТАНИЙ

Испытания проведены при числах  $M = 2, 3$  и 4, которым соответствовали числа Рейнольдса, рассчитанные на 1 м длины,  $Re_{1м} = 26,5 \cdot 10^6$ ,  $34 \cdot 10^6$  и  $51 \cdot 10^6$ . Угол атаки изменялся в пределах от  $\alpha = -4^\circ$  до  $+8^\circ$  с интервалом  $\Delta\alpha = 1^\circ$ . Вращение моделей создавалось только при  $\alpha = 0$  и  $8^\circ$ . Относительная скорость вращения  $\theta = \pi dn/60 \cdot U_\infty$  изменялась в пределах от нуля до  $\theta = 0,03$  и более. Здесь  $n$  — число оборотов в минуту,  $U_\infty$  — скорость набегающего потока.

**3.1. Невращающиеся тела.** Результаты, полученные при отсутствии вращения, в основном качественно согласуются с известными ранее данными для неврещающихся тел умеренного и большого удлинения. Рассмотрим некоторые закономерности поведения аэродинамических характеристик исследованных тел при  $\omega = 0$ .

На рис. 2 приведены значения  $c_x$  и  $c_y$  в зависимости от  $\alpha$  для моделей 1—8 при числе  $M = 3$ . Наибольшие отличия, особенно в поведении  $c_x$ , наблюдаются для моделей 3 и 4 с носовой частью в виде плоского торца. Их сопротивление гораздо выше (при  $M = 4$  почти в 8 раз) по отношению к близкой по конфигурации модели 2, но имеющей профилированную носовую часть. При изменении угла атаки поведение коэффициентов  $c_x$  и  $c_y$  качественно не отличается от известных ранее закономерностей.

**Лобовое сопротивление.** С увеличением числа  $M$  коэффициент  $c_{x_0} = (c_x)_{\alpha=0}$  для моделей 3 и 4 имеет некоторую тенденцию к возрастанию (рис. 3, 4) в отличие от тел с профилированной носовой частью (см. рис. 3), для которых, как известно, коэффициент лобового сопротивления с ростом  $M$  при  $M > 1$  монотонно уменьшается и лишь при достаточно больших числах  $M$  может иногда наблюдаться незначительное увеличение  $c_{x_0}$  [5].

Как следует из [4, 7, 8], знак производной  $dc_{x_0}/dM$  при  $M > 1$  зависит от формы тела и чисел  $M$  и  $Re$ . В частности, для моделей типа конус — цилиндр увеличение  $c_{x_0}$  с ростом  $M$  наблюдается при удлинении носовой части  $\lambda_n \leq 1$  [4]. При  $\lambda_n > 1,5$  и  $M > 1,1$  коэффициент  $c_{x_0}$ , наоборот, только уменьшается. При  $\lambda_n = 1$  результат, аналогичный указанному выше, получен в [7] при измерении полного сопротивления модели удлинением  $\lambda = 10$  в области  $M = 3,75 \div 6,3$ . Эти измерения про-

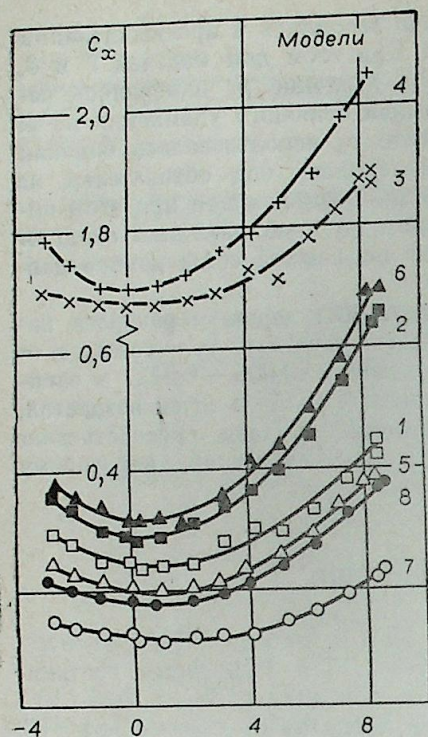
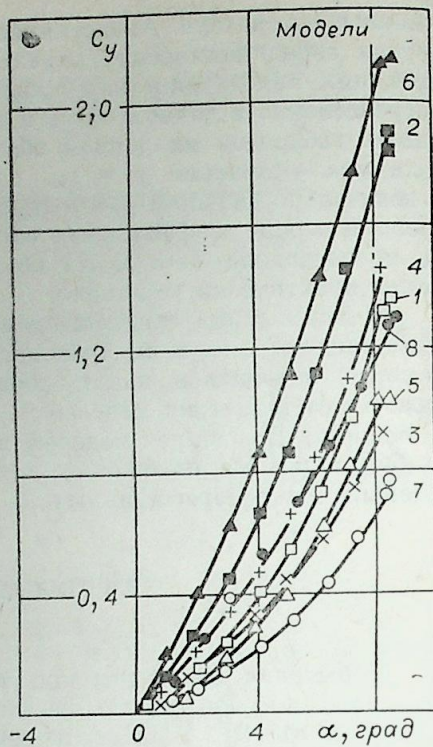


Рис. 2. Коэффициенты  $C_x$  и  $C_y$  моделей 1—8 при  $M=3$ .



ведены в аэродинамической трубе с магнитной подвеской модели, т. е. в условиях, исключающих влияние державки.

Увеличение  $c_{x_0}$  с ростом  $M$  для затупленных тел более заметно при малых числах  $Re$ , порядка нескольких сотен, что соответствует полету на высоте  $H \geq 60 \div 80$  км. Влияние числа  $Re$  на поведение  $c_{x_0}(M)$  иллюстрируется в [8] на примере сферы в широком диапазоне значений  $M$  и  $Re$ .

Отмеченная разница в поведении  $c_{x_0}(M)$  для тел различной формы определяется особенностями их обтекания, в том числе наличием или отсутствием отрывов потока в области носка. При отрыве и последующем присоединении потока возникает дополнительный скачок уплотнения [2], что, по-видимому, и приводит к увеличению  $c_{x_0}$ . Это в первую очередь относится к моделям 3 и 4, обтекание которых, по расчетным данным [9], происходило с отрывом потока в области плоского переднего торца.

Несущие свойства. На рис. 5 приведены данные по величине производной  $c_y^\alpha = dc_y/d\alpha$  при  $\alpha=0$  в зависимости от числа  $M$  для моделей 1—8. При отсутствии оперений (модели 1, 5 и 7) значения  $c_y^\alpha$  практически не зависят от  $M$ , что согласуется с данными [1—4] и других работ. Для оперенных тел их несущие свойства возрастают с увеличением количества оперений, особенно при более близком к носку расположении последних. Однако с увеличением числа  $M$  вклад оперений уменьшается, что соответствует известной теоретической зависимости для пластины

$$c_y^\alpha = \frac{4}{\sqrt{M^2 - 1}} \quad (1)$$

Влияние удлинения корпусов на коэффициенты  $c_{x_0}$ ,  $c_y^\alpha$  и  $c_N^\alpha$  при  $M=2 \div 4$  для неоперенных моделей 1, 5 и 7 показано на рис. 6. Здесь

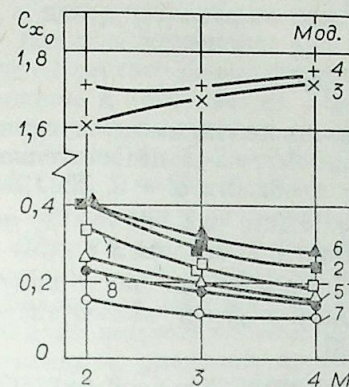


Рис. 3. Влияние числа  $M$  на коэффициент лобового сопротивления моделей 1—8.

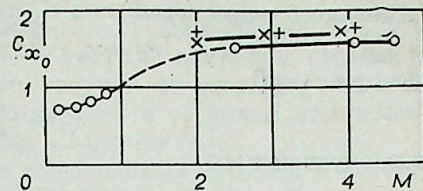


Рис. 4. Сравнение экспериментальных значений  $C_{x_0}$  в зависимости от  $M$  для цилиндров с плоским передним торцом.  $\lambda=4+10$  [4] ( $\circ$ ); 20 ( $\times$ ); 40 ( $+$ ) (см. рис. 3).

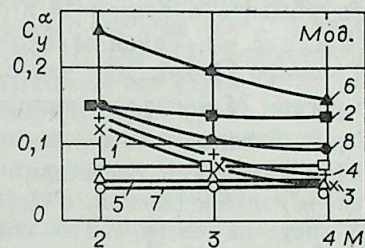


Рис. 5. Влияние числа  $M$  на производную  $c_y^\alpha$  при  $\alpha=0$  для моделей 1—8.

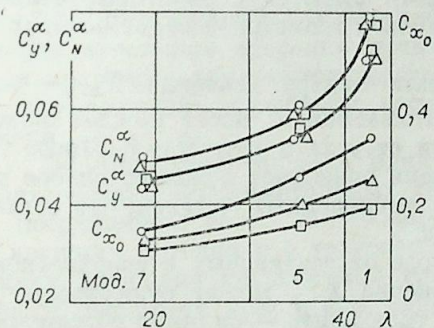


Рис. 6. Влияние удлинения на коэффициенты  $c_{x_0}^\alpha$ ,  $c_y^\alpha$  и  $c_N^\alpha$  моделей 1, 5, 7 при числе  $M=2$  ( $\circ$ ), 3 ( $\Delta$ ), 4 ( $\square$ ).

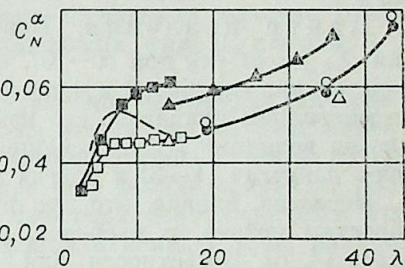


Рис. 7. Значения  $c_N^\alpha(\lambda, M)$  по данным различных авторов.  $M=1.7$  ( $\square, \Delta$ ); 2 ( $\circ$ ); 3.5 (—); 4 ( $\blacksquare, \blacktriangle, \bullet$ ). Данные работы [1] ( $\square, \blacksquare$ ); [5] ( $\Delta, \blacktriangle$ ); авторов ( $\circ, \bullet$ ) расчет [1] (—).

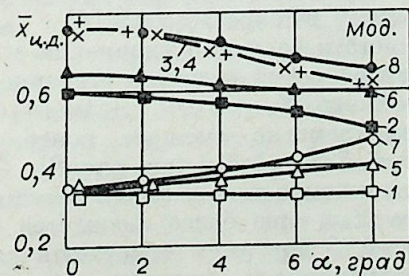


Рис. 8. Координата центра давления моделей 1—8 при  $M=3$ .

$c_N$  — коэффициент нормальной силы, который определяется из выражения, имеющего одинаковый вид с учетом или без учета донного давления

$$c_N = c_y \cdot \cos \alpha + c_x \cdot \sin \alpha, \quad (2)$$

откуда при  $\alpha = 0$

$$c_N^\alpha = c_y^\alpha + c_{x_0} \quad (3)$$

или в градусной мере

$$57,3 (c_N^\alpha - c_y^\alpha) = c_{x_0}. \quad (3')$$

Из (3) следует, что  $c_N^\alpha$  и  $c_y^\alpha$  являются взаимосвязанными величинами. Это условие не всегда выполняется, по-видимому, из-за недостаточно высокой точности экспериментальных данных в области  $\alpha \rightarrow 0$ . Из (3) следует, что если, например,  $c_y^\alpha$  не зависит от  $M$  (см. рис. 5), то  $c_N^\alpha$  должна слабо убывать с ростом  $M$  в соответствии с изменением  $c_{x_0}(M)$  при  $M > 1$  (см. рис. 4). Такая зависимость наблюдается для тел с конусной носовой частью [1—4]. Для тел с оживальной носовой частью значения  $c_N^\alpha$  с ростом  $M$  могут увеличиваться [1, 5].

Из рис. 6 видно, что с увеличением  $\lambda$  значения  $c_{x_0}$ ,  $c_y^\alpha$  и  $c_N^\alpha$  возрастают, причем нелинейно, особенно в области больших  $\lambda$ . Отмеченная нелинейность, вероятно, связана с более ранним возникновением отрыва потока в хвостовой части тел большого удлинения или с перетеканием утолщенного пограничного слоя на подветренную сторону корпуса при очень малых  $\alpha$ , что может вызвать перераспределение давления [5].

На рис. 7 сравниваются значения  $c_N^\alpha$  в широком диапазоне  $\lambda$  по данным различных авторов. Качественно эти результаты удовлетворительно согласуются друг с другом, хотя имеются и некоторые отличия, обусловленные, по-видимому, неодинаковой геометрией сравниваемых моделей.

**Центр давления.** Координата центра давления  $\bar{X}_{п.д} = m_z/c_N$  (или  $\bar{X}_{п.д} = m_z^\alpha/c_N^\alpha$  при  $\alpha \rightarrow 0$ ), отсчитываемая от носка каждой модели, представлена на рис. 8 в зависимости от угла  $\alpha$  при  $M = 3$ . Число  $M$  в рассмотренном диапазоне его изменения оказывает довольно слабое влияние на величину  $\bar{X}_{п.д}$ , особенно для неоперенных моделей, что согласуется с данными [1—5] и других работ.

Известно, однако, что при переходе от дозвуковых к сверхзвуковым скоростям потока, и наоборот, положение  $\bar{X}_{п.д}$  может существенно меняться [4, 5]. В частности, для тела типа конус — цилиндр общим удлинением  $\lambda = 6$  по данным [4], полученным в диапазоне  $M = 0,7 \div 1,3$ , значения  $\bar{X}_{п.д}$  при  $M < 1$  выше, чем при  $M > 1$ , и эта разница возрастает с увеличением угла при вершине конуса. При  $M > 1$  одновременно с затуплением носовой части увеличиваются и значения  $\bar{X}_{п.д}^*$ , отсчитываемые от точки стыка носового конуса с цилиндром. В случае цилиндра с плоским передним торцом  $\bar{X}_{п.д} = \bar{X}_{п.д}^* \approx 0,4$  при  $M > 1$  и  $\bar{X}_{п.д} = 0,57 \div 0,67$  при  $M < 1$  с максимумом в точке  $M = 0,9$  [4].

Известно, что для тел умеренного и большого удлинения с заостренной носовой частью при отсутствии оперений и других особенностей, как правило,  $\bar{X}_{п.д} \leq 0,5$  (при  $\alpha \rightarrow 0$  обычно  $\bar{X}_{п.д} < 0,4$ ). Наличие оперений, расположенных в хвостовой части, заметно смещает центр давления назад, в результате для моделей 2, 6, 8  $\bar{X}_{п.д} \geq 0,5$  (см. рис. 8).

Для тел с плоским передним торцом и при наличии хвостового оперения (модели 3 и 4) координата  $\bar{X}_{п.д}$  еще более смещается к донной области, достигая значения  $\bar{X}_{п.д} = 0,75$ , при этом отмечается как увеличение коэффициента  $m_z$ , так одновременно и некоторое уменьшение  $c_N$ . Последнее означает уменьшение несущих свойств цилиндра в области за

плоским передним торцом и одновременное их увеличение на достаточно большом расстоянии от переднего торца.

Эти особенности, как и отмеченное выше возрастание  $\bar{X}_{п.д}^*$  с увеличением угла носового конуса, можно объяснить влиянием отрыва потока вблизи точки излома контура. В этом случае некоторый участок корпуса около зоны отрыва перестает участвовать в создании нормальной силы, и центр давления смещается вниз по потоку [4].

Влияние удлинения для случая неоперенных моделей с заостренной носовой частью сказывается в уменьшении зависимости  $\bar{X}_{п.д}$  от  $\alpha$  с увеличением  $\lambda$  (см. рис. 8). При  $\alpha = 0$  положение  $\bar{X}_{п.д}$  для этих моделей практически не зависит от  $\lambda$ , что в основном согласуется с другими измерениями ([4, 5],  $\lambda = 7,5 \div 36$ ), хотя имеются и противоречивые результаты ([1],  $\lambda < 18$ ). В области  $M < 2$ , особенно вблизи  $M = 1$ , значения  $\bar{X}_{п.д}$  возрастают с увеличением  $\lambda$  [5].

**Влияние положения оперений.** Рассмотренные выше аэродинамические характеристики оперенных тел при  $\omega = 0$  зависят также от положения пластин оперений (схемы + или X). Большинство измерений на невращающихся моделях выполнено по схеме (+). Для оценки влияния оперений несколько испытаний проведено по схеме (X).

По результатам испытаний для всех оперенных моделей схема (X) приводит к уменьшению коэффициентов сил и моментов по сравнению со схемой (+), при этом важную роль играет расстояние от донного среза до оперения. Наиболее заметна разница результатов для модели 6, имеющей хвостовое и центральное оперения. При  $\alpha = 8^\circ$  и  $M = 3$  эта разница достигает приблизительно 7% для коэффициента  $c_x$ , 10% — для  $c_y$ , 12% — для  $m_z$  и 5% — для  $\bar{X}_{п.д}$ . При наличии только одного хвостового оперения эти значения существенно уменьшаются и даже для наиболее короткой модели 8 удлинением  $\lambda = 18,8$  они не превосходят  $1 \div 1,5\%$ . Для моделей  $\lambda \geq 40$  какой-либо разницы при изменении положения хвостового оперения практически не обнаружено. Возникающая при вращении тел периодическая смена положения пластин оперений может создавать колебания аэродинамических сил в плоскости угла атаки.

**3.2. Вращающиеся тела.** Влияние вращения на аэродинамические характеристики осесимметричных тел сказывается как за счет изменений в пограничном слое, так и через взаимодействие пластин оперения с внешним потоком и с течением вокруг тела позади оперения. При наличии вращения пограничный слой становится асимметричным относительно плоскости угла атаки, одновременно изменяясь и по длине тела. В общем случае это приводит к появлению дополнительных составляющих аэродинамических сил по всем взаимно перпендикулярным осям  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Однако основными из них по величине и практической значимости являются боковые силы, действующие в направлении оси  $z$ , и сила сопротивления. Боковые силы, как отмечалось выше, в данной работе не исследовались.

**Сопротивление.** На рис. 9 представлены экспериментальные значения  $c_x$  для нескольких моделей в зависимости от параметра  $\theta$  при числе  $M = 3$  и углах  $\alpha = 0$  и  $8^\circ$ . При  $M = 2$  и 4 данных по влиянию вращения получено меньше, однако они в основном подтверждают характер изменения  $c_x(\theta)$ , показанный на рис. 9. Некоторые отличия связаны, вероятно, с недостаточно высокой точностью измерений, что не позволяет получать точные количественные оценки относительно слабого влияния вращения на аэродинамические характеристики при рассмотренных условиях. Однако при наличии большого числа испытаний качественные выводы из полученных результатов можно считать достаточно надежными.

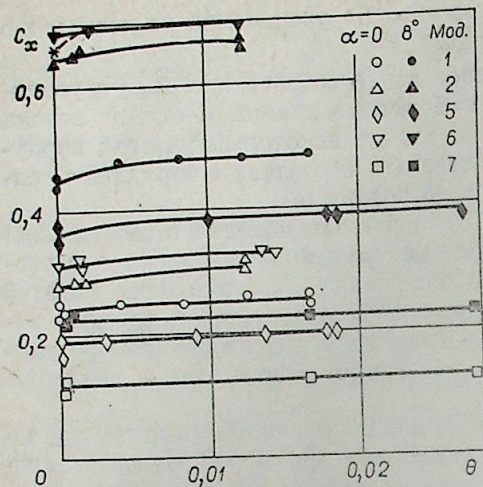


Рис. 9. Влияние вращения на коэффициент сопротивления различных моделей при  $M=3$ .

Из рис. 9 видно, что вращение тела приводит к некоторому увеличению его сопротивления, особенно для моделей 1, 2, 6, отличающихся очень большим удлинением. Для этих моделей коэффициент  $c_x$  в зависимости от скорости вращения имеет достаточно выраженный нелинейный характер, особенно при  $\alpha = 8^\circ$ .

Наиболее заметное увеличение  $c_x$  наблюдается в области  $\theta \leq 0,004$ . При  $\theta > 0,004$  коэффициент  $c_x$  изменяется очень слабо, хотя практически во всех случаях видна тенденция к некоторому его увеличению.

Отметим также, что на рис. 9 все значения  $c_x$  при  $\theta = 0$  для оперенных моделей указаны соответствующими схеме (+). Однако при вращении реализуются попеременно обе схемы (+) и (X), для которых коэффициенты  $c_x$  при  $\alpha \neq 0$  отличаются друг от друга (см. предыдущий раздел). Поэтому в качестве начальной точки отсчета при  $\alpha \neq 0$  следует брать среднее интегральное значение  $c_x$  при  $\theta \rightarrow 0$  или среднее между показаниями, соответствующими схемам (+) и (X). Для модели 6 с хвостовым и центральным оперениями начальная точка отсчета отмечена на рис. 9 значком \*. Для моделей, имеющих только хвостовое оперение, разница значений  $c_x$  по схемам (+) и (X) находится в пределах погрешности измерений, т. е. точка отсчета для них практически совпадает с указанными на рис. 9 значениями  $c_x$  при  $\theta = 0$ .

На рис. 10 показано влияние удлинения  $\lambda$  неоперенных тел на коэффициент дополнительного сопротивления  $\Delta c_x$  при вращении. Здесь

$$\Delta c_x = (c_x)_\theta - (c_x)_0, \quad (4)$$

где  $(c_x)_0$  — среднеарифметическая величина  $c_x$  при  $\theta = 0$ ,  $(c_x)_\theta$  — аналогично при  $\theta \approx 0,015$ , причем для большей точности в последнем случае

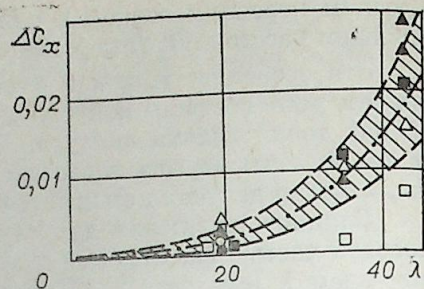


Рис. 10. Коэффициент дополнительного сопротивления неоперенных моделей, создаваемого при их вращении.

$M=2$  (○, ●); 3 (△, ▲), 4 (□, ■).  $\alpha = 0$  (○, △, □);  $8^\circ$  (●, ▲, ■). — среднее значение  $\Delta c_x$ , — границы области наиболее вероятных значений  $\Delta c_x$ .

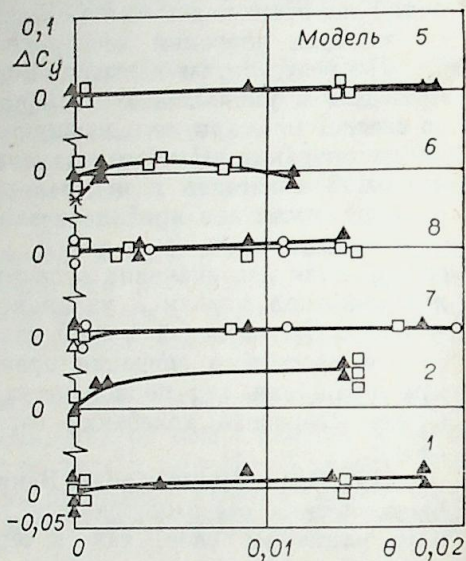


Рис. 11. Влияние вращения на коэффициент  $c_y$  различных моделей.  $\alpha = 8^\circ$  и  $M=2$  (○), 3 (▲), 4 (□).

осреднялись все значения  $c_x$  в области  $\theta = 0,004 \div 0,03$  (в этой области, как отмечалось, изменения  $c_x$  малы и близки к линейным).

Из рис. 10 видно, что коэффициент  $\Delta c_x$  изменяется существенно нелинейно, приближаясь к квадратичной зависимости от  $\lambda$ . При  $\lambda < 20$  значения  $\Delta c_x$  малы и, следовательно, сопротивление таких тел при наличии вращения может быть с относительно малой погрешностью определено по условиям без вращения. В частности, для модели 7 удлинением  $\lambda = 18,8$  отношение  $\Delta c_x/c_x$  составляет приблизительно  $1 \div 2\%$ . Для сравнения отметим, что по [6] аналогичная величина при  $\lambda = 6$ ,  $M = 2$  не превышает  $1\%$ , что вполне согласуется с данными на рис. 10.

При  $\lambda > 30 \div 35$  влияние вращения становится гораздо более заметным и для модели 1 оно достигает  $6 \div 8\%$ . С увеличением скорости вращения сопротивление может еще более возрасти, в том числе и при относительно малом удлинении тел. По данным Грина и Мэрфи (см., например, [1, с. 290]), для тел удлинением  $\lambda = 5$  и 7 при  $\theta = 0,45$  полное сопротивление возрастает за счет вращения на  $2,6\%$ , однако предполагается, что основной вклад дает уменьшение донного давления.

Несущие свойства. На рис. 11 приведены значения  $\Delta c_y(\theta)$ , отсчитываемые от некоторой начальной точки при  $\theta = 0$ , которая определяется так же, как и для коэффициента  $c_x$  (включая сказанное выше о влиянии положения пластин оперений). Видно, что для неоперенных тел, исключая модель 1, вращение практически не влияет на коэффициент подъемной силы при  $\alpha = 8^\circ$ . Наличие оперений усложняет зависимости  $\Delta c_y(\theta)$ , в частности для модели 2 наблюдается значительное увеличение  $\Delta c_y$ , а для модели 6 из-за влияния центрального оперения рост подъемной силы, начиная с  $\theta = 0,004$ , замедляется и величина  $\Delta c_y$  падает.

Аналогичная картина наблюдается и для коэффициента  $m_z$ . Координата  $\bar{X}_{п.д.}$  при наличии вращения для большинства моделей имеет тенденцию к незначительному смещению к донной области, отражая характер изменения коэффициентов  $c_x$ ,  $c_y$  и  $m_z$ . Наиболее заметно это смещение для оперенных моделей 2 и 6; при  $\alpha = 8^\circ$  оно достигает  $4\%$ . Смена направления вращения не оказывала практического влияния на коэффициенты  $c_x$ ,  $c_y$ ,  $m_z$  и координату  $\bar{X}_{п.д.}$ .

Отмеченные особенности поведения аэродинамических характеристик вращающихся тел определяются несколькими причинами, например смещением точки перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный навстречу потоку [10, 11], влиянием центробежных сил, а также воздействием оперения. Нелинейный характер изменения коэффициентов при  $\alpha \neq 0$  связан, вероятно, с перестройкой вихревой системы, симметричное положение которой является недостаточно устойчивым, и даже слабое вращение может, по-видимому, оказать на нее существенное влияние. При этом также происходит прилипание оторвавшегося пограничного слоя на одной стороне корпуса [11], перераспределение картины течения вдоль тела и т. д. Исследование таких вопросов становится в настоящее время все более актуальной задачей.

## ВЫВОДЫ

1. Аэродинамические характеристики вращающихся осесимметричных тел зависят от скорости вращения, а также от геометрических параметров: удлинения  $\lambda$ , наличия и расположения оперений. При  $\lambda < 20$  вращение оказывает слабое влияние на коэффициенты  $c_x$ ,  $c_y$  и  $m_z$ , что позволяет определять их приблизительно по условиям без вращения. При  $\lambda > 30 \div 35$  влияние вращения существенно увеличивается, достигая  $6 \div 8\%$  для коэффициента  $c_x$ , при этом наиболее заметное его изменение происходит в области относительно малых скоростей вращения.

2. При отсутствии вращения коэффициенты аэродинамических сил зависят не только от геометрии тел и режима их обтекания, но и от положения пластин оперения. Схема (X) по отношению к схеме (+) приводит к уменьшению коэффициентов  $c_x$ ,  $c_y$  и  $m_z$  соответственно на 7, 10 и 12% для тела с центральным и хвостовым оперениями при  $\alpha = 8^\circ$ ,  $M = 3$ . Следовательно, при вращении таких тел аэродинамические силы могут испытывать значительные колебания, близкие к периодическим. Для тел очень большого удлинения ( $\lambda > 30 \div 35$ ), как и при вращении, наблюдаются качественные отличия в изменении исследованных характеристик по сравнению с короткими телами.

Институт теоретической  
и прикладной механики  
СО АН СССР,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
26/II 1981

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Handbook of supersonic aerodynamics. Sec. 8. Bodies of revolution.—NAVWEPS Rep. Washington, 1961, 1488, v. 3.
2. Аэродинамические характеристики тел вращения (по материалам иностранной печати за 1951—1968 гг.). Обзор № 321. М.: БНИ ЦАГИ, 1970.
3. Аэродинамика тел вращения малого удлинения (по материалам иностранной печати за 1956—1971 гг.). Обзор № 371. М.: БНИ ЦАГИ, 1972.
4. Петров К. П. Аэродинамика ракет. М.: Машиностроение, 1977.
5. Иштулов А. Г., Коваленко В. М., Косорыгин В. С. и др. Аэродинамические характеристики тел вращения большого удлинения в диапазоне чисел  $M$  0,2—6,0.—Изв. СО АН СССР, 1972, № 3. Сер. техн. наук, вып. 1.
6. Коваленко В. М., Махнин А. М. Аэродинамические характеристики вращающегося осесимметричного тела с перфорацией хвостовой части при  $M=2$ .—Изв. СО АН СССР, настоящий номер.
7. Магнитная подвеска моделей в аэродинамических трубах (по материалам иностр. печати). Обзор № 557. М.: ОНТИ ЦАГИ, 1979.
8. Гусев В. Н. О гиперзвуковом моделировании, обусловленном изменением чисел  $M$  и  $Re$ .—Учен. зап. ЦАГИ, 1979, т. 10, № 6.
9. Мышенков В. И. Отрывные течения около цилиндра с плоским торцом.—Изв. АН СССР, МЖГ, 1979, № 2.
10. Фуруйя, Накамура. Профили скоростей в скошенных пограничных слоях на некоторых вращающихся телах при обтекании в направлении оси вращения.—Прикладная механика, 1970, № 1.
11. Мортон, Джекобсон, Саундерс. Экспериментальное исследование пограничного слоя на вращающемся цилиндре.—Ракетная техника и космонавтика, 1976, т. 14, № 10.

УДК 533.601.312+533.601.314

В. М. КОВАЛЕНКО, А. М. МАХНИН

### АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА С ПЕРФОРАЦИЕЙ ХВОСТОВОЙ ЧАСТИ ПРИ $M=2$

Коэффициент полного сопротивления — одна из основных аэродинамических характеристик осесимметричного тела. Главными составляющими полного сопротивления тел вращения малого удлинения являются волновое и донное сопротивление, последнее составляет 35—40% и более от полного.

Донное давление определяется характеристиками пограничного слоя в точке отрыва потока, режимом течения и другими факторами. Существенное влияние на величину донного давления может оказывать такой фактор, как подвод некоторой массы газа в застойную область за донным срезом, за счет чего давление на дне повышается, а коэффициент донного сопротивления соответственно снижается. Подвод газа можно реализовать с помощью перфорации обтекаемой поверхности [1—3] или путем вдува [4, 5].

Отметим, однако, что при применении перфорированных насадков другие компоненты полного сопротивления — волновое сопротивление и трение — могут возрасти. Поэтому, кроме донного давления, необходимо определять также и суммарную характеристику — полное сопротивление тела.

В работах [1—5], а также в некоторых других доказана принципиальная возможность уменьшения донного сопротивления невращающегося осесимметричного тела за счет подвода в застойную зону относительно малого количества газа. Оставался, однако, открытым вопрос об эффективности данного способа при условии, что осесимметричное тело вращается со сравнительно большой угловой скоростью и находится в потоке под углами атаки  $\alpha > 0$ .

Что касается влияния вращения на основные аэродинамические характеристики осесимметричного тела даже при отсутствии перфорации обтекаемой поверхности, то таких работ известно очень мало [6—8]. Лепнерт и Гастингс [6] нашли, что важным фактором, определяющим величину донного давления на вращающемся теле, является характер пограничного слоя у основания модели. Увеличение вращения от  $\theta = 0$  до  $\theta = 0,17$  приводит к значительному уменьшению донного давления, если пограничный слой является ламинарным, и несколько увеличивает его, если слой становится турбулентным. Здесь  $\theta$  — параметр вращения, равный отношению окружной скорости к скорости набегающего потока. В работе [7] показано, что при увеличении параметра вращения от 0 до 0,32 коэффициент полного сопротивления снаряда, имеющего форму оживало-цилиндра общим удлинением  $\lambda = 5$ , при  $M_\infty = 1,3$  и  $Re_L = 3 \cdot 10^6$  возрастает на 5%. Можно предполагать, что этот эффект обусловлен, в частности, некоторым смещением зоны перехода к носу тела и соответственно возрастанием сопротивления трения. Согласно данным [8],

вращение приводит к некоторому увеличению сопротивления ракеты только при углах атаки  $\alpha > 6^\circ \div 8^\circ$ ; при малых углах атаки сопротивление вращающегося тела не изменяется.

В экспериментальном исследовании, результаты которого приводятся в данной статье, ставилась задача определить влияние разных видов перфорации хвостовой части, а также влияние вращения на аэродинамические характеристики осесимметричных тел с заостренной носовой частью.

**Экспериментальное оборудование.** Объект исследования — осесимметричное тело с цилиндрическим корпусом удлинением  $\lambda_n = 2,42$ , конической головной частью  $\lambda_k = 2,83$  и сменным хвостовым насадком ( $\lambda_n = 1$ ) в виде полого цилиндра или обратного усеченного конуса (рис. 1, а). Боковая поверхность насадков была перфорирована либо круглыми отверстиями диаметром 5 мм, расположенными в шахматном порядке, с осями, нормальными к поверхности насадка, либо узкими продольными щелями шириной 0,6 и 1,2 мм в стенках толщиной ( $\delta$ ) 1 и 3 мм, либо проволоочной сеткой, обтягивающей решетчатый цилиндрический каркас. Два насадка — один цилиндрический, другой конический, используемые в качестве контрольных, имели непроницаемые стенки. На рис. 1, б представлены все типы используемых насадков с их коэффициентами перфорации  $k$ . Под коэффициентом перфорации понимается отношение площади всех отверстий к площади перфорированного участка поверхности.

В качестве силового привода, вращающего модель, применялся электродвигатель постоянного тока мощностью 0,6 кВт, устанавливаемый за обтекателем весов на свободном конце хвостовой державки модели (модернизированный вариант, предложенный Н. М. Бычковым). Вращение от электродвигателя на модель передавалось через вал, проходивший внутри осевого канала державки. Вся установка закреплялась на саблевидной подвеске четырехкомпонентных механических весов аэродинамической трубы, посредством которых измерялись действующие на модель силы. От воздействия внешнего потока двигателя защищен кожухом, образующим вместе с обтекателем саблевидной подвески единое целое.

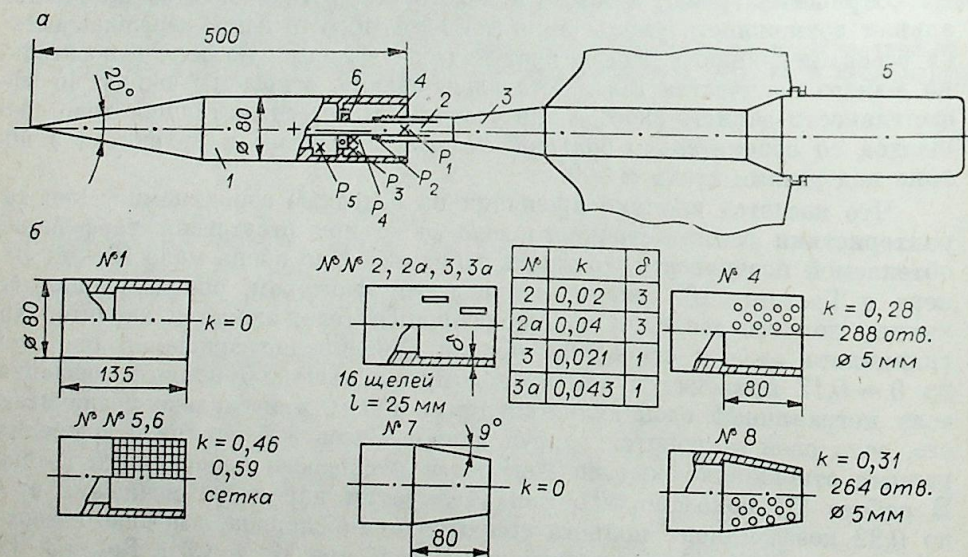


Рис. 1.

а) Общий вид установки, 1 — модель, 2 — державка хвостовая, 3 — обтекатель державки; 4 — оболочка эластичная, 5 — электродвигатель в кожухе, 6 — фотодатчик числа оборотов. \* — приемники давлений  $P_1 - P_5$ ; б) насадки хвостовые.

Скорость вращения модели определялась с помощью системы фотодатчик — частотомер с точностью  $\pm 50$  об/мин. Максимальное число оборотов составляло 12 000 об/мин.

Для учета сил давления, действующих на хвостовую державку, использовались пневмоприемники, расположенные внутри обтекателя весов, и манометры ГРМ-2 с пределами измерений  $(0,1 \div 1) \cdot 10^5$  Па. Измерение донного давления (давления внутри хвостовых насадков) производилось пневмоприемниками № 2—5, причем № 3—5 располагались в вертикальной плоскости снизу от державки, а приемник № 2 — справа, на самой державке. Отверстия приемников обращены в сторону носа модели, их расположение указано на рис. 1, а.

Для устранения перетекания воздуха из полости весов трубы к донному срезу модели устанавливалась гибкая тонкостенная оболочка 4 (типа сифона), закрепленная одним концом на державке 2, а другим — на ее коническом обтекателе 3 (см. рис. 1, а). При известном перепаде давлений на оболочке  $\Delta P = P_1 - P_2$  возможно определить и исключить выталкивающую силу, которая искажает результаты измерений.

**Программа и методика исследования. Точность измерений.** Опыты проведены в сверхзвуковой аэродинамической трубе ИТГИМ Т-313 при числах Маха  $M = 2,04$  и Рейнольдса  $Re_L = 13 \cdot 10^6$ ; здесь  $L$  — длина модели.

Все эксперименты подразделялись на две серии: основную и методическую. В основной серии испытаний определены аэродинамические характеристики — коэффициенты полного сопротивления  $C_x$ , подъемной силы  $C_y$ , момента тангажа  $m_z$ , центра давления  $\bar{x}_{п.д}$  и донного давления  $\bar{P}_{дон}$  всех моделей в зависимости от угла атаки и параметра вращения.

Серия методических испытаний с целью определить погрешности результатов измерений, которые могли отличаться от обычных для данной трубы вследствие специфики опытов: наличия закрутки потока моделью, загромождения поля трубы кожухом двигателя, отсутствия свободного притока воздуха в донную область и др. Для модели № 4 (цилиндрический хвостовик с перфорацией круглыми отверстиями) проведены восьмикратные измерения всех коэффициентов. Осредненные по всем значениям  $\theta$  и  $\alpha$  среднеквадратичные погрешности измерений оказались следующими:  $\sigma_{C_x} = 0,0021$ ,  $\sigma_{C_y} = 0,0020$  и  $\sigma_{m_z} = 0,0017$ .

Точность измерения давления внутри полого насадка, оказалось, зависит прежде всего от места нахождения пневмоприемника и почти не зависит от скорости вращения и угла атаки. Так, давление в приемнике № 5, расположенном в непроницаемой части насадка (см. рис. 1, а), сохраняется стабильным в разных опытах ( $\sigma_{\bar{P}} = 0,0005$ ), а в приемнике № 3, находящемся ближе к перфорированной стенке, заметно изменяется ( $\sigma_{\bar{P}} = 0,0031$ ).

Для надежного определения коэффициента донного сопротивления необходимо иметь распределение давления по всей площади дна модели. В наших опытах измерялось давление только в четырех точках в полости хвостового насадка. По этим данным можно сделать прежде всего качественные выводы об изменении донного сопротивления при различной перфорации хвостовой части. В дальнейшем сравнения проводятся для определенности по показаниям пневмоприемника № 3. Последние оказались близкими к известным данным, приведенным в [9] (рис. 2). При определении коэффициента донного сопротивления  $C_{хд}$ , естественно, учитывалась площадь донного среза:

$$C_{хд} = -\bar{P}_{дон} \cdot (S_d/S_m), \quad (1)$$

где  $S_d$ ,  $S_m$  — соответственно площадь донного среза и площадь мидела. Результаты испытаний. Как и следовало ожидать, перфорация об-

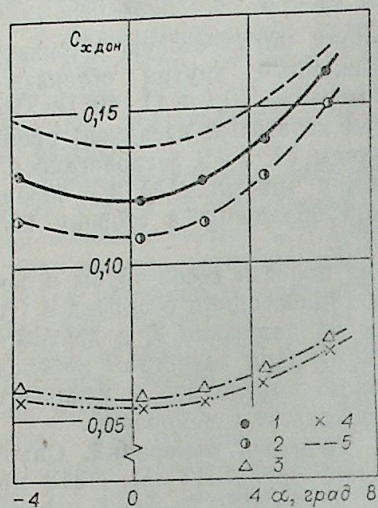


Рис. 2. Коэффициент донного сопротивления при  $\theta=0,075$ .  
1 — мод. 1, 2 — мод. 3, 3 — мод. 4, 4 — мод. 5, 5 — расчет по данным [9] при  $\theta=0$ .

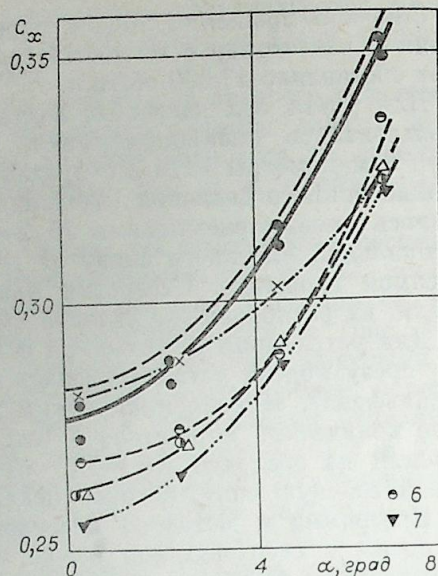


Рис. 3. Коэффициенты полного сопротивления при  $\theta=0,075$ .  
1—5 — обозн. см. на рис. 2; 6 — мод. 2, 7 — мод. 7.

текаемой поверхности хвостовой части тела заметно изменяет его лобовое сопротивление. Так как это изменение прямо зависит от величины донного давления, то следует рассматривать совместно изменение полного и донного сопротивления (рис. 2 и 3).

Наибольшее (в два и более раза) снижение донного сопротивления обеспечивают насадки с перфорацией в виде круглых отверстий и с проволочной сеткой (см. рис. 2). Меньший эффект дает щелевая перфорация. При этом тонкостенный насадок (модель 3,  $\delta=1$  мм) вследствие меньшего гидродинамического сопротивления обеспечивает больший прирост донного давления, чем толстостенный (модель 2,  $\delta=3$  мм) и тем уменьшает полное сопротивление тела.

Распределение давления в полости насадка с малой степенью перфорации  $k=0,02$  так же, как и в насадках с непроницаемой поверхностью или с сетчатой перфорацией, практически равномерно при всех значениях параметра вращения и угла атаки. На модели с перфорацией круглыми отверстиями равномерность распределения давления нарушается с ростом  $\theta$  (рис. 4).

Из рис. 3 видно, что выигрыш в полном сопротивлении дают все варианты со щелевой перфорацией, причем больший — для случая тонкостенного насадка. За счет меньшего волнового сопротивления щелей этот выигрыш получается таким же, как и от перфорации круглыми отверстиями.

Влияние перфорации на донное и полное сопротивление видно из сравнения характеристик моделей 1 и 4 (см. рис. 2). Прирост донного давления в перфорированном насадке по сравнению с неперфорированным составляет  $\Delta \bar{P}_{\text{дон}}=0,06$  при  $\alpha=0$  и  $0,08$  при  $\alpha=6,6^\circ$ . При равенстве площадей донного среза и миделя тела, как это имеет место у моделей с цилиндрическими хвостовиками, этот прирост  $\bar{P}_{\text{дон}}$  тождественно должен был бы быть равным снижению полного сопротивления на ту же величину. Однако выигрыш полного сопротивления за счет перфорации составляет только 25—30% от прироста донного давления, остальная часть этого прироста компенсируется увеличением волнового сопротив-

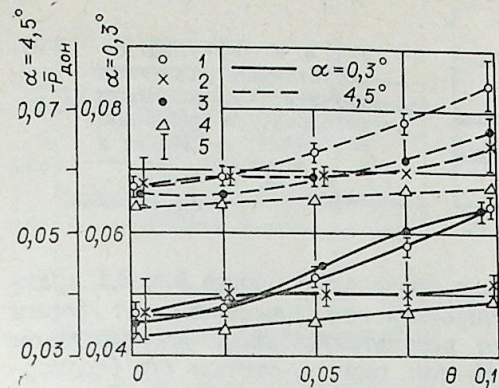


Рис. 4. Коэффициент донного давления модели № 4 в зависимости от параметра вращения.  
1 — давление в точке  $P_2$ , 3 — в  $P_4$ , 2 — в точке  $P_3$ , 4 — в  $P_5$ , 5 — величина среднеквадратичной погрешности измерений.

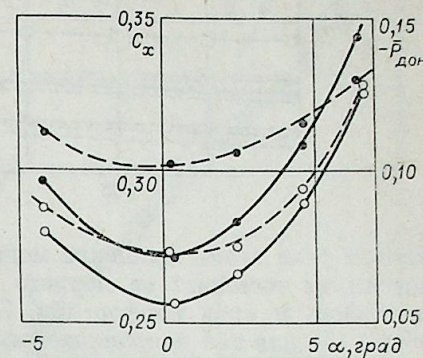


Рис. 5. Влияние перфорации обратного усеченного конуса на донное давление и полное сопротивление при  $\theta=0$ .  
○ —  $C_x$ ; ● —  $\bar{P}_{\text{дон}}$ ;  $k=0$  (—); 0,31 (---).

ления и трения (см. рис. 3). Увеличение прироста  $\bar{P}_{\text{дон}}$  с углом атаки с  $0,06$  до  $0,08$  связано, вероятно, с повышением давления на наветренной боковой поверхности тела. Перфорация же обратного усеченного конуса не изменяет полного сопротивления тела либо приводит к некоторому его повышению (рис. 5). При этом наблюдается повышение донного сопротивления на 26—44%. Последнее объясняется тем, что статическое давление на обтекаемой поверхности хвостового конуса ( $\bar{P} = -0,120$  [9]) ниже, чем давление внутри полого хвостовика ( $\bar{P} = -0,072$ ). Под действием этого давления воздух из полого хвостовика перетекает наружу. На вращающемся теле этот эффект может только усилиться. Следовательно, на телах вращения с хвостовиком в виде усеченного конуса подвод газа к застойной области невозможно реализовать с помощью перфорации поверхности. Для этой цели необходимо применять другие способы.

Обобщая результаты испытаний моделей с перфорированными цилиндрическими хвостовиками, следует отметить, что снижение полного сопротивления при  $\alpha=0$  с помощью любого из испытанных вариантов перфорации не превышает 5—6% сопротивления модели с непроницаемой поверхностью. Сетчатый хвостовик не снижает, а наоборот, увеличивает  $C_{x0}$ , по-видимому, за счет повышения сопротивления сетки в сверхзвуковом потоке. С ростом угла атаки все виды перфорации увеличивают выигрыш в  $C_x$ . Наибольший выигрыш до 8% при  $\alpha=6,6^\circ$  обеспечивает тонкостенный насадок с перфорацией щелями либо круглыми отверстиями.

Влияние перфорации на такие характеристики осесимметричного тела, как коэффициенты подъемной силы  $C_y$ , момента тангажа  $m_z$ , центра давления  $\bar{x}_{\text{п.д.}}$ , не превышает влияния случайных факторов.

Эксперименты, проведенные при различных скоростях вращения, позволили определить зависимость аэродинамических характеристик тел от параметра вращения  $\theta$ . Основная часть опытов с изменением  $\theta$  проведена при нулевом угле атаки. В этих условиях вращение могло отразиться лишь на полном сопротивлении тела. Как показали опыты, заметного изменения коэффициента сопротивления  $C_x$  с увеличением параметра вращения  $\theta$  не наблюдается. Незначительное, но устойчивое повышение  $C_x$  с ростом  $\theta$  проявляется у моделей 1, 2а, 3, 4а и 6 (рис. 6). Однако подобное увеличение  $C_x$  лишь у модели 3 превышает утреннюю величину среднеквадратичной погрешности, равную  $0,006$ . Таким образом, при

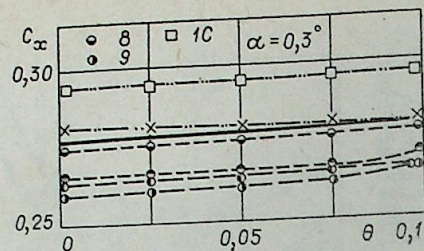


Рис. 6. Коэффициент сопротивления различных моделей в зависимости от параметра вращения. 1—7 — обозн. см. на рис. 2 и 3, 8 — модель 2а, 9 — мод. 3а, 10 — мод. 6.

нулевым угле атаки вращение модели в пределах значений  $\theta \leq 0,1$  практически не изменяет ее полного сопротивления независимо от формы хвостовика и вида перфорации. Этот результат согласуется с выводом работы [7] для тел непроницаемых. Нельзя, однако, считать его бесспорным и при более высоких значениях параметра вращения  $\theta$ . Есть основания полагать, что при значениях  $\theta$  порядка единицы сопротивление вращающегося в осевом потоке тела должно увеличиться.

Вращение не оказывает заметного влияния на величину  $C_x$  также и при  $0 \leq \alpha \leq 7^\circ$ . Так, для модели 4 при  $\alpha = 4,5^\circ$  наблюдалось незначительное уменьшение  $C_x$  с ростом  $\theta$ , не превышающее, однако, одностороннего доверительного интервала, соответствующего доверительной вероятности 0,95.

Проследим, как с вращением изменяется донное давление, от величины которого зависит коэффициент  $C_x$ . Донное давление моделей с непроницаемыми стенками, а также с большим коэффициентом перфорации  $k \approx 0,5$  сохраняется практически неизменным при  $0 \leq \theta \leq 0,1$  (рис. 7). Для моделей со щелевой перфорацией ( $k = 0,02 \div 0,043$ ) изменения  $\bar{P}_{\text{дон}} = f(\theta)$  не превышают 0,01. Наиболее заметное понижение  $\bar{P}_{\text{дон}}$  (на 0,02) с ростом  $\theta$  наблюдалось на модели 4, и то лишь в точках, расположенных вблизи оси симметрии тела (см. рис. 4, точки 2 и 4). Можно, таким образом, сделать вывод, что вращение при  $0 < \theta \leq 0,1$  несколько увеличивает донное сопротивление.

Влияние вращения на коэффициент подъемной силы  $C_y$  не наблюдалось во всем диапазоне  $\theta$  и  $\alpha$  ни на одной из исследованных моделей (рис. 8). Не обнаружилось однозначной зависимости и коэффициента момента тангажа  $m_z$  от скорости вращения как при нулевом, так и при ненулевом угле атаки.

Влияние вращения на коэффициент центра давления как на величину, производную от  $C_x$ ,  $C_y$  и  $m_z$ , обусловлено изменениями этих коэффициентов, — в первую очередь коэффициента  $m_z$ , — с ростом  $\theta$  и, следовательно, пренебрежимо мало.

**Расчет аэродинамических коэффициентов при  $\theta = 0$ .** Как известно, коэффициент полного сопротивления тела вращения конус — цилиндр при  $\alpha = 0$

$$C_{x0} = C_{xв} + C_{x\text{дон}} + C_F, \quad (2)$$

где  $C_{xв}$  и  $C_F$  — соответственно коэффициенты волнового сопротивления и сопротивления трения. Для невращающегося конуса с углом полураствора  $\beta_k = 10^\circ$  при числе  $M_\infty = 2$  коэффициент  $C_{xв} = 0,105$  [10]. Средний коэффициент сопротивления трения, отнесенный к площади миделя, с учетом формы тела и наличия зоны перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный согласно расчетам по работе [11], составляет  $C_F = 0,041$ .

Коэффициент донного сопротивления, в соответствии с данными [9] и [12], может быть принят равным  $C_{xв} = 0,135$  (см. рис. 2). Таким образом,  $C_{x0 \text{ расч.}} = 0,281$ , что примерно на 1,5% выше  $C_{x0 \text{ эксп.}} = 0,277$  (см. рис. 3). При увеличении угла атаки коэффициент полного сопротив-

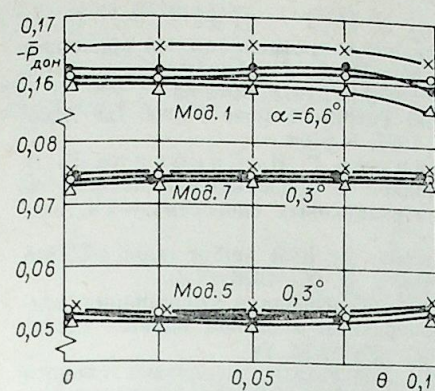


Рис. 7. Зависимость коэффициента донного давления от параметра вращения.

Обозн. см. на рис. 4.

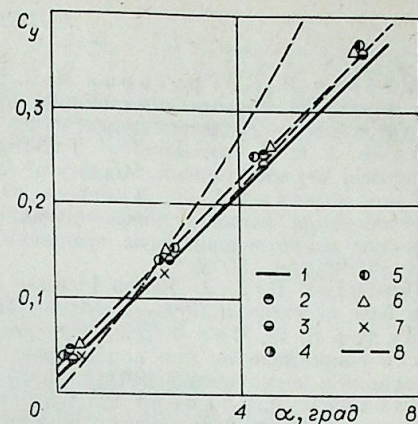


Рис. 8. Зависимость  $C_y = f(\alpha)$  для различных моделей.

1 — мод. 1, 4 — мод. 3, 2 — 2, 5 — 3а, 3 — 2а, 6 — 4, 7 — 5, 8 — расчет по данным [10] при  $\theta = 0$ .

ления возрастает в соответствии с зависимостью

$$C_x = C_{x0}[1 + \varepsilon \cdot \sin^2(\alpha/2)], \quad (3)$$

где  $\varepsilon$  — некоторый коэффициент, зависящий в основном от формы тела вращения. Для тела конус — цилиндр в диапазоне  $1,5 \leq M_\infty \leq 2,2$  коэффициент  $\varepsilon \approx 80$  [10]. Расчет  $C_x = f(\alpha)$  по формуле (3) показан на рис. 3. Согласование расчетных данных с экспериментальными хорошее.

Расчетные значения коэффициентов подъемной силы, момента тангажа и центра давления, выполненные по формулам работы [10], удовлетворительно согласуются с результатами измерений.

## ВЫВОДЫ

1. Перфорация хвостовой части тела типа конус — цилиндр приводит к снижению коэффициента донного сопротивления, в некоторых случаях (перфорация в виде круглых отверстий или в виде сетки) к значительному: в два и более раза. Однако полное сопротивление тела уменьшается всего на 5—6% при  $\alpha = 0$  и до 8% при  $\alpha = 7^\circ$  (перфорация в виде круглых отверстий или продольных щелей), так как при этом возрастает сопротивление трения и волновое сопротивление. Щелевая перфорация при  $k = 0,02$  дает практически такой же эффект, как и перфорация круглыми отверстиями при  $k = 0,28$ .

Перфорация хвостовой части тела слабо влияет на подъемную силу, момент тангажа и положение центра давления.

2. Вращение тела в диапазоне значений  $0 \leq \theta \leq 0,1$  и  $0 \leq \alpha \leq 7^\circ$  практически не сказывается на величине основных аэродинамических характеристик — коэффициентах полного сопротивления, подъемной силы, момента тангажа и центра давления.

Институт теоретической  
и прикладной механики  
СО АН СССР,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
1/IX 1980

1. Щербак Я. С., Григоров В. К. Исследование сопротивления тел вращения с перфорированными хвостовиками при околозвуковых и сверхзвуковых скоростях потока.— Тр. Высш. авиац. уч-ща гражд. авиации, 1970, вып. 45.
2. Nash J. E. A Discussion of Two-Dimensional Turbulent Base Flows. L.: Aeronautical Research Council, Ministry of Aviation, 1967, N 3468.
3. Гродзовский Г. Л., Лашков Ю. А., Свищев Г. П., Соколова И. Н. Исследование влияния перфорированных насадков с продольными щелями на донное сопротивление тела вращения при сверхзвуковых скоростях.— Уч. зап. ЦАГИ, 1972, т. 111, № 2.
4. Hudgins H. E. J. Range increase of projectiles by heat and/or mass addition to base or external flow.— Aerodyn. Base Combustion, N. Y., 1976, N 9.
5. Щадов К. К., Чиз Д. Дж. Экспериментальное исследование уменьшения донного сопротивления при комбинированном поперечном и осевом вдуве.— Ракет. техника и космонавтика, 1978, т. 16, № 10.
6. Каванау Л., Ленерт Р., Гастингс С. Результаты экспериментального исследования донного давления при средних числах Re и влияния вращения моделей.— Вопр. ракет. техники, 1955, № 4.
7. Schmidt L. E., Murphy C. H. Effect of Spin in Aerodynamic Properties of Bodies of Revolution.— JAS, 1954, N 12.
8. Девис Л., Фолли Д., Блитцер Л. Внешняя баллистика ракет. М.: Воениздат, 1961.
9. Handbook of Supersonic Aerodynamics. Sec. 8. Bodies of Revolution.— Navweper Repotr, Washington, 1961, 1488 (v. 3).
10. Краснов И. Ф. Аэродинамика ракет. М.: Изд-во высшей школы, 1968.
11. Коваленко В. М., Шулемович В. М. Турбулентный пограничный слой на круговом цилиндре.— Изв. СО АН СССР, 1972, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.
12. Коваленко В. М., Косорыгин В. С., Шумский В. В. Экспериментальное исследование донного давления на круговых цилиндрах большого удлинения.— Изв. СО АН СССР, 1972, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

УДК 629.7.015.3

А. Ф. ЛАТЬПОВ, Б. Н. СОРОКА

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ  
ДОЗВУКОВОГО ТРАНСПОРТНОГО САМОЛЕТА

Математическая модель (ММ) самолета на предварительном этапе проектирования отражает главным образом ее функциональные свойства и строится на основе прогнозируемых характеристик элементов. Критерием для определения предпочтительных значений и допустимых пределов изменения основных параметров самолета является условие обеспечения минимально допустимой эффективности функционирования летательного аппарата с требуемыми эксплуатационными характеристиками. Незначительность объема исходной информации определяет, во-первых, итерационный характер построения ММ, проявляющийся как в количестве включаемых уровней иерархии, так и в точности их описания, и, во-вторых, необходимость построения ММ с минимальным числом связей, задаваемых функциональных характеристик и входных параметров элементов с целью уменьшения степени неопределенности результатов исследований характеристик летательного аппарата. Второе обстоятельство стимулирует поиск обобщенных представлений характеристик элементов.

В данной работе предлагается ММ дозвукового транспортного самолета, которая дает возможность проводить расчетные исследования по влиянию обобщенных параметров на характеристики самолета на этапе предварительного проектирования. ММ основана на представлении характеристик планера и силовой установки в виде безразмерных зависимостей, охватывающих широкий класс дозвуковых самолетов с турбореактивными двигателями, заданий базовых значений совокупности определяющих безразмерных параметров, и включает условия максимума дальности полета при  $M = \text{const}$  по параметрам крейсерского режима полета и конструктивным параметрам.

## 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ САМОЛЕТА

**Крейсерский полет.** Максимальная дальность крейсерского полета  $L$  определяется соотношением

$$L = c_L^{\text{опт}} \ln \frac{G_{\text{нач}}}{G_{\text{нач}} - G_T} \quad (1.1)$$

при условии  $c_L^{\text{опт}} = \left( \frac{KV}{c_e} \right)_{\text{max}} = \text{const}$  на протяжении всей крейсерской траектории с заданным числом Маха полета [1]. В этом случае величину  $c_L^{\text{опт}}$  можно вычислять в любой точке крейсерской траектории или ее окрестности. При этом уравнение баланса сил в вертикальном направлении можно опустить. Для дозвуковых самолетов с крейсерскими числами Ма-

ха полета  $M = 0,7 \div 0,9$  в качестве расчетной высоты предпочтительно принять  $H = 11$  км.

Относительный запас топлива на крейсерский полет  $g_r = G_r/G_0$  определяется из весового уравнения самолета и траекторий набора высоты

$$g_r = g_r(\mu_k, g_{н.в}), \quad (1.2)$$

где  $\mu_k = \{G_0/S, R_0/G_0, nF/S, S, \dots\}$  — определяющие, конструктивные и геометрические параметры.

Относительный расход топлива  $g_{н.в}$  на траектории разгона до крейсерской скорости  $w_{нач}$  и набора начальной крейсерской высоты  $H_{нач}$  приближенно определяется формулой

$$g_{н.в} = \frac{c_e w_{нач}}{g} \left( 1 + \frac{1}{n_x K} \frac{2gH_{нач}}{w_{нач}^2} \right), \quad (1.3)$$

где для  $c_e$  и  $(n_x K)$  следует принять средние значения вдоль траектории разгона, заданной здесь соотношением  $H/H_{нач} = (w/w_{нач})^2$ . Из (1.3) следует, что для современных самолетов со средней и большой дальностью полета изменение  $g_r$  вследствие изменения  $g_{н.в}$  при вариациях аэродинамических характеристик самолета и параметров силовой установки мало и в первом приближении его можно не учитывать.

**Поляра самолета.** Точка на поляре, соответствующая оптимальному режиму крейсерского полета, лежит в окрестности точки максимального аэродинамического качества и  $c_y^{опт} \approx c_y^n$ . Поэтому коэффициент сопротивления самолета целесообразно представить в виде разложения в ряд по  $(c_y - c_y^n)$ . Широкий класс поляр охватывается следующим выражением

$$\bar{c}_x = \bar{c}_y + a(\bar{c}_y - 1)^2 + c_d + \sum_i \Delta c_{x_i}, \quad (1.4)$$

где  $a$  — коэффициент отвала поляры;  $\bar{c}_x, \bar{c}_y$  отнесены к значениям при  $K_{max}$  планера,  $c_d$  — параметр относительного сопротивления мотогондол двигателей,  $\Delta c_{x_i} = c_i^* \left( \frac{\bar{c}_{x_0}^i \bar{F}_i}{S} - 1 \right)$  при  $c_i^* = \left( a \frac{c_{x_0}^i F}{c_{x_0}^n S} \right)^*$  — изменение коэф-

фициента аэродинамического сопротивления  $i$ -го элемента по сравнению с базовым значением. Относительные сопротивления элементов  $\bar{c}_{x_0}^i$  при вариациях геометрических параметров и числа Маха могут быть вычислены по известным приближенным методикам.

**Характеристика двигателя.** Зависимость удельного расхода топлива от режима работы турбореактивного двигателя на расчетной высоте  $H = 11$  км с достаточной точностью можно представить в виде

$$\bar{c}_e = 1 + \omega(r - 1)^2, \quad (1.5)$$

где  $\bar{c}_e = c_e/c_{e_{min}}$ ,  $r = R/R(c_{e_{min}})$ . Коэффициент  $\omega$ , равный  $\omega_1$  при  $r < 1$  и  $\omega_2$  при  $r \geq 1$ , при  $M = \text{const}$  определяется из условия минимума средней ошибки аппроксимации в рабочем диапазоне двигателя  $r_{min} \leq r \leq r_{ном}$ . При вариации размерности двигателя дроссельная характеристика считается неизменной.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

На основе соотношений — первого раздела статьи — сформулируем задачу оптимизации. Число Маха крейсерского полета принято постоянным  $M = \text{const}$ . Требуется определить оптимальные значения переменных

$$X = \{c_L, c_y, c_x, c_e, r, g_r, \mu_k\},$$

при которых достигается максимум функционала дальности  $L$  при связях типа равенств

$$\begin{aligned} f_1 &= c_x - c_p(\mu_k)r = 0 \\ f_2 &= c_e - c_e(r, \mu_k) = 0 \\ f_3 &= c_e - c_e(r, \mu_k) = 0 \\ f_4 &= g_r - g_r(\mu_k, g_{н.в}) = 0 \\ f_5 &= c_L - c_y Ma/c_{x_0} = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

и типа неравенств

$$\begin{aligned} r_{min} &\leq r \leq r_{ном}, \\ \mu_k^{min} &\leq \mu_k \leq \mu_k^{max}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Условия локального максимума дальности  $L$  при указанных связях имеют вид

$$\left( 1 + \frac{Dc_e}{Dr} \right) \frac{Dc_x}{Dc_y} = 1 + \frac{r\Delta_r}{1+\Delta} \cdot \frac{Dc_x}{Dc_y}, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{Dc_x}{D\mu_k} - \frac{Dc_p}{D\mu_k} + \left( \frac{Dc_p}{D\mu_k} + \frac{Dc_e}{D\mu_k} - \frac{DL}{Dg_r} \cdot \frac{Dg_r}{D\mu_k} \right) \frac{Dc_x}{Dc_y} &= \frac{\mu_k \Delta \mu_k}{1+\Delta} \cdot \frac{Dc_x}{Dc_y}, \\ k &= 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $\frac{DZ}{DX} = \frac{X}{Z} \frac{\partial Z}{\partial X}$ ;  $\Delta_r = \frac{\partial \Delta}{\partial r}$ ;  $\Delta_{\mu_k} = \frac{\partial \Delta}{\partial \mu_k}$ ,

$\Delta$  — нормированная функция штрафа.

Уравнение (2.3) — необходимое условие оптимальности крейсерского режима полета — устанавливает при  $\mu_k = \text{const}$  оптимальное соотношение между режимом работы двигателя и аэродинамическим качеством самолета.

Рассмотрим частный случай задачи оптимизации: заданы взлетный вес  $G_0$ , платная нагрузка  $G_{п.н}$ , геометрия планера, число Маха крейсерского полета и требуется определить оптимальную размерность двигателей  $F$  и оптимальные параметры режима полета при ограничении (2.2) на параметр  $r$ , задающий режим работы двигателя.

Изменение  $g_r$  в рассматриваемой задаче в предположении  $g_{н.в} = \text{const}$  вызывается только изменением относительного веса силовой установки  $g_{c.y}$ ; при вариации размерности двигателя при условиях  $c_p = \text{const}$ ,  $\gamma = \text{const}$  с достаточной точностью  $g_{c.y} = g_{c.y}^* \bar{F}$ . Тогда

$$g_r = g_r' - g_{c.y}^* \bar{F}, \quad (2.5)$$

где  $g_r'$  — задаваемый параметр, характеризующий весовое совершенство конструкции планера,  $\bar{F} = nF/nF^*$  — относительный мидель мотогондол.

Система уравнений для рассматриваемой оптимизационной задачи в нормированных переменных имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{c}_x - \bar{b}_{c_r} r \bar{F} &= 0, \\ \bar{c}_x - \bar{c}_y - a(\bar{c}_y - 1)^2 - c_d^* \bar{c}_{x_{мг}} \bar{F} &= 0, \\ \bar{c}_e - 1 - \omega(r - 1)^2 &= 0, \\ g_r - g_r' + g_{c.y}^* \bar{F} &= 0, \\ \bar{c}_L - \frac{\bar{c}_y}{c_{x_0} c_e} &= 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\frac{a(1-\bar{c}_y^2) + c_{\text{д}}^* \bar{c}_{\text{хмг}} \bar{F}}{2a\bar{c}_y^2 - (2a-1)\bar{c}_y} - \frac{2\omega r(r-1)}{1+\omega(r-1)^2} = 0,$$

$$\frac{a(1-\bar{c}_y^2)}{2a\bar{c}_y^2 - (2a-1)\bar{c}_y} + \frac{g_{\text{т}}' - g_{\text{т}}}{1-g_{\text{т}}} \cdot \frac{1}{\ln(1-g_{\text{т}})} = 0,$$

$$\bar{L} = -\bar{c}_L \ln(1-g_{\text{т}}),$$

$$r_{\text{ном}} < r < r_{\text{ном}}.$$

которая каждой совокупности задаваемых параметров

$$Z = \{c_R, \bar{c}_{\text{хмг}}, \omega, a, g_{\text{с.у.}}, g_{\text{т}}'\}$$

ставит в соответствие оптимальные значения параметров

$$\bar{X} = \{\bar{L}, \bar{c}_L, \bar{c}_x, \bar{c}_y, r, \bar{c}_e, \bar{F}, g_{\text{т}}\}.$$

Параметры  $c_{\text{д}}^* = \left( a \frac{c_{\text{хмг}} n F}{c_{\text{х}_0}^n S} \right)^*$  и  $b = \left( c_{\text{д}} \frac{c_R (c_{e_{\text{мин}}})}{c_{\text{хмг}}} \right)^*$  фиксированы. Влияние их изменения определяется влиянием вариаций параметров соответственно  $c_{\text{хмг}}$  и  $\bar{c}_R$  (удельная тяга двигателя при  $C_{e_{\text{мин}}}$ ).

На основе этой системы решались следующие задачи.

1. **Задача L** — определение оптимального режима крейсерского полета и оптимальной размерности силовой установки; критерий — дальность полета  $L$ .

2. **Задача C** — определение оптимального режима крейсерского полета и оптимальной размерности силовой установки; критерий — коэффициент дальности  $c_L$ .

В связи с тем, что режим крейсерского полета в общем случае не является определяющим для выбора размерности силовой установки, рассматривались также задачи при увеличении в  $\xi$  раз размерности силовой установки по сравнению с оптимальным значением.

3. **Задача LR** — определение оптимального режима полета при фиксированном значении  $\bar{F} = \xi \bar{F}_{\text{опт}}$ ,  $\xi > 1$ ; величина  $\bar{F}_{\text{опт}}$  определяется из решения задачи L; критерий — дальность полета  $L$ .

4. **Задача CR** — определение оптимального режима полета при фиксированном значении  $\bar{F} = \xi \bar{F}_{\text{опт}}$ ,  $\xi > 1$ ; величина  $\bar{F}_{\text{опт}}$  определяется из решения задачи C; критерий — коэффициент дальности полета  $c_L$ .

### 3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Результаты расчетов приведены на рис. 1—6, где сплошные линии соответствуют решениям задач L или LR, штриховые — задач C или CR. Параметры  $\bar{K}$  и  $\bar{c}_y$  нормированы к соответствующим значениям при максимальном качестве самолета. Дальность полета на всех графиках нормирована к значению дальности базового варианта (см. рис. 2,  $\bar{c}_R = 1$ ), определяемого здесь совокупностью параметров

$$Z^* = \{K_{\text{max}}^n, c_{e_{\text{мин}}}, b, c_{\text{д}}, \omega, a, g_{\text{с.у.}}, g_{\text{т}}', \xi\},$$

численные значения которых равны

$$Z^* = \{0, 0, 1; 0,1; 0,25; 0,7; 0,1; 0,5; 1\}.$$

Вследствие нормировки задавать базовые значения  $K_{\text{max}}^n, c_{e_{\text{мин}}}$  не требуется. Номинальный режим работы двигателя соответствует  $r_{\text{ном}} = 1,2$ .

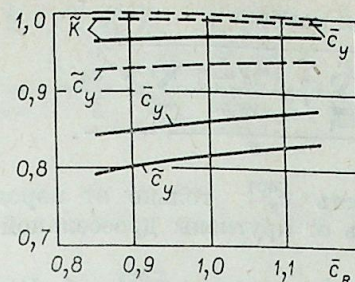


Рис. 1.

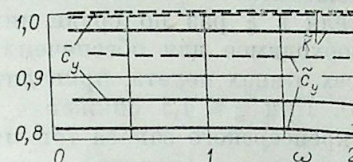


Рис. 3.

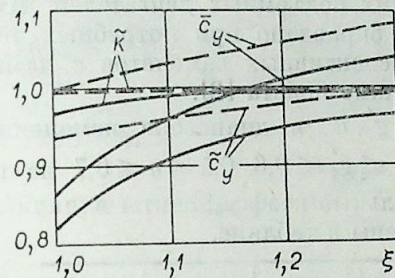


Рис. 5.

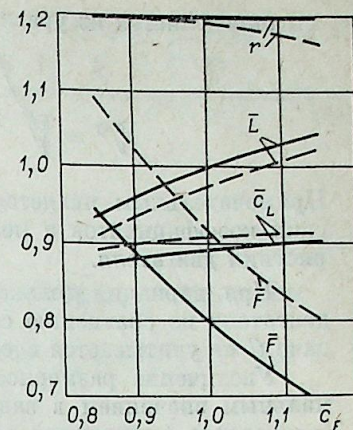


Рис. 2.

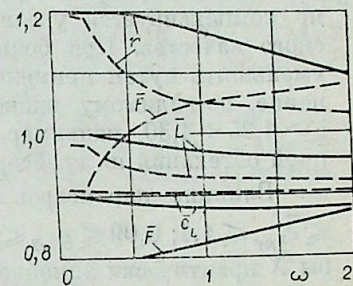


Рис. 4.

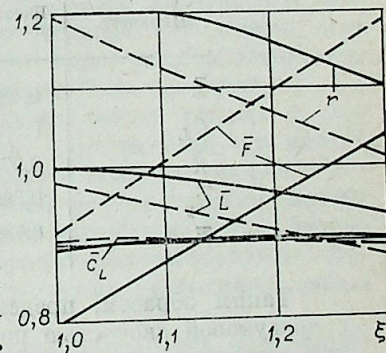


Рис. 6.

На рис. 1.2 представлено влияние изменения относительной удельной тяги двигателя  $\bar{c}_R$  на параметры  $\bar{X}$ . В первом приближении зависимости отвечают условию  $\bar{c}_R \cdot \bar{F} = \text{const}$ , что главным образом связано с малой крутизной дроссельной характеристики двигателя  $\omega$ . Увеличение  $\omega$  (рис. 3, 4) вызывает уменьшение коэффициента дросселирования тяги  $r$  и, как следствие, увеличение размерности двигателя  $\bar{F}$ . Для очень пологой характеристики  $\lim_{\omega \rightarrow 0} r = \infty$  и решение

лежит на границе  $r = r_{\text{ном}}$ ; напротив, для очень крутой  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} r = 1$ . Отношение размерностей двигателей при этом для базовых значений параметров  $Z^*$  составляет  $\bar{F}|_{\omega=\infty} / \bar{F}|_{\omega=0} = 1,2$ ; дальностей полета  $\bar{L}|_{\omega=\infty} / \bar{L}|_{\omega=0} \approx 0,95$ . Для задачи C отношение размерностей описывается в явном виде

$$\frac{\bar{F}|_{\omega=\infty}}{\bar{F}|_{\omega=0}} = \frac{bc_R r_{\text{ном}} - c_{\text{д}}}{bc_R - c_{\text{д}}}. \quad (3.1)$$

Следует отметить, что  $\lim r = 1$  при  $\bar{c}_{\text{хмг}} \rightarrow 0$ .

В задаче C в общем случае варьирования параметров  $\bar{F}_i$  при заданных значениях  $\bar{c}_{\text{х}_0}^i$  оптимальное значение коэффициента подъемной си-

лы определяется из уравнений (2.4) и равно

$$\bar{c}_y^{\text{опт}} = \sqrt{1 + \frac{c_d^* - \sum_{i=1}^m c_i^* + \frac{m-1}{m} \sum_{i=1}^m c_i^* \frac{\bar{c}_{x_0}^i}{S}}{a}} \quad (3.2)$$

Примечательным является зависимость  $\bar{c}_y^{\text{опт}}$  только от аэродинамических коэффициентов и независимость от крутизны дроссельной характеристики двигателя.

При вариации только размерности двигателя  $\bar{c}_y^{\text{опт}} = 1$ . Размерность двигателя по сравнению со значением в задаче  $L$  больше, так как в задаче  $C$  не учитывается весовое соотношение.

Увеличение размерности двигателя в  $\xi$  раз по сравнению с оптимальным значением в задаче  $L$ , необходимое для обеспечения условий безопасного функционирования на всех этапах полета, приводит к уменьшению дальности полета (рис. 5, 6). При  $\xi \leq 1,1$  снижение дальности незначительно, так как уменьшение крейсерского запаса топлива частично компенсируется увеличением оптимального значения аэродинамического качества. При больших значениях  $\xi$  снижение дальности можно уменьшить путем применения легких подъемных двигателей. Их применение, по-видимому, экономически оправдано при потребных значениях  $\xi > 1,25 \div 1,30$ , например, для перспективных самолетов с ламинаризацией обтекания на крейсерском режиме полета [2].

Влияние параметров  $\bar{c}_{x_{\text{мг}}}$ ,  $g_{c.y}$ ,  $g'_T$ ,  $a$  в диапазоне изменений  $0,9 \leq \bar{c}_{x_{\text{мг}}} \leq 1,1$ ;  $0,09 \leq g_{c.y} \leq 0,11$ ;  $0,5 \leq g'_T \leq 0,6$ ;  $0,5 \leq a \leq 0,7$  на параметры  $X$  практически линейно. Оптимальные коэффициенты влияния  $D\bar{L}/D\bar{Z}$  в окрестности базовой точки приведены в таблице.

Параметр	Базовое значение	$\bar{c}_{x_{\text{мг}}}$	$g_{c.y}$	$g'_T$	$a$
$\bar{L}$	0,489	-0,114	-0,252	1,737	-0,025
$\bar{C}_L$	0,896	-0,093	-0,024	0,011	0,015
$\bar{K}$	0,973	-0,017	-0,031	0,014	0,028
$\bar{C}_y$	0,865	-0,014	-0,120	0,057	0,172
$\bar{F}$	0,789	0,081	-0,096	0,047	0,158

Таким образом, представленное математическое описание самолета с дозвуковой скоростью полета, основанное на обобщенном представлении поляры самолета (1.4), характеристики двигателя (1.5) и введении безразмерных определяющих параметров  $Z^*$ , позволяет проводить параметрические исследования характеристик дозвуковых транспортных самолетов на предварительном этапе проектирования в широком диапазоне изменений определяющих параметров.

Институт теоретической  
и прикладной механики  
СО АН СССР,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
19/IV 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Остославский И. В., Стражева И. В. Динамика полета. Траектории летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1969.
2. Исследование дальних пассажирских самолетов с усовершенствованной аэродинамикой (УЛО) и перспективными двигателями.— Тр. Рижск. ИИГА, вып. 199. Рига, 1971.

УДК 621.314.5

А. Л. БАРАННИКОВ, С. Д. ГРИШИН, М. М. КАПУСТИН, В. А. КОШЕЛЕВ

#### ПЛАЗМЕННЫЙ ТРАНСФОРМАТОР ПОСТОЯННОГО ТОКА

Перед энергетикой помимо задачи преобразования одного вида энергии в другой (например, тепловой в электрическую или механическую, и наоборот) стоит также задача трансформации энергии определенного вида в энергию того же вида, но обладающую другими параметрами, более удобными для потребителя этой энергии. Устройства, решающие эту задачу, принято называть трансформаторами.

Наиболее известны и имеют широкое применение трансформаторы, использующие в качестве посредника механическую энергию и энергию магнитного поля. Идею их применения подсказывает закон электромагнитной индукции [1, 2, 5]

$$\varepsilon_{\text{инд}} = - \left( \frac{d\Psi}{dt} \right)_{V=0} - \left( \frac{d\Psi}{dt} \right)_{B=\text{const}}$$

где  $\Psi$  — поток магнитной индукции. Из этого закона следует, что мы можем получить ЭДС  $\varepsilon_{\text{инд}}$  либо если контур движется  $V \neq 0$ , либо если меняется во времени магнитное поле  $B$ , пересекающее контур. Очевидно, что для выработки электроэнергии контур должен быть проводящим.

Таким образом, при трансформации встает задача создать с помощью электроэнергии движение проводящего контура (или его части) или переменное магнитное поле. Последнее можно получить только с помощью переменного тока. Поскольку при этом потери энергии можно свести к минимуму (около 3 ÷ 5% для мощных трансформаторов), трансформаторы переменного тока получили широкое распространение. Использовать переменный ток для получения движения проводящей среды нецелесообразно.

С помощью постоянного тока непосредственно получить переменное магнитное поле нельзя. Необходимо использовать постоянный ток для получения движения проводящей среды с помощью силы Ампера, либо сначала превратить постоянный ток в переменный с помощью инвертора, а затем воспользоваться трансформатором переменного тока. Однако у последнего способа есть недостатки:

1. При необходимости преобразовать постоянный ток низкого напряжения 1 ÷ 20 В и большой силы 1 ÷ 10 кА значительно снижается КПД инвертора вследствие относительно больших падений напряжения на ключевых элементах 1 ÷ 2 В.

2. Если на выходе нужно получить постоянный ток, то приходится применять еще и выпрямитель. Это делает систему громоздкой и снижает ее КПД. Таким образом, в ряде случаев целесообразно использовать постоянный ток для получения движения проводящей среды. На этом принципе работают мотор-генератор и униполярные преобразователи [4]. Недостатком их является низкий КПД для мотор-генераторов и малое

напряженне для униполярных преобразователей. В настоящей работе исследуется трансформатор постоянного тока, где в качестве движущегося проводника используется проводящая жидкость или плазма, что позволяет повысить как КПД такого трансформатора, так и абсолютную величину его выходного напряжения.

### МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ ТРАНСФОРМАТОР ПОСТОЯННОГО ТОКА

МГД трансформаторы постоянного тока (ТПТ) к настоящему времени очень мало исследованы. Можно указать на гидромагнитный конденсатор [4], где проводящая жидкость или плазма сначала разгоняется постоянной ЭДС за счет силы Ампера, а затем тормозится после подключения к клеммам нагрузки. Если при этом изменить величину магнитного поля  $B$  в период торможения, то можно повысить или понизить напряжение на нагрузке по сравнению с напряжением, прикладываемым при разгоне. Основным недостатком такого устройства является импульсный характер его работы. Между тем МГД и ТПТ могут найти широкое применение в преобразовательной технике. Известно, например, что на дальние расстояния гораздо экономичнее передавать постоянный ток высокого напряжения, чем переменный. Можно представить себе следующую схему выработки и передачи электроэнергии с использованием МГД ТПТ: на электростанции установлен генератор постоянного тока, например весьма надежный и простой по конструкции униполярный генератор, вырабатываемое им низкое напряжение повышается с помощью ТПТ до требуемой величины и передается к месту потребления энергии. Перед инвертированием напряжение при необходимости можно понизить также с помощью ТПТ. Кроме того, в ряде случаев потребителю необходим постоянный ток, например для широко использующихся в технологии процессов электролиза. При этом отпадает необходимость в инвертировании, а изменить напряжение постоянного тока до нужной величины можно с помощью ТПТ.

Несомненно, главным условием для широкого применения ТПТ является наличие у него достаточно высокого КПД. Величина КПД должна быть, очевидно, не ниже, чем у системы инвертор — трансформатор переменного тока — выпрямитель, что составляет примерно 75—80%. Кроме того, ТПТ должны быть простой конструкции, надежными в работе и удобными в эксплуатации.

Принцип действия и некоторые результаты исследования устройства, которое может удовлетворять перечисленным требованиям, рассмотрены в работе [2]. Однако сколько-нибудь подробного теоретического исследования такого трансформатора не проведено. Ниже рассматривается принцип действия и дается теоретический анализ МГД ТПТ.

#### ПРИНЦИП ДЕЙСТВИЯ ТПТ

Схематически устройство трансформатора постоянного тока изображено на рис. 1. ТПТ представляет собой кольцевой МГД канал, одна часть которого используется как ускоритель плазмы, а другая — как МГД генератор. Электроды ускорителя и генератора разделены изоляторами. Магнитное поле создается постоянными магнитами. На ускорительном участке происходит переход электроэнергии постоянного тока низкого напряжения в кинетическую и потенциальную энергию плазмы (электролита, жидкого металла) за счет действия электромагнитной силы  $\vec{F}_{\text{эм}} = \vec{j} \times \vec{B}$ .

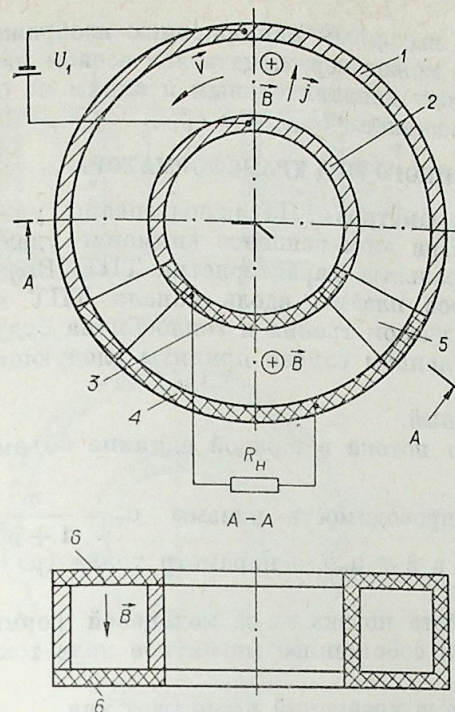


Рис. 1. Конструктивная схема МГД трансформатора постоянного тока.

1, 2 — электроды ускорителя; 3, 4 — электроды МГД генератора; 5 — участок перехода между ускорителем и генератором; 6 — верхняя и нижняя диэлектрические стенки канала.

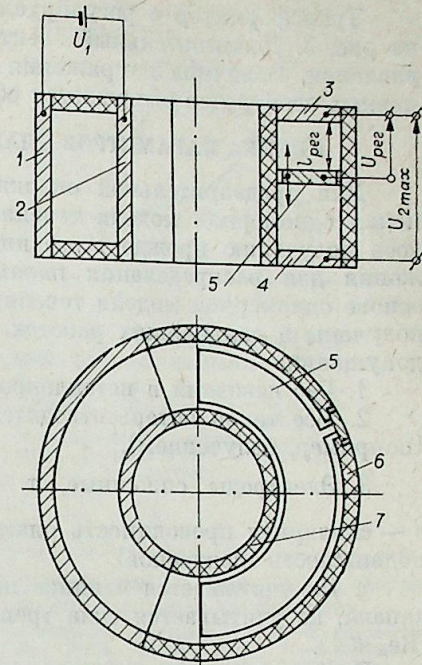


Рис. 2. Конструктивная схема ТПТ с несколькими значениями выходного напряжения.

1, 2 — электроды ускорителя; 3, 4 — основные электроды МГД генератора; 5, 6 — дополнительные электроды МГД генератора; 7, 8 — изоляционные стенки. На участках перехода осуществляется поворот магнитного поля на  $90^\circ$ , что позволяет создать удобную компоновку ТПТ.

На участке МГД генератора происходит обратный переход. При этом выходное напряжение можно повысить или понизить, изменяя соотношение магнитных полей, геометрических размеров и скоростей плазмы на ускорительном и генераторном участках, это следует из выражения для коэффициента трансформации

$$K_{\text{тр}} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{E_2 y_2}{E_1 y_1} = \frac{K_2 V_2 B_2 y_2}{K_1 V_1 B_1 y_1},$$

где  $V$ ,  $B$ ,  $y$  и  $K$  — соответственно скорость плазмы, магнитная индукция, расстояние между электродами и коэффициент нагрузки. Параметры с индексами 1 и 2 относятся соответственно к ускорителю и генератору. Проводимость плазмы может поддерживаться за счет омических потерь в плазме при протекании тока.

На выходе трансформатора можно получать не одно, а несколько значений напряжения, а также плавно регулируемое напряжение.

Схема трансформатора с несколькими значениями выходного напряжения представлена на рис. 2. В канал МГД генератора введено несколько дополнительных электродов, расположенных перпендикулярно электрическому полю  $E$ . Величина напряжения на каждой паре электродов пропорциональна полю  $E$ . Величина напряжения на каждой паре электродов пропорциональна, таким образом, расстоянию между ними  $U_i = E \cdot y_i$ .

Трансформатор с регулируемым выходным напряжением изображен на рис. 3. Дополнительный электрод может перемещаться в осевом направлении. Величина напряжения между дополнительным и одним из основных электродов выражается соотношением  $U_{\text{рег.}} = E \cdot y_{\text{рег.}}$ .

### ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ПЛАЗМЕННОГО МГД ТРАНСФОРМАТОРА

Для предварительной оценки параметров ТПТ использованы уравнения одномерной модели течения. При этом основное внимание уделялось получению прежде всего интегральных характеристик ТПТ. Выражения для распределения параметров плазмы вдоль канала ТПТ на основе одномерной модели течения с учетом трения и теплообмена будут получены в дальнейших работах. В данном случае приняты следующие допущения:

1. Газ невязкий и нетеплопроводный.
2. Все тепло потерь отводится от потока в каждой единице объема (например, излучением).

3. Электроды сплошные, т. е. проводимость плазмы  $\sigma_T = \frac{\sigma}{1 + \beta^2}$ ,  $\sigma$  — скалярная проводимость плазмы, а  $\beta = \mu_e B$  — параметр холла ( $\mu_e$  — подвижность электронов).

4. Не учитывается влияние поворота потока из-за кольцевой формы канала, не учитывается сила трения и собственное магнитное поле тока ( $Re_\mu \ll 1$ ).

При этих условиях исходная система уравнений принимает вид

$$\rho VA = \dot{m} = \text{const}, \quad (1)$$

$$\rho V \frac{dV}{dx} + \frac{dp}{dx} = j \cdot B; \quad (2)$$

$$p/\rho^{\gamma} = \text{const}; \quad (3)$$

$$p = \rho RT, \quad (4)$$

$$j = \sigma_T VB^2(K - 1), \quad K = E/VB. \quad (5)$$

Здесь  $\rho$ ,  $V$ ,  $p$  и  $T$  соответственно плотность, скорость, давление и температура плазмы,  $A$  — площадь поперечного сечения канала,  $R$  — газовая постоянная,  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$  — показатель адиабаты.

Из исходной системы уравнений можно получить обобщенное уравнение в виде

$$\frac{\dot{m}}{2} d(V^2) + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0^{\gamma}} \dot{m}^{\gamma} d(V \cdot A)^{-(\gamma-1)} = \frac{\sigma}{1 + \beta^2} V^2 B^2 A (K - 1) dx. \quad (6)$$

Интегрируя его, получим с учетом уравнения (1) и соотношения для энтальпии  $i = c_p \cdot T$  следующее выражение:

$$\frac{V^2(L)}{2} - \frac{V^2(0)}{2} + i(L) - i(0) = \frac{1}{m} \int_0^L \frac{\sigma}{1 + \beta^2} V^2 B^2 A (K - 1) dx. \quad (7)$$

В левой части уравнения (7) имеем перепад энтальпии торможения потока на длине канала —  $\Delta i^*$ .

Запишем теперь краевые условия в виде

$$1) |\Delta i_1^*| = |\Delta i_2^*|; \quad 2) \dot{m}_1 = \dot{m}_2.$$

Тогда можно записать следующее уравнение:

$$\int_0^{L_1} \frac{\sigma_1}{1 + \beta_1^2} V_1^2 B_1^2 A_1 (K_1 - 1) dx = \int_0^{L_2} \frac{\sigma_2}{1 + \beta_2^2} V_2^2 B_2^2 A_2 (1 - K_2) dx. \quad (8)$$

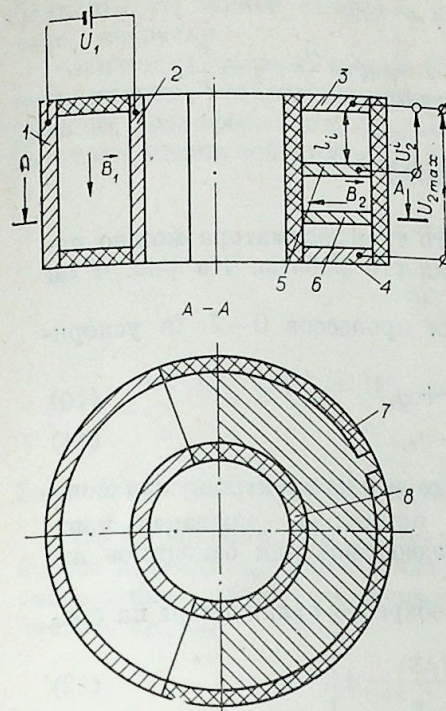


Рис. 3. Конструктивная схема ТПТ с регулируемым выходным напряжением. 1, 2 — электроды ускорителя; 3, 4 — основные электроды МГД генератора; 5 — подвижный электрод, с которого снимается регулируемое напряжение; 6, 7 — изоляционные стенки.

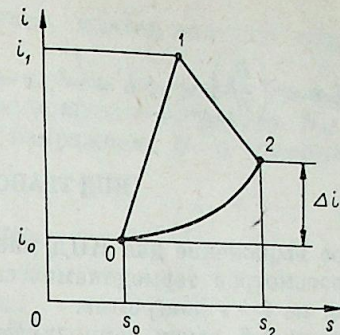


Рис. 4. Термодинамический цикл работы плазменного ТПТ. 0—1 — процесс ускорения; 1—2 — процесс генерации электроэнергии; 2—0 — процесс изобарного охлаждения на специальном участке; 0—1 — энтальпия торможения потока.

Так как система уравнений (1)–(5) не замкнута, необходимо ввести ряд дополнительных условий для величин, входящих в нее. Целесообразнее всего наложить условия, обеспечивающие оптимальность параметров трансформатора. Одним из таких условий является максимум электрической мощности, вкладываемой в поток или снимаемой с него. Отсюда следует  $\frac{\sigma}{1 + \beta^2} V^2 B^2 A (K - 1) = \text{const}$ .

Для обеспечения максимума этого произведения необходимо и достаточно, чтобы каждый сомножитель был постоянным и максимальным. Однако в силу сжимаемости газа нельзя обеспечить совместное выполнение условий  $V = \text{const}$  и  $A = \text{const}$ . Из конструктивных соображений удобно принять  $y = \text{const}$  и  $z = \text{const}$ . Условие  $K = \text{const}$  обеспечивает максимум электрического КПД канала. Очевидным также является условие  $U = \text{const}$ .

Тогда с учетом выражения  $K = \frac{U}{yVB}$  получаем условие  $VB = \text{const}$  или  $B(x) = \frac{U}{KyV(x)}$ . Величину  $\sigma(x)$  на самом деле нельзя задавать произвольно, поскольку для слабо ионизованной плазмы проводимость сильно изменяется с температурой. При нахождении кривой распределения это следует учесть, однако в данном случае нас интересуют интегральные соотношения, поэтому примем  $\sigma = \langle \sigma \rangle_x = \text{const}$ . То же можно сказать и о величине  $\beta$ .

Теперь легко можно получить связь между  $K_1$  и  $K_2$ :

$$\frac{\sigma}{1 + \beta_1^2} V^2 B^2 A (K - 1) L_1 = \frac{\sigma_2}{1 + \beta_2^2} V^2 B^2 A (1 - K_2) L_2, \quad (9)$$

откуда

$$K_1 = \frac{(1 + \beta_1^2) a^2}{1 + \beta_1^2 a^2} c^2 f db (1 - K_2) + 1.$$

Здесь

$$a = \left( \frac{B_2}{B_1} \right)_{x=0,L}, \quad b = \frac{L_2}{L_1}, \quad c = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)_{x=0,L}, \quad d = \frac{A_2}{A_1}, \quad f = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

### КПД ТРАНСФОРМАТОРА

Общее выражение для КПД плазменного трансформатора можно получить, рассмотрев термодинамический цикл его работы. На рис. 4 он изображен на  $i-s$  диаграмме.

Запишем 1-й закон термодинамики для процессов 0-1 (в ускорителе) и 1-2 (в генераторе)

$$i_1 - i_0 = \Delta i_1 = l_{\text{полн.}} + q_1, \quad (10)$$

$$i_1 - i_2 = \Delta i_2 = l_2 - q_2, \quad (11)$$

где  $l_{\text{п}} = l_1 + q_{\text{п1}}$  — полная подведенная к ускорителю электрическая мощность;  $l_1$  — полезная мощность;  $q_{\text{п}}$  — тепло потерь;  $l_2$  — полезная мощность, снимаемая с генератора;  $q_1$  и  $q_2$  — подводимое или отводимое извне тепло в ускорителе и генераторе.

Перепад энтальпий в процессе 2-0 (изобарного охлаждения на специальном участке)

$$\Delta i = \Delta i_1 - \Delta i_2 = i_0 \left[ \exp \left( \frac{\Delta S}{c_p} \right) - 1 \right], \quad (12)$$

здесь  $\Delta S = S_2 - S_0$  — изменение энтропии,  $c_p$  — теплоемкость газа. КПД трансформатора можно определить как отношение полезной снимаемой мощности к полной вкладываемой  $\eta = \frac{l_2}{l_{\text{п}}}$ . Тогда из (10), (11) и (12) после преобразования получим

$$\eta = 1 + \frac{q_1 + q_2 - i_0 \left[ \exp \left( \frac{\Delta S}{c_p} \right) - 1 \right]}{l_{\text{п}}}. \quad (13)$$

Для рассматриваемого случая 1)  $q_1 + q_2 = -(q_{\text{п1}} + q_{\text{п2}})$ ; 2)  $\Delta S = 0$  (что следует из 2-го закона термодинамики). Таким образом,

$$\eta = 1 - \frac{q_{\text{п1}} + q_{\text{п2}}}{l_{\text{п}}}, \quad (14)$$

что в нашем примере аналогично выражению

$$\eta = \frac{K_2(1-K_2)(1+\beta_1^2)a^2c^2 + bd}{K_1(K_1-1)(1+a^2\beta_1^2)}, \quad (15)$$

которое справедливо и при применении в качестве рабочего тела жидкого металла или электролита.

Подробный анализ выражения (13) выходит за рамки данной статьи. Можно лишь заметить, что для случая течения в канале при  $T = \text{const}$  максимум КПД достигается при  $q_1 + q_2 = -(q_{\text{п1}} + q_{\text{п2}})$ , а в случае течения без теплообмена при стремлении величины  $i_0$  к нулю КПД стремится к единице.

С учетом выражения (9) получим

$$\eta_{\text{ид}} = \frac{K_2}{1 + \frac{(1+\beta_1^2)a^2}{1+\beta_1^2a^2} fdbc^2(1-K_2)}. \quad (16)$$

Величину  $K_2$  можно выбирать произвольно, задавая значение сопротивления нагрузки.

Запишем теперь основные соотношения для параметров трансформатора, приняв, что заданы электрическая мощность на выходе  $N_2$ , коэффициент трансформации  $K_{\text{тр}}$ , выходное напряжение  $U_2$  и максимальная величина магнитной индукции  $B_2$ :

$$K_{\text{тр}} = \frac{K_2}{K_1} ace, \quad (17)$$

$$V_2 = \frac{U_2}{y_2 K_2 B_2}, \quad (18)$$

$$W_{\Sigma} = W_1 + W_2 = \frac{N_2 y_2^2 e^2 K_2 (1 + a^2 \beta_1^2)}{\sigma_2 U_2^2 (1 - K_2)} \left( 1 + \frac{1}{bd} \right). \quad (19)$$

Здесь  $W_{\Sigma}$  — рабочий объем канала,  $e = \frac{y_2}{y_1}$ .

Из выражения (16) следует, что при повышении напряжения с помощью изменения скорости или магнитного поля КПД уменьшается. Это уменьшение можно компенсировать соответствующим изменением величины  $b$ , приняв

$$b_{\text{max}} = \frac{1 + a^2 \beta_1^2}{(1 + \beta_1^2) a^2 c^2 + d}, \quad (20)$$

тогда

$$\eta_{\text{ид}} = \frac{K_2}{2 - K_2}. \quad (21)$$

Практически это обозначает увеличение длины ускорителя, так как длина (или рабочий объем) генератора определяется заданными величинами  $N_2$  и  $U_2$ . Для того чтобы дать рекомендации по выбору того или иного метода повышения напряжения, а также по выбору соотношения геометрических размеров канала  $L$ ,  $y$  и  $z$ , необходимо рассмотреть ряд факторов, влияющих на характеристики ТПТ: а) трение потока, б) шумящее влияние погранслоя, в) перетечки по погранслою в месте перехода ускорителя в генератор, и наоборот, г) концевые потери, д) утечки по изоляторам и т. п. В плазменном ТПТ существенное значение могут иметь условия теплообмена и ионизации газа.

Влияние на характеристики ТПТ некоторых из названных факторов сходно с их влиянием на характеристики МГД генераторов и исследовано в ряде работ. В данной статье рассматривается влияние трения потока, так как воздействие его на характеристики ТПТ и прежде всего на его КПД значительно более сильное, чем в МГД генераторе.

### АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАБОТЫ ТПТ С УЧЕТОМ ПОТЕРЬ НА ТРЕНИЕ

Влияние трения на поток учтем, введя в правую часть уравнения движения (2) силу трения в виде  $F_{\text{тр}} = \lambda \frac{\rho V^2}{2D}$  (где  $\lambda = \lambda(\text{Re}, \text{Ha})$  — коэффициент трения;  $D = \frac{2yz}{y+z}$  — гидравлический диаметр канала), которое теперь примет вид

$$\rho V \frac{dV}{dx} + \frac{dp}{dx} = \sigma V B^2 (K - 1) - \lambda \frac{\rho V^2}{2D}. \quad (22)$$

В уравнении (7) в правой части также появится член, равный работе трения на длине канала  $L$

$$\Delta i^* = \frac{1}{m} \int_0^L \frac{\sigma}{1 + \beta^2} V^2 B^2 A (K - 1) dx - \int_0^L \lambda \frac{V^2}{2D} dx \quad (23)$$

С учетом краевых условий получим равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \int_0^{L_1} \frac{\sigma_1}{1 + \beta_1^2} V_1^2 B_1^2 A_1 (K_{\text{п}} - 1 + \Delta K) dx &= \frac{1}{m} \int_0^{L_2} \frac{\sigma_2}{1 + \beta_2^2} V_2^2 B_2^2 A_2 (1 - K_2) dx + \\ &+ \int_0^{L_1} \lambda \frac{V_1^2}{2D_1} dx + \int_0^{L_2} \lambda_2 \frac{V_2^2}{2D_2} dx. \end{aligned} \quad (24)$$

Величина коэффициента нагрузки ускорителя определяет практически плотность тока  $j = \sigma_{\text{T}} \frac{U}{y} (K - 1)$ , а значит, и величину силы  $\vec{F}_{\text{эм}} = j \times \vec{B}$ . При появлении силы трения приходится увеличивать для компенсации ее электромагнитную силу  $F_{\text{эм}}$  на некоторую дополнительную величину  $\Delta F$ , что соответствует увеличению коэффициента нагрузки ускорителя на величину  $\Delta K$ . Таким образом, коэффициент нагрузки можно представить в виде  $K_1 = K_{\text{п}} + \Delta K$ , что и сделано в уравнении (24).

Поскольку

$$\begin{aligned} \int_0^{L_1} \frac{\sigma_1}{1 + \beta_1^2} V_1^2 B_1^2 A_1 (K_{\text{п}} - 1) dx &= \int_0^{L_2} \frac{\sigma_2}{1 + \beta_2^2} V_2^2 B_2^2 A_2 (1 - K_2) dx, \\ \frac{1}{m} \int_0^{L_1} \frac{\sigma_1}{1 + \beta_1^2} V^2 B^2 A \Delta K dx &= \int_0^{L_1} \lambda_1 \frac{V_1^2}{2D_1} dx + \int_0^{L_2} \lambda_2 \frac{V_2^2}{2D_1} dx. \end{aligned} \quad (25)$$

В МГД течениях магнитное поле оказывает сильное стабилизирующее воздействие на поток, поэтому при определении характера течения необходимо учитывать не только число Рейнольдса, но и число Гартмана. По данным работы [1] течение будет турбулентным при условии

$$\text{Re} > r_1 + r_2 \text{Ha}. \quad (26)$$

Для прямоугольного канала  $r_1 = 2000$ ,  $r_2 = 182$ . Для турбулентного режима течения можно воспользоваться известной формулой:  $\lambda_{\text{T}} = \frac{0,316}{\text{Re}^{0,25}}$ .

Найдем, пользуясь формулой (26), условие турбулентности течения. Для этого определим числа  $\text{Re}$  и  $\text{Ha}$  через параметры ТПТ и свойства рабочего тела:

$$\text{Re} = \frac{VD\rho}{\mu} = \frac{2U\rho z}{\mu KB(z+y)}, \quad (27)$$

$$\text{Ha} = \sqrt{\frac{\sigma_{\text{T}}}{\mu}} BD = \sqrt{\frac{\sigma_{\text{T}}}{\mu}} B \frac{2yz}{y+z}, \quad (28)$$

здесь  $\mu$  — динамическая вязкость.

В ТПТ в качестве рабочего тела могут быть использованы, кроме плазмы, также жидкие металлы или электролиты. Примем

1) для металлов —  $\sigma_{\text{м}} = 2,5 \cdot 10^6$  1/ом · м;  $\mu_{\text{м}} = 10^{-3}$  кг/м · с;  $\rho_{\text{м}} = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;

2) для аргоновой плазмы —  $\sigma_{\text{пл}} = 10^2$  1/ом · м;  $\mu_{\text{плАр}} = 6,4 \cdot 10^{-5}$  кг/м · с;  $\rho_{\text{плАр}} = 0,2$  кг/м<sup>3</sup>; ( $p = 1 \cdot 10$  Н/м<sup>2</sup>;  $T \approx 2500$  К);

3) для электролитов —  $\sigma_{\text{эл}} = 10^2$  1/ом · м;  $\mu = 4 \cdot 10^{-4}$  кг/м · с;  $\rho_{\text{эл}} = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;

Подставив эти данные в выражения (27) и (28) при  $B = 1$  Т, можно убедиться, что  $\text{Re} \gg r_1 = 2000$ , поэтому величиной  $r_1$  в формуле (26) можно пренебречь. Тогда, после подстановки (27) и (28) в формулу (26) получим условие турбулентного течения:

$$y < \frac{U\rho}{r_2 \sqrt{\sigma_{\text{T}} \mu} B^2 K}. \quad (29)$$

Подставив в (29) соответствующие значения  $\sigma$ ,  $\mu$  и  $\rho$  и приняв, что  $B_2 = 1$  Т,  $K_2 = 0,9$ , получим  $y_{2\text{м}} < 1 \cdot U_2$ ,  $y_{2\text{пл}} < 1,25 \cdot 10^{-2} U_2$ ,  $y_{2\text{эл}} < 25 \cdot U_2$ .

Таким образом, режим течения может быть как ламинарным, так и турбулентным в зависимости от размеров ТПТ и величины выходного напряжения. Однако, как показано в работе [3], при развитом ламинарном течении из-за влияния поперечного краевого эффекта эквивалентный коэффициент нагрузки  $K_2 \leq 0,6$ . Следовательно, ламинарное течение практически неприемлемо и должно выполняться условие (29). Поэтому примем, что течение турбулентное, и найдем величину  $\Delta K$  для этого случая.

Сила трения для турбулентного потока

$$F_{\text{тр}} = \lambda_{\text{T}} \frac{\rho V^2}{2D} = \frac{0,316 \mu^{0,25} (y+z)^{1,25} \nu^2}{(2m)^{0,25} 4yz}.$$

Подставив полученное выражение для  $F_{\text{тр}}$  в [25] и произведя преобразования с учетом принятых ранее условий, получим

$$\begin{aligned} \Delta K &= \frac{0,0665 \rho^{0,75} \mu^{0,25} U_2^{0,75} (1 + \beta_1^2) (y_1 + z_1)^{1,25} a^2}{\sigma_1 B_2^{2,75} y_1^2 z_1^{1,25} K_2^{0,75} c^{0,75}} \times \\ &\times \left[ \int_0^1 \bar{V}_1^2 dx + \frac{c^2 e^{1,25} b}{d} \left( \frac{1 + \frac{e^2 y_1}{d z_1}}{1 + \frac{y_1}{z_1}} \right)^{1,25} \int_0^1 V_2^2 dx \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

Поскольку в данном случае  $\bar{V}_1 = \bar{V}_2$ , в чем легко убедиться, записав уравнение (23) в безразмерной форме, то, переходя от начальных значений  $B$  и  $\rho$  к средним, получим

$$\begin{aligned} \Delta K &= \frac{0,0665 \rho^{0,75} \mu^{0,25} U_2^{0,75} (1 + \beta_1^2) (y_1 + z_1)^{1,25} a^2}{\sigma_1 B_2^{2,75} y_1^2 z_1^{1,25} K_2^{0,75} c^{0,75}} \times \\ &\times \left[ 1 + \frac{c^2 e^{1,25} b}{d} \left( \frac{1 + \frac{e^2 y_1}{d z_1}}{1 + \frac{y_1}{z_1}} \right)^{1,25} \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Величину КПД можно представить в виде

$$\eta = \eta_{\text{ид}} \left[ 1 - \right.$$

$\left. - \frac{\Delta K (2K_{\text{п}} - 1 + \Delta K)}{(K_{\text{п}} + \Delta K)(K_{\text{п}} + \Delta K - 1)} \right]$ . Из этого выражения следует, что доля по-

терь на трение составляет величину  $n = \frac{\Delta K (2K_{\text{п}} - 1 + \Delta K)}{(K_{\text{п}} + \Delta K)(K_{\text{п}} + \Delta K - 1)}$ .

Задавшись величиной  $n$ , можно определить из (31) минимальное значение ширины канала  $y$ , при котором доля потерь не будет превышать  $n$ .

Величину  $z_1$  можно найти из (19), наложив условие  $L_x \geq ty_1$ . Величина  $t$  может быть определена из рассмотрения влияния поворота пото-

ка на характеристики ТПТ. Этот вопрос требует отдельного изучения, однако из чисто геометрических соображений следует, что  $t \gg 10$  (если считать, что  $L_x$  — длина канала по осевой линии). Таким образом, получим

$$z_1 \leq \frac{N_2 (1 + \beta_1^2 a^2) K_2 e^2}{\sigma_2 U_2^2 (1 - K_2) t d} \left(1 + \frac{1}{b}\right). \quad (32)$$

Из выражений (31) и (32) можно определить размеры канала ТПТ, если заданы величины  $N_2$ ,  $U$ ,  $B$  и  $\eta$ .

Рассмотрим теперь вопрос о способе повышения напряжения. Как показывает анализ выражений (31) и (32), наименьший рабочий объем канала ТПТ достигается при применении метода с изменением магнитного поля, т. е. при  $a = \frac{K_1}{K_2} K_{тр}$ ,  $e = c = 1$ . Это справедливо как для плазмы, так и для несжимаемой жидкости. При этом для плазмы существует значение  $\beta_{1\text{опт}}$ , при котором рабочий объем минимален:

$$\beta_{1\text{опт}}^2 = \frac{a^2 - 3}{2a^2}; \quad (a^2 \geq 3). \quad (33)$$

Из выражений (31) и (32) можно также получить соотношения для параметров ТПТ, где используются различные рабочие тела:

$$\bar{U}_{1-0} = \sqrt{\frac{a_{1-0} N_{1-0}}{\bar{\sigma}_{1-0}}}, \quad (34)$$

$$\bar{B}_{1-0} = \frac{\bar{\rho}_{1-0}^{3/11} \cdot \bar{\mu}_{1-0}^{1/11} \cdot \bar{a}_{1-0}^{1/2}}{\bar{\sigma}_{1-0}^{1/2}} \bar{N}_{1-0}^{3/22}, \quad (35)$$

где

$$\bar{U}_{1-0} = \frac{U_1}{U_0}, \quad \bar{B}_{1-0} = \frac{B_1}{B_0}, \quad \bar{N}_{1-0} = \frac{N_1}{N_0},$$

$$\bar{\rho}_{1-0} = \frac{\rho_1}{\rho_0}, \quad \bar{\mu}_{1-0} = \frac{\mu_1}{\mu_0}, \quad \bar{\sigma}_{1-0} = \frac{\sigma_1}{\sigma_0}$$

$$\bar{a}_{1-0} = \begin{cases} \frac{a_1}{a_0}, & \text{если рабочие тела однотипны,} \\ 0,5 \frac{a_1^2 + 1}{a_1^2 - 1}, & \text{если параметры с индексом 1 относятся к жидкости,} \\ & \text{а с индексом 0 — к плазме.} \end{cases}$$

При выводе соотношений (34) и (35) предполагалось, что каналы обоих ТПТ имеют одинаковые размеры,  $\Delta K_0 = \Delta K_1$ ,  $\eta_0 = \eta_1$  и напряжение повышается с помощью изменения магнитного поля. Если сравнить между собой рабочие тела: жидкие металлы и плазму, то получится, что при условии  $\bar{a}_{м-п} = 0,5$  и  $\bar{N}_{м-п} = 1$   $U_{м-п} = 4,5 \cdot 10^{-3}$  и  $B = 5,7 \cdot 10^{-2}$ .

Таким образом, ТПТ на жидких металлах целесообразно применять для преобразования относительно низких напряжений. При этом масса магнитов ТПТ на жидких металлах значительно меньше массы магнитов плазменного ТПТ из-за меньшей величины магнитного поля. При сравнении электролитов и плазмы при тех же условиях получим  $\bar{U}_{э-п} = 1$ ,  $\bar{B}_{э-п} = 12$ . Таким образом, применение электролитов нецелесообразно из-за большей, чем у плазменного ТПТ, массы магнитов.

Выражение (32) для КПД ТПТ можно оптимизировать по  $K_2$ , подставив в него соотношение (9). Величина  $K_2$  при условии  $a^2 b = 1$  составит:

$$K_{2\text{опт}} = 0,5 \sqrt{2 + \Delta K} (\sqrt{2 + \Delta K} - \sqrt{\Delta K}). \quad (36)$$

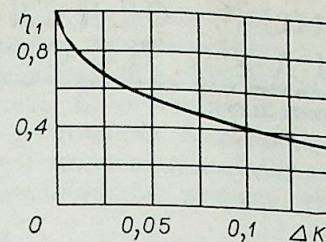


Рис. 5. Зависимость оптимального значения КПД трансформатора постоянного тока  $\eta_{\text{опт}}$  от изменения коэффициента нагрузки  $\Delta K$ .

График зависимости  $\eta_{\text{опт}}$  от  $\Delta K$  (изменения коэффициента нагрузки за счет потерь) приведен на рис. 5. Из него следует, что приемлемые с точки зрения КПД значения  $\Delta K$  лежат в интервале  $0,001 \leq \Delta K \leq 0,01$ , т. е.  $\Delta K$  должно быть весьма малым. На величину  $\Delta K$ , как это следует из (31) и (32), определяющее влияние оказывает комплекс параметров:  $\frac{\mu^{1/4} \rho^{3/4} \cdot U^{3/4} (1 + a^2)}{\sigma B_2^{2,75} \cdot z^2}$ , откуда следует, что КПД ТПТ увеличивается с ростом размеров, а значит, и мощности трансформатора, и с ростом индукции магнитного поля в канале ТПТ. Более слабо на рост КПД влияет проводимость рабочего тела. Рост коэффициента трансформации и выходного напряжения приводит к падению КПД. Таким образом, для повышения КПД трансформатора постоянного тока необходимо повышать мощность ТПТ, проводимость рабочего тела и индукцию магнитного поля в канале ТПТ или снижать такие параметры, как коэффициент трансформации и выходное напряжение. Так, например, плазменный ТПТ на мощность  $N \approx 1,6$  Мвт при  $U_2 = 600$  В,  $K_{тр} = 10$ ,  $B = 1$  Тл,  $t = 10$  имеет КПД  $\eta = 76\%$ .

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенный анализ ТПТ не является исчерпывающим, так как не учитывает влияние концевых эффектов, процессов теплообмена, шунтирующего влияния погранслоя и т. п., тем не менее на основании его можно сделать некоторые выводы:

1. Существует принципиальная возможность создания простого по конструкции трансформатора постоянного тока.
2. КПД такого ТПТ может быть не ниже, чем КПД системы инвертор — трансформатор — выпрямитель, причем с ростом мощности КПД трансформатора постоянного тока увеличивается.
3. На выходе ТПТ можно получить как несколько значений напряжения, так и плавно регулируемое напряжение постоянного тока.
4. Наиболее перспективными рабочими телами для ТПТ являются плазма и жидкие металлы.

Московское высшее техническое  
училище им. Н. Э. Баумана

Поступила в редакцию  
2/VI 1980

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вулис Л. А., Генкин А. Л., Фоменко Б. А. Теория и расчет магнитогазодинамических течений в каналах. М.: Атомиздат, 1971.
2. Джексон У., Пирсон Э., Ист Д. Магнитогидродинамический преобразование энергии. — В кн.: Инженерные вопросы магнитной гидродинамики/Под ред. Е. П. Велихова. М.: Мир, 1965.
3. Ковалев Л. К., Никитин Ю. М., Никитина И. А., Тюпин В. К. Влияние поперечного краевого эффекта на характеристики кондукционного МГД канала с неоднородным потоком. — ТВТ, 1975, № 3.
4. Леви Э., Панцер М. Электромеханическое преобразование энергии. М.: Мир, 1969.
5. Тамм И. Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1976.

УДК 537.521.7

И. Ш. АБДУЛЛИН, Ф. А. САЛЬЯНОВ

РАСЧЕТ ХАРАКТЕРИСТИК  
ИНДУКЦИОННОГО ДИФФУЗНОГО РАЗРЯДА

В настоящее время в плазмохимии при обработке поверхности твердых тел и для нанесения тонких пленок широко используются плазмотроны высокочастотного индукционного (ВЧИ) разряда низкого давления. Применение в ряде технологических процессов именно этой формы газового разряда обусловлено ее стерильностью, возможностью создания существенного отрыва электронной температуры от ионной, а также практически неограниченностью ресурса работы ВЧИ плазмотрона [1]. Поэтому теоретическое исследование и разработка на этой основе инженерных методов расчета характеристик ВЧИ плазмотрона низкого давления весьма актуально.

Теоретические исследования индукционного диффузного разряда связаны со значительными трудностями. Решение, позволяющее рассчитывать электрические и тепловые характеристики ВЧИ разряда низкого давления, удается получить, лишь приняв ряд упрощающих предположений. Например, в [2] решено уравнение неразрывности для электронного газа в пренебрежении процессами объемной рекомбинации и прилипания электронов и в предположении постоянства коэффициента амбиполярной диффузии  $D_a$  и частоты ионизации  $\nu_i$  в объеме ионизированного газа. В [3, 4] учитывалось, что  $\nu_i$  определяется абсолютным значением индукционного электрического поля и его градиента на внутренней поверхности разрядной трубки. В то же время известно, что в индукционном диффузном разряде из-за значительного градиента электронной концентрации оба коэффициента  $\nu_i$  и  $D_a$  — переменные величины. Поэтому расчет по формулам, приведенным в этих работах, дает только качественное согласие с экспериментом.

В данной работе рассматривается осесимметричный безрасходный ВЧИ разряд низкого давления в установившемся режиме. В отличие от работ [2—4 и др.] дополнительно учитывается переменность  $\nu_i$  и  $D_a$ . Предполагая, что в уравнении сохранения энергии для электронного газа можно пренебречь конвективным переносом энергии, излучением и теплопроводностью, свойства индукционного диффузного разряда можно описать уравнениями:

$$\frac{d}{dr} \left( r D_a \frac{dn_e}{dr} \right) + \nu_i R^2 r n_e = 0, \quad (1)$$

$$\sigma E^2 = \frac{3m_e}{m_r} k \nu n_e (T_e - T_r) + \nu_i n_e U_i \xi, \quad (2)$$

$$\sigma = \frac{n_e e^2 (\nu - i\omega)}{m_e (\nu^2 + \omega^2)}. \quad (3)$$

Здесь  $R$  — радиус разрядной трубки;  $r$  — цилиндрическая радиальная координата, отнесенная к  $R$ ;  $n_e$ ,  $T_e$ ,  $m_e$ ,  $e$  — концентрация, температура,

масса и заряд электрона;  $T_r$ ,  $m_r$  — температура и масса газа;  $\nu$  — частота упругих столкновений электронов с атомами газа;  $\sigma$  — электропроводность плазмы;  $E$ ,  $\omega$  — напряженность и круговая частота электрического поля;  $k$  — постоянная Больцмана;  $U_i$  — потенциал ионизации;  $\xi$  — коэффициент, учитывающий возбуждение атомов.

В стационарном разряде связь между  $D_a$  и  $\nu_i$  можно записать в виде [5]

$$\lambda^2 = \frac{D_a}{\nu_i}. \quad (4)$$

Здесь  $\lambda$  определяется характерной длиной диффузии для разрядной трубки. Кроме того, анализ работ [6, 7 и др.] показывает, что в области значений  $E/p = 0,38 \div 0,75$  В/см Па зависимость  $\nu_i/p$  от  $r$  можно аппроксимировать выражением

$$\frac{\nu_i}{p} = \frac{\nu_{i0}}{p} \cdot \exp(ar^2), \quad (5)$$

где  $p$  — давление газа;  $\nu_{i0}$  и  $a$  — коэффициенты аппроксимации.

Подставляя (4) и (5) в (1), получим

$$r \frac{d^2 n_e}{dr^2} + (1 + 2ar^2) \frac{dn_e}{dr} + \mu^2 n_e r = 0. \quad (6)$$

Решая (6) при граничных условиях

$$n_e(0) = n_{e0}, \quad n_e(1) = 0, \quad \left( \frac{dn_e}{dr} \right)_{r=0} = 0, \quad (7)$$

находим

$$n_e = n_{e0} \cdot \Phi_n \left( \frac{\mu_n^2}{\beta}, 1; -\frac{\beta r^2}{4} \right). \quad (8)$$

Здесь  $\mu^2 = R^2 \nu_{i0} / D_{a0}$ ,  $D_{a0} = \nu_{i0} \lambda^2$ ,

$$\Phi_n = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2 (\mu_n^2 + \beta) (\mu_n^2 + 2\beta) \dots [\mu_n^2 + (m-1)\beta]}{\beta^m (m!)^2} \cdot \left[ -\frac{\beta}{4} r^2 \right]$$

— ограниченная при  $r=0$  вырожденная гипергеометрическая функция,  $\beta = 4a$ ,  $\mu_n$  — собственные значения функции  $\Phi_n$ . Некоторые свойства собственной функции  $\Phi_n$  были исследованы в [8]. Условию  $n_e \geq 0$  при  $0 \leq r \leq 1$  удовлетворяет только  $\Phi_1 \left( \frac{\mu_1^2}{\beta}, 1; -\frac{\beta}{4} r^2 \right)$ . Поэтому решением

данной задачи будет

$$n_e(r) = n_{e0} \Phi_1 \left( \frac{\mu_1^2}{\beta}, 1; -\frac{\beta}{4} r^2 \right). \quad (9)$$

Подставляя (9) в (2), в предположении  $T_e \gg T_r$  получим

$$T = \frac{\sigma E^2 m_r - \nu_{i0} \exp\left(\frac{\beta}{4} r^2\right) n_{e0} \cdot \Phi_1 \left( \frac{\mu_1^2}{\beta}, 1; -\frac{\beta}{4} r^2 \right) U_i \xi m_r}{3m_e k \nu n_{e0} \cdot \Phi_1 \left( \frac{\mu_1^2}{\beta}, 1; -\beta/4 r^2 \right)}. \quad (10)$$

Формулы (9), (10) позволяют рассчитывать распределение электронной концентрации и электронную температуру ВЧИ разряда низкого давления при заданных частоте упругих столкновений электронов с атомами газа, потенциале ионизации, коэффициенте, учитывающем возбуждение атомов, и джоулевой диссипации энергии электрического поля.

№	Режим работы плазмотрона	$Q_{\text{теор}}$ , Вт	$Q_{\text{эксп}}$ , Вт
1	$P=13,3$ Па $(E/P)_{\text{ср}}=38$ В/см Па	1272	1521
2	$P=13,3$ Па $(E/P)_{\text{ср}}=42$ В/см Па	1952	2074
3	$P=13,3$ Па $(E/P)_{\text{ср}}=48$ , В/см Па	3072	2904
4	$P=13,3$ Па $(E/P)_{\text{ср}}=53$ В/см Па	4986	3229

В частном случае при постоянстве  $D_a$  и  $\nu_i$  функция  $\Phi_1$  переходит в функцию Бесселя нулевого порядка  $I_0(\mu_n r)$ , а формула (9) преобразуется к виду

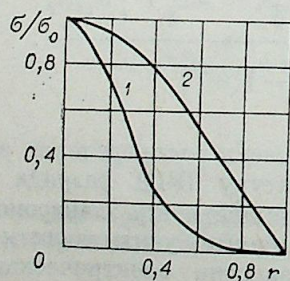
$$n_e(r) = n_{e0} I_0(\mu_n r), \quad (11)$$

где  $\mu_n$  — корни уравнения  $I_0(\mu_n r) = 0$ . Выражение (11) совпадает с решением, приведенным в [3].

Для сравнения расчетных данных с экспериментальными проведены исследования характеристик ВЧИ разряда на установке, конструкция и принцип действия которой описаны в [9].

В экспериментах исследовался безрасходный режим работы плазмотрона, давление в камере менялось от 6 до 133 Па, мощность разряда, определяемая калориметрированием, варьировалась в диапазоне от 1,5 до 4 кВт. Концентрация электронов определялась с помощью двойного электрического зонда. Диапазон изменения концентрации электронов в центре разряда от  $10^{10}$  до  $5 \cdot 10^{13}$  1/см<sup>3</sup>, а усредненные по цилиндрической координате значения  $E/p = 0,11 \div 0,47$  В/см Па. Напряженность электрического поля рассчитывалась по плотности тока, измеренного с помощью пояса Роговского. Мощность разряда, концентрация электронов, плотность тока определялись по общепринятой методике для ВЧИ разряда низкого давления [10]. Одной из основных интегральных характеристик плазмотрона как генератора низкотемпературной плазмы является джоулево тепловыделение в разряде  $Q = \sigma |E|^2$ . В таблице представлены расчетные  $Q_{\text{теор}}$  и экспериментальные  $Q_{\text{эксп}}$  значения джоулева тепловыделения. Здесь  $\sigma$  рассчитывалась по формуле (3), когда  $\nu \gg \omega$ , значение  $E$  определялось из эксперимента.

В расчетах при определении аппроксимирующих коэффициентов  $\nu_{i0} = 28169$  и  $a = 8$  использовались данные работы [6]. Как видно из таблицы,  $Q_{\text{теор}}$  отличается от  $Q_{\text{эксп}}$  не более чем на 46%. Причем в режимах 2 и 3 это отличие не превышает 10%. На рисунке представлены распределения  $\sigma/\sigma_0$  в разряде, полученные из расчетов по формулам (9) (график 1) и (11) (график 2) с применением формулы (3). Как видно из рисунка, площадь под кривой 1 значительно меньше, чем площадь под кривой 2. На периферии разряда градиент электронной концентрации



Распределение относительной электропроводности.  
Электропроводность на оси разряда  
 $\sigma_0 = 530$  (Ом·м)<sup>-1</sup>;  $\mu = 5,66$  (1);  
 $\lambda = 2,405$  (2).

$(\text{grad } n_e)$ , вычисленный по формуле (11), на порядок и более превышает  $\text{grad } n_e$ , рассчитанный по формуле (9). Следовательно, расчет джоулева тепловыделения с использованием формулы (11) будет давать заведомо большие значения, чем расчет по (9).

## ВЫВОДЫ

1. Разработана методика расчета характеристик индукционного диффузного разряда с учетом переменности  $D_a$  и  $\nu_i$  по  $r$ .
2. Расчет характеристик разряда в интервале  $E/p = 0,38 - 0,75$  В/см Па по полученным в работе формулам дает хорошее как качественное, так и количественное согласие с экспериментальными данными.

Казанский авиационный институт  
им. А. Н. Туполева

Поступила в редакцию  
29/1 1981

## ЛИТЕРАТУРА

1. Полак Л. С., Овсянников А. А., Словецкий Д. И., Бурзель Ф. Б. Теоретическая и прикладная плазмохимия. М.: Наука, 1975.
2. Romig M. F. Steady state solutions of the radiofrequency discharge with flow.— The physics of fluids, 1960, v. 3, N 1.
3. Eckert H. U. Diffusion Theory of the electrodeless Ring Discharge.— J. Appl. Phys., 1962, v. 33, N 9.
4. Асмолов Е. С., Носик В. И. К вопросу о пробое газа в высокочастотном н-разряде.— ЖТФ, 1979, т. 49.
5. Eckert H. U. Transition from free to ambipolar diffusion in an electrodeless discharge.— In: 5th Inter. Conf. Ionized Phenomena in Gases. Amsterdam, 1962.
6. Лунан Ю. А. Об одной возможности уточнения результатов элементарной теории ВЧ разряда в воздухе.— ЖТФ, 1976, т. 46, 11.
7. Jen-Shih Chang. The Electron Temperature in a Medium—Pressure Radio-Frequency Flowing Positive Column Plasma.— J. Appl. Phys., 1979, v. 49, N 3.
8. Галимарданов М. Ш., Даутов Г. Ю., Исмагилов Р. Х., Киямов Х. Г. Исследование электрической дуги, стабилизированной в канале с распределенным вдувом газа.— Физика и химия обраб. материалов, 1975, № 6.
9. Гайнутдинов И. С., Даутов Г. Ю., Самигуллин А. А. и др. Очистка и полировка поверхностей подложек высокочастотной индукционной плазмой низкого давления.— Физика и химия обраб. материалов, 1977, № 6.
10. Савичев В. В., Трехов Е. С., Фоменко А. Ф. Измерение параметров плазмы импульсного вихревого разряда зондовыми методами.— В кн.: Физика газоразрядной плазмы. Вып. 1. М.: Атомиздат, 1968.

УДК 533.9

С. А. ЮХИМЧУК

### СТАБИЛИЗАЦИЯ ПОЛОЖЕНИЯ ДУГИ В КОАКСИАЛЬНОМ ЗАЗОРЕ ПЛАЗМОТРОНА

Одна из главных проблем в плазмотронах коаксиального типа — стабилизация зоны горения дуги в коаксиальном зазоре. Это позволяет обеспечить постоянство параметров разряда постоянного тока при разных расходах плазмообразующего газа и улучшает технологические возможности плазмотрона\*.

Управление дугой в таких конструкциях осуществляется магнитным полем соленоида, расположенным соосно с плазмотроном. Осевая составляющая индукции магнитного поля соленоида создает движение разряда в тангенциальном направлении в соответствии с правилом Лоренца, а радиальная составляющая может привести как к фиксации дуги в межэлектродном зазоре, так и к выносу из него. Существенную роль на этот процесс оказывает форма дуги, полярность электродов, градиент магнитного поля в радиальном направлении.

Проанализируем влияние этих параметров на перемещение разряда в коаксиальном зазоре. Примем для этого направление осевой ( $\vec{B}_0$ ) и радиальной ( $\vec{B}_r$ ) составляющих индукции магнитного поля и полярность электродов плазмотрона в соответствии с рис. 1. Рассмотрим поведение дуги, перемещающейся под действием магнитного поля, имеющего значительный градиент осевой составляющей магнитной индукции от катода к аноду. При положительном градиенте  $\vec{B}_0$  столб дуги у анода будет иметь более высокую угловую скорость, чем у катода. Разряд растягивается (рис. 2), принимая форму эвольвенты, длина которой ограничена шунтированием от столба дуги на катод и анод. Анодное дуговое пятно имеет скорость, меньшую чем столб разряда, поэтому непосредственно у анода тангенциальная составляющая тока дуги ( $\vec{I}_t$ ) меняет свое направление на обратное. Направление радиальной составляющей ( $\vec{I}_r$ ) зависит только от полярности электродов. Этот эффект вызван тем, что перенос электричества на анод осуществляется электронами, которые под действием магнитного поля двигаются противоположно направлению дуги.

Перемещение анодного пятна осуществляется путем шунтирования плазмы дугового столба на анод по ходу движения дуги. Из рис. 2 видно, что в результате взаимодействия радиальной составляющей индукции магнитного поля и тангенциальной составляющей тока дуги, действующие на дугу в осевом направлении. Причем катодная область и столб дуги стремятся под их действием переместиться к плоскости 0—0, пересекающей соленоид посередине его длины и перпендикулярно оси. Анодная область перемещается в противоположную сторону. В целом

\* Болотов А. В., Юхимчук С. А., Дергаф Э. Д. и др. Конструкция и характеристики плазмотрона с магнитным управлением. — В кн.: Тез. докл. V Всесоюз. конф. по генераторам низкотемпературной плазмы. Фрунзе, 1974.

разряд смещается к середине длины соленоида. Если дуга смещается за плоскость 0—0, то вектор  $\vec{B}_r$  меняет свое направление на обратное и сила  $\vec{F}_1$  стремится вернуть разряд к плоскости 0—0.

Эта идеальная картина практически будет нарушаться из-за крупномасштабных шунтирований от дугового столба на катод, которые приводят к изменению направления вектора  $\vec{I}_t$ , а значит и силы  $\vec{F}_1$ , действующей на эту область разряда. Это явление вызывает колебания катодного пятна около 0—0, однако они довольно быстро исчезают вследствие инертности катодного пятна и носят дискретный характер. Отрицательный градиент магнитного поля от катода к аноду приводит к созданию дуги в форме эвольвенты, опережающая часть которой будет в районе катода. Однако непосредственно у катода тангенциальная составляющая вектора меняет свое направление на обратное. Это вызвано тем, что передвижение катодного пятна на водоохлаждаемом электроде тормозится в результате повышенных эмиссионных способностей в дуговом пятне по сравнению с областью, на которую оно переходит. На рис. 3 видно, что возможен вынос дуги из межэлектродного промежутка. При этом под действием сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  дуга растягивается в осевом направлении от плоскости 0—0 к краю анода. Препятствовать выносу дуги будет шунтирование ее на анод. Столб дуги по отношению к аноду в этом случае является катодом с идеальными условиями эмиссии; газ в плоскости 0—0, наиболее часто посещаемой дугой, имеет высокую степень ионизации, а растягивание дуги приводит к росту напряжения на ней. Все эти условия приводят к резкой интенсификации процесса шунтирования разряда и к предотвращению выноса его из межэлектродного зазора. В силу сложности конфигурации дуги в коаксиальном плазмотроне, наличия турбулентности шунтирование разряда на анод может осуществляться за плоскостью 0—0 от положения дуги в данный момент, и тогда силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  изменят свое направление на обратное.

Этот анализ показывает, что при внешнем электроде-катоде всегда существуют условия стабилизации дуги в зоне плоскости 0—0 под действием магнитного поля. Совместное действие сил  $\vec{F}_2$  и  $\vec{F}_3$  приводит к увеличению площади, посещаемой дугой, а значит и росту ресурса работы анода. Проверка этого предположения осуществлялась на коаксиальном плазмотроне с медными водоохлаждаемыми электродами. На

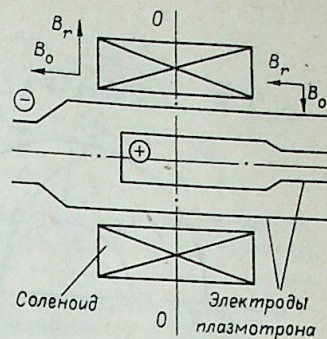


Рис. 1. Направление векторов составляющих индукции магнитного поля.

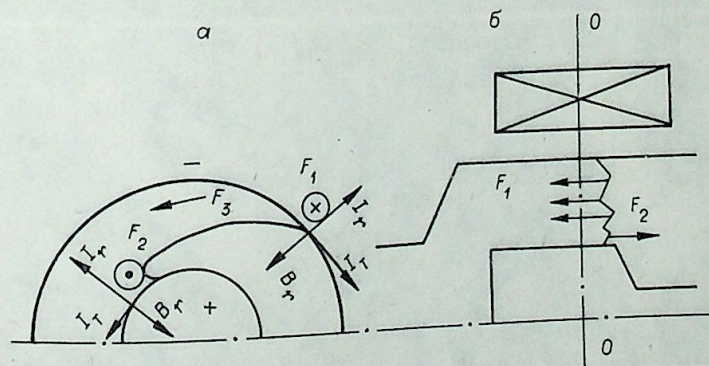


Рис. 2. Взаимодействие дуги с магнитным полем при положительном градиенте осевой составляющей магнитного поля в межэлектродном зазоре от катода к аноду.

а — сечение по плоскости 0—0; б) сечение по оси плазмотрона.

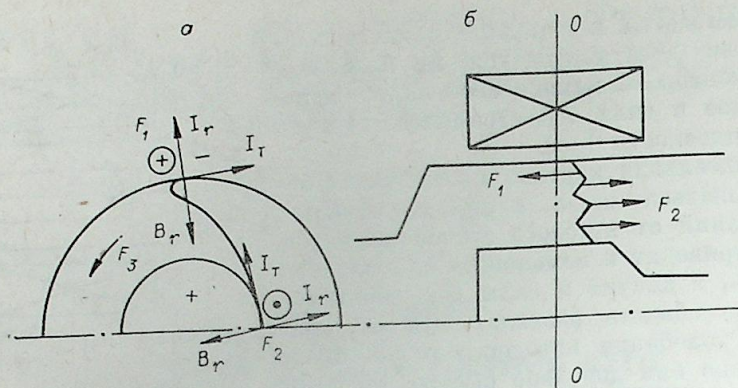


Рис. 3. Взаимодействие с магнитным полем при отрицательном градиенте осевой составляющей магнитного поля в межэлектродном зазоре от катода к аноду.  
а — сечение по плоскости 0—0; б) сечение по оси плазматрона.

внешнем катоде и во внутреннем аноде располагались соленоиды с независимым от дуги питанием, что позволяло менять знак градиента от катода к аноду. Зазор между электродами составлял 15—30 мм, внутренний диаметр катода равнялся 160 мм, а внешний диаметр анода — 100—130 мм. Индукция осевого магнитного поля ( $B_0$ ) в плоскости 0—0 менялась от катода к аноду от 8 до 36  $\mu T$  при положительном градиенте  $B$  и от 30 до 10  $\mu T$  при отрицательном градиенте  $B_0$ . Рабочий ток дуги изменялся от 300 до 400 А, а напряжение на дуге составляло 180 ÷ 250 В. Характерные формы дугового столба, соответствующие условиям рис. 2 и 3, снятые кинокамерой ККС-1М, показаны на рис. 4.

На рис. 5 показаны следы дуги на медном аноде при отрицательном градиенте  $B_0$ . Рабочей средой в этом случае служил воздух с примесью сажи. Последняя оседала на медных электродах, образуя темное покрытие, легко разрушаемое дуговым пятном, образующим блестящий след

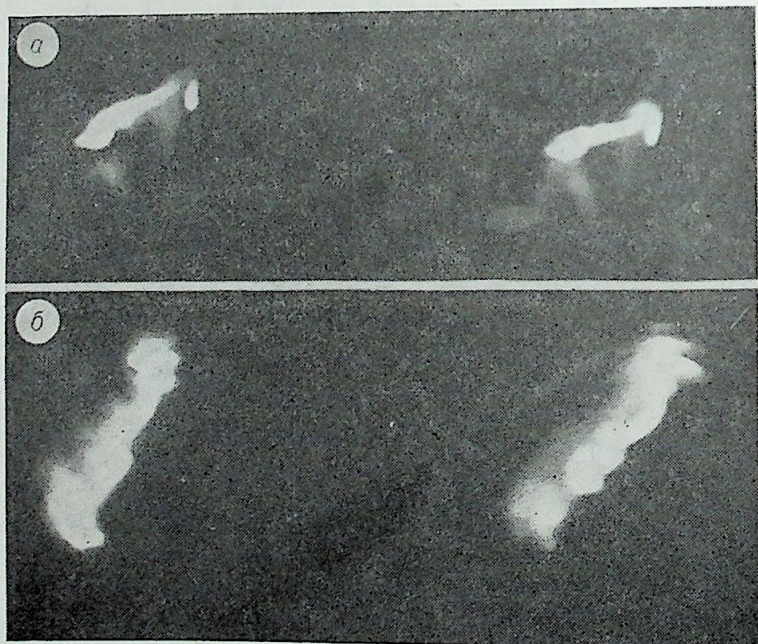


Рис. 4. Характерная форма разряда при положительном (а) и при отрицательном (б) градиенте осевой составляющей магнитного поля (вращение против часовой стрелки).

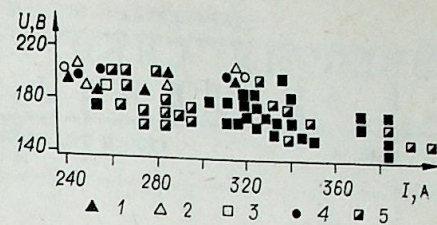
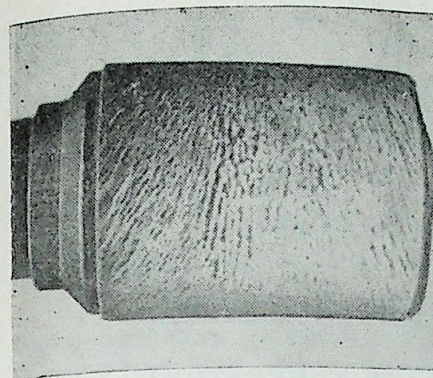


Рис. 6. ВАХ дуги в коаксиальном зазоре.  
G=25 (1), 17 (2), 12 (3), 20 (4), 10 г/с (5).

Рис. 5. След у анодного пятна на внутреннем электроде диаметром 100 мм.

меди. Из рис. 5 видно, что на разряд действуют одновременно две силы  $F_1$  и  $F_2$ , результирующая которых перемещает дугу под углом к плоскости 0—0. Наличие шунтирования приводит к появлению следов по обе стороны плоскости 0—0. Экспериментальные наблюдения показали, что частота колебаний дуги вдоль оси плазматрона составляет 2 ÷ 3 Гц.

Существование нескольких сил, действующих на разряд на разных направлениях, разная физика перемещения катодной и анодной областей дугового столба, развитый турбулентный поток создают условия для искажения формы разряда, повышают нестабильность напряжения на нем, усиливают процессы шунтирования. Это приводит к колебанию напряжения на дуге, термическим ударам в месте шунтирования разряда на электрод, повышению его разрушению. При изменении распределения индукции магнитного поля в межэлектродном зазоре был получен режим, когда угловая скорость практически всех участков дуги была приблизительно постоянной. Амплитуда пульсаций напряжения, зарегистрированная на осциллографе Н-115, составляла в этом режиме 20% от амплитуды эффективного напряжения разряда. При дуге, вытянутой в форме эвольвенты, амплитуда пульсаций напряжения составила около 50% от амплитуды эффективного напряжения дуги.

Следует отметить, что использование обратной полярности в коаксиальном зазоре приводит к наличию относительно узкой кольцевой зоны, посещаемой катодным пятном. Это способствует стабильному горению дуги в коаксиальном плазматроне. Ширина анодной зоны значительно больше, а анодное пятно значительно подвижнее за счет процессов шунтирования. Использование прямой полярности (анод — внешний электрод, а катод — внутренний) приводит к резкому ухудшению стабильности горения разряда из-за скачкообразного перемещения катодного пятна вследствие описанных выше процессов.

Вольт-амперная характеристика (ВАХ) дуги, вытянутой в форме эвольвенты, при обратной полярности имеет падающий или полого падающий характер в зависимости от расхода газа. Последний образует пристеночный холодный слой, который существенно влияет на процессы шунтирования разряда и изменение его длины. Для режима с одинаковыми угловыми скоростями всех участков дуги ее ВАХ является жесткой и не зависит от расхода воздуха в широком диапазоне. При зазоре 30 мм и расходе воздуха 10—25 г/с ВАХ не менялась (рис. 6), длина дуги оставалась постоянной, а КПД плазматрона менялся в диапазоне 0,4 ÷ 0,6.

Таким образом, использование поля позволяет при обратной полярности электродов зафиксировать дугу в заданном геометрическом пространстве в широком диапазоне расхода плазмообразующего газа. ВАХ разряда при этом имеет жесткий характер и не зависит от расхода газа. Стабилизация дуги повышает технологические возможности плазматрона.

Запорожский машиностроительный институт им. В. Я. Чубаря

Поступила в редакцию 3/X 1979

УДК 533.9.07

В. А. СТРЕЛЬЦОВ, Н. И. МАЛЮШЕВСКИЙ, В. Н. ПАСТУХОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ГЕНЕРАТОРА  
НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЫ  
С РАБОЧИМИ ВЕЩЕСТВАМИ РАЗЛИЧНОЙ ПЛОТНОСТИ

Импульсный электрический разряд является одним из наиболее простых средств получения низкотемпературной плазмы. Выбор рабочих веществ в импульсных устройствах, например ускорителях плазмы, практически не ограничен — это любые газы, металлы, твердые и жидкие диэлектрики. Анализ литературных источников показывает, что в настоящее время наиболее детально исследованы процессы ускорения газовой и эрозивной плазмы в вакууме и газе при атмосферном давлении [1]; сведений о процессах, происходящих в плазменных ускорителях, где в качестве рабочего вещества используется конденсированная среда, недостаточно. Увеличение плотности среды должно приводить к росту плотности и уменьшению скорости разлета плазмы за счет инерционности конденсированной среды, поэтому сравнение характеристик ускорителя, генерирующего плазму в газе и жидкости, представляет научный и практический интерес.

Известно, что параметры плазмы канала электрического разряда (КЭР) меняются в сравнительно широких пределах в зависимости от геометрии КЭР, режима выделения энергии и свойств используемого рабочего вещества. В свою очередь режим выделения энергии определяется совокупностью изменяемых параметров разрядного контура и среды. Основные разрядные характеристики ускорителя в электродинамическом приближении описываются системой уравнений, разработанной авторами на основе законов сохранения. Указанная система включает в себя уравнения баланса напряжения для разрядного контура, энергии и уравнение движения плазмы канала [2].

Уравнение энергии плазмы предполагает, что подводимая к КЭР электрическая энергия расходуется на изменение внутренней энергии плазмы, работу расширения канала и излучение. При этом часть энергии потока излучения уходит из КЭР в окне прозрачности среды, а другая часть энергии поглощается прилегающими к КЭР холодными слоями рабочего вещества, нагревает и превращает их в плазму, реализуя на границах КЭР режим тепловой волны. Таким образом, увеличение объема плазмы происходит как за счет газодинамического расширения под действием высокого давления, так и за счет взаимодействия частиц в пограничном слое плазмы и среды.

Система уравнений решалась на ЭВМ в двух вариантах — для конденсированной среды (вода) и газа — путем замены величин, связанных с изменением плотности рабочего вещества и скорости звука в нем. Результаты расчета для рельсотрона с плоскими электродами шириной 1 см и расстоянием между ними 5 см приведены в таблице. Для расстояний между электродами 10 и 15 см данные расчета не приводятся, так

Влияние среды на разрядные характеристики

Среда	$i$ , кА	$P_0$ , $10^9$ Вт	$\eta_0$	$T$ , $10^3$ К	$p$ , МПа	$v$ , $10^3$ см/с	$\delta$ , см	$n$ , $10^{20}$ см $^{-3}$	$\sigma$ , (Ом·см) $^{-1}$	$j$ , Н.с	$\tau$ , мкс
Газ (водяной пар)	107	0,26	0,28	36,9	40	2,6	1,9	0,5	274	0,18	8,16
Жидкость (вода)	81	0,61	0,72	44,4	710	0,33	0,26	7,0	470	2,6	9,0

как полученные закономерности в основном повторяются, принимая несколько меньшие абсолютные значения. Расчет выполнен для разрядного контура с параметрами: напряжение 30 кВ; емкость накопителя энергии максимальные значения характеристик:  $i$  — ток разряда;  $P_0$  — электрическая мощность, выделяемая в КЭР;  $\eta_0$  — электрический КПД;  $T$ ,  $p$  — температура и давление плазмы канала;  $v$  — скорость расширения КЭР;  $\delta$  — толщина канала в конце первого полупериода,  $n$  и  $\sigma$  — концентрация частиц и электропроводность плазмы,  $j$  — импульс силы,  $\tau$  — время первого полупериода.

Анализ результатов расчета показывает, что характер ускорения плазмы в рельсотроне с жидким рабочим веществом существенно отличается от рассмотренных ранее моделей типа снегоочистителя, или токовой шайбы с постоянно ускоряемой массой газа. Это отличие обусловлено непрерывным в течение времени разряда поступлением газа в канал разряда из пограничных слоев жидкости и существенным влиянием гидродинамических сопротивлений в разрядной зоне, ограниченной электродами рельсотрона. Несмотря на относительное равенство максимальных значений тока и температуры КЭР, увеличение плотности рабочего вещества приводит к увеличению электрической мощности и КПД использования энергии накопителя. Это свидетельствует о лучшей аккумуляющей способности ускорителя в первый полупериод разряда по сравнению с разрядом в газе, у которого аккумуляющая способность проявляется на последующих стадиях за счет работы продольного холловского магнитного поля (эффект магнитных консервов) [3].

Увеличение в десятки раз плотности рабочего вещества приводит к увеличению давления и, что наиболее важно, импульса силы развиваемого КЭР при одновременной потере скорости расширения плазмы. В то же время измерения скорости истечения рабочего вещества в импульсных ускорителях показывают, что скорость потока жидкости может быть значительно увеличена (до 1700 м/с) за счет изменения геометрии канала ускорителя, применения формирующих насадков и использования кумулятивных эффектов при соударении струй кругового сечения.

Экспериментальная проверка на изготовленных для этих целей ускорителях коаксиального типа показала хорошее совпадение результатов «численного» и лабораторного экспериментов и позволила перейти к разработке ряда технологических процессов с применением в качестве рабочего вещества конденсированной среды.

Исходя из полученных результатов, можно сделать следующие выводы:

1. Принятая система уравнений правильно и с достаточной степенью точности описывает процессы, происходящие в плазменном ускорителе с рабочими веществами различной плотности.
2. Увеличение плотности рабочего вещества позволяет получать более высокий электрический КПД, давление и импульс силы, однако скорость расширения канала снижается.

3. Увеличение скорости истечения рабочего вещества может быть достигнуто применение струеобразующих насадок и легко реализуется.

4. Эффективность использования энергии накопителя можно увеличить последовательно на основе аккумулирующей способности ускорителя, применяя на отдельных стадиях процесса ускорения рабочие вещества различной плотности.

Проектно-конструкторское бюро  
электрогидравлики АН УССР,  
Николаев

Поступила в редакцию  
12/III 1981

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гришин Ю. М., Козлов И. П., Хвесюк В. И. Уравнение контура импульсного плазменного ускорителя.— ЖТФ, 1973, 43, № 4.
2. Пастухов В. Н., Малюшевский П. П., Стрельцов В. А. Мощный электрический разряд в жидкости в электродной системе направленного воздействия.— В кн.: Электрический разряд в жидкости и его применение. Киев: Наукова думка, 1977.
3. Гришин С. Д., Лесков Л. В., Козлов И. П. Электрические ракетные двигатели. М.: Машиностроение, 1975.

УДК 621.365.2

Э. В. ГОРОЖАНКИН, Ю. С. ДУДНИКОВ, В. С. КУШНИР,  
В. Ф. ЛЕВЧЕНКО, П. Ф. ЛОБАНОВ

### ПЛАЗМОТРОН С ДИФфуЗОРНОЙ МЭВ В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Экспериментально установлено влияние геометрии электродуговой камеры и внешнего поперечного магнитного поля на характеристики плазмотронов [1—4]. Описано, как с помощью диффузорных электродуговых камер напряжение дуги изменяли на 10—15% и более [1, 2], а также повышали тепловой КПД [1, 3]. В работе [4] наложением на дугу разряд в цилиндрической камере поперечного магнитного поля напряжение дуги повышали до 50%.

Представляет интерес одновременное воздействие двух упомянутых выше факторов на дугу разряд и поток нагреваемого газа. Такое воздействие обеспечивает максимальную интенсификацию теплообмена между дугой и газом, что важно для создания экономичных плазмотронов и плазмохимических реакторов большой мощности. Кроме того, в этом случае возможно а) получение в рабочей камере высокоэнтальпийного ядра потока относительно больших размеров с однородным распределением температуры при высоком тепловом КПД; б) получение восходящих вольт-амперных характеристик (ВАХ) дуги и высокого электрического КПД; в) повышение устойчивости дуги и безынерционное автоматическое регулирование режимов плазмотрона в технологических целях.

Был разработан и экспериментально исследован полупромышленный плазмотрон с четырехсекционной диффузорной межэлектродной вставкой, секции которой располагались в межполюсных зазорах электромагнитов постоянного тока с подковообразными стальными магнитопроводами. Обмотки электромагнитов соединялись последовательно и питались

Наименование	МЭВ				Анод
	секция				
	1	2	3	4	
Диаметр входа, мм	10	17	25	40	40
Диаметр выхода, мм	13	22	32	49	72
Длина, мм	48	56	68	87	55+210
Межполюсное расстояние, мм	40	46	60	74	—
Количество витков	37	45	60	65	—

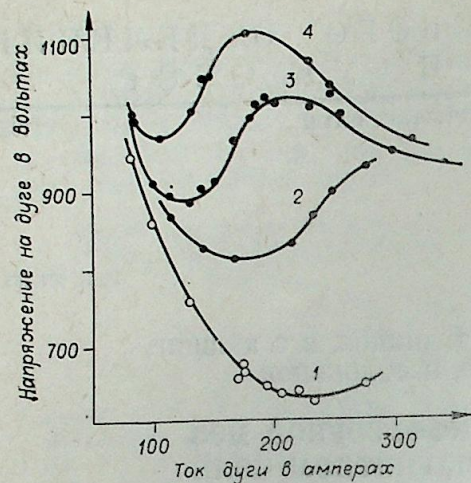


Рис. 1. Влияние магнитного поля на вольт-амперные характеристики дуги. Расход воздуха,  $G=65$  г/с. Ток электромагнитов  $I_M = 0$  (1); 50 (2); 100 (3); 200 А (4).

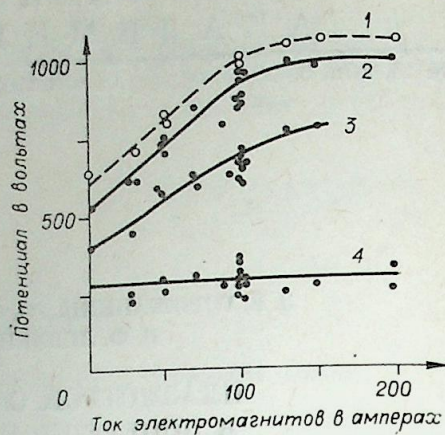


Рис. 2. Влияние магнитного поля на потенциал катода и потенциалы секций МЭВ. Ток дуги  $I_D=200$  А. Расход воздуха,  $G=55$  г/с. 1 — катод; 2 — секция 2; 3 — секция 3; 4 — секция 4.

от независимого источника. В этом плазмотроне в отличие от [1] рабочий канал МЭВ выполнялся ступенчатым, катод — торцевым, а анод имел уступ, подобно описанному в [5]. Основные геометрические размеры МЭВ и анода, а также межполюсные расстояния и количество витков электромагнитов приведены в таблице.

Воздух в плазмотрон с суммарным расходом 55—65 г/с подавался тангенциально через зазоры МЭВ в соотношении 0,15 : 0,15 : 0,15 : 0,45 : 0,1. Выхлоп осуществлялся в закалочную камеру с давлением  $1 \cdot 10^5$  Па. Электроды и МЭВ охлаждались водой. Измеряли расходы воздуха и воды, приращение температуры воды, токи дуги  $I_g$  и электромагнитов  $I_M$ , напряжение дуги  $U_g$  и потенциалы  $U_i$  секций МЭВ относительно анода. Максимальная погрешность измерений составляла  $\pm 4\%$ . По тепловому балансу определялся тепловой КПД.

Приводимые на рис. 1 и 2 экспериментальные данные показывают, что магнитное поле в исследованном плазмотроне существенно влияет на ВАХ дуги, а также на потенциалы катода и первых трех секций МЭВ. Видно, что с помощью магнитного поля можно повысить напряжение дуги при том же токе более чем на 50% (см. рис. 1, кривые 1, 4), а также осуществить переход от падающего участка ВАХ (рис. 1, кривая 1) к восходящим (см. рис. 1, кривые 2—4). При работе от источника с регулируемой внешней характеристикой и напряжением холостого хода 2,2 кВ. переход от падающего к восходящим участкам ВАХ легко осуществлялся увеличением тока электромагнитов.

Ход кривых 1—3 (см. рис. 2) позволяет предположить, что в исследованном плазмотроне рост потенциалов катода и секций 1—3 при увеличении магнитного поля ограничен шунтированием типа «дуга — дуга» в горячем дуговом следе в поле архимедовых сил газового вихря. Постоянство потенциала секции 4 (см. рис. 2, кривая 4) можно объяснить укорачиванием анодной петли дугового столба при наложении магнитного поля. Мощность дуги при наложении магнитного поля возрастала на 15—40%, а тепловой КПД увеличился с 0,85 до 0,9. Заметно улучшилась устойчивость режимов.

Результаты эксперимента показывают перспективность разработки плазмотронов с диффузорной МЭВ и поперечным магнитным полем.

Сибирский филиал  
научно-производственного объединения  
Техэнергохимпром,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
6/Х 1980

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мартынов В. И. и др. Исследование плазмотрона с диффузорным дуговым каналом. — ТВТ, 1971, 9, № 5.
2. Мусолин В. Н. и др. Исследование энергетических характеристик плазмотрона с переменной геометрией разрядной камеры. — Тр. VI Всесоюз. конф. по генераторам низкотемпературной плазмы. Фрунзе: Илим, 1974.
3. Галимарданов М. Ш. и др. Электрические и тепловые характеристики плазмотрона с дуговой камерой переменного диаметра. — Там же.
4. Косинов В. А., Янковский А. И. Воздействие внешнего магнитного поля на дугу, стабилизированную вихрем. — Тр. VII Всесоюз. конф. по генераторам низкотемпературной плазмы, т. 1. Алма-Ата, 1977.
5. Аньшаков А. С. и др. Некоторые результаты исследований по созданию плазмотрона промышленного типа. — Физика и химия обработки материалов, 1969, № 1.

В. П. КАРЛОВ, Н. Д. ДЕМПДЕНКО

МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ МАССООБМЕНА  
В СЛОЖНОЙ РЕКТИФИКАЦИОННОЙ КОЛОННЕ

Динамические свойства ректификационных колонн как объектов с распределенными параметрами описываются уравнениями в частных производных [1, 2]. Решение соответствующих краевых задач для исследования нестационарных режимов промышленных ректификационных установок и задач оптимального контроля и управления имеет определенные трудности, связанные с конструктивными и технологическими особенностями управляемых объектов. Эти трудности обуславливаются размерностью задачи, нелинейностью, наличием ограничений, что приводит, в частности, к неприемлемо большим затратам машинного времени.

Для решения таких задач применяются интегральные преобразования. Например, использование преобразования Лапласа позволяет представить динамические характеристики в виде передаточных функций, что особенно удобно, когда объект имеет сложную структуру и состоит из отдельных взаимосвязанных звеньев или является звеном более сложной динамической системы (например, системы регулирования). Решение нелинейных задач с помощью преобразования Лапласа предполагает линеаризацию исходной модели. Однако характеристики, полученные на основе линейной модели, отражают динамические свойства исследуемого объекта с требуемой точностью лишь при малых возмущающих воздействиях [3, 4].

В настоящей работе предлагается метод исследования нестационарных режимов сложных ректификационных колонн, основанный на применении интегрального преобразования Лапласа — Карсона по временной координате к линеаризованной задаче. С помощью предложенного алгоритма для каждого момента времени осуществляется подстройка модели, что позволяет исследовать поведение объекта при значительных возмущениях. По основным каналам управления и возмущения находятся передаточные функции и проводится численный эксперимент.

Рассмотрим математическую модель, описывающую процесс массообмена между паровым и жидкостным потоками.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(H_x x)}{\partial t} - \frac{\partial(Lx)}{\partial l} &= K_y(y - y^*) + \Phi_1(l, t), \\ \frac{\partial(H_y y)}{\partial t} + \frac{\partial(Vy)}{\partial l} &= K_y(y^* - y) + \Phi_2(l, t), \\ l &\in [0, 1], \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (1)$$

где  $H_x(l, t)$ ,  $H_y(l, t)$  — удерживающие способности по жидкости и пару,  $x(l, t)$ ,  $y(l, t)$  — концентрации легколетучего компонента в жидкости и паре соответственно,  $L(l, t)$  — жидкостный поток,  $V(l, t)$  — паровой поток,  $K_y$  — коэффициент массопередачи,  $\Phi_1(l, t)$  и  $\Phi_2(l, t)$  — функции внешних воздействий,  $y^* = y^*(x)$  — равновесная концентрация. Началь-

ные условия  $x(l, 0) = \varphi_1(l)$ ,  $y(l, 0) = \varphi_2(l)$ . Граничные условия приведены ниже.

Решение задачи (1) с нелинейной правой частью находим следующим образом. Условно разделим ректификационную колонну по пространственной координате  $l$  на  $n$  участков. На каждом участке равновесную заменяем отрезком прямой, таким образом вся кривая равновесия аппроксимируется кусочно-линейной функцией.

$$y^{(i)*}(x^{(i)}) = a^{(i)}x^{(i)} + b^{(i)}, \quad (2)$$

где  $a^{(i)}$  и  $b^{(i)}$  ( $i = \overline{1, n}$ ) — постоянные коэффициенты.

Внешние воздействия (ввод парового или жидкостного потока) осуществляются в точках с координатами  $l^{(i)}$  ( $i = \overline{1, n}$ ), ( $l^{(0)} = 0$ ,  $l^{(n)} = 1$ ). Полагаем величины  $H_x^{(i)}$ ,  $H_y^{(i)}$ ,  $K_y^{(i)}$ ,  $L^{(i)}$ ,  $V^{(i)}$ , ( $i = \overline{1, n}$ ) на  $i$ -м участке аппарата постоянными. При этих допущениях исходная задача разбивается на  $n$  подзадач.

$$\begin{aligned} H_x^{(i)} \frac{\partial x^{(i)}}{\partial t} - L^{(i)} \frac{\partial x^{(i)}}{\partial l} &= K_y^{(i)}(y^{(i)} - y^{*(i)}), \\ H_y^{(i)} \frac{\partial y^{(i)}}{\partial t} + V^{(i)} \frac{\partial y^{(i)}}{\partial l} &= K_y^{(i)}(y^{*(i)} - y^{(i)}), \\ l &\in [l^{(i-1)}, l^{(i)}], \quad t \in [0, T], \quad (i = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (3)$$

Начальные условия

$$x^{(i)}(l, 0) = \varphi_1^{(i)}(l), \quad y^{(i)}(l, 0) = \varphi_2^{(i)}(l) \quad (i = \overline{1, n}). \quad (4)$$

Граничные условия:  
для 1-го участка

$$l = 0 \begin{cases} H_{x_h} \frac{dx_h}{dt} = L^{(1)}x^{(1)}(0, t) - V^{(1)}y^{(1)}(0, t) - Wx_h(t) \\ y^{(1)}(0, t) = y^{*(1)}(x_h) \\ x_h(t)|_{t=0} = \alpha_1, \quad t \in [0, T], \end{cases} \quad (5)$$

$$l = l^{(1)} \begin{cases} L^{(1)}x^{(1)}(l^{(1)}, t) = L^{(2)}x^{(2)}(l^{(1)}, t) + F_1^{(1)}h_1^{(1)}(t) \\ V^{(2)}y^{(2)}(l^{(1)}, t) = V^{(1)}y^{(1)}(l^{(1)}, t) + F_2^{(1)}h_2^{(1)}(t) \end{cases} \quad (6)$$

$$L^{(1)} = L^{(2)} + F_1^{(1)} \quad (7)$$

$$V^{(2)} = V^{(1)} + F_2^{(1)} \quad (8)$$

$$V^{(1)} = L^{(1)} - W; \quad (9)$$

для  $i$ -го участка

$$l = l^{(i-1)} \begin{cases} L^{(i-1)}x^{(i-1)}(l^{(i-1)}, t) = L^{(i)}x^{(i)}(l^{(i-1)}, t) + F_1^{(i-1)}h_1^{(i-1)}(t) \\ V^{(i)}y^{(i)}(l^{(i-1)}, t) = V^{(i-1)}y^{(i-1)}(l^{(i-1)}, t) + F_2^{(i-1)}h_2^{(i-1)}(t) \end{cases} \quad (10)$$

$$l = l^{(i)} \begin{cases} L^{(i)}x^{(i)}(l^{(i)}, t) = L^{(i+1)}x^{(i+1)}(l^{(i)}, t) + F_1^{(i)}h_1^{(i)}(t) \\ V^{(i+1)}y^{(i+1)}(l^{(i)}, t) = V^{(i)}y^{(i)}(l^{(i)}, t) + F_2^{(i)}h_2^{(i)}(t) \end{cases} \quad (11)$$

$$L^{(i)} = L^{(i+1)} + F_1^{(i)} \quad (12)$$

$$V^{(i+1)} = V^{(i)} + F_2^{(i)}, \quad (i = \overline{2, n-1});$$

для  $n$ -го участка

$$l = l^{(n-1)} \begin{cases} L^{(n-1)}x^{(n-1)}(l^{(n-1)}, t) = L^{(n)}x^{(n)}(l^{(n-1)}, t) + F_1^{(n-1)}h_1^{(n-1)}(t) \\ V^{(n)}y^{(n)}(l^{(n-1)}, t) = V^{(n-1)}y^{(n-1)}(l^{(n-1)}, t) + F_2^{(n-1)}h_2^{(n-1)}(t) \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} H_{x_d} \frac{dx_d(1, t)}{dt} = V_d y_d(t) - (L_d + D) x_d(t), \\ V_d y_d(t) - V^{(n)} y^{(n)}(1, t) = L_d x_d(t) - L^{(n)} x^{(n)}(1, t), \\ y_d(t) = y^{(n)}(1, t), \\ x_d(t)|_{t=0} = \alpha_2, \quad t \in [0, T]; \end{cases} \quad (14)$$

$$L^{(n)} = L_d, \quad (15)$$

$$V^{(n)} = V^{(n-1)} + F_2^{(n-1)}, \quad (16)$$

где  $x^{(i)} = x^{(i)}(l, t)$ ,  $y^{(i)} = y^{(i)}(l, t)$ ,  $y^{*(i)} = y^{*(i)}(x^{(i)}) = a^{(i)}x^{(i)} + b^{(i)}$  ( $i = \overline{1, n}$ ). На основании общего баланса потоков в колонне  $W$  определяется по формуле

$$W = \sum_{i=0}^{n-1} F_1^{(i)} + \sum_{i=0}^{n-1} F_2^{(i)} - D. \quad (17)$$

Для решения задачи (3)–(17) воспользуемся преобразованием Лапласа — Карсона по переменной  $t$ , что позволит свести системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных к системам обыкновенных дифференциальных уравнений, а граничные условия к системам алгебраических уравнений.

$$L^{(i)} \frac{d\bar{X}^{(i)}(l, p)}{dl} + \alpha^{(i)} \bar{X}^{(i)}(l, p) + K_y^{(i)} \bar{Y}^{(i)}(l, p) = \Phi_{11}^{(i)}, \quad (18)$$

$$V^{(i)} \frac{d\bar{Y}^{(i)}(l, p)}{dl} - K_y^{(i)} a^{(i)} \bar{X}^{(i)}(l, p) + \beta^{(i)} \bar{Y}^{(i)}(l, p) = \Phi_{22}^{(i)}$$

$$l \in [l^{(i-1)}, l^{(i)}], \quad (i = \overline{1, n}),$$

граничные условия

$$l=0 \quad \bar{Y}^{(1)}(0, p) = K_h^{(1)}(p) \bar{X}^{(1)}(0, p) + K_h^{(2)}(p), \quad (19)$$

$$l=l^{(i)} \quad \begin{cases} L^{(i)} \bar{X}^{(i)}(l^{(i)}, p) = L^{(i+1)} \bar{X}^{(i+1)}(l^{(i)}, p) + F_1^{(i)} \bar{h}_1^{(i)}(p), \\ V^{(i+1)} \bar{Y}^{(i+1)}(l^{(i)}, p) = V^{(i)} \bar{Y}^{(i)}(l^{(i)}, p) + F_2^{(i)} \bar{h}_2^{(i)}(p), \end{cases} \quad (20)$$

$$l=l^{(n)}=1 \quad \bar{X}^{(n)}(1, p) = K_d^{(1)}(p) \bar{Y}^{(n)}(1, p) + K_d^{(2)}(p), \quad (21)$$

где

$$\alpha^{(i)} = -(H_x^{(i)} p + K_y^{(i)} a^{(i)}),$$

$$\beta^{(i)} = H_y^{(i)} p + K_y^{(i)},$$

$$\Phi_{11}^{(i)} = \Phi_{11}^{(i)}(l) = K_y^{(i)} b^{(i)} - H_x^{(i)} p x^{(i)}(l, 0),$$

$$\Phi_{22}^{(i)} = \Phi_{22}^{(i)}(l) = K_y^{(i)} b^{(i)} + H_y^{(i)} p y^{(i)}(l, 0),$$

$$\bar{X}^{(i)}(l, p) \doteq x^{(i)}(l, t), \quad \bar{Y}^{(i)}(l, p) \doteq y^{(i)}(l, t) \quad (i = \overline{1, n}).$$

$$K_h^{(1)}(p) = \frac{L^{(1)} a_h}{H_{x_h} p + V^{(1)} a_h + W}, \quad (22)$$

$$K_h^{(2)}(p) = \frac{W b_h + H_{x_h} p (b_h + \alpha_1 a_h)}{H_{x_h} p + V^{(1)} a_h + W}, \quad (23)$$

$$K_d^{(1)}(p) = \frac{V_d L_d - (V_d - V^{(n)}) (H_{x_d} p + L_d + D)}{L^{(n)} (H_{x_d} p + L_d + D)}, \quad (24)$$

$$K_d^{(2)}(p) = \frac{L_d H_{x_d} p \alpha_2}{L^{(n)} (H_{x_d} p + L_d + D)}, \quad (25)$$

Формулы (22) и (24) определяют передаточные функции куба и дефлегматора соответственно, а (23) и (25) — слагаемые за счет ненулевых начальных условий.

Применяя метод вариации произвольных постоянных к системе (18) с учетом начальных условий

$$\begin{aligned} x^{(i)}(l, 0) &= c_1^{(i)} + c_2^{(i)} e^{\lambda_2^{(i)} l}, \\ y^{(i)}(l, 0) &= b^{(i)} + a^{(i)} c_1^{(i)} + c_2^{(i)} \frac{L^{(i)}}{V^{(i)}} e^{\lambda_2^{(i)} l} \end{aligned} \quad (i = \overline{1, n}), \quad (26)$$

где  $c_1^{(i)}, c_2^{(i)}, \lambda_2^{(i)}$  — величины, определяемые из задачи (3)–(17) при  $t \rightarrow \infty$ , получим решение в следующем виде:

$$\bar{X}^{(i)}(l, p) = c_1^{(i)} + c_2^{(i)} e^{\lambda_2^{(i)} l} + c_{11}^{(i)} e^{z_1^{(i)} l} + c_{22}^{(i)} e^{z_2^{(i)} l}, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \bar{Y}^{(i)}(l, p) &= \frac{1}{K_y^{(i)}} \left[ \Phi_{11}^{(i)} - \alpha^{(i)} c_1^{(i)} - (\alpha^{(i)} + L^{(i)} \lambda_2^{(i)}) c_2^{(i)} e^{\lambda_2^{(i)} l} - \right. \\ &\quad \left. - (\alpha^{(i)} + L^{(i)} z_1^{(i)}) c_{11} e^{z_1^{(i)} l} - (\alpha^{(i)} + L^{(i)} z_2^{(i)}) c_{22} e^{z_2^{(i)} l} \right], \end{aligned} \quad (28)$$

где  $z_1^{(i)}, z_2^{(i)}$  — корни характеристических уравнений систем (18),  $c_{11}^{(i)}, c_{22}^{(i)}$  — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий (19)–(21) ( $i = \overline{1, n}$ ).

На первом этапе решения краевой задачи (18)–(21), (26) найдем матрицу передаточных функций для  $i$ -го участка колонны, для чего решаем задачу (18), (26) при следующих граничных условиях:

$$l = l^{(i-1)}, \quad \bar{Y}^{(i)}(l^{(i-1)}, p) = v_2^{(i)}(p), \quad (29)$$

$$l = l^{(i)}, \quad \bar{X}^{(i)}(l^{(i)}, p) = v_1^{(i)}(p), \quad (30)$$

где  $v_1^{(i)}(p)$  и  $v_2^{(i)}(p)$  — некоторые функции ( $i = \overline{1, n}$ ). После подстановки (29), (30) в (27), (28) и определения постоянных интегрирования получим

$$\bar{X}^{(i)}(l, p) = K_{11}^{(i)}(l, p) v_1^{(i)}(p) + K_{12}^{(i)}(l, p) v_2^{(i)}(p) + R_x^{(i)}(l, p), \quad (31)$$

$$\bar{Y}^{(i)}(l, p) = K_{21}^{(i)}(l, p) v_1^{(i)}(p) + K_{22}^{(i)}(l, p) v_2^{(i)}(p) + R_y^{(i)}(l, p), \quad (32)$$

$$K_{11}^{(i)}(l, p) = \frac{e^{z_1^{(i)} l}}{e^{z_1^{(i)} l^{(i)}}} - \frac{g_2^{(i)} q_1^{(i)} e^{z_1^{(i)} (l^{(i-1)} - l^{(i)})}}{g_1^{(i)}}, \quad (33)$$

где

$$K_{12}^{(i)}(l, p) = \frac{K_y^{(i)} g_2^{(i)}}{g_1^{(i)}}, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} R_x^{(i)}(l, p) &= \frac{g_2^{(i)}}{g_1^{(i)}} \left\{ (H_x^{(i)} p + \alpha^{(i)}) c_1^{(i)} - K_y^{(i)} b^{(i)} + [H_x^{(i)} p + (\alpha^{(i)} + \right. \\ &\quad \left. + L^{(i)} \lambda_2^{(i)})] e^{\lambda_2^{(i)} l^{(i-1)}} c_2^{(i)} - q_1^{(i)} x^{(i)}(l^{(i)}, 0) e^{z_1^{(i)} (l^{(i-1)} - l^{(i)})} \right\} - \\ &\quad - x^{(i)}(l^{(i)}, 0) e^{z_1^{(i)} (l - l^{(i)})} + x^{(i)}(l, 0), \end{aligned} \quad (35)$$

$$K_{21}^{(i)}(l, p) = -\frac{1}{K_y^{(i)}} \left[ q_1^{(i)} e^{z_1^{(i)} (l - l^{(i)})} + \frac{g_3^{(i)} q_1^{(i)} e^{z_1^{(i)} (l^{(i-1)} - l^{(i)})}}{g_1^{(i)}} \right], \quad (36)$$

$$K_{22}^{(i)}(l, p) = -\frac{g_3^{(i)}}{g_1^{(i)}}, \quad (37)$$

$$R_y^{(i)}(l, p) = \frac{1}{K_y^{(i)}} \left\{ K_y^{(i)} b^{(i)} - (H_x^{(i)} p + \alpha^{(i)}) c_1^{(i)} - [H_x^{(i)} p + (\alpha^{(i)} + L^{(i)} \lambda_2^{(i)}) \times \right. \\ \left. \times c_2^{(i)} e^{\lambda_2^{(i)} l} + q_1^{(i)} x^{(i)}(l^{(i)}, 0) e^{z_1^{(i)}(l^{(i)} - l^{(i)})} + \frac{g_3^{(i)}}{g_1^{(i)}} \left[ \{ H_x^{(i)} p + \alpha^{(i)} \} c_1^{(i)} - K_y^{(i)} b^{(i)} + \right. \right. \\ \left. \left. + (H_x^{(i)} p + (\alpha_2^{(i)} + L^{(i)} \lambda_2^{(i)})) c_1^{(i)} e^{\lambda_2^{(i)} l^{(i-1)}} - q_1^{(i)} x^{(i)}(l^{(i)}, 0) e^{z_1^{(i)}(l^{(i-1)} - l^{(i)})} \right] \right\}, \quad (38)$$

$$q_1^{(i)} = (\alpha^{(i)} + L^{(i)} z_1^{(i)}), \quad q_2^{(i)} = (\alpha^{(i)} + L^{(i)} z_2^{(i)}), \\ g_1^{(i)} = q_1^{(i)} e^{[z_2^{(i)} l^{(i)} + z_1^{(i)}(l^{(i-1)} - l^{(i)})]} - q_2^{(i)} e^{z_2^{(i)} l^{(i-1)}}, \\ g_2^{(i)} = e^{z_2^{(i)} l} - e^{[z_2^{(i)} - z_1^{(i)}] l^{(i)} + z_1^{(i)} l}, \\ g_3^{(i)} = q_1^{(i)} e^{[z_2^{(i)} - z_1^{(i)}] l^{(i)} + z_1^{(i)} l} + q_2^{(i)} e^{z_2^{(i)} l}, \\ l \in [l^{(i-1)}, l^{(i)}], \quad i = \overline{1, n}.$$

Выражения (33), (34), (36) и (37) — передаточные функции по каналам внешних воздействий, (35), (38) — функции, обусловленные наличием ненулевых начальных условий.

Теперь определим  $v_1^{(i)}(p)$ ,  $v_2^{(i)}(p)$  ( $i = \overline{1, n}$ ), для этого выражения (31), (32) подставим в (19)–(21) и получим систему линейных уравнений относительно  $v_1^{(i)}(p)$ ,  $v_2^{(i)}(p)$  ( $i = \overline{1, n}$ ), из которой по правилу Крамера находим

$$v_j^{(i)}(p) = \frac{\Delta_j^{(i)} v}{\Delta} \quad (i = \overline{1, n}; j = 1, 2), \quad \Delta \neq 0, \quad (39)$$

где  $\Delta$  — определитель системы,  $\Delta_j^{(i)} v$  — определитель, полученный из  $\Delta$  путем замены элементов соответствующего столбца на элементы столбца свободных членов. Разложив  $\Delta_j^{(i)} v$  по элементам столбца, содержащего свободные члены  $B_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), получим

$$\Delta_j^{(i)} v = \sum_{h=1}^{2n} B_h A_{h, 2i+j-1} \quad (i = \overline{1, n}; j = 0, 1),$$

где  $A_{h, 2i+j-1}$  — соответствующие алгебраические дополнения. После подстановки (39) в (31), (32) окончательно можно записать:

$$\bar{X}^{(v)}(l, p) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^1 K_{1, 2i+j-1}^{(v)}(l, p) \bar{h}_{j+1}^{(i)} + (p) L_x^{(v)}(l, p), \quad (40)$$

$$\bar{Y}^{(v)}(l, p) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^1 K_{2, 2i+j-1}^{(v)}(l, p) \bar{h}_{j+1}^{(i)}(p) + L_y^{(v)}(l, p), \quad (41)$$

где

$$K_{1, 2i+j-1}^{(v)}(l, p) = \begin{cases} \frac{[K_{11}^{(v)}(l, p) A_{2i-1, 2v-1} + K_{12}^{(v)}(l, p) A_{2i-1, 2v}] F_1^{(i)}}{L^{(i)} \Delta}, & \text{при } j = 0. \\ \frac{[K_{11}^{(v)}(l, p) A_{2i, 2v-1} + K_{12}^{(v)}(l, p) A_{2i, 2v}] F_2^{(i)}}{V^{(i+1)} \Delta}, & \text{при } j = 1 \end{cases}$$

$$K_{2, 2i+j-1}^{(v)}(l, p) = \begin{cases} \frac{[K_{21}^{(v)}(l, p) A_{2i-1, 2v-1} + K_{22}^{(v)}(l, p) A_{2i-1, 2v}] F_1^{(i)}}{L^{(i)} \Delta}, & \text{при } j = 0 \\ \frac{[K_{21}^{(v)}(l, p) A_{2i, 2v-1} + K_{22}^{(v)}(l, p) A_{2i, 2v}] F_2^{(i)}}{V^{(i+1)} \Delta}, & \text{при } j = 1 \end{cases} \\ (i = \overline{1, n-1}),$$

$$L_x^{(v)}(l, p) = R_x^{(v)}(l, p) + \frac{1}{\Delta} \left\{ K_{11}^{(v)}(l, p) [B_{2n-1} A_{2n-1, 2v-1} + b_{2n} A_{2n, 2v-2}] + \right. \\ \left. + K_{12}^{(v)}(l, p) [b_{2n-1} A_{2n-1, 2v} + b_{2n} A_{2n, 2v} + \sum_{i=1}^{n-1} \left( [K_{11}^{(v)}(l, p) A_{2i-1, 2v-1} + \right. \right. \\ \left. \left. + K_{12}^{(v)}(l, p) A_{2i-1, 2v}] \cdot \left[ \frac{L^{(i+1)}}{L^{(i)}} R_x^{(i+1)}(l^{(i)}, p) - R_x^{(i)}(l^{(i)}, p) + \right. \right. \\ \left. \left. + [K_{11}^{(v)}(l, p) A_{2i, 2v-1} + K_{12}^{(v)}(l, p) A_{2i, 2v}] \cdot \left[ \frac{V^{(i)}}{V^{(i+1)}} R_y^{(i)}(l^{(i)}, p) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - R_y^{(i+1)}(l^{(i)}, p) \right] \right) \right\}, \\ L_y^{(v)}(l, p) = R_y^{(v)}(l, p) + \frac{1}{\Delta} \left\{ K_{21}^{(v)}(l, p) [b_{2n-1} A_{2n-1, 2n-1} + b_{2n} A_{2n, 2v-1}] + \right. \\ \left. + K_{22}^{(v)}(l, p) [b_{2n-1} A_{2n-1, 2v} + b_{2n} A_{2n, 2v}] + \sum_{i=1}^{n-1} \left( [K_{21}^{(v)}(l, p) A_{2i-1, 2v-1} + \right. \right. \\ \left. \left. + K_{22}^{(v)}(l, p) A_{2i-1, 2v}] \cdot \left[ \frac{L^{(i+1)}}{L^{(i)}} R_x^{(i+1)}(l^{(i)}, p) - R_x^{(i)}(l^{(i)}, p) \right] + \right. \\ \left. \left. + [K_{21}^{(v)}(l, p) A_{2i, 2v-1} + K_{22}^{(v)}(l, p) A_{2i, 2v}] \cdot \left[ \frac{V^{(i)}}{V^{(i+1)}} R_y^{(i)}(l^{(i)}, p) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - R_y^{(i+1)}(l^{(i)}, p) \right] \right) \right\}, \quad (v = \overline{1, n}),$$

где  $\bar{h}_{j+1}^{(i)}(p)$  — внешние воздействия ( $i = \overline{1, n}; j = 0, 1$ ). Структурная схема сложной ректификационной колонны показана на рис. 1.

В (31), (32) неопределенными параметрами остались  $a^{(i)}$  и  $b^{(i)}$  ( $i = \overline{1, n}$ ). Поскольку значения концентраций  $x = x(l, t)$  в точках  $l = l^{(i)}$  ( $i = \overline{0, n}$ ) зависят от  $t$  и изменяются в широких пределах, а соответственно им меняются и равновесные концентрации в (2), выбор  $a^{(i)}$ ,  $b^{(i)}$  ( $i = \overline{1, n}$ ) необходимо осуществлять исходя из выполнения условий (19)–(21).

В случаях, когда представляет интерес поведение объекта при наличии значительных по величине возмущений на большом промежутке времени, необходимо применять численные методы. Для этой цели разработаны алгоритм и программа, с помощью которых для каждого заданного момента времени определяются такие значения  $a^{(i)}$  и  $b^{(i)}$  ( $i = \overline{1, n}$ ), при которых погрешность в выражениях (19)–(21) не превышает заданную. Этот алгоритм включает следующие этапы:

1. Задаются моменты  $t_i$  ( $i = \overline{1, k}$ ), в которых необходимо определить значения концентраций.

2. Решается нелинейная относительно  $a^{(i)}$  и  $b^{(i)}$  система уравнений. 
$$y^*(x^{(j+1)}(l^{(j+1)}, t)) = a^{(j+1)} x^{(j+1)}(l^{(j+1)}, t) + b^{(j+1)} \quad (42)$$
 где  $y^*(x)$  — равновесная функция в задаче (1),  $x^{(j+1)}(l^{(j+1)}, t) \approx \bar{X}^{(j+1)}(l^{(j+1)}, p)$  ( $i = 0, 1; j = \overline{0, n-1}$ ).

3. Для найденных из (42)  $a^{(i)}$ ,  $b^{(i)}$  ( $i = \overline{1, n}$ ) определяем по (31), (32) концентрации вдоль аппарата.

В приведенных примерах (рис. 2, 3) система (42) решалась численно итерационным методом. Заданная точность  $\varepsilon = 10^{-5}$  достигалась за 2–11 итераций в зависимости от величины внешних воздействий при затратах машинного времени 1 ч на 100 точек по  $t$  на ЭВМ М4030. По мере выхода на статический режим количество итераций быстро уменьшается. Равновесная имела вид  $y^*(x) = \frac{\alpha x}{1 + (\alpha - 1)x}$ ,  $\alpha = 1, 4$ .

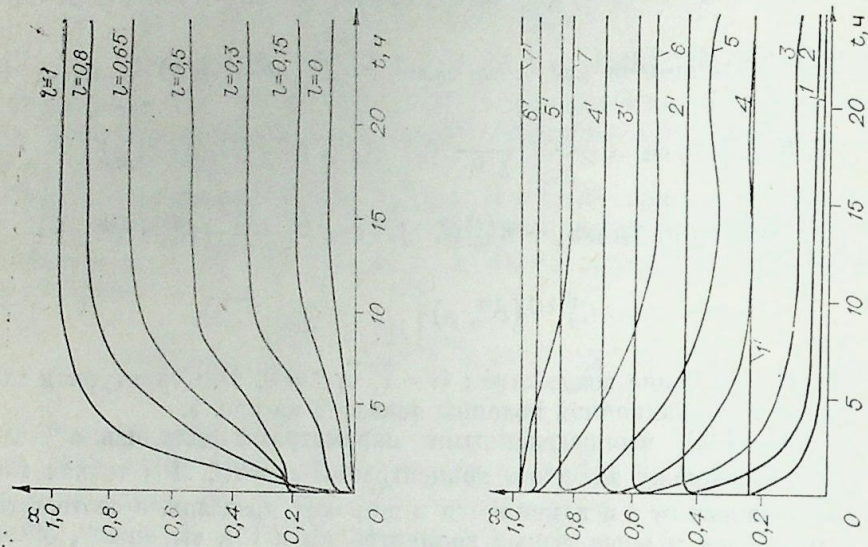


Рис. 2. Переходные характеристики колонны К-6 в пусковом режиме в различных точках аппарата.

Рис. 3. Переходные характеристики колонны К-6 при возмущениях по составу сырья в точках с координатами 0; 0,15; 0,3; 0,5; 0,65; 0,8; 1,0. 1-7 ~ -20%; 1'-7' ~ +20%.

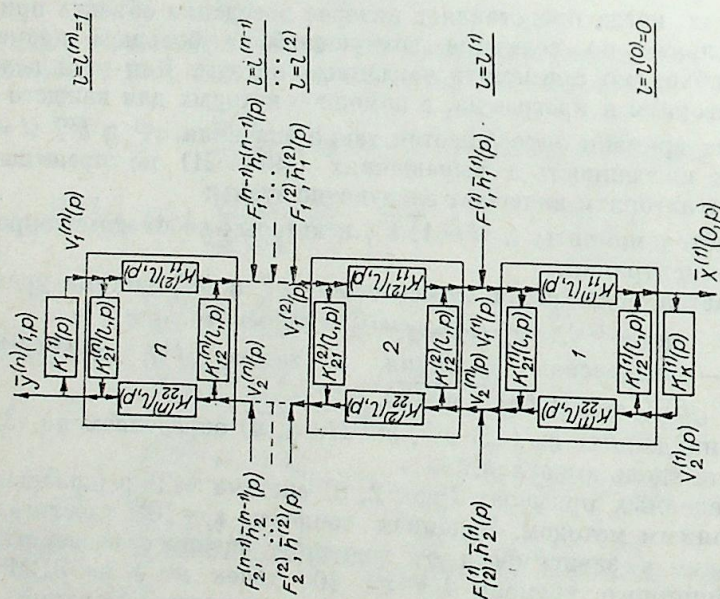


Рис. 1.

В виду того, что полученное выражение переходного процесса в (40) — (42) преобразовано по Лапласу — Карсону, а перейти к оригиналам с помощью таблиц не удается, в расчетах использовался численный метод обращения.

Предложенный метод позволяет рассчитывать динамические характеристики такого нелинейного объекта, как сложная ректификационная колонна, с минимальными затратами машинного времени. Это дало возможность применить его при исследовании динамических свойств ряда промышленных колонн для Новокуйбышевского СКБ Московского НПО «Нефтехимавтоматика».

Кроме того, полученные передаточные функции используются для синтеза высокоэффективных систем автоматического регулирования как отдельных ректификационных колонн, так и установок в целом.

Вычислительный центр  
СО АН СССР,  
Красноярск

Поступила в редакцию  
23/III 1981

### ЛИТЕРАТУРА

1. Девятков Б. Н., Демиденко Н. Д., Охорзин В. А. Динамика распределенных процессов в технологических аппаратах, распределенный контроль и управление. Красноярск: Кн. изд-во, 1976.
2. Демиденко Н. Д., Ушатинская Н. П. Моделирование, распределенный контроль и управление процессами ректификации. Новосибирск: Наука, 1978.
3. Демиденко Н. Д., Авдеев А. М., Карлов В. П., Ушапов С. В. Применение операторных методов для анализа нестационарных режимов теплообменных аппаратов. — В кн.: Применение вычислительной техники в автоматизированных системах обработки информации. Новосибирск: Наука, 1977.
4. Анисимов И. В., Бодров В. И., Покровский В. Б. Математическое моделирование и оптимизация ректификационных установок. М.: Химия, 1975.

УДК 621.311.016.32

В. В. БУШУЕВ, Н. Л. НОВИКОВ, Е. А. КОРОСТЫШЕВСКИЙ

МЕТОД АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ  
СЛОЖНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ УЧЕТЕ  
СТАТИСТИЧЕСКОЙ ПРИРОДЫ ПАРАМЕТРОВ  
И ВОЗМУЩАЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Надежность сложных электроэнергетических систем во многом определяется их способностью сохранять устойчивость при малых и конечных флуктуациях режимных параметров, вызванных случайными возмущениями нагрузки и неопределенностью исходных данных о параметрах отдельных элементов системы. Наиболее строгим подходом при случайном характере изменений во времени параметров и возмущений является рассмотрение стохастической устойчивости. Однако необходимость использования в этом случае многомерных законов распределения случайных процессов делает такой подход практически нереализуемым.

Корреляционный анализ, основанный на исследовании двух первых моментов случайных процессов (математического ожидания и корреляционной функции), при конечных возмущениях режимных параметров приводит к необходимости совместного решения двух взаимосвязанных систем уравнений для самих математических ожиданий и централизованных величин.

При анализе устойчивости в малом решение этих двух систем осуществляется независимо; вначале отыскивается решение системы уравнений, описывающих установившийся режим, а затем исследуется устойчивость системы уравнений малых колебаний. В этом принципиальное отличие рассмотрения устойчивости при малых возмущениях нелинейных динамических систем. Отметим, что, хотя указанный метод значительно проще исследования стохастической устойчивости, он достаточно сложен и трудоемок.

Инженерную методику анализа устойчивости при конечных возмущениях целесообразно базировать на рассмотрении случайных факторов не в виде случайных процессов, а в виде случайных величин в сочетании с анализом чувствительности выбранного критерия устойчивости к основным возмущающим факторам. Этот подход целесообразен и правомочен при анализе режимной надежности для возмущающих воздействий с более узким частотным спектром по сравнению со спектром рассматриваемых динамических процессов, что имеет место в реальных условиях эксплуатации энергосистем. Характеризовать устойчивость можно с помощью различных критериев (корневых, частотных, алгебраических). Наиболее удобно использовать такие критерии, которые можно записать в виде  $V > 0$ .

В качестве величины  $V$  целесообразно принимать значение ближайшего корня к мнимой оси, взятого с обратным знаком, величину свободного члена характеристического уравнения, величину

$$\alpha = \left[ \frac{\partial \varphi(\omega_i)}{\partial \omega} \right]^{-1}, \quad (1)$$

где  $\varphi(\omega_i)$  — фазочастотная характеристика системы,  $\omega_i$  — значение резонансной частоты.

Величина  $V$  зависит от статистических характеристик изменений параметров системы и возмущающих воздействий

$$V = f(\bar{P}, \bar{Q}, \bar{Z}), \quad (2)$$

где  $P, Q$  — векторы активных и реактивных инъекций в узлах,  $Z$  — вектор сопротивлений ветвей.

При выборе  $V$  в виде величины корня,  $\alpha$  или значения свободного члена характеристического уравнения эта величина непрерывно зависит от  $P, Q, Z$  и имеет производную в окрестности изменения  $P, Q, Z$ .

Полагая, что  $V$  в окрестности точки  $V(m_P, m_Q, m_Z)$  достаточно гладкая, разложим  $V$  в окрестности этой точки в ряд Тейлора, ограничиваясь квадратичными членами разложения

$$\begin{aligned} V = & V(m_P, m_Q, m_Z) + \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_m (P - m_P) + \left( \frac{\partial V}{\partial Q} \right)_m (Q - m_Q) + \left( \frac{\partial V}{\partial Z} \right)_m (Z - m_Z) + \\ & + \frac{1}{2} (P - m_P)' \left( \frac{\partial^2 V}{\partial P^2} \right)_m (P - m_P) + \frac{1}{2} (Q - m_Q)' \left( \frac{\partial^2 V}{\partial Q^2} \right)_m (Q - m_Q) + \\ & + \frac{1}{2} (Z - m_Z)' \left( \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right)_m (Z - m_Z) + (P - m_P)' \left( \frac{\partial^2 V}{\partial P \partial Q} \right)_m (Q - m_Q) + \\ & + (P - m_P)' \left( \frac{\partial^2 V}{\partial P \partial Z} \right)_m (Z - m_Z) + (Q - m_Q)' \left( \frac{\partial^2 V}{\partial Q \partial Z} \right)_m (Z - m_Z) + \dots, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $m_P, m_Q, m_Z$  — векторы математических ожиданий активных, реактивных мощностей и сопротивлений ветвей в исходном режиме; индекс  $m$  означает, что в выражения частных производных вместо аргументов  $P, Q, Z$  подставлены их математические ожидания, штрихом сверху обозначена операция транспонирования.

Статистические характеристики возмущающих воздействий можно определить на основе решения задачи идентификации с использованием статистических характеристик перетоков мощности, частоты, напряжений в узлах, которые доступны измерению. Решение задачи идентификации достаточно сложно. На первом этапе исследований целесообразно задаваться статистическими характеристиками, определенными из априорных сведений. Системные испытания, проведенные в течение ряда последних лет в натурных условиях, показывают, что законы распределения возмущающих воздействий (изменений активной и реактивной мощностей в узлах, изменений сопротивлений ветвей системы) близки к нормальным, а среднеквадратичные отклонения пропорциональны установленной мощности в узлах [1]. Коэффициенты разложения выражения (3) наиболее эффективно могут быть определены методом планирования эксперимента.

При задании  $m_P, m_Q, m_Z$  и  $\sigma_P, \sigma_Q, \sigma_Z$ , используя выражение (3), находим соответствующие статистические характеристики случайной величины  $V$  [4, 5]:

$$\begin{aligned} m_V \cong & V(m_Z, m_P, m_Q) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial P^2} \right)_m K_P + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial Q^2} \right)_m K_Q + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right)_m K_Z + \\ & + \left( \frac{\partial^2 V}{\partial P \partial Q} \right)_m K_{PQ} + \left( \frac{\partial^2 V}{\partial P \partial Z} \right)_m K_{PZ} + \left( \frac{\partial^2 V}{\partial Q \partial Z} \right)_m K_{QZ}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $K_P, K_Q, K_Z, K_{PQ}, K_{PZ}, K_{QZ}$  — корреляционные матрицы векторов случайных величин  $P, Q, Z$ .

При этом дисперсия  $V$

$$\begin{aligned} \sigma_V^2 = & \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_m [D_P]_{\text{diag}} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)'_m + \frac{1}{2} \left( D'_P \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial P^2} \right]_m D_P \right)^2 + \\ & + \left( \frac{\partial V}{\partial Q} \right)_m [D_Q]_{\text{diag}} \left( \frac{\partial V}{\partial Q} \right)'_m + \frac{1}{2} \left( D'_Q \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial Q^2} \right]_m D_Q \right)^2 + \\ & + \left( \frac{\partial V}{\partial Z} \right)_m [D_Z]_{\text{diag}} \left( \frac{\partial V}{\partial Z} \right)'_m + \frac{1}{2} \left( D'_Z \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right]_m D_Z \right)^2, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $[D_P]_{\text{diag}}$ ,  $[D_Q]_{\text{diag}}$ ,  $[D_Z]_{\text{diag}}$  — диагональные матрицы,  $D_P$ ,  $D_Q$ ,  $D_Z$  — векторы-столбцы дисперсий  $P$ ,  $Q$ ,  $Z$ .

Последние члены в выражениях (4), (5) представляют собой уточнение линейной аппроксимации  $V$  за счет наличия в (3) квадратичных членов разложения.

В общем случае чем больше величина  $m_V$ , тем дальше находится система от границы устойчивости, однако использование лишь  $m_V$  недостаточно, для того чтобы судить о запасе устойчивости, ибо в ряде случаев незначительные изменения режимных параметров системы могут приводить к большому изменению величины  $V$ . При нормальном распределении изменчивость режимного состояния системы однозначно характеризуется  $\sigma_V$  и  $m_V$ . Поэтому полная оценка устойчивости может быть получена при использовании нормированной случайной величины [2]

$$\theta = \frac{V - m_V}{\sigma_V}, \quad (6)$$

зависящей как от параметров исходного режима, так и от интенсивности его изменений. Поскольку система выходит на границу устойчивости при  $V = 0$ , то предельное значение случайной величины (6)

$$\theta_{\text{пр}} = -\frac{m_V}{\sigma_V}. \quad (7)$$

Закон распределения случайной величины  $V$ , зависящей от большого числа факторов, достаточно хорошо может быть аппроксимирован нормальным, при этом вероятность нарушения устойчивости

$$p(V < 0) = 1 - \Phi \left( \frac{m_V}{\sigma_V} \right), \quad (8)$$

где  $\Phi$  — интегральная функция Лапласа нормального распределения.

При малых значениях вероятности  $p(V < 0)$  удобнее пользоваться их логарифмами, поэтому введем новую оценку

$$R(V < 0) = \log \left( a \frac{\sigma_V}{m_V} \right) \quad (9)$$

как коэффициент реальной опасности нарушения устойчивости.

Вероятность нарушения устойчивой работы зависит от того, в какой степени выполняется неравенство  $m_V - a \cdot \sigma_V \leq 0$ . Чем больше величина  $a$ , тем вероятность нарушения устойчивости меньше.

Достаточная степень устойчивости может служить основой для нормирования величины  $a$ . Если для конкретного режима работы, характеризующего  $m_V$  и  $\sigma_V$

$$\frac{m_V}{\sigma_V} > a, \quad (10)$$

то опасности нарушения устойчивости практически не существует и

$R(V < 0)$  меньше нуля. Для  $\frac{m_V}{\sigma_V} < a$  существует значимая вероятность нарушения устойчивости и  $R > 0$ .

В качестве нормативного значения  $a$  вероятностной оценки (9) предлагается использовать величину

$$a = \sqrt{2\pi e} \approx 4,12. \quad (11)$$

Некоторые основания для введения такого количественного показателя, базирующиеся на ретроспективном анализе вероятностных характеристик флуктуаций режимных параметров в условиях эксплуатации электрических систем, а также на сопоставлении с традиционными 20%-ными величинами запасов статической устойчивости для нормальных режимов систем, будут изложены ниже. Пока следует отметить, что при этом значении  $a$  величину коэффициента реальной опасности нарушения устойчивости, определяемую выражением (9), можно переписать в виде

$$R(V < 0) = \log \sqrt{2\pi e} \sigma_V - \log m_V = \mathcal{E}_V - \log m_V, \quad (12)$$

где  $\mathcal{E}_V = \log \sqrt{2\pi e} \sigma_V$  — есть величина энтропии обобщенного функционала системы (при нормальном законе распределения случайной величины  $V$ ).

Для практических расчетов энтропию можно вычислить дискретным способом, при этом число интервалов  $n = 10$ .

$$\mathcal{E}_V = - \sum_{i=1}^{n=10} S_i \log_{10} S_i, \quad (13)$$

где  $S_i = \frac{m_i}{m}$  — отношение числа значений случайной величины  $V$  в  $i$ -м интервале  $V_i + \Delta V$  к общему числу дискретных значений.

В табл. 1 приведены численные значения различных вероятностных оценок нарушения устойчивости в зависимости от величины  $\theta$ . При выполнении условия (10) и предлагаемом нормативе  $a = 4,12$  вероятность нарушения устойчивости меньше  $2 \cdot 10^{-5}$ , что свидетельствует о практической безопасности работы системы. Этот случай соответствует условию

$$\log m_V > \mathcal{E}_V, \quad (14)$$

которое можно принять в качестве критерия для адаптивного управления, обеспечивающего необходимую степень устойчивости исходного режима  $m_V$  при заданном разбросе режимных параметров и снижении энтропии  $\mathcal{E}_V$  (неопределенности) исходного состояния системы за счет искусственной компенсации влияния случайных возмущений на обобщенный функционал системы.

Таблица 1

Вероятностные оценки различных режимных зон

$\theta_{\text{пр}}$	Зоны							
	реальной вероятности нарушения устойчивости					безопасной работы		
	0	1	2	3	4	$a=4,12$	$a=4,5$	$a=4,9$
$P$	0,5	0,16	0,023	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$3,2 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-7}$
$R_V$	$\infty$	0,615	0,31	0,14	0,013	0	-0,04	-0,075
$\mathcal{E}_V$	$\infty$	1,615	1,31	1,14	1,013	1	0,96	0,925

Функционал  $V$ , как следует из выражения (2), зависит от множества режимных параметров. Поэтому в некоторых случаях его целесообразно определять через параметры режима, которые непосредственно регистрируются в процессе наблюдения за режимом энергообъединения. При анализе устойчивости крупных энергообъединений важнейшими исходными характеристиками являются колебания перетоков активной мощности по системообразующим связям.

Поэтому

$$V = V(P_1, \dots, P_i, \dots, P_k), \quad (15)$$

где  $P_1, \dots, P_k$  — перетоки активной мощности.

При аппроксимации  $V$  в виде полиномов не выше второго порядка имеем

$$V \cong V_0(m_{P_1}, \dots, m_{P_k}) + \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial V}{\partial P_i} \right)_m (P_i - m_{P_i}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial^2 V}{\partial P_i^2} \right)_m (P_i - m_{P_i})^2 + \sum_{i < j} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial P_i \partial P_j} \right)_m (P_i - m_{P_i})(P_j - m_{P_j}). \quad (16)$$

Коэффициенты аппроксимации выражения (16) находим точно так же, как и для выражения (3), хотя в этом случае процедура определения коэффициентов значительно сложнее. Однако статистические характеристики колебаний перетоков мощности определить проще, чем статистические характеристики колебаний нагрузок в силу их распределенности. При использовании экспериментальных данных для анализа устойчивости предпочтительнее выражение (16), чем (3). При предпроектных исследованиях устойчивости энергообъединений целесообразно использовать выражение (3), задавая априорными характеристиками изменчивости мощности в узлах [1]. Математическое ожидание определяется как

$$m_V = V(m_{P_1}, \dots, m_{P_k}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial^2 V}{\partial P_i^2} \right) D_{P_i} + \sum_{i < j} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial P_i \partial P_j} \right) K_{P_i P_j}, \quad (17)$$

где  $m_{P_i}, D_{P_i}, K_{P_i P_j}$  — математическое ожидание, дисперсия и корреляционный момент перетоков активной мощности.

Дисперсия величины  $V$  при использовании выражения (16) определяется более сложным выражением, чем (5), поскольку допущение о некоррелированности перетоков мощности не может быть принято. Наиболее простой путь вычисления  $\sigma_V^2$  состоит в статистической линейризации выражения (16)

$$V = m_V + \sum_{i=1}^k k_i (P_i - m_{P_i}), \quad (18)$$

где  $k_i = \left( \frac{\partial V}{\partial P_i} \right)_m$  — коэффициент статистической линейризации. Тогда

$$\sigma_V^2 = \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial V}{\partial P_i} \right)_m^2 D_{P_i} + \sum_{i < j} \frac{\partial V}{\partial P_i} \frac{\partial V}{\partial P_j} K_{P_i P_j}. \quad (19)$$

Эти характеристики являются исходными для определения вероятности устойчивости режима.

Рассмотрим теперь вопрос о целесообразном количестве значимых факторов при анализе устойчивости сложных энергосистем.

Режим энергообъединения можно характеризовать совокупностью значений перетоков мощности по межсистемным связям ( $P_1, P_2, \dots, P_k$ ), которые являются случайными величинами вследствие случайного характера изменений мощности в узлах.

Неопределенность режима можно характеризовать энтропией ансамбля случайных величин ( $P_1, P_2, \dots, P_k$ ), которую будем называть энтропией режима

$$\mathcal{E}(P_1, P_2, \dots, P_k) = \mathcal{E}(P_1) + \mathcal{E}(P_2/P_1) + \mathcal{E}(P_3/P_1, P_2) + \dots + \mathcal{E}(P_k/P_1, P_2, \dots, P_{k-1}),$$

где  $\mathcal{E}(P_i/P_1, \dots, P_{i-1})$  — условные энтропии. (20)  
Имеет место следующее неравенство [3].

$$\mathcal{E}(P_i) < \mathcal{E}(P_1, P_2, \dots, P_k) < \sum_{i=1}^k \mathcal{E}(P_i).$$

Энтропия режима, когда случайные колебания всех перетоков независимы друг от друга, равна сумме энтропий перетоков мощности. В случае полной корреляции энтропия режима равна энтропии одного из перетоков. Корреляционный анализ случайных процессов, характеризующих режим, должен предшествовать анализу устойчивости при конечных возмущениях, поскольку позволит значительно упростить решение задачи за счет учета минимально необходимых факторов.

Рассмотрим в качестве примера анализ статистических характеристик межсистемных и внутрисистемных связей сложного энергообъединения, состоящего из ОЭС Центра, Средней Волги и Урала. ОЭС Средней Волги в данном случае является транзитом между мощными энергообъединениями ОЭС Центра и ОЭС Урала. В качестве информации использовались данные, представленные нам ОДУ Средней Волги, полученные с помощью ОИЖ АСДУ, реализованной на ЭВМ М-6000. Данные содержали результаты синхронной регистрации частоты ОЭС СВ и шести основных перетоков активной мощности по сети 500 кВ (см. рисунок).

Как показал анализ статистических характеристик перетоков мощности по основным внутрисистемным связям ОЭС Средней Волги и связям этого объединения с ОЭС Центра, величины перетоков после фильтрации нестационарных составляющих, на которые влияет плановое изменение режима, слабо зависят от потокораспределения в системе (значения  $\sigma_P$  расположены по главной диагонали табл. 2).

По вычисленным максимальным коэффициентам взаимной корреляции между отдельными перетоками определен путь распространения возмущения по энергообъединению. Причем этот путь зависит от режима работы объединения. Так, если для 12.00 (время местное) возмущение распространялось только по определенному пути (линиям 1-2-4-5), то в 17.00 возмущение проходило по всем линиям ОЭС Средней Волги.

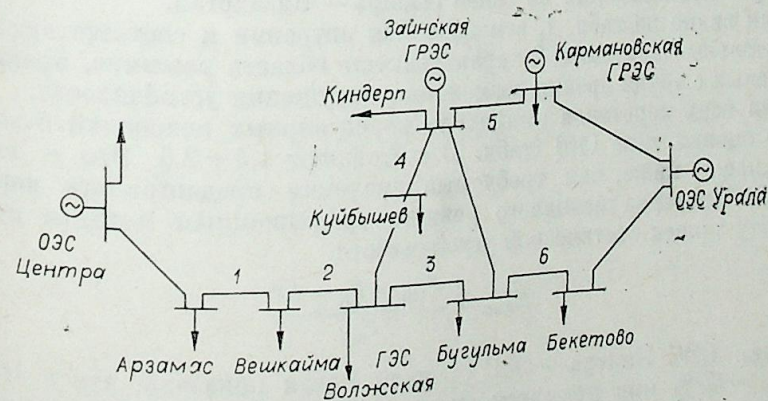


Схема основной сети ОЭС Средней Волги.

Таблица 2

Среднеквадратические значения перетоков активной мощности и коэффициенты корреляции перетоков ОЭС Средней Волги

Переток	Среднеквадратические значения перетоков активной мощности и коэффициенты корреляции перетоков ОЭС Средней Волги					
	1	2	3	4	5	6
1	138 127	0,805 0,96	-0,433 -0,97	0,506 0,97	-0,516 -0,96	-0,17 -0,96
2		93 138	-0,598 -0,98	0,81 0,99	-0,76 -0,98	-0,41 -0,97
3			41 78	-0,7 -0,99	0,64 0,98	0,3 -0,98
4				29 54	-0,89 -0,98	-0,5 -0,98
5					32 56	0,46 0,97
6						49 63

Примечание. По главной диагонали расположены среднеквадратические значения перетоков (в числителе для 12,00, в знаменателе для 17,00 местного времени). Во всех остальных клетках расположены величины коэффициентов взаимной корреляции.

Это хорошо видно из табл. 2, которая содержит значения коэффициентов взаимной корреляции между перетоками по связям для 12,00 (в числителе) и 17,00 (в знаменателе). К 17,00 нерегулярные колебания проходят транзитом по обоим путям (коэффициенты взаимной корреляции близки к единице). При этом взаимные корреляционные функции близки к автокорреляционным функциям. Следовательно, между нерегулярными колебаниями перетоков, определяющими путь распространения возмущения, существует связь, близкая к линейной. Подобное положение тем более имеет место для энергосистем цепочечной структуры. Это позволяет рассматривать  $V$  как функцию одного из перетоков мощности, принимая  $\Delta V = \Delta P + \log \sqrt{2\pi e} \frac{\partial V}{\partial P_1}$ .

Нерегулярные колебания перетоков на участках стационарности либо после фильтрации с  $T_{\phi} = 5$  мин имеют закон распределения, близкий к нормальному с энтропией, подсчитываемой по выражению (13).  $\Delta P = 0,75$  дит, а на часовых реализациях с учетом нефильтрованного режимного тренда  $\Delta P = 0,83 \div 0,91$  дит. Следует заметить, что подобные же значения энтропии наблюдались и при статистическом анализе колебаний перетоков мощности по связи Сибирь — Казахстан.

Как видно из табл. 1, эти значения энтропии и соответствующие им отрицательные значения  $R$  характеризуют область режимов, практически безопасных с точки зрения возможного нарушения устойчивости.

Для всех перетоков амплитуда нерегулярных колебаний была такова, что оценки типа (10) (табл. 3) составляют  $1,4 \div 2,5$ . Это с достаточным запасом ниже, чем требуемые значения предлагаемого норматива  $a = 4,12$ . Проверка исходного режима традиционным методом по коэффициенту запаса статической устойчивости

$$K_{\text{зап}} = \frac{P_{\text{пр}} - P_0 - \Delta P}{P_{\text{пр}}} \quad (21)$$

в сечении ОЭС Центра — ОЭС Средней Волги показала, что в этом случае  $K_{\text{зап}} = 62\%$  при принятом пути утяжеления: увеличение транзитного перетока из ОЭС Урала в ОЭС Центра.

Таблица 3  
Статистические характеристики перетоков по основным связям ОЭС Средней Волги

Переток	$\sigma_p$ , мВт		$\Delta P$	$\theta$	Переток	$\sigma_p$ , мВт		$\Delta P$	$\theta$	
	Нефильтров	Фильтров				Нефильтров	Фильтров			
										1
2		205	138	0,895	2,4	5	77	56	0,863	1,35
3		117	78	0,939	2,3	6	90	63	0,913	2,0

Сравнение рабочих значений перетоков, назначаемых по условию  $K_{\text{зап}} \geq 0,17$  и по предлагаемой оценке  $\frac{m_V}{\sigma_V} \geq a$ , показывает, что в обоих случаях они практически равны и составляют  $P_0 = (0,41 \div 0,43) \cdot P_{\text{пр}}$ .

## ВЫВОДЫ

1. Вероятностная оценка в виде коэффициента реальной опасности нарушения устойчивости позволяет заранее выделить зону режимов, в которой нарушение статической устойчивости системы при случайных флуктуациях исходных условий практически исключено.
2. Использование норматива предельной вероятностной оценки  $a = 4,12$  позволяет непосредственно назначать максимальную величину рабочего перетока по линиям электропередач.

Сибирский научно-исследовательский институт энергетики,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
4/III 1981

## ЛИТЕРАТУРА

1. Испытания параллельной работы ОЭС Сибири с ОЭС Казахстана в составе ЕЭС СССР. — Электрические станции, 1977, № 9.
2. Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1973.
3. Ключев И. И. Информационные основы передачи сообщений. М.: Сов. радио, 1966.
4. Абезгауз Г. Г., Тронь А. П. и др. Справочник по вероятностным расчетам. М.: Изд-во Мин-ва обороны СССР, 1966.
5. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1964.

УДК 621.311.00.24 : 681.3

В. З. МАНУСОВ, Ю. Н. КУЧЕРОВ, О. Н. ШЕПИЛОВ

РАСЧЕТ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ РЕЖИМОВ РАБОТЫ  
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВЕРОЯТНОСТНЫМИ МЕТОДАМИ

Анализ режимов работы и задачи управления современными электроэнергетическими системами (ЭЭС) во многих случаях требуют проведения исследований с учетом неизбежной погрешности исходной информации о внешних воздействиях и характеристиках системы. Применение в этих условиях детерминистических методов расчета становится не вполне корректным. Необходимо создание эффективных математических моделей управления, учитывающих случайный характер наблюдений, наличие зоны неопределенности получаемых решений (особенно при перспективном планировании режимов ЭЭС). Вероятностные расчеты могут быть проведены различными методами, из которых в настоящее время наиболее широко используются метод статистических испытаний и метод статистической линеаризации [1, 2].

В методе статистической линеаризации нелинейная модель исследуемой системы аппроксимируется линейной моделью для вторых моментов. При этом предполагается, что погрешность исходной информации распределена по нормальному закону и вероятностное исследование можно провести в рамках корреляционного анализа, ограничиваясь определением двух первых моментов искомых режимных параметров.

В настоящей работе рассматриваются возможные пути получения вектора математических ожиданий (МО) и матриц корреляционных моментов (МКМ) интегральных параметров режимов электрических систем при учете вариации исходной информации о нагрузках узлов для различных форм записи уравнений состояния нормального режима системы уравнений узловых напряжений (УУН). Предполагается, что расчеты интегральных статистических характеристик нагрузок за интервал времени не всегда приводят к нормальному распределению, например в случае учета тренда математического ожидания. Для решения данной задачи предлагается использовать метод моментов (непосредственного осреднения), а также аппроксимацию нелинейных функций параметров режима полиномами второй степени.

Одним из признаков классификации уравнений состояния электрической системы является способ представления нагрузок узлов в схемах замещения. Рассмотрим три формы записи УУН: при задании нагрузок вектором задающих токов узлов  $\mathbf{j}$ ; вектором мощностей  $\mathbf{S}$ ; вектором проводимостей  $\mathbf{Y}_n$ .

Представление нагрузки задающим током. Системы УУН имеет вид

$$\dot{Y}U_{\Delta} = \mathbf{j} \quad (4)$$

и характеризует линейное преобразование случайного вектора задающих токов в вектор узловых напряжений, что позволяет просто определить

вектор МО ( $\dot{U}$ ) и МКМ ( $K_U$ ) узловых напряжений по следующим уравнениям:

$$\dot{Y}\dot{U}_{\Delta} = \mathbf{j},$$

$$K_J = M[\dot{J}\dot{J}_t] = M[(\mathbf{J} - \bar{\mathbf{J}})(\mathbf{J} - \bar{\mathbf{J}})_t] = \dot{Y}M[(\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}}) \times$$

$$\times (\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}})_t] \dot{Y}_t = \dot{Y}K_U \dot{Y}_t, \quad (3)$$

где  $\dot{Y}$  — матрица узловых проводимостей;  $\dot{U}_{\Delta}$  — вектор узловых напряжений относительно базисного напряжения;  $\dot{J}$  — вектор задающих токов;  $K_J$  — МКМ задающих токов;  $t$  — знак транспонирования.

Достоинство такой модели — ее линейность, что предельно упрощает все преобразования случайных величин. Основным недостатком является значительная степень приближенности.

Представление мощностью нагрузки. Данный способ записи УУН наиболее часто встречается в практике расчетов установившихся режимов. При этом уравнения состояния нелинейны и могут быть записаны в общем виде:

$$\dot{S} = f(\dot{U}, \dot{Y}), \quad (4)$$

где  $\dot{S} = \{P, Q\}$  — вектор нагрузочных и генерирующих мощностей узлов размерностью  $2n$ ;  $\dot{U} = \{U', U''\}$  — вектор вещественных и мнимых составляющих комплексов напряжений размерностью  $2n$ ;  $\dot{Y} = \{g_{ki}, b_{ki}\}$  — вектор проводимостей ветвей размерностью  $2m$   $n$  — число узлов ЭЭС;  $m$  — число ветвей ЭЭС.

После статистической линеаризации уравнений (4) математическое ожидание и МКМ напряжений вычисляются итерационным решением следующих уравнений [2]:

$$\dot{S} = f(\bar{U}, \dot{Y});$$

$$K_S = \mathbf{J}K_U \mathbf{J}_t; K_U = \mathbf{J}^{-1}K_S \mathbf{J}_t^{-1}, \quad (6)$$

где  $\mathbf{J} = \partial \dot{S} / \partial \dot{U}$  — матрица частных производных вектора мощностей по компонентам вектора  $\dot{U}$  размерностью  $2n \times 2n$ ;  $K_U, K_S$  — квадратные МКМ векторов  $\dot{U}$  и  $\dot{S}$  размерностью  $2n \times 2n$ . Следует отметить, что, решая уравнения (5), (6), можно учесть нелинейный характер уравнения (4) лишь для МО напряжений. Тогда уравнение (5) имеет вид

$$\dot{S} = f(\bar{U}, K_U, \dot{Y}) \quad (7)$$

или для  $k$ -го узла

$$\bar{S}_k = \sum_{i=1, i \neq k}^n \dot{Y}_{ki} (\bar{U}_i \bar{U}_k + \sigma_{U_k}^2) - \sum_{i=1, i \neq k}^{n+1} \dot{Y}_{ki} (\bar{U}_i \bar{U}_k + K_{U_{i,k}}), \quad (8)$$

где  $\sigma_{U_k}^2$  — дисперсия модуля напряжения  $k$ -го узла;  $K_{U_{i,k}}$  — корреляционный момент комплексов напряжений  $k$ -го и  $i$ -го узлов. Уравнения (6) отражают линейное преобразование при расчете  $K_U$  и могут привести к погрешности при определении интегральных характеристик режима по названным причинам. Чтобы получить точное решение для вторых моментов расчетных параметров и в силу нелинейности уравнения (4) второй степени можно его аппроксимировать полиномом второй степени [3]. Тогда уравнение для вторых моментов запишется точно и примет вид

$$K_S = \mathbf{J}K_U \mathbf{J}_t + \mathbf{H}K_{U^2} \mathbf{H}_t, \text{ откуда } K_U = \mathbf{J}^{-1} (K_S - \mathbf{H}K_{U^2} \mathbf{H}_t) \mathbf{J}_t^{-1}, \quad (9)$$

где  $H$  — прямоугольная матрица размерностью  $2n \times 4(m+n)$ , элементами которой служат вторые производные вектора  $\dot{S}$  по компонентам вектора  $U - H = \partial^2 \dot{S} / \partial \dot{U} \partial \dot{U}_j$ ;  $K_{U^2}$  — матрица размерностью  $4(n+m) \times 4(n+m)$ , элементами которой являются произведения ковариаций напряжений (см. Приложение).

**Представление нагрузки проводимостью.** Часто используют задание нагрузок в узлах постоянными шунтами, величина которых определяется (на основании исходных мощностей нагрузок) по среднономинальным, либо по заранее заданным напряжениям в узлах. УУН имеет вид для  $k$ -го узла

$$(\dot{y}_{kk} + \dot{y}_n) \dot{U}_k - \sum_{i=1, i \neq k}^{n+1} \dot{y}_{ki} \dot{U}_i = 0, \quad (10)$$

где  $\dot{y}_n = \hat{S}_k / \dot{U}_k^2$  — проводимость нагрузки;  $\dot{y}_{kk}$  — собственная проводимость  $k$ -го узла. В отличие от уравнения (4), имеем систему неявных функций

$$\varphi(\dot{U}, \dot{Z}) = 0, \quad (11)$$

где  $\dot{U} = \{U', U''\}$  — вектор напряжений;  $\dot{Z} = \{Z_1, Z_2\}$  — вектор исходных данных, включающий два вектора:  $Z_1 = \{g_{hi}, b_{hi}\}$  — вектор проводимостей ветвей,  $Z_2 = \{g_n, b_n\}$  — вектор шунтов в узлах.

Для определения МО напряжений необходимо итерационное решение системы (11). Для  $k$ -го узла можно записать

$$(\dot{y}_{kk} + \bar{y}_n) \bar{U}_k - \sum_{i=1, i \neq k}^{n+1} \dot{y}_{ki} \bar{U}_i = 0. \quad (12)$$

Уравнение для вторых моментов получим путем линеаризации (11) по переменным  $\dot{U}$  и  $\dot{y}_n$  в окрестностях их МО. В результате для централизованных величин уравнение примет вид

$$\overset{\circ}{\varphi}(\dot{U}, \dot{Z}) = J^I \dot{U} + W \dot{Z}_2 = 0, \quad (13)$$

где  $J^I = \partial \varphi(\bar{U}, Z) / \partial U$ ,  $W = \partial \varphi(\bar{U}, Z) / \partial Z_2$  — матрицы частных производных функции (11) по компонентам случайных векторов  $U$  и  $Z_2$ . Используя преобразования, аналогичные (3), найдем МКМ узловых напряжений.

$$WK_Y W_t = J^I K_U J_t^I, \text{ откуда } K_U = (J^I)^{-1} WK_Y W_t (J^I)^{-1}, \quad (14)$$

где  $K_Y$  — МКМ шунтов нагрузок в узлах.

При случайном характере нагрузки в узлах элементы матрицы  $K_Y$  могут быть либо априорно заданы, либо рассчитаны по известным случайным мощностям нагрузок и напряжениям  $G_n = \varphi(P, U) = P/U^2$ ;  $B_n = \Theta(Q, U) = Q/U^2$ . Расчет числовых характеристик этих нелинейных функций можно провести методом линеаризации по Тейлору с учетом квадратичных членов ряда. При этом МО и дисперсия, например активной проводимости нагрузки, будут определяться следующими выражениями [4]:

$$\bar{G}_n = \varphi(\bar{P}, \bar{U}) + 1/2 \varphi_P''(\bar{P}, \bar{U}) D_P + 1/2 \varphi_U''(\bar{P}, \bar{U}) D_U, \quad (15)$$

$$D_{Gn} = (\varphi_P'(\bar{P}, \bar{U}))^2 D_P + (\varphi_U'(\bar{P}, \bar{U}))^2 D_U + 1/2 (\varphi_P''(\bar{P}, U))^2 D_P^2 + 1/2 (\varphi_U''(\bar{P}, \bar{U}))^2 D_U^2 + (\varphi_{P,U}''(\bar{P}, \bar{U}))^2 D_P D_U, \quad (16)$$

где

$$\varphi(\bar{P}, \bar{U}) = \bar{P}/\bar{U}^2; \varphi_P'(\bar{P}, \bar{U}) = \left(\frac{P}{U^2}\right)'_P = \frac{1}{\bar{U}^2};$$

$$\varphi_U'(P, U) = \left(\frac{P}{U^2}\right)'_U = -\frac{2\bar{P}}{\bar{U}^3}; \varphi_P''(\bar{P}, \bar{U}) = 0;$$

$$\varphi_U''(P, U) = \left(\frac{P}{U^2}\right)''_U = \frac{6\bar{P}}{\bar{U}^4}; \varphi_{P,U}''(\bar{P}, \bar{U}) = \left(\frac{P}{U^2}\right)''_{P,U} = -\frac{2}{\bar{U}^3},$$

здесь  $D_P, D_U$  — дисперсии активной мощности и модуля напряжения узла.

Аналогично можно найти числовые характеристики реактивных проводимостей нагрузки. Зависимость этих параметров от числовых характеристик напряжений узлов предполагает итерационную процедуру их расчета совместно с уравнениями (12) и (14).

**Интегральные числовые характеристики потоков мощности** по ветвям находятся по МО и МКМ напряжений и известным параметрам схем замещения сети. По рассчитанным числовым характеристикам потоков мощности можно выявить наиболее загруженные участки сети, определить возможные диапазоны изменения контролируемых параметров, оценить среднее время выхода за ограничения на рассматриваемом интервале, т. е. получить ту дополнительную информацию, которая появляется в результате применения вероятностных моделей и методов. Для решения данной задачи предлагается использовать метод моментов и метод линеаризации с уточнением, что позволит установить точные соотношения для расчета интегральных числовых характеристик потоков мощности.

Уравнение для потока, например активной мощности, имеет вид

$$P_{ij} = G((U_i')^2 + (U_i'')^2 - U_i' U_j' - U_i'' U_j'') + B(U_i' U_j'' - U_i'' U_j'), \quad (17)$$

где  $P_{ij}$  — поток от узла  $i$ ;  $U_i', U_i'', U_j', U_j''$  — составляющие комплексов напряжений в узлах, ограничивающих ветвь  $ij$ ;  $G, B$  — составляющие комплекса проводимости линии.

Применяя оператор математического ожидания к обеим частям (17), получим выражение ожидаемого значения потока активной мощности

$$\bar{P} = G((\bar{U}_i')^2 + (U_i'')^2 + D[U_i'] + D[U_i''] - \bar{U}_i' \bar{U}_j'' - \bar{U}_i'' \bar{U}_j' - K[U_i', U_j'] - K[U_i'', U_j''] + B(\bar{U}_j' \bar{U}_j'' - \bar{U}_i'' \bar{U}_j' + K[U_i', U_j'] - K[U_i'', U_j''])) \quad (18)$$

Дисперсию потока определяем как дисперсию суммы случайных величин

$$D_{Pij} = G^2 (D[(U_i')^2] + D[(U_i'')^2] + D[U_i' U_j'] + D[U_i'' U_j'']) + B^2 (D[U_i' U_j'] + D[U_i'' U_j'']) + 2G^2 (K[(U_i')^2, (U_j'')^2] - K[(U_i')^2, U_i' U_j'] - K[(U_i'')^2, U_i'' U_j''] - K[(U_i')^2, U_i'' U_j''] - K[U_i' U_j', U_i'' U_j'']) + 2B^2 K[U_i' U_j', U_i'' U_j''] + 2GB (K[(U_i')^2, U_i'' U_j''] - K[(U_i'')^2, U_i' U_j'] - K[(U_i')^2, U_i'' U_j''] - K[U_i' U_j', U_i'' U_j'']) + K[U_i' U_j', U_i'' U_j''], \quad (19)$$

где  $D[\dots]$  — дисперсия, а  $K[\dots]$  — корреляционный момент случайной переменной.

Для определения моментов 4-го порядка, имеющих в (19), можно воспользоваться дифференцированием характеристических функций со-

ответствующих распределений или семинвариантами.

$$\begin{aligned}
 M[X_1 X_2] &= \bar{X}_1 \bar{X}_2 + K[X_1 X_2]; \\
 M[X_1 X_2 X_3 X_4] &= \bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 \bar{X}_4 + \bar{X}_3 \bar{X}_4 K_{12} + \bar{X}_3 \bar{X}_1 K_{42} + \\
 &+ \bar{X}_3 \bar{X}_2 K_{41} + \bar{X}_4 \bar{X}_1 K_{32} + \bar{X}_4 \bar{X}_2 K_{31} + \bar{X}_1 \bar{X}_2 K_{34} + \\
 &+ K_{12} K_{34} + K_{13} K_{42} + K_{23} K_{41}; \\
 K[X_1 X_2, X_3 X_4] &= M[X_1 X_2 X_3 X_4] - M[X_1 X_2] M[X_3 X_4].
 \end{aligned}
 \quad (20)$$

Дисперсии потоков мощности являются диагональными элементами МКМ потоков по линиям. Для получения полной МКМ воспользуемся разложением исходной функции в ряд Тейлора с учетом вторых членов

$$\dot{S}_l = \varphi(\dot{U}, \dot{Y}), \quad (21)$$

где  $S_l = \{P_i, Q_i, P_j, Q_j\}$  — вектор функции потоков активной и реактивной мощности начала и конца ветви;  $\dot{Y} = \{g, b\}$  — вектор активных и реактивных проводимостей ветвей. Разложим (21) в квадратичный ряд Тейлора

$$S_l = \bar{S}_l + J_l \dot{U} + \frac{1}{2} H_l \dot{U}^2, \quad (22)$$

где  $\bar{S}_l = \varphi(\bar{U}, Y)$ ;  $J_l$  — матрица первых производных,  $H_l$  — матрица вторых производных,  $\dot{U}^2 = \dot{U} \dot{U}^t$  — произведение центрированных значений векторов напряжений. Теперь найдем математическое ожидание функции потоков

$$M[S_l] = \varphi(\bar{U}, \dot{Y}) + \frac{1}{2} H_l K_{U_l}, \quad (23)$$

где  $K_{U_l} = M[\dot{U} \dot{U}^t]$  — корреляционная матрица вектора  $U$ . Последнее слагаемое правой части (23) производит уточнение МО искомых переменных, которые при линейризации определяются только значением функции в точке оценивания  $\varphi(\bar{U}, \dot{Y})$ . Так как ряд (22) в силу существующей нелинейности функции (21) (степень переменных не выше второй) является неусеченным, что служит точной аппроксимацией исследуемой функции, то следует ожидать получения точных соотношений и для ее моментов. Действительно, элементы матрицы  $H_l$  равны удвоенным значениям проводимостей ветви, например  $\partial^2 P / \partial U'^2 = 2g$ ,  $\partial^2 P / \partial U' \partial U'' = b$ , а диагональные элементы матрицы  $K_U$  есть дисперсии и недиагональные — ковариации напряжений, то результатом добавления к  $\varphi(\bar{U}, \dot{Y})$  будут члены вида  $g \cdot D_{U_i}$ ,  $b K_{U_{ij}}$  и т. д., которые равны элементам уравнения (18), учитывающим нелинейность. Таким образом, метод моментов и метод линейризации, основанный на представлении функции неусеченным рядом, позволяют установить точные соотношения для вычисления математических ожиданий потоков мощности.

Аналогичный результат можно получить и для вторых моментов. Для этого, используя ряд (23), найдем выражение для МКМ потоков мощности в предположении независимости векторов  $\dot{U}$  и  $\dot{Y}$ , а также с учетом того, что центральные моменты нечетного порядка нормально распределенных величин равны нулю

$$K_{S_l} = M \left[ \left( J_l \dot{U} + \frac{1}{2} H_l \dot{U}^2 \right) \left( J_l \dot{U} + \frac{1}{2} H_l \dot{U}^2 \right)^t \right] = J_l K_U J_{l^t} + \frac{1}{4} H_l K_{U^2} H_{l^t}, \quad (24)$$

где  $K_{U^2}$  — квадратная матрица, элементы которой равны [7]  $M_{ijk} = K_{U_{ij}} K_{U_{jk}} + K_{U_{ji}} K_{U_{jk}}$ .

Рассмотренные методы вероятностного анализа могут быть использованы также для расчета интегральных числовых характеристик потерь мощности, пределов передаваемой мощности по условиям статической устойчивости и др.

Из результатов исследований видно, что при большой нелинейности УУН или большой вариации исходных случайных параметров неучет нелинейности преобразования приводит к погрешности, величина которой может достигать 5—10% для МО и 50—100% для дисперсий искомых интегральных числовых характеристик (см. Приложение).

## ВЫВОДЫ

1. Мультипликативный тип нелинейности функций параметров установившегося режима позволяет установить точные аналитические соотношения для расчета интегральных числовых характеристик. Для этого предлагается использовать метод моментов и метод линейризации, основанный на разложении нелинейной функции в неусеченный ряд Тейлора.
2. Предложен аналитический метод расчета числовых характеристик проводимостей нагрузок, что позволяет учесть вариацию нагрузки при ее параметрическом представлении.
3. Дана оценка величины погрешности, вносимой в расчет интегральных числовых характеристик методом статистической линейризации.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

В качестве примера рассмотрим схему, изображенную на рисунке, и предельный режим, при котором нелинейность УУН становится сильной.

Для расчета числовых характеристик напряжений в узлах необходимо решить относительно  $K_U$  нелинейное уравнение вида

$$K_S = J K_U J^t + H K_{U^2} H^t,$$

где  $K_S$  — матрица заданных дисперсий узловых мощностей

$$K_S = \begin{bmatrix} D_{S_1} & 0 \\ 0 & D_{S_2} \end{bmatrix};$$

$J$  — квадратная матрица первых производных

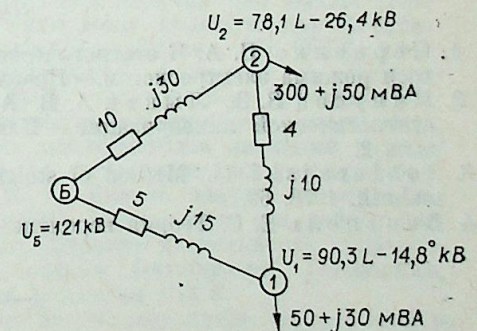
$$J = \begin{bmatrix} (\dot{y}_{11} \bar{U}_1 + \dot{y}_{11} \hat{U}_1 - \dot{y}_{12} \bar{U}_2 - \dot{y}_{16} U_6) (-\bar{U}_2 \dot{y}_{12}) \\ (-\dot{y}_{21} \bar{U}_2) (-\bar{U}_1 \dot{y}_{21} + \dot{y}_{22} \bar{U}_2 + \dot{y}_{22} \hat{U}_2 - y_{26} U_6) \end{bmatrix};$$

$H$  — прямоугольная матрица вторых производных

$$H = \begin{bmatrix} \dot{y}_{11} & 0 & -\dot{y}_{12} \\ 0 & \dot{y}_{22} & -\dot{y}_{21} \end{bmatrix};$$

$K_{U^2}$  — квадратная матрица, получаемая из следующего соотношения:

$$K_{U^2} = M[\dot{U}^2 \dot{U}^t] - M[\dot{U}^2] M[\dot{U}^2]^t,$$



Вид области распределения параметров  $R$  и  $X$  для равномерного закона.

Вероятностный расчет

Параметр	Ед. измерения	Детерминир. расчет	Вероятностный расчет					
			линейная аппроксимация УУН			нелинейная аппроксимация УУН		
			диапазон вариации нагрузок в узлах, %					
		2	5	7	2	5	7	
$\bar{U}_1$	кВ	90,3	90,0	87,6	83,9	89,9	85,1	80,1
$\sigma_{U_1}$	кВ	0	2,01	4,95	6,95	2,1	6,1	12,1
$\bar{U}_2$	кВ	78,1	77,6	74,2	69,0	77,5	70,7	63,8
$\sigma_{U_2}$	кВ	0	3,2	7,1	9,2	3,3	6,8	16,2
$P_{12}$	мВт	150,3	150,4	150,5	150,8	150,4	150,6	146,8
$\sigma_{P_{12}}$	мВт	0	2,6	6,1	10,3	2,65	4,3	7,1

Примечание.  $\bar{P}_{12}$  — МО потока активной мощности в ветви 1—2;  $\sigma_{U_1}$ ,  $\sigma_{U_2}$ ,  $\sigma_{P_{12}}$  — среднеквадратические отклонения соответствующих параметров.

где  $\vec{U}^2$  — вектор квадратов централизованных случайных величин

$$\vec{U}^2 = \begin{pmatrix} \bar{U}_1^2 \\ \bar{U}_2^2 \\ \bar{U}_1 \bar{U}_2 \end{pmatrix};$$

$K_U$  — квадратная матрица, получаемая путем перемножения централизованных векторов напряжений.

На первой итерации вероятностного расчета за математические ожидания напряжений принимаются напряжения, полученные из обычного расчета режима. Затем рассчитываются элементы  $K_U$  без учета нелинейности уравнения по выражению  $K_U = J^{-1} K_S J_t^{-1}$ . На последующих итерациях элементы  $K_U$  рассчитываются по полному выражению  $K_U = J^{-1} (K_S - H K_{U^2} H_t) J_t^{-1}$ , где член  $H K_{U^2} H_t$  находится по результатам предыдущей итерации. После нахождения интегральных числовых характеристик напряжений можно рассчитать числовые характеристики потоков мощности по выражениям, полученным аналогично (18), (19).

В таблице приведены результаты расчетов, полученные детерминистическим методом, методом статистической линеаризации, точным методом с учетом нелинейности УУН при различной погрешности (вариации) исходной информации.

Новосибирский электротехнический институт

Поступила в редакцию  
27/XII 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Черненко П. А. К статистическому анализу результатов расчета установившегося режима электросистем. — Проблемы техн. электродинамики, 1973, вып. 42.
2. Манусов В. З., Лыкин А. В. Анализ режимов электрических систем методом статистической линеаризации. — Изв. СО АН СССР, 1974, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.
3. Sobierajski M. Method of stochastic load flow calculation. — Archiv fur electrotechnik, 1978, 60.
4. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М.: Физматгиз, 1958.

#### К ШЕСТИДЕСЯТИЛЕТИЮ АКАДЕМИКА Н. Н. ЯНЕНКО

22 мая 1981 г. исполнилось 60 лет видному советскому математику и механику — Николаю Николаевичу Яненко.

Научные интересы Н. Н. Яненко в области фундаментальных исследований охватывают многомерную дифференциальную геометрию, математическую физику, газовую динамику, теорию разностных схем, модели механики сплошной среды.

Им выполнен цикл работ по теории вложения римановых метрик в евклидово-гомерного евклидова пространства, выяснена связь между метрическими инвариантами поверхности и понятиями проективной геометрии.

Первым в мире Н. Н. Яненко провел исследования асимптотических свойств и приближенных решений обобщенной модели Томаса — Ферми, которые легли в основу построения интерполяционных формул уравнения состояния вещества в широком диапазоне давлений и температур. За цикл этих исследований, выполненных в коллективе, возглавляемом А. Н. Тихоновым, Николай Николаевич был удостоен Государственной премии в 1953 г.

Н. Н. Яненко принадлежат глубокие аналитические исследования нелинейных систем уравнений с частными производными, а также систем уравнений механики сплошной среды. Созданный им метод дифференциальных связей позволяет находить широкие классы аналитических решений уравнений газовой динамики и получил заслуженное признание.

Одно из центральных мест в научной деятельности Николая Николаевича занимают вопросы вычислительной математики и ее приложений. Впервые в стране он предложил, обосновал и применил для различных классов уравнений в частных производных метод расщепления разностного многомерного оператора (метод дробных шагов). Этот метод является мощным универсальным средством решения многомерных задач математической физики и явился основой для разработанных Н. Н. Яненко совместно с его учениками алгоритмов, которые легли в основу цикла программ для расчета задач государственной важности. За эти работы Н. Н. Яненко был удостоен Государственной премии в 1972 г.

Н. Н. Яненко является одним из инициаторов разработки методологической основы, а затем и реального воплощения пакетов программ для решения задач науки и техники. В последние годы он уделяет большое внимание разработке моделей механики сплошной среды, описывающих сложные физические явления (турбулентность, многофазность и т. д.).

Н. Н. Яненко — автор около 200 работ, в том числе семи монографий. Исследование «Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики» издано также на немецком, французском и английском языках.

Большой энтузиаст внедрения численного моделирования во все области науки и техники. Н. Н. Яненко руководит работой четырех постоянно действующих Всесоюзных семинаров по численным и аналитическим методам механики сплошной среды, является ответственным редактором сборника «Численные методы механики сплошной среды», членом редколлегии трех международных журналов.

Н. Н. Яненко — руководитель крупного научного коллектива — Института теоретической и прикладной механики Сибирского отделения АН СССР, в котором ведутся фундаментальные и прикладные исследования и получен ряд весьма важных для практики результатов. Николай Николаевич ведет большую научно-организационную работу. Он член Президиума Сибирского отделения АН СССР, член ряда специализированных советов. Много сил и внимания отдает Н. Н. Яненко педагогической работе. Он воспитал большое число талантливых специалистов, докторов и кандидатов наук, с успехом продолжающих традиции его школы. Николай Николаевич возглавляет кафедры вычислительных методов механики сплошной среды и физической кинетики в Новосибирском государственном университете.

Участник Великой Отечественной войны, Н. Н. Яненко награжден орденом Красной Звезды и медалями «За отвагу», «За оборону Ленинграда», «За победу над Германией в Великой Отечественной войне». Его трудовая деятельность получила столь же высокое признание — он награжден орденом Октябрьской революции, тремя орденами Трудового Красного Знамени и медалями СССР.

Николай Николаевич Яненко встречает свое шестидесятилетие полный сил и новых творческих идей. Пожелаем ему доброго здоровья и новых успехов в его деятельности на благо Родины.

СПИСОК СТАТЕЙ, ОПУБЛИКОВАННЫХ  
В СЕРИИ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК В 1981 Г.

Материалы VIII Всесоюзной конференции  
по генераторам низкотемпературной плазмы

- Ахметзянов И. Д., Романенко И. И. К оценке энергии излучения импульсной дуги в газах высокого давления.— № 3, вып. 1.
- Бакшт Ф. Г., Руткин О. Г. Теория обтекания плоского электрода дозвуковым потоком плазмы.— № 3, вып. 1.
- Ивлютин А. И. Теплообмен, гидравлическое сопротивление и трение в каналах линейных ЭДН.— № 3, вып. 1.
- Камаев Ю. Н., Севастьянов П. В. Некоторые закономерности тепломассообмена дуги постоянного тока при наложении гармонических колебаний.— № 3, вып. 1.
- Климонтович Ю. Л., Сухин С. А. Расчет штарковских профилей спектральных линий методом кинетической теории плазмы.— № 3, вып. 1.
- Киселев Ю. Я., Процук И. А. Повышение устойчивости пламенных дуг регулированием вольт-амперных характеристик источника питания.— № 3, вып. 1.
- Ковотоп В. А., Кишалова Е. В., Лебсак Е. В. Исследование влияния давления и силы тока на длину продольно обдуваемой дуги.— № 3, вып. 1.
- Кузьмин А. К., Пахомов Е. П. Пролетная модель влияния расхода газа на развитие винтовой формы дуги.— № 3, вып. 1.
- Кучеров Я. Р., Пустогаров А. В., Халбошин А. П., Зарайский О. Д. Структура циркуляционного катода плазматрона.— № 3, вып. 1.
- Невровский В. А. Динамика развития тепловой неустойчивости анода при электрическом пробое в вакууме.— № 3, вып. 1.
- Путько В. Ф., Соболев В. С. Влияние вращающегося магнитного поля на характеристики плазматрона постоянного тока.— № 3, вып. 1.
- Танаев В. В. Интегральная модель скольжения электрической дуги.— № 3, вып. 1.
- Урюков Б. А. Теоретические исследования электрической дуги в турбулентном потоке (Обзор).— № 3, вып. 1.
- Фридлянд М. Г. Условия работы катода сильноточной дуги в режиме постоянного возобновления.— № 3, вып. 1.

Низкотемпературная плазма

- Абдуллин И. Ш., Сальянов Ф. А. Расчет характеристик индукционного диффузного разряда.— № 13, вып. 3.
- Аникеев В. Н. Исследование термокатоде дуги низкого давления в инертных газах.— № 3, вып. 1.
- Аншаков А. С., Жуков М. Ф., Горлев Г. А., Зуев В. С., Тимошевский А. Н., Туманов Ю. Н., Фролов В. А., Рязанов Б. В. Эрозия медно-вольфрамовых анодов в линейных плазматронах.— № 3, вып. 1.
- Баранников А. Л., Гришин С. Д., Капустин М. М., Кошелев В. А. Плазменный трансформатор постоянного тока.— № 13, вып. 3.
- Бегельфор А. И., Кисель В. С., Кушнир В. С. Форма дуги в поперечном вращающемся магнитном поле.— № 8, вып. 2.
- Борискин С. П., Девятко Б. Н. Научно-инженерный подход к проблеме моделирования и анализа динамики плазматрона как технологического объекта. III. Анализ динамики при распределенных внешних воздействиях и метод динамической оптимизации плазматронов.— № 8, вып. 2.
- Горожанкин Э. В., Дудников Ю. С., Кушнир В. С., Левченко В. Ф., Лобанов Н. Ф. Плазматрон с диффузорной МЭВ в поперечном магнитном поле.— № 13, вып. 3.
- Грач И. М. Интегральные решения уравнения Лапласа.— № 3, вып. 1.
- Гришин Ю. М., Козлов Н. П., Мосин А. А., Хвесюк В. И. Сильноточный плоский прижатый разряд в оптически непрозрачной плазме. Сообщение 1.— № 8, вып. 2.
- Гришин Ю. М., Козлов Н. П., Мосин А. А., Хвесюк В. И. Сильноточный плоский прижатый разряд в оптически непрозрачной плазме. Сообщение 2.— № 8, вып. 2.
- Егоров В. М., Мотовилов В. В., Путько В. Ф. Динамические характеристики электрической дуги во вращающемся магнитном поле и вопросы устойчивости ее горения.— № 8, вып. 2.
- Омельченко В. Д. «Восстановление» импульсной функции по ее оценке методом скользящего ряда.— № 8, вып. 2.

- Смоляков В. Я. К вопросу о механизме продвижения положительного лидера в длинных искрах.— № 3, вып. 1.
- Стрельцов В. А., Малишевский П. П., Пастухов В. Н. Исследование характеристик генератора низкотемпературной плазмы с рабочими веществами различной плотности.— № 13, вып. 3.
- Юхимчук С. А. Стабилизация положения дуги в коаксиальном зазоре плазматрона.— № 13, вып. 3.

Термодинамика и теплообмен

- Аверков Е. И., Рубцов Н. А., Тарасов А. Г. Аномальное увеличение спектрального коэффициента отражения углерода при температурах 1200—1400 К в кислородной среде.— № 3, вып. 1.
- Багинский А. В. Об исследовании теплопроводности полупрозрачных веществ в тонких слоях. I. Стационарный теплообмен в плоском слое. Оценки эффективной теплопроводности.— № 8, вып. 2.
- Багинский А. В. Об исследовании теплопроводности полупрозрачных веществ в тонких слоях. II. Высокочастотная плоская тепловая волна.— № 13, вып. 3.
- Бурдуков А. П., Буфетов Н. С., Дорохов А. Р. Абсорбция на стекающей по адiabатической стенке пленке жидкости.— № 3, вып. 1.
- Гордиенко П. С., Ефименко А. В., Горин Л. Ф., Коварский Н. Я., Пибберг А. С., Машдатовичев тепловых потоков.— № 8, вып. 2.
- Дейнеко В. В. Численное моделирование двумерной задачи кристаллизации.— № 8, вып. 2.
- Дорохов А. Р., Бочагов В. Н. Теплоотдача стекающей по горизонтальным цилиндрам пленке жидкости.— № 8, вып. 2.
- Лебедев О. Н., Марченко В. П. О влиянии давления на динамику испарения капли топлива.— № 8, вып. 2.
- Маликов Ю. К., Лисиенко В. Г., Волков В. В. Численное решение сопряженной задачи радиационно-конвективного и кондуктивного теплообмена при моделировании нестационарных температурных процессов в нагревательных печах.— № 8, вып. 2.
- Полянич А. Д., Полянич В. Д., Сергеев Ю. А. О поле концентраций и температур, возникающих при обтекании химически активной реагирующей частицы потоком жидкости.— № 13, вып. 3.
- Расторгуева Н. М. Интегральные полусферические излучательные способности алюминевых и стальных образцов в области температур 5—100 К.— № 3, вып. 1.
- Расторгуева Н. М., Рубцов Н. А. Интегральные полусферические излучательные способности кварца марок КИ, КВ и КУ в области температур 110—330 К.— № 13, вып. 3.
- Расторгуева Н. М., Рубцов Н. А. Интегральные полусферические излучательные способности кварца марок КИ, КВ и КУ в области температур 110—330 К.— № 13, вып. 3.
- Старовойтов В. А. Охлаждение электрических машин с помощью ферромагнитных жидкостей.— № 13, вып. 3.

Прикладная газо- и реодинамика

- Ащупов А. В., Миронов В. М. Исследование аэродинамики вихревой камеры.— № 13, вып. 3.
- Бектурганов Е. А., Джаугаштин К. Е., Сакипов З. Б., Ярин А. Л. Струйное обтекание движущейся поверхности.— № 3, вып. 1.
- Бычков Н. М., Коваленко В. М. Аэродинамические силы на вращающемся шероховатом цилиндре в поперечном потоке.— № 8, вып. 2.
- Бычков Н. М., Иштулов А. Г., Коваленко В. М. Влияние вращения на аэродинамические характеристики осесимметричных тел большого удлинения при сверхзвуковых скоростях.— № 13, вып. 3.
- Ведерников Г. А., Звезгинцев В. И. Метод измерения сил при испытаниях в импульсной аэродинамической трубе.— № 13, вып. 3.
- Волчков Э. П., Кардаш А. П., Терехов В. И. Гидродинамика вихревой камеры с гиперболическими торцевыми крышками.— № 13, вып. 3.
- Горелов Г. И., Жирнов А. А. Вихревая камера сгорания с профилированными торцевыми стенками.— № 3, вып. 1.
- Джакупов К. Б. О конвективном движении жидкости в цилиндрической прослойке при наложении магнитного поля.— № 8, вып. 2.
- Джаугаштин К. Е., Солдаткин А. В. Распространение осесимметричной струи при воздействии архимедовых сил.— № 8, вып. 2.
- Канн К. Б., Дружинин С. А., Феклистов В. П. О замедлении вытекания жидкости из пен во вращающемся объеме.— № 3, вып. 1.
- Коваленко В. М., Махнин А. М. Аэродинамические характеристики вращающегося осесимметричного тела с перфорацией хвостовой части при M=2.— № 13, вып. 3.

- Козлов В. В., Рамазанов М. П. Экспериментальное исследование устойчивости течения Пуазейля.— № 8, вып. 2.
- Латыпов А. Ф., Сорока Б. Н. О математической модели дозвукового транспортного самолета.— № 13, вып. 3.
- Лебедев В. П., Инкитин П. В. Коэффициент расхода осесимметричных сверхзвуковых сопел Лавалья и влияние на него входных условий.— № 8, вып. 2.
- Лысенко В. П., Маслов А. А., Семенов Н. В. Экспериментальное исследование влияния нагрева на переход и устойчивость сверхзвукового пограничного слоя.— № 13, вып. 3.
- Пинаков В. П. Автоколебания стержня в газовом потоке.— № 8, вып. 2.
- Рафиков Р. В., Зауличный Е. Г., Рычков А. Д., Тенев В. А., Иванов В. Я., Нефедов П. В. Численное исследование двухфазного течения в осесимметричном канале с учетом реальных механизмов разрушения его стенок.— № 3, вып. 1.
- Рубцов Н. А., Огуречникова Н. М. Исследование электрической дуги в турбулентном потоке газа.— № 3, вып. 1.
- Фердигалов Л. Ю. Движение вязкой жидкости вдоль бегущей волны при больших докритических числах Рейнольдса.— № 8, вып. 2.
- Хакимзянов Г. С., Яушев И. К. О численном расчете дозвуковых установившихся осесимметричных течений идеального газа в каналах сложной формы.— № 13, вып. 3.
- Черкас А. Я. Режимы течения двухфазных потоков в щелевых каналах.— № 3, вып. 1.
- Шепеленко В. Н. К расчету осесимметричных течений со свободной границей в продольном поле тяжести.— № 8, вып. 2.

#### Модели тепло- и массообменных процессов и вопросы управления

- Авдеев А. М., Демиденко Н. Д. Численный метод исследования нестационарных режимов многокомпонентной ректификации.— № 8, вып. 2.
- Карлов В. П., Демиденко Н. Д. Метод решения нестационарной задачи массообмена в сложной ректификационной колонне.— № 13, вып. 3.

#### Теоретические исследования устойчивости и оптимального управления электроэнергетических систем

- Аксенов В. А., Храмов Л. Ф., Шумилов Ю. Н. Исследование электрофизических характеристик поверхностного слоя изолятора.— № 8, вып. 2.
- Бушуев В. В., Новиков Н. Л., Коростышевский Е. А. Метод анализа устойчивости сложных электрических систем при учете статистической природы параметров и возмущающих воздействий.— № 13, вып. 3.
- Воропай Н. П., Руденко Ю. Н., Ушаков Е. И., Шутов Г. В. Исследование условий функционирования ЕЭС СССР при разработке принципиальных направлений ее развития.— № 3, вып. 1.
- Градов В. М., Зимин А. М., Преображенский В. А., Терентьев Ю. И., Щербаков А. А. Расчет предельных энергий импульсных газоразрядных ламп.— № 8, вып. 2.
- Захарин В. С., Каганов З. Г., Медведева Л. С. Применение Z-преобразования и полиномов Чебышева к анализу регулярно-неоднородных цепных схем.— № 8, вып. 2.
- Манусов В. З., Кучеров Ю. Н., Шепилов О. Н. Расчет интегральных систем вероятностными методами.— № 13, вып. 3.
- К шестидесятилетию академика Н. Н. Яненко.— № 13, вып. 3.

УДК 532.72

Полянин А. Д., Полянин В. Д., Сергеев Ю. А. О полевой концентрации и температур, возникающих при обтекании химически активной реагирующей частицы потоком жидкости.— Изв. СО АН СССР, 1981, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.

Рассмотрена задача об определении полей концентрации и температуры, обусловленных протеканием химической реакции на поверхности теплопроводной частицы, движущейся в жидкой активной среде. Анализируется случай произвольной зависимости скорости поверхности химической реакции от концентрации реагента и температуры.

В случае больших диффузионных чисел Пекле при произвольных значениях теплового числа Пекле и бесконечной скорости химической реакции токов на поверхности реагирующих сфер равного радиуса, расположенных на равных расстояниях одна за другой на оси поступательного течения потока. Показано, что взаимодействие диффузионных слоев и пограничных слоев в таких упорядоченных системах приводит к существенному торможению интенсивности процессов теплообмена по сравнению с изолированными реагирующими частицами.

В случае произвольной кинетики поверхностной реакции исходная задача в приближении теплового и диффузионного пограничного слоя сведена к системе интегральных уравнений для определения неизвестной концентрации и температуры на поверхности частицы. Рис. 1, библиогр. 15.

УДК 536.48

Расторгуева Н. М., Рубцов Н. А. Интегральные полусферические излучательные способности кварца марок КИ, КВ и КУ в области температур 110—130 К.— Изв. СО АН СССР, 1981, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.

Приводятся результаты экспериментального исследования интегральных полусферических излучательных способностей кварцевых стекол марок КИ, КВ и КУ в зависимости от толщины образцов в области температур 110—330 К с соответствующим привлечением специальной методики, разработанной ранее для расчета полупрозрачных материалов. Обнаружено, что только кварц КИ является полупрозрачным во всем температурном диапазоне. Определяются температурные зависимости оптических толщ кварцевых слоев и анализируется состояние вопроса в целом. Рис. 3, библиогр. 21.

УДК 536.24.083

Багинский А. В. Об исследовании теплопроводности полупрозрачных веществ в тонких слоях. II. Высокочастотная плоская тепловая волна.— Изв. СО СССР, 1981, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.

В работе рассмотрена задача о распространении высокочастотной тепловой волны в полупрозрачной среде. Показано, что при достаточно больших частотах теплообмен излучением становится малосущественным. Получены соотношения, определяющие условия малости радиационного теплообмена. Библиогр. 6.

УДК 621.313.33+62.713.4

Старовойтов В. А. Охлаждение электрических машин с помощью ферромагнитных жидкостей.— Изв. СО АН СССР, 1981, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.

Исследован новый способ охлаждения электрических машин, имеющих вращающиеся (бегущие) магнитные поля, с помощью ферромагнитных жидкостей и изложены экспериментальные результаты такого охлаждения на примере электродвигателя АО 42 4/2. Рис. 3, библиогр. 8.

УДК 532.525.2.533.6.05

Андупов А. В., Миронов М. В. Исследование аэродинамики вихревой камеры.— Изв. СО АН СССР, 1981, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.

Приводятся результаты экспериментального исследования картины течения внутри вихревой камеры и истекающей из нее через осесимметричное сопло закрученной струи воздуха. Выявлено влияние расхода и геометрии сопла на структуру течения в присоединенной области. Рис. 5, библиогр. 16.

Волчков Э. П., Кардаш А. П., Терехов В. И. Гидродинамика вихревой камеры с гиперболическими торцевыми крышками.— Изв. СО АН СССР, 1981, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.

На основании одномерной модели течения без учета влияния торцевых пограничных слоев исследуется течение газа в вихревой камере с торцевыми крышками, имеющими форму гиперболоида вращения. Получены расчетные зависимости для тангенциальной составляющей скорости в камере в зависимости от числа Рейнольдса и относительного диаметра выходного отверстия. Методика расчета, по аналогии с плоской камерой, распространена и на турбулентный режим течения.

Экспериментально исследовано распределение статического давления, окружных скоростей и циркуляций в вихревой гиперболической камере. Результаты опытов сопоставлены с расчетом и экспериментальными данными, полученными для плоской камеры. Показано, что в гиперболической камере, в отличие от плоской, в области основного вихря не происходит потерь циркуляции, вероятно, из-за слабого влияния торцевых пограничных слоев. Результаты расчетов для гиперболической камеры хорошо согласуются с экспериментом. Рис. 6, библиогр. 14.

Лысенко В. И., Маслов А. А., Семенов Н. В. Экспериментальное исследование влияния нагрева на переход и устойчивость сверхзвукового пограничного слоя.— Изв. СО АН СССР, 1981, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.

В работе приведены результаты экспериментального исследования влияния нагрева на устойчивость и переход сверхзвукового пограничного слоя. Получено, что при нагреве поверхности модели число Рейнольдса перехода монотонно уменьшается, возрастают значения коэффициентов усиления возмущений в пограничном слое, увеличивается диапазон неустойчивых частот. Исследованы как линейная, так и нелинейная фазы развития возмущений в пограничном слое. Первые признаки перехода наступали при числах Рейнольдса, соответствующих пересечению верхней ветви кривой нейтральной устойчивости и линии максимальных амплитуд.

Хакимзянов Г. С., Яушев И. К. О численном расчете дозвуковых установившихся осесимметричных течений идеальной сжимаемой жидкости в каналах сложной формы.— Изв. СО АН СССР, 1981, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.

Рассматриваются дозвуковые установившиеся осесимметричные течения идеальной сжимаемой жидкости в каналах сложной формы, часть стенок которых пронизаема для газа. Сформулирована математическая постановка задачи, для решения которой предложен итерационный метод. В качестве примера рассмотрена дозвуковая часть течения в установке с утопленным в камеру соплом. Рис. 6, библиогр. 10.

Ведерников Г. А., Звезгинцев В. П. Метод измерения сил при испытаниях в импульсной аэродинамической трубе.— Изв. СО АН СССР, 1981, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.

Рассматривается метод расчета аэродинамических коэффициентов сил  $C_R$  по измерениям траектории свободно перемещающейся модели при известной зависимости скоростного напора от времени. Зависимость  $C_R$  от времени представляется в виде полинома, коэффициенты которого находятся по методу наименьших квадратов, а степень полинома выбирается в соответствии с погрешностью измерения траектории. Приведены выражения для расчета доверительных интервалов полученного решения.

Метод был опробован при решении тестовых и реальных задач, характерных для испытаний в импульсной аэродинамической трубе, и показал достаточно высокую точность при использовании обычной киносъемки перемещения модели. Табл. 1, рис. 6, библиогр. 8.

Н. М. Бычков, А. Г. Иштулов, В. М. Коваленко. Влияние вращения на аэродинамические характеристики осесимметричных тел большого удлинения при сверхзвуковых скоростях.— Изв. СО АН СССР, 1981, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.

При числах  $M=2-4$  измерены сопротивление, подъемная сила и момент тангажа вращающихся и неподвижных моделей метеорологических ракет различной конфигурации удлинением  $\lambda=18,8-42,8$ . Показано, что аэродинамические характеристики вращающихся осесимметричных тел зависят от скорости вращения, удлинения, от палочки и расположения оперений. При удлинениях до 20 вращение слабо влияет на аэродинамические характеристики, при  $\lambda > 30-35$  влияние вращения существенно увеличивается, особенно для коэффициента сопротивления, при этом наиболее заметное изменение его происходит в области относительно малых скоростей вращения. Рис. 11, библиогр. 11.

Коваленко В. М., Махнин А. М. Аэродинамические характеристики вращающегося осесимметричного тела с перфорацией хвостовой части при  $M=2$ .— Изв. СО АН СССР, 1981, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.

Экспериментально исследовано влияние перфорации хвостовой части вращающегося тела типа конус — цилиндр и конус — цилиндр — обратный усеченный конус на его полное и донное сопротивление, а также на подъемную силу, момент тангажа и на положение центра давления при числах  $M=2$  и  $Re=13 \cdot 10^6$ .

Показано, что подвод части обтекающего тела воздуха к донной области приводит к уменьшению донного сопротивления, иногда значительному (в два и более раза), при этом полное сопротивление тоже несколько уменьшается. На подъемную силу и момент тангажа перфорация влияет слабо.

Вращение тела в диапазоне значений  $0 \leq \theta \leq 0,1$  практически не сказывается на величине его основных аэродинамических характеристик. Рис. 8, библиогр. 12.

Латыпов А. Ф., Сорока Б. П. О математической модели дозвукового транспортного самолета.— Изв. СО АН СССР, 1981, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.

Построена математическая модель (ММ) дозвукового транспортного самолета с ТРД, основанная на представлении аэродинамической поляры и дроссельной характеристики двигателя в виде обобщенных соотношений и включающая необходимые условия максимума дальности полета. В ММ введены безразмерные параметры, отражающие характеристики планера и силовой установки и позволяющие варьировать аэродинамическое совершенство планера и термодинамическую эффективность силовой установки в широких пределах. Приводятся примеры расчетов по определению оптимальной размерности силовой установки и влиянию безразмерных параметров на характеристики самолета. Рис. 6, табл. 1, библиогр. 2.

Бараников А. Л., Гришин С. Д., Капустин М. М., Коселев В. А. Плазменный трансформатор постоянного тока.— Изв. СО АН СССР, 1981, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.

Рассмотрен принцип действия МГД трансформатора постоянного тока, получены на основе одномерной модели МГД течения основные соотношения для параметров трансформатора с учетом потерь на трение. Даны рекомендации по выбору рабочего тела для трансформатора. Показано, что на выходе его можно получать несколько фиксированных значений напряжения или плавно регулируемое напряжение постоянного тока. Рис. 5, библиогр. 5.

