

# ИЗВЕСТИЯ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

СЕРИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

Год основания журнала 1957 Год основания серии 1963	Периодичность журнала 15 номеров в год Периодичность серии 3 номера в год	№ 8(338) вып. 2	Июнь 1981
--	--	--------------------	--------------

## ИЗВЕСТИЯ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

Главный редактор журнала чл.-кор. АН СССР *М. Ф. Жуков*

Заместитель главного редактора чл.-кор. АН СССР *В. Г. Дулов*

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ СЕРИИ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК:

Ответственный редактор серии чл.-кор. АН СССР *М. Ф. Жуков*

Чл.-кор. АН СССР *О. Ф. Васильев*, д-р техн. наук *Б. П. Девятов*, чл.-кор. АН СССР *В. Г. Дулов*, чл.-кор. АН СССР *П. А. Желгузин* (зам. ответственного редактора), д-р техн. наук *В. Е. Накоряков*, д-р техн. наук *Н. А. Рубцов* (ответственный секретарь серии), д-р техн. наук *Б. А. Урюков*

Адрес редакции: 630099, Новосибирск, 99, Советская, 18, ком. 331,  
тел. 22-00-44.

## СОДЕРЖАНИЕ

### ТЕРМОДИНАМИКА И ТЕПЛОБМЕН

- А. Р. Дорохов, В. П. Бочагов.* Теплоотдача к стекающей по горизонтальным цилиндрам пленке жидкости . . . . . 3
- А. В. Багинский.* Об исследовании теплопроводности полупрозрачных веществ в тонких слоях. I. Стационарный теплообмен в плоском слое. Оценки эффективной теплопроводности . . . . . 7
- О. Н. Лебедев, В. Н. Марченко.* О влиянии давления на динамику испарения капли топлива . . . . . 12
- Ю. К. Маликов, В. Г. Лисенко, В. В. Волков.* Численное решение сопряженной задачи радиационно-конвективного и кондуктивного теплообмена при моделировании нестационарных температурных процессов в нагревательных печах . . . . . 16
- П. С. Гордиенко, А. В. Ефименко, Л. Ф. Горпи, Н. Я. Коварский, А. С. Ипберг, Р. А. Машковская.* Исследование термоэлектрических свойств гальванических датчиков тепловых потоков . . . . . 22
- В. В. Дейнеко.* Численное моделирование двумерной задачи кристаллизации . . . . . 28

### ПРИКЛАДНАЯ ГАЗО- И РЕОДИНАМИКА

- Н. М. Бычков, В. М. Коваленко.* Аэродинамические силы на вращающемся шероховатом цилиндре в поперечном потоке . . . . . 32
- В. П. Лебедев, П. В. Никитин.* Коэффициент расхода осесимметричных сверхзвуковых сопел Лаваля и влияние на него входных условий . . . . . 40
- В. В. Козлов, М. П. Рамазанов.* Экспериментальное исследование устойчивости течения Пуазейля . . . . . 45
- В. П. Шенеленко.* К расчету осесимметричных течений со свободной границей в продольном поле тяжести . . . . . 49
- Л. Ю. Фердигалов.* Движение вязкой жидкости вдоль бегущей волны при больших докритических числах Рейнольдса . . . . . 52
- К. Е. Джаугаштин, А. В. Солдаткин.* Распространение осесимметричной струи при воздействии архимедовых сил . . . . . 60
- К. Б. Джакунов.* О конвективном движении жидкости в цилиндрической прослойке при наложении магнитного поля . . . . . 62
- В. П. Пинаков.* Автоколебания стержня в газовом потоке . . . . . 74

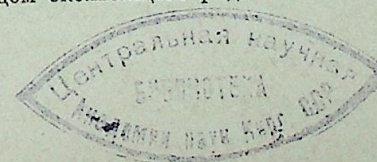
### НИЗКОТЕМПЕРАТУРНАЯ ПЛАЗМА

- Ю. М. Гришин, П. П. Козлов, А. А. Мосин, В. И. Хвесьюк.* Сильноточный плоский прижатый разряд в оптически непрозрачной плазме. Сообщение 1 . . . . . 80
- Ю. М. Гришин, П. П. Козлов, А. А. Мосин, В. И. Хвесьюк.* Сильноточный плоский прижатый разряд в оптически непрозрачной плазме. Сообщение 2 . . . . . 88
- С. П. Борискин, Б. П. Девятов.* Научно-инженерный подход к проблеме моделирования и анализа динамики плазматрона как технологического объекта. III. Анализ динамики при распределенных внешних воздействиях и метод динамической оптимизации плазматронов . . . . . 95
- В. М. Егоров, В. В. Мотовилов, В. Ф. Путько.* Динамические характеристики электрической дуги во вращающемся магнитном поле и вопросы устойчивости ее горения . . . . . 109
- А. П. Бегельфор, В. С. Кисель, В. С. Кушпир.* Форма дуги в поперечном вращающемся магнитном поле . . . . . 118
- В. Д. Омельченко.* «Восстановление» импульсной переходной функции по ее оценке методом скользящего ряда . . . . . 123

Редактор *И. Н. Стригун*  
Художественный редактор *Э. С. Филоновичева*  
Технический редактор *А. В. Семкова*  
Корректоры *В. К. Чичельник, В. А. Бирюкова*

Сдано в набор 23.03.81. Подписано к печати 16.06.81. МП-06546. Формат 70×108<sup>1/8</sup>. Высокая печать. Усл. печ. л. 14. Усл. кр.-отт. 14.5. Уч.-изд. л. 14. Тираж 1858 экз. Заказ 510.

Издательство «Наука», Сибирское отделение. 630099, Новосибирск, 99, Советская, 18.  
4-я типография изд-ва «Наука». 630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25.



- А. М. Авдеев, Н. Д. Демиденко. Численный метод исследования нестационарных режимов многокомпонентной ректификации . . . . . 129

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ  
И ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

- В. М. Градов, А. М. Зипин, В. А. Преображенский, Ю. И. Терентьев, А. А. Щербачков. Расчет предельных энергий импульсных газоразрядных ламп . . . . . 134  
В. С. Захарин, З. Г. Каганов, Л. С. Медведева. Применение Z-преобразования и полиномов Чебышева к анализу регулярно-неоднородных цепных схем . . . . . 143  
В. А. Аксенов, Л. Ф. Храмов, Ю. Н. Шумилов. Исследование электрофизических характеристик поверхностного слоя изолятора . . . . . 151

УДК 536.242+66.015.24

А. Р. ДОРОХОВ, В. Н. БОЧАГОВ

ТЕПЛОТДАЧА К СТЕКАЮЩЕЙ  
ПО ГОРИЗОНТАЛЬНЫМ ЦИЛИНДРАМ ПЛЕНКЕ ЖИДКОСТИ

Теплоотдача к стекающей по горизонтальным цилиндрам пленке жидкости исследовалась в экспериментальных работах [1—6]. Изучен широкий диапазон параметров: геометрических (длин и диаметров экспериментальных участков), теплофизических свойств жидкостей, плотностей орошения и тепловых потоков. Однако характер экспериментально определяемых зависимостей неоднозначен. Опытные данные различных исследователей значительно расходятся количественно.

На рис. 1 приведены результаты опытов по теплоотдаче к стекающей пленке воды и водного раствора бромистого лития начальной концентрацией  $\xi = 60\% \left( \frac{\text{LiBr}}{\text{LiBr} + \text{H}_2\text{O}} \right)$  по данным работ [1—6]. Разброс экспериментальных данных, полученных в сопоставимых условиях, не имеет удовлетворительного объяснения, что требует, во-первых, дальнейшего развития теоретических представлений о механизме теплопереноса в стекающих пленках жидкости и, во-вторых, постановки новых экспериментальных исследований.

При расчете теплоотдачи к пленкам жидкости, стекающим по вертикальной поверхности, принимаются за основу зависимость Нуссельта [7] для ламинарного, или зависимости Кутателадзе [8], Даклера [9] и Лабунцова [10] для турбулентного стекания пленки. Практически реализуемые режимы стекания пленки жидкости по горизонтальным цилиндрам ограничены значениями чисел Рейнольдса пленки  $Re = \Gamma/\mu \sim 20 \div 400$ , где  $\Gamma$  — плотность орошения в расчете на одну сторону трубы,  $\mu$  — динамическая вязкость жидкости. Нижняя граница соответствует минимальным плотностям орошения, при которых образуются «сухие пятна» на смачиваемой поверхности, а верхняя характеризуется образованием «жгутов» и разбрызгиванием жидкости. Диапазон чисел Рейнольдса  $20 \div 400$  соответствует ламинарно-волновым режимам стекания пленки по вертикальной поверхности. Расчет теплоотдачи при таких числах  $Re$  проводят исключительно по эмпирическим зависимостям.

В [11] экспериментально исследовалась массоотдача к стекающим по вертикальной поверхности и по ряду горизонтальных труб пленкам жидкости в рассматриваемом диапазоне чисел Рейнольдса. Удовлетворительное согласие расчетных данных по модели ламинарной гладкой пленки с экспериментальными удалось получить в предположении перемешивания жидкости волнами на вертикальной поверхности и при стекании струями с горизонтальных труб. В расчетные зависимости в качестве характерного линейного масштаба  $L$  подставлялись или длина волны  $\lambda$ , или длина полуокружности цилиндра  $\pi D/2$ . В опытах по исследованию массоотдачи к стекающим пленкам в неизотермических условиях [11] также обращено внимание, что длина «начального» теплового участка  $x_1$ ,

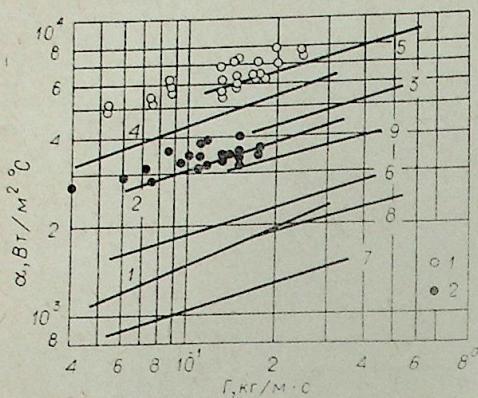


Рис. 1. Зависимость коэффициента теплоотдачи  $\alpha$ , Вт/м<sup>2</sup> °С от плотности орошения  $\Gamma$ , кг/м<sup>2</sup>·с.

Опыты с водой: точки 1 — данные авторов; — линии 1 — данные работы [1], 2 — [2], 3 — [3], 4 — [4], 5 — данные [6]. Опыты с раствором: точки 2 — данные авторов; линии 6 — данные [2], 7 — [2],  $D=100$  мм; 8 — [3], 9 — данные [4].

на котором происходит выход теплового пограничного слоя на поверхность пленки, или смыкание тепловых пограничных слоев, развивающихся от стенки и от поверхности пленки, соизмерима с характерным линейным масштабом  $L$ .

Таким образом, волны на поверхности вертикальной пленки жидкости, или разрыв пленки жидкости между цилиндрами, вносят в исследуемый процесс момент нестационарности. Закономерности тепло- и массопереноса должны иметь вид, типичный для «начального» участка, а именно:

$$Nu = f(Re \delta/L), \quad (1)$$

где  $Nu$ ,  $Re = Re \cdot Pr$ ,  $Re$ ,  $Pr$  — критерий Нуссельта, Пекле, Рейнольдса и Прандтля,  $\delta$  — толщина пленки.

На «начальном» участке при  $L \leq x_i$  расчет тепло- и массопереноса приведен в работе [12]. В частности, для расчета теплоотдачи получена зависимость

$$Nu = \alpha \cdot \delta/\lambda = 1,06(Re \cdot \delta/L)^{1/2}, \quad (2)$$

где  $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи,  $\lambda$  — теплопроводность жидкости. При выводе формулы (2) принят ряд допущений, справедливость которых, а также обоснование корректности выбора характерного линейного размера в виде  $L \approx \pi D/2$  могут быть установлены только путем сопоставления с экспериментальными данными.

Для проверки расчета, выполненного в [12], проводилось экспериментальное исследование теплообмена к стекающей по горизонтальным трубкам пленке воды и водного раствора бромистого лития на установке и по методике, подробно описанным в [6]. Жидкость из оросителя стекала по ряду шести горизонтально расположенных труб из меди, покрытой снаружи слоем серебра толщиной 5 мкм. Наружный диаметр труб  $D=19$  мм, длина  $l=240$  мм, расположены они с относительным шагом  $S/D=1,48$ . Каждая трубка имела индивидуальный электрообогрев. Определение коэффициента теплоотдачи производилось на пятой и шестой трубах пучка. Температура стенки  $t_{ст}$  экспериментального участка измерялась тремя термомпарами, расположенными в верхней, средней и нижней точках по периметру экспериментальных участков. При расчете принималось среднее арифметическое из показаний этих термомпар. Также измерялись температура жидкости, натекающей на трубу и стекающей с нее; тепловой поток  $q$ ; давление водяного пара  $p$ . Коэффициент теплоотдачи рассчитывали как

$$\alpha = q/(t_{ст} - t_{ж}), \quad (3)$$

где  $t_{ж}$  — средняя температура стекающей пленки жидкости, °С. Заметим, что в опытах с водой  $t_{ж}$  была близка равновесной  $t''$ , определяемой по  $p-T$  диаграмме. Точность определения  $\alpha$  оценивается в 10%. Опыты проводили при  $p=10$  кПа в диапазоне изменения  $\Gamma=0,05 \div 0,25$  кг/м<sup>2</sup>·с,  $q=(5 \div 50)10^3$  Вт/м<sup>2</sup>. Визуальными наблюдениями установлено, что в

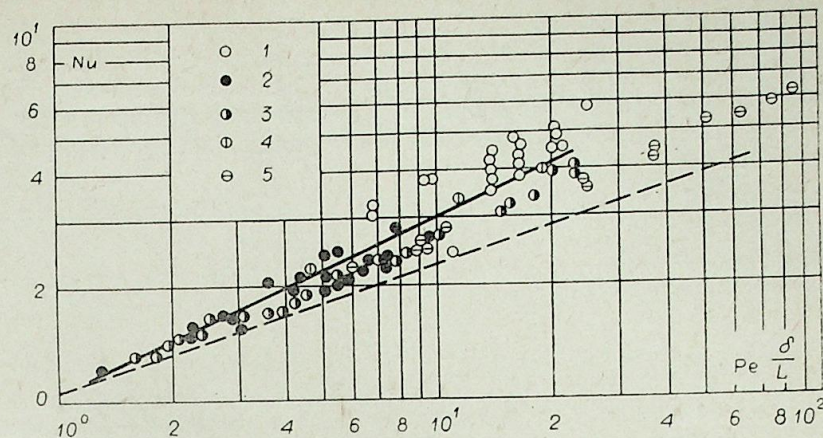


Рис. 2. Обобщение экспериментальных данных в координатах  $Nu-Re\delta/L$ . Точки 1, 2 — опыты авторов с водой и растворами Li, Br соответственно. 3 — данные [5], 4 — [4], 5 — [6]. Штриховая линия — расчет по формуле (2), сплошная линия — расчет по формуле (4).

исследованном диапазоне режимных параметров кипение в стекающей пленке отсутствовало, т. е. во всех случаях имело место поверхностное испарение водяного пара.

В эксперименте были получены данные по зависимости  $\alpha$  от  $q$  и  $\Gamma$  для случая стекания пленки воды и водного раствора бромистого лития с начальной концентрацией  $\xi=57\%$ . Влияние изменения теплового потока на величину коэффициента теплоотдачи оказалось небольшим, в пределах погрешности эксперимента, что хорошо согласуется с наблюдениями других исследователей [1—6], поэтому такие данные здесь не представлены. На рис. 1 приведены некоторые результаты по определению зависимости  $\alpha$  от  $\Gamma$  для случая стекания пленки воды (точки 1) и водного раствора бромистого лития (точки 2). Характер зависимостей  $\alpha$  от  $\Gamma$  аналогичен полученным в работах [2, 5]. Опыты с водой в пределах 30% удовлетворительно согласуются с данными [5, 6], а с водным раствором бромистого лития — с данными [4]. В работах [1—3] значения коэффициента теплоотдачи несколько занижены, что, возможно, обусловлено методическими погрешностями эксперимента.

Полученные экспериментальные данные, а также данные других авторов представлены на рис. 2 в координатах  $Nu-Re\delta/L$ . Толщину пленки  $\delta$  при расчете принимали по Нуссельту [7]. Штриховой линией на рисунке показан расчет по формуле (2). Видно, что, несмотря на то, что эта формула получена для вертикальной пластины, при  $Re \delta/L < 10$  имеет место вполне удовлетворительное согласие расчета и эксперимента, а также данных различных исследователей между собой. С увеличением определяющего комплекса расхождение расчета и эксперимента увеличивается, что, очевидно, обусловлено изменением гидродинамики стекания пленки, т. е. переходом к турбулентному режиму при  $Re > 400$ . Для практических расчетов результаты эксперимента в диапазоне изменения определяющего комплекса  $1 < Re \delta/L < 20$  могут быть аппроксимированы зависимостью

$$Nu = 1,03(Re \delta/L)^{0,46}, \quad (4)$$

представленной на рис. 2 сплошной линией. В общем случае показатель степени при  $Re \delta/L$  является величиной переменной.

Таким образом, результаты сопоставления расчета по формуле (2) и эксперимента позволяют сделать вывод о справедливости предположения о перемешивании жидкости при стекании с горизонтально распо-

женных трубок и рекомендовать эту формулу для практических расчетов в диапазоне применения определяющего комплекса  $1 < Re \delta/L$  [5]. Для расчета теплоотдачи к стекающей пленке в диапазоне изменения определяющего комплекса  $1 < Re \delta/L$  [20], охватывающем практически реализуемые режимы ее стекания, может быть рекомендована эмпирическая формула (4).

Авторы признательны Н. П. Григорьевой за полезные обсуждения результатов экспериментального исследования.

Специальное конструкторское бюро  
Энергохиммаш, Новосибирск

Поступила в редакцию  
7/V 1980

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Чернобыльский Н. П., Семилет З. В. Исследование коэффициента теплоотдачи оросительного теплообменника со стороны орошения.— Хим. промышленность, 1958, № 4.
2. Щербин А. В., Аверьянов И. Г. Исследование теплоотдачи к воде и водному раствору бромистого лития от орошаемой горизонтальной трубы.— Холод. техника, 1966, № 7.
3. Овенко Ф. А., Баллицкий С. А. Исследование теплоотдачи в горизонтальном оросительном теплообменнике со стороны орошения.— Хим. и нефт. машиностроение, 1966, № 9.
4. Грицак В. Т. Исследование теплоотдачи при кипении жидкостей в стекающей пленке на внешней поверхности горизонтальных труб. Автореф. канд. дис. Киев, 1966.
5. Чумаченко А. Д. Исследование теплоотдачи при орошении горизонтальных теплообменных труб.— Хим. и нефт. машиностроение, 1971, № 1.
6. Рубинов Е. А., Бурдуков А. П. Исследование процесса теплообмена при стекании пленок воды по горизонтальной трубе в вакууме.— Хим. и нефт. машиностроение, 1977, № 2.
7. Nusselt W. Der Wärmeaustausch am Berieselungskühler.— Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1923, Bd. 67, N 9.
8. Кутателадзе С. С. Теплоотдача при конденсации и кипении. М.—Л.: Машигиз, 1949.
9. Dukler A. E. Fluid mechanics and heat transfer in vertical falling film systems.— Chem. Eng. Progr. Symp. Ser., 1960, v. 56, N 30.
10. Лабунцов Д. А. Теплопередача при пленочной конденсации чистых паров на вертикальных поверхностях и горизонтальных трубах.— Теплоэнергетика, 1957, № 7.
11. Накоряков В. Е., Бурдуков А. П., Буфетов Н. С. и др. Экспериментальное исследование массоотдачи к стекающим пленкам жидкости.— В кн.: Тепло- и массоперенос в абсорбционных аппаратах. Новосибирск, ИТФ СО АН СССР, 1979.
12. Накоряков В. Е., Григорьева Н. П. О совместном тепло- и массопереносе при пленочной абсорбции.— В кн.: Теплообмен и гидрогазодинамика при кипении и конденсации. Новосибирск, ИТФ СО АН СССР, 1979.

А. В. БАГИНСКИЙ

## ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПОЛУПРОЗРАЧНЫХ ВЕЩЕСТВ В ТОНКИХ СЛОЯХ

### I. СТАЦИОНАРНЫЙ ТЕПЛОБМЕН В ПЛОСКОМ СЛОЕ. ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

При экспериментальных исследованиях теплопроводности частично прозрачных веществ наибольшую сложность представляет задача исключения радиационной составляющей из измеряемых суммарных или эффективных величин. Известные прямые экспериментальные методы, применяемые для этой цели, такие, например, как метод экстраполяции к нулевому зазору [4] и метод оптического гашения или закрашивания [2], весьма трудоемки и не вполне надежны. Поэтому в настоящее время все большее применение находят расчетные методы [3—6], основанные на точном численном решении соответствующих задач радиационно-кондуктивного теплообмена (РКТ).

Однако эффективность расчетных методов ограничена отсутствием достаточно полных данных по оптическим свойствам полупрозрачных веществ. Сильное влияние микропримесей на спектры поглощения веществ [7] затрудняет использование литературных данных в конкретных расчетах и практически приводит к необходимости предварительного экспериментального изучения спектральных свойств исследуемого объекта.

Кроме того, отсутствие аналитических решений очень затрудняет анализ влияния условий эксперимента на точность получаемых результатов.

Данная работа выполнена с целью получения приближенных зависимостей, связывающих коэффициент молекулярной теплопроводности  $\lambda$  с эффективной теплопроводностью  $\lambda_{эф}$ , измеряемой в оптически тонком слое, и позволяющих, с одной стороны, достаточно просто рассчитать  $\lambda$  по известному  $\lambda_{эф}$  и, с другой — оценить параметры эксперимента, при которых  $\lambda_{эф}$  мало отличается от  $\lambda$ .

В первой части исследования рассмотрен простейший случай стационарного теплообмена в плоском слое «серой» среды с непрозрачными границами. Интерес к этой задаче обусловлен ее достаточно хорошей изученностью [3—6], что позволяет оценить справедливость получаемых приближенных соотношений путем непосредственного сравнения результатов вычислений.

В случае, когда теплофизические параметры среды можно считать независящими от температуры (что при малых температурных перепадах в слое практически всегда допустимо), эта задача имеет вид

$$\lambda \frac{d^2 T(z)}{dz^2} + \frac{dq_r(z)}{dz} = 0, \quad (1)$$

$$T(0) = T_0 + \Theta_0, \quad (2)$$

$$T(z_0) = T_0. \quad (3)$$

При выбранных граничных условиях влияние теплообмена излучением на теплоперенос удобно оценить величиной  $\eta = (q - q_0)/q_0 = (\lambda_{эф} - \lambda)/\lambda$ , где  $q = q_c + q_r$  — суммарный радиационно-кондуктивный тепловой поток в полупрозрачной среде;  $q_0 = \lambda\Theta_0/z_0$  — тепловой поток в непрозрачной среде с теми же теплофизическими параметрами.

В связи с тем, что тепловой поток в полупрозрачной среде является суммой кондуктивного и радиационного потоков, параметр  $\eta$  иногда удобно представить также в виде суммы  $\eta = \eta_1 + \eta_0 = (q_c - q_0)/q_0 + q_r/q_0$ . При этом малость  $\eta_1$  будет определять, очевидно, условия, когда при решении задачи РКТ слой можно рассматривать прозрачным, а значение величины  $\eta_1$  будет определять погрешность соответствующей модели.

Рассмотрим вначале задачу РКТ в тонком слое полупрозрачной среды, ограниченном «черными» стенками. При этом

$$\frac{dq_r}{dz} = -4\alpha n^2 \sigma T^4(z) + 2\alpha n^2 \sigma \int_0^{z_0} T^4(z') E_1(\alpha|z - z'|) dz' + 2n^2 \sigma [(T_0 + \Theta_0)^4 E_2(\alpha z) + T_0^4 E_2(\alpha(z_0 - z))], \quad (4)$$

где  $\alpha$ ,  $n$  — коэффициент поглощения и показатель преломления,  $\sigma$  — постоянная Стефана — Больцмана,  $E_n(x) = \int_1^\infty \frac{\exp(-xt)}{t^n} dt$  — интегрально-экспоненциальные функции [8].

При условии  $\Theta_0 \ll T_0$ , что всегда осуществимо в эксперименте, задачу (1) — (4) можно линеаризовать:

$$\frac{d^2\Theta(\tau)}{d\tau^2} - 2N\Theta(\tau) + N \int_0^{\tau_0} \Theta(\xi) E_1(|\tau - \xi|) d\xi + N\Theta_0 E_2(\tau) = 0, \quad (5)$$

$$\Theta(0) = \Theta_0, \quad (6)$$

$$\Theta(\tau_0) = 0. \quad (7)$$

Здесь  $\Theta(\tau) = T(\tau) - T_0$  и введены безразмерные параметры:

$$\tau = \alpha z, \quad \xi = \alpha z', \quad \tau_0 = \alpha z_0, \quad N = 8n^2 \sigma T_0^3 / \alpha \lambda.$$

При  $\tau_0 \ll 1$  интегральный член в (5) мал по сравнению с  $N\Theta_0 E_2(\tau)$ , что позволяет искать решение задачи (5) — (7) методом последовательных приближений, положив в первом приближении  $\int_0^{\tau_0} \Theta(\xi) E_1(|\tau - \xi|) d\xi = 0$ .

Таким образом, в первом приближении процесс РКТ в оптически тонком слое можно описать следующим приближенным уравнением:

$$\frac{d^2\Theta(\tau)}{d\tau^2} - 2N\Theta(\tau) + N\Theta_0 E_2(\tau) = 0. \quad (8)$$

Дальнейшее упрощение уравнения РКТ состоит в замене  $E_2(\tau) \simeq 1$ , т. е. в предположении, что интенсивность излучения стенки незначительно ослабляется в слое  $\tau_0 \ll 1$  и практически одинакова в любой точке среды. Очевидно, что решение задачи (6) — (8) может быть легко найдено и без этого допущения. Однако вид получаемой при этом зависимости  $\Theta(\tau, N)$  оказывается достаточно сложным и использование ее в дальнейших расчетах приводит к сложным, несводимым к конечным комбинациям табулированных функций соотношениям  $\eta(N, \tau_0)$  или  $\lambda(\lambda_{эф}, N, \tau_0)$ .

В некоторых задачах (например, при расчете профиля высокочастотной тепловой волны в полубесконечной среде и т. п.) учет координатной зависимости свободного члена в уравнении (8) необходим по физическим соображениям. В данном же случае использование упрощенного уравнения позволяет получить физически непротиворечивые и достаточно простые расчетные соотношения, хорошо согласующиеся в ограниченном интервале оптических толщин с результатами точного численного анализа.

При сделанных упрощающих предположениях температурное распределение в плоском слое и рассчитанная на его основе зависимость  $\eta(N, \tau_0)$  будут иметь вид

$$\Theta(\tau) = \frac{\Theta_0}{2} \left\{ \frac{\text{sh}[\kappa(\tau_0 - \tau)] - \text{sh}(\kappa\tau)}{\text{sh}(\kappa\tau_0)} + 1 \right\}, \quad (9)$$

$$\eta = \frac{\kappa\tau_0}{2} \left[ \frac{\text{ch}(\kappa\tau_0) + 1}{\text{sh}(\kappa\tau_0)} + \frac{\kappa}{2} (1 - \Phi) \right] - 1, \quad (10)$$

где

$$\Phi = \int_0^{\tau_0} 2\Theta(\tau) E_2(\tau) / \Theta_0 d\tau = 0,5 - E_3(\tau) + \frac{1}{2\text{sh}(\kappa\tau_0)} \{ V(\tau_0, -\kappa) [1 + \exp(\kappa\tau_0)] - V(\tau_0, \kappa) [1 + \exp(-\kappa\tau)] \},$$

$$V(\tau_0, \kappa) = \frac{1}{\kappa} \{ E_2(\tau_0) \exp(\kappa\tau_0) - 1 + \frac{1}{\kappa} [E_1(\tau_0) \exp(\kappa\tau_0) - E_1(-\tau_0(1 - \kappa)) - \ln|1 - \kappa|] \},$$

$$\kappa = \sqrt{2N}.$$

Для удобства сравнения с имеющимися литературными данными [3, 5] полученный результат можно представить в виде отношения

$$\frac{\lambda}{\lambda_{эф}} = [\eta + 1]^{-1} = \frac{2}{\kappa\tau_0} \left[ \frac{\text{ch}(\kappa\tau_0) + 1}{\text{sh}(\kappa\tau_0)} + \frac{\kappa}{2} (1 - \Phi) \right]^{-1}. \quad (11)$$

Рассмотренный подход можно распространить и на случай «нечерных» стенок, если предположить, что интенсивности излучения стенок  $J_1, J_2$  и среды  $J_0$  слабо зависят от координат, т. е. величины  $J_0, J_1, J_2$  можно считать постоянными по толщине слоя.

Положив для простоты, коэффициенты черноты стенок одинаковыми ( $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ ), получим для величины интенсивности  $J_1$  «горячей» стенки следующее приближенное выражение:

$$J_1 = 8n^2 \sigma T_0^3 \Theta_0 \varepsilon \left[ \sum_{k=0}^{\infty} E_2(2k\tau_0 + \tau) (1 - \varepsilon)^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} E_2(2k\tau_0 - \tau) (1 - \varepsilon)^{2k-1} \right] \simeq \simeq 8n^2 \sigma T_0^3 \Theta_0 \varepsilon \left[ 1 + (2 - \varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} E_2(2k\tau_0) (1 - \varepsilon)^{2k-1} \right] = 8n^2 \sigma T_0^3 \Theta_0 \varepsilon_2^*. \quad (12)$$

При этом допущении величину  $J_0$  можно определить, исходя из того, что, положив  $J_0 = \text{const}$ , мы тем самым заменили реальную интенсивность излучения среды интенсивностью равновесного фона, характеризуемого некоторой постоянной температурой  $T = T_0 + \bar{\Theta}$ .

Тогда из условия баланса излучаемой и поглощаемой энергий  $4\alpha n^2 \sigma (T_0 + \bar{\Theta})^4 = \alpha [J_0(T + \bar{\Theta}) + 2J_1(T + \bar{\Theta})]$  с учетом (12) находим  $J_0 = = 2N\bar{\Theta}(1 - \varepsilon_2^*)\alpha\lambda$ .

Подставим выражение для  $J_0$  в уравнение теплопроводности

$$\frac{d^2\Theta(\tau)}{d\tau^2} - 2N\Theta(\tau) + N\Theta_0 \left[ \varepsilon_2^* + \frac{2\bar{\Theta}}{\Theta_0} (1 - \varepsilon_2^*) \right] = 0$$

и положим приближенно

$$\bar{\Theta} = \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} \Theta(\tau) d\tau, \quad (13)$$

где  $\Theta(\tau)$  — распределение температур в слое.

Для нахождения  $\Theta(\tau)$  построим следующий итерационный процесс.

Найдем решение уравнения теплопроводности  $\Theta_1(\tau)$  при  $J_0 = 0$  (т. е.  $\bar{\Theta} = 0$ ) и определим согласно (13) значение  $\bar{\Theta}_1$ . Подставим полученное значение  $\bar{\Theta}_1$  в уравнение и введем обозначение  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2^* + \frac{2\bar{\Theta}_1}{\Theta_0} (1 - \varepsilon_2^*)$ .

Повторив вычисления, найдем  $\varepsilon_2 = \varepsilon_2^* \frac{2\bar{\Theta}_2}{\Theta_0} (1 - \varepsilon_2^*)$ . Продолжая этот процесс далее, нетрудно получить рекуррентное соотношение для вычисления  $\varepsilon_n$ :

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{n-1} + (1 - \varepsilon_{n-1}) \left\{ \varepsilon_2^* + \frac{2(1 - \varepsilon_2^*) [\text{ch}(\kappa\tau_0) - 1]}{\kappa\tau_0 \text{sh}(\kappa\tau_0)} \right\}.$$

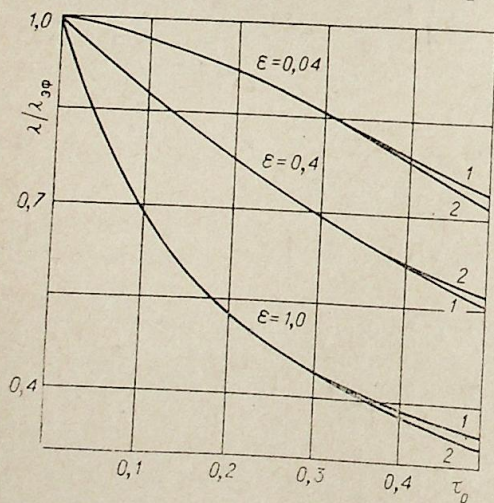
Можно показать, что при стремлении  $n$  к бесконечности  $\varepsilon_n$  стремится к единице. Таким образом, и в случае «печерных» стенок процесс теплопередачи в оптически тонком слое приближенно описывается тем же уравнением, что и при «черных» стенках.

Используя полученное выше приближенное решение (9) задачи (6)–(8), получаем с учетом сделанных предположений

$$\frac{\lambda}{\lambda_{эф}} = \frac{2}{\kappa\tau_0} \left[ \frac{\text{ch}(\kappa\tau_0) + 1}{\text{sh}(\kappa\tau_0)} + \frac{\varepsilon_1^*}{2} \left( 1 - \frac{\varepsilon_2^* \tau_0}{\varepsilon_1^*} \right) \right]^{-1}, \quad (14)$$

где  $\varepsilon_1^* = \varepsilon \left[ 1 - 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} E_3(2k\tau_0) (1 - \varepsilon)^{2k-1} \right]$  — приведенная степень черноты стенок.

Сравнение результатов расчетов по формулам (11), (14) с результатами работ [3, 5] представлено на рисунке. Как видим, полученные зависимости  $\lambda/\lambda_{эф}$  достаточно хорошо согласуются с результатами точного численного анализа, причем при  $\tau_0 \leq 0,3$  наблюдается практически полное совпадение. С ростом  $\tau_0$  расхождения заметно возрастают, однако при малых  $N$  ( $N \leq 1$ ) достаточно хорошее совпадение наблюдается вплоть до  $\tau_0 \sim 1$ . Таким образом, можно считать,



Отношение  $\lambda/\lambda_{эф}$  в зависимости от степени черноты стенок  $\varepsilon$  и оптической толщины слоя  $\tau_0$  при  $N = 10$ . 1 — результаты работы [3]; 2 — результаты расчета по формулам настоящей работы.

что предположения, сделанные в настоящей работе, являются оправданными, а полученные расчетные соотношения справедливы в области оптических толщин  $\tau_0 \leq 0,3$ . При малых по сравнению с кондуктивными радиационных потоках эта область несколько расширяется.

В области малых значений комплекса  $\kappa\tau_0$  (14) можно разложить в ряд по степеням  $\kappa\tau_0$ . С точностью до членов порядка  $(\kappa\tau_0)^2$  получаем в этом случае

$$\eta = \frac{N\tau_0^2}{6} + \frac{N\tau_0}{2} \varepsilon_1^* \left( 1 - \frac{\varepsilon_2^*}{\varepsilon_1^*} \tau_0 \right) = \frac{N\tau_0^2}{2} \left( \frac{1}{3} - \varepsilon_2^* \right) + \frac{N\tau_0}{2} \varepsilon_1^*. \quad (15)$$

Соотношение (15) может оказаться полезным в эксперименте, основанном на методике экстраполяции к нулевому зазору. Точность его не хуже 2% при  $\tau_0 = 0,2$  и улучшается с уменьшением  $\tau_0$ .

Заметим, что в случае хорошо отражающих стенок ( $\varepsilon \ll 1$ ) закон экстраполяции близок к квадратичному.

Следует отметить также, что при определенном соотношении между оптической толщиной слоя  $\tau_0$  и степенью «черноты» поверхности  $\varepsilon$  наблюдается компенсация «радиационных искажений» кондуктивного потока потоком излучения среды, и, таким образом, суммарный тепловой поток в полупрозрачной среде отличается от потока в непрозрачной среде лишь на величину радиационного потока со стенок. В частности, условие «квазипрозрачности» ( $\varepsilon_2^* = 1/3$ ) приближенно осуществляется при  $\tau_0 = 0,25$ ,  $\varepsilon = 0,2$ . При этом  $\varepsilon_1^* = 0,179$  и  $\eta \simeq \varepsilon_1^* N\tau_0/2 = 0,0224N$ . Полученный результат практически совпадает с результатом Польца [3]:  $\eta = 0,0221N$ .

Автор выражает благодарность А. С. Басину за помощь в работе и ряд полезных замечаний при обсуждении статьи.

## ВЫВОДЫ

1. Предложено приближенное уравнение теплопроводности для исследования задачи РКТ в оптически тонких слоях «серой» среды.
2. Получены приближенные соотношения, позволяющие рассчитать поправку на излучение при исследовании теплопроводности полупрозрачных сред в тонких слоях.

Институт теплофизики СО АН СССР,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
28/ХІІ 1978

## ЛИТЕРАТУРА

1. Геллер В. Э., Парамонов В. А., Татевосов Г. Д. Исследование теплопроводности толуола и экспериментальная оценка вклада лучистой составляющей в эффективный коэффициент теплопроводности. — В кн.: Теплофизические свойства жидкостей. М., 1973.
2. Петров А. В., Цинкина А. С., Логачев Ю. А. Температурные зависимости теплопроводности щелочногаллоидных солей при повышенных температурах. — ФТТ, 1974, т. 16, № 1.
3. Poltz H. Die Wärmeleitfähigkeit von Flüssigkeiten II. Int. J. Heat Mass Transfer, 1965, v. 8, N 4.
4. Рубцов Н. А., Степаненко П. И. Лучисто-кондуктивный перенос тепла в плоском слое аммиака. — ИФЖ, 1970, т. 18, с.
5. Сергеев О. А., Мень А. А. Теплофизические свойства полупрозрачных материалов. М., 1977.
6. Битюков В. К., Латышев Л. К., Петров В. А., Степанов С. В. Об определении коэффициента теплопроводности частично прозрачных материалов при высоких температурах. — Изв. СО АН СССР, 1979, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.
7. Петров В. А. Оптические свойства кварцевых стекол при высоких температурах в области их полупрозрачности. — В кн.: Обзоры по теплофизическим свойствам веществ. М.: ИВТАН, 1979, № 3 (17).
8. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1977.

О. Н. ЛЕБЕДЕВ, В. Н. МАРЧЕНКО

О ВЛИЯНИИ ДАВЛЕНИЯ  
НА ДИНАМИКУ ИСПАРЕНИЯ КАПЛИ ТОПЛИВА

Исследованию явлений, связанных с фазовыми превращениями капельной взвеси, посвящено большое количество как теоретических, так и экспериментальных работ, обзоры которых можно найти в [1, 2 и др.]. Закономерности испарения капель жидкого углеводородного горючего при низких давлениях  $p_1$  и умеренных температурах  $T_1$  газовой среды в основном изучены достаточно глубоко. Существующие методы расчета динамики испарения отдельных частиц топлива для области умеренных значений давлений и температур окружающей среды базируются главным образом на диффузионной теории Срезневского — Максвелла — Стефана — Ленгмюра [1], которая допускает квазиравновесность рассматриваемого процесса.

Совершенно иная картина наблюдается при высоких значениях величин  $p_1$  и  $T_1$ , т. е. при давлениях и температурах среды, больших, чем соответствующие критические величины  $p_k$  и  $T_k$  для жидкого горючего. А именно такие условия имеют место в камерах сгорания дизелей. Результаты экспериментальных исследований [3, 4] свидетельствуют о том, что качественная картина процесса испарения для самых разнообразных топлив не меняется с переходом из «докритической» ( $p_1 < p_k$ ) в «закритическую» ( $p_1 > p_k$ ) область. В любом случае наблюдается достаточно четко выраженный участок стационарного испарения. Температура капли в процессе асимптотически приближается к равновесной (стационарной), которая всегда меньше критической температуры  $T_k$  для жидкого топлива.

В то же самое время опытный материал показывает, что использование диффузионной теории в области высоких давлений и температур среды требует корректировки. В самом деле, расчеты, основанные на этой модели [5, 6 и др.], показывают, что скорость испарения капли возрастает с уменьшением давления окружающей среды. Этот факт объясняется известной зависимостью коэффициента молекулярной диффузии паров топлива от давления  $p_1$ . Однако результаты экспериментальных исследований [3, 4] констатируют, что рост давления среды инициирует фазовые превращения. Для формального согласования опытных данных с теоретическими прогнозами авторы работы [3] ввели «эффективный» коэффициент диффузии, который при атмосферном давлении близок к расчетному, а при давлении среды, например, в 10 МПа более чем в шесть раз выше расчетного значения.

В данной статье предпринята попытка учета особенностей фазовых превращений в «закритической» области давлений для жидкого топлива и физического обоснования обнаруженного эффекта интенсификации испарения капли с ростом давления окружающей среды.

При математическом описании явления особое внимание следует обратить на соотношения, связывающие термодинамические параметры на геометрической границе раздела фаз. Известно, что при невысоких давле-

ниях среды (например, при атмосферном или близком к нему давлении газа) однозначная зависимость давления насыщенного пара от температуры описывается уравнением Клапейрона — Клаузиуса [7].

Если же давление среды  $p_1$  соизмеримо или больше, чем критическое давление топлива  $p_k$ , то величина  $p_1$  будет оказывать весьма существенное воздействие на условия равновесия системы пар — жидкость. Рассмотрим это явление.

Согласно известному правилу Гиббса [7—9], число степеней свободы термодинамической системы определяется так:

$$f = k + 2 - \phi, \quad (1)$$

где  $k$  — число компонентов;  $\phi$  — число фаз.

В случае двухкомпонентной двухфазной системы, согласно (1), давление насыщенного пара будет зависеть не только от температуры, но и от количества второго компонента, т. е. от давления окружающего газа  $p_1$ . Это влияние не учитывалось ранее в расчетах по испарению жидких капель.

Изотермическое разбавление насыщенного пара у поверхности раздела нейтральным газом, нерастворимым в жидкой фазе, приводит к некоторому увеличению давления насыщенного пара  $p_{2(2)}$  на величину  $dp_{2(2)}''$ . Опуская элементарные выводы, сделанные, например, в [7—9], запишем уравнение Д. Т. Пойнтинга, описывающее смещение термодинамического равновесия системы при дополнительном элементарном сжатии жидкости на величину  $dp_{1(2)}$  со стороны нейтрального газа, в виде

$$\left(\frac{d\delta^*}{d\delta_1}\right)_\phi = \tilde{Z}, \quad (2)$$

где  $\delta^* = p_{2(2)}''/p_k$  — приведенное давление насыщенного пара в случае двухкомпонентной системы;  $\delta_1 = p_1/p_k$  — приведенное давление газовой среды на жидкость;  $\tilde{Z} = Z_2'/Z_2''$ ,  $Z_2'$ ,  $Z_2''$  — соответственно коэффициенты сжимаемости в жидкой и паровой фазах топлива до ввода нейтрального газа [7];  $\phi = T/T_k$  — приведенная температура.

Интегрируя уравнение (2) и помня, что когда  $\delta^* = \delta$ , то и  $\delta_1 = \delta$ , будем иметь

$$\delta^* = \tilde{Z}\delta_1 + (1 - \tilde{Z})\delta, \quad (3)$$

где  $\delta = p_2''/p_k$  — приведенное давление насыщенного пара в случае однокомпонентной системы.

Полученное выражение (3) отражает те самые специфические особенности испарения капель топлива, которые вызываются высоким давлением газовой среды. При его выводе не делалось никаких допущений о поведении  $\delta^*$  вблизи критической температуры, когда  $\phi = 1$ . Нетрудно видеть, что для «закритической» области ( $p_1 > p_k$ ), когда  $\phi = 1$ , а значит и  $\tilde{Z} = 1$ , величина приведенного давления насыщенного пара  $\delta^*$  совпадает с приведенным давлением окружающей среды  $\delta_1$ . Действительно, если предположить, что температура капли достигла критической величины  $T_k$ , то исчезнет граница раздела фаз и, следовательно, давление в окружающей газовой среде и в паровом «сгустке» будет совпадать.

Зависимость давления  $\delta^*$  от температуры  $\phi$  при различных значениях величины  $\delta_1$  для моторного топлива среднего состава иллюстрирует рис. 1.

Следует отметить, что при воздействии на испаряющуюся жидкость дополнительного давления, например со стороны нейтрального газа, при прочих равных условиях теплота фазового перехода  $L$  будет уменьшаться до значения  $L^*$ . Из самого определения последней следует, что отношение  $L/L^*$  численно равно отношению  $\delta^*/\delta$ .

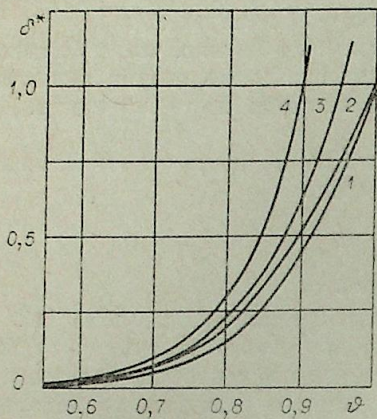


Рис. 1. Зависимость давления насыщенного пара от температуры при  $M = 7$ .

$\delta = \delta_0$ : (1);  $\delta_0 = 1$  (2), 2 (3), 6 (4).

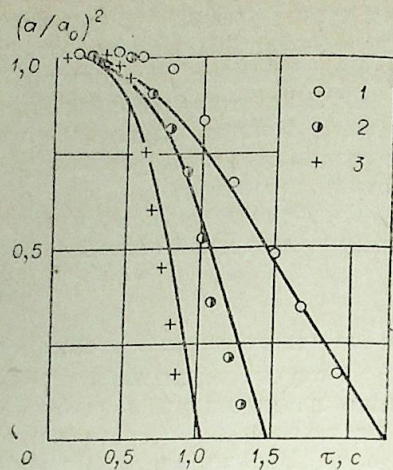


Рис. 2. Влияние давления газовой среды на динамику испарения капли дизельного топлива.

Начальное значение диаметра капля —  $a_0 = 700$  мкм; начальная температура капли  $t_{20} = 32^\circ\text{C}$ ; температура среды  $t_1 = 500^\circ\text{C}$ ;  $M_2 = 180$  кг/к моль;  $p_1 = 0,11$  (1), 4 (2), 8 МПа (3).

Полученные соотношения термодинамических параметров на границе раздела фаз, учитывающие специфические особенности «закритического» испарения топлива, положены в основу замыкания математической модели процесса, предложенной в работах [5, 10]. На рис. 2 показано сопоставление экспериментальных данных [4] с результатами численных расчетов на ЭВМ (сплошные кривые), которое свидетельствует о достаточно хорошем их согласии.

Коэффициенты молекулярной бинарной диффузии в смеси воздуха с парами моторного топлива вычислялись по зависимости Чепмена и Энскога [11], представленной в виде

$$D_{\text{по}} = \frac{\xi_{\sigma} D_{\text{во}}}{\sqrt{M}}, \quad (4)$$

где  $D_{\text{по}}$ ,  $D_{\text{во}}$  — соответственно коэффициенты молекулярной диффузии паров топлива и самодиффузии воздуха при нормальных физических условиях,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  $M = M_2/M_1$ ;  $M_2$ ,  $M_1$  — соответственно молекулярная масса паров топлива и воздуха,  $\text{кг}/\text{к} \cdot \text{моль}$ ,  $\xi_{\sigma}$  — структурный параметр, учитывающий природу взаимодействующих молекул. Согласно опытным данным [12, 13], величина  $\xi_{\sigma}$  для сложных моторных топлив изменяется в интервале 0,93—1,08, и поэтому в расчетах принято  $\xi_{\sigma} = 1,0$ .

Таким образом, можно констатировать, что повышение давления газовой среды до «закритических» значений приводит к существенному росту скорости испарения капли топлива главным образом за счет смещения термодинамического равновесия между слоем насыщения Ленгмюра [1] и поверхностью жидкости. При этом квазиравновесная диффузионная теория испарения качественно правильно описывает реальный нестационарный процесс.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Фукс Н. А. Испарение и рост капель в газообразной среде. М.: Изд-во АН СССР, 1958.
2. Грейвз, Бар. Распыливание и испарение жидких топлив.— В кн.: Основы горения углеводородных топлив. М.: ИЛ, 1960.
3. Matlosz R. L., Leipziger S., Torda T. P. Investigation of liquid drop evaporation in a high temperature and high pressure environment.— Int. J. Heat and Mass Transfer, 1972, v. 15, N 4.
4. Лебедев О. Н., Марченко В. Н. Экспериментальное исследование испарения капли углеводородных топлив при высоких температурах и давлениях газовой среды.— Изв. СО АН СССР, 1978, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.
5. Раушенбах Б. В. и др. Физические основы рабочего процесса в камерах сгорания воздушно-реактивных двигателей. М.: Машиностроение, 1964.
6. Лебедев О. Н. Численное исследование испарения неподвижной капли топлива, взвешенной в газовом потоке.— Изв. СО АН СССР, 1976, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.
7. Кириллин В. А., Сычев В. В., Шейндлин А. Е. Техническая термодинамика. М.: Наука, 1979.
8. Карапетьянц М. Х. Химическая термодинамика. М.—Л.: Госхимиздат, 1953.
9. Робертс Дж. Теплота и термодинамика. М.—Л.: ГИТТЛ, 1950.
10. Григорьев Ю. М. и др. К теории испарения капли в неподвижной среде.— В кн.: Тепло- и массоперенос, т. 2. Минск, 1968.
11. Рид Р. К., Шервуд Г. К. Свойства газов и жидкостей. Л.: Химия, 1971.
12. Баргафтик Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Физматгиз, 1963.
13. Дубовкин Н. Ф. Справочник по углеводородным топливам и их продуктам сгорания. М.—Л.: Госэнергоиздат, 1962.

УДК 669.046 : 536.24.001.57

Ю. К. МАЛЫКОВ, В. Г. ЛИСИЕНКО, В. В. ВОЛКОВ

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СОПРЯЖЕННОЙ ЗАДАЧИ  
РАДИАЦИОННО-КОНВЕКТИВНОГО  
И КОНДУКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ  
НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПРОЦЕССОВ  
В НАГРЕВАТЕЛЬНЫХ ПЕЧАХ

Задача о нагреве и охлаждении системы тел сложной формы в условиях радиационно-конвективного теплообмена исследована недостаточно. В работе [1] рассмотрен случай, когда нагрев тел происходит в регулярном режиме. Для нестационарных процессов этот режим не выполняется.

Рассмотрим систему серых тел, поверхность  $F$  которых ограничивает объем  $V$ , заполненный серой излучающей и изотропно рассеивающей средой. Разобьем объем и граничную поверхность на  $N$  зон. Выделим для каждой из зон одну из неизвестных величин  $E_{рез,n}^0$  или  $E_{соб,n}^0$ . Зоны, для которых выделена плотность потока результирующего излучения  $E_{рез,n}^0$ , будем в дальнейшем называть Р-зонами, для них определим вспомогательную функцию

$$q_n = -F_n^0 E_{рез,n}^0 \quad \text{при } n > M. \quad (1)$$

Зоны, для которых выделена плотность потока собственного излучения  $E_{соб,n}^0$ , будем называть С-зонами, для них определим вспомогательную функцию

$$q_n = F_n^0 E_{соб,n}^0 / r_n^0 \quad \text{при } n \leq M. \quad (2)$$

Каждая из зон может быть объявлена либо Р-зоной, либо С-зоной, в соответствии с этим можно рассматривать  $2^N$  различных схем численного решения сопряженной задачи. Однако, с точки зрения сокращения объема вычислений, выгодно в качестве вспомогательных функций выбирать слабо меняющиеся переменные. Например, для тепловоспринимающих поверхностей, у которых  $E_{соб}^0 \leq E_{рез}^0$ , целесообразно задавать  $q_n$  в виде (2) и рассматривать их как С-зоны, а теплоизоляционные поверхности, для которых  $E_{рез}^0 \ll E_{соб}^0$ , и объемные зоны, заполненные газом, рассматривать как Р-зоны. Будем считать, что С-зоны имеют номера  $n = 1, 2, \dots, M$ , а Р-зоны имеют номера  $n = M + 1, \dots, N$ . При обычных допущениях перенос лучистой энергии аппроксимируется системой линейных алгебраических уравнений для средних плотностей эффективного излучения:

$$AX = Q. \quad (3)$$

Здесь  $A = [a_{nm}]$  — симметричная положительно определенная матрица размерности  $N \times N$ ,  $a_{nm} = -F_n^0 \tilde{\varphi}_{nm}^0$  при  $n \neq m$ ,  $a_{nn} = F_n^0 (1/r_n^0 - \tilde{\varphi}_{nn}^0)$  при  $n \leq M$ ,  $a_{nn} = F_n^0 (1 - \tilde{\varphi}_{nn}^0)$  при  $n > M$ ;  $X = [E_{эф,n}^0]$ ,  $Q = [q_n]$  — векторы размерности  $N$ . Мы использовали общие обозначения для поверхностной и объемной зон, разработанные в работе [2].

Плотности потоков излучения связаны между собой

$$\varepsilon_n^0 E_{эф,n}^0 = E_{соб}^0 + r_n E_{рез}^0 \quad (4)$$

и выражаются через температуры зон  $t_n$ . Для плотности потока собственного излучения имеем

$$E_{соб,m}^0 = \varepsilon_m^0 n^2 \sigma t_m^4, \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (5)$$

Поток результирующего излучения объемной зоны  $m$  находится из условий баланса тепла и может быть записан в виде [3]

$$F_m^0 E_{рез,m}^0 = C_m \frac{\partial t_m}{\partial \tau} - \sum_{m=1}^N g_{mn} (t_n - t_m). \quad (6)$$

Для каждой поверхностной зоны  $m$  определены условия сопряжения

$$t_m = \theta_k(y, \tau) |_{F_m}, \quad (7)$$

$$E_{рез,m} + \alpha_m (t_n - t_m) = \lambda_k \frac{\partial \theta_k(y, \tau)}{\partial n} \Big|_{F_m},$$

где  $t_n$  — температура граничащей с ней объемной зоны,  $\theta_k(y, \tau)$  — поле температур в  $k$ -м теле, на поверхности которого расположена зона  $m$ . Функции  $\theta_k(y, \tau)$  определяются из решения уравнений теплопроводности

$$\rho c_k \frac{\partial \theta_k}{\partial \tau} - \nabla (\lambda_k \nabla \theta_k) = 0 \quad (8)$$

с условиями сопряжения (7) на поверхностях, обращенных к объему, и при граничных условиях I, II, III и IV рода на остальных поверхностях  $k$ -го тела.

Построим конечно-разностный аналог системы уравнений (1)–(8). Мы не будем рассматривать разностные схемы решения уравнений теплопроводности (8), которые разработаны в достаточной степени [4], но будем считать, что для тел, окружающих объем  $V$ , построена разностная сетка. Введем шаг по времени  $\Delta \tau$ , так что  $\tau_i = \Delta \tau i$ . Отметим целыми индексами  $i$  значения величин в моменты времени  $\tau_i$ , а дробными индексами  $i + 1/2$  значения функций, определяемые на отрезке  $[\tau_{i+1/2}, \tau_i]$ .

Потоки излучения зон и температуры Р-зон аппроксимируем ступенчатыми функциями с первым порядком малости по времени. В интервале времени  $[\tau_{i+1/2}, \tau_i]$  в соответствии с (4) имеем

$$\varepsilon_n^0 E_{эф,n}^{0(i+1/2)} = E_{соб,n}^{0(i+1/2)} + r_n^0 E_{рез,n}^{0(i+1/2)}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

Собственное излучение С-зон в рассматриваемом интервале определим в виде

$$E_{соб,m}^{0(i+1/2)} = \varepsilon_m^0 n^2 \sigma (t_m^i)^4 \quad \text{при } m \leq M. \quad (10)$$

Для Р-зон считаем  $t_m^{i+1/2} = t_m^{i+1}$ . Потоки излучения Р-зон в рассматриваемом интервале времени выразим через температуры этих зон следующим образом. Плотность потока собственного излучения Р-зон

$$E_{соб,m}^{0(i+1/2)} = \varepsilon_n^0 n^2 \sigma (t_m^{i+1})^4 \quad \text{при } m > M. \quad (11)$$

Поток результирующего излучения объемных Р-зон

$$F_m^0 E_{рез,m}^{0(i+1/2)} = C_m \frac{t_m^{i+1} - t_m^i}{\Delta \tau} - \sum_{n=1}^N g_{mn} (t_n^j - t_m^{i+1}) - q_{вн,m} (t_m^i, \tau_i), \quad (12)$$

где  $t_n^j = t_n^i$  при  $n \leq M$  и  $t_n^j = t_n^{i+1}$  при  $n > M$ . Поток результирующего излучения поверхностных Р-зон

$$F_m^0 E_{\text{рез},m}^{0(i+1/2)} = F_m^0 \left[ \lambda_k \frac{t_m^{i+1} - \theta_{k,*}^i}{h_k} - \alpha_m (t_n^{i+1} - t_m^{i+1}) \right], \quad (13)$$

где  $\theta_{k,*}^i = \theta_k^{i-1/2}(\tau_i, y_*)$  — температура в ближайшем к поверхности  $F_m$  узле сетки, построенной в  $k$ -м теле,  $h_k$  — размер ячейки этой сетки.

Компоненты векторов  $X^{i+1/2}$ ,  $Q^{i+1/2}$  определяются в соответствии с (9)–(13). Здесь использованы значения температур С-зон, определенные на  $i$ -м шаге. При этом считаем, что  $\Delta\tau$  мало настолько, что можно пренебречь изменением температуры С-зон на отрезке  $[\tau_{i+1}, \tau_i]$ . Что касается температуры Р-зон, то в выражениях (11)–(13) они рассматриваются как неизвестные величины, которые определяются из решения системы нелинейных уравнений

$$AX^{i+1/2} = Q^{i+1/2}. \quad (14)$$

Запишем в рассматриваемом интервале систему уравнений для тел, окружающих объем  $V$ :

$$\rho c_k \frac{\partial \theta_k^{i+1/2}}{\partial \tau} - \nabla (\lambda_k \nabla \theta_k^{i+1/2}) = 0, \quad (15)$$

где  $k$  — номер тела. Определим граничные условия следующим образом. Для поверхностей, которые рассматриваются как Р-зоны:

$$\theta_k^{i+1/2}|_{F_m} = t_m^{i+1}, \quad m > M. \quad (16)$$

На поверхностях, которые рассматриваются как С-зоны:

$$\lambda_k \frac{\partial \theta_k^{i+1/2}}{\partial n} \Big|_{F_m} = E_{\text{рез},m}^{0(i+1/2)} + \alpha_m (t_n^{i+1} - t_m^i), \quad m \leq M. \quad (17)$$

На остальных поверхностях тел граничные условия определяются обычным образом. Начальные условия зададим в виде  $\theta_k^{i+1/2}(y, \tau_i) = \theta_k^{i-1/2}(y, \tau_i)$ . Соотношения (16), (17) аппроксимируют условия сопряжения (7) с первым порядком малости по времени.

Сформулируем схему решения системы уравнений (14), (15) при граничных условиях (16), (17) и начальных условиях  $t_m^0 = t_{0,m}$ ,  $m = 1, 2, \dots, N$ ;  $\theta_k^{1/2}(y, 0) = \theta_{0,k}(y)$ , где  $k$  — номера тел.

1. Зная поле температур в момент времени  $\tau = 0$ , определим с помощью (10) собственное излучение С-зон в интервале  $[0, \Delta\tau]$ . Потоки эффективного и результирующего излучения Р-зон выразим через неизвестные пока температуры Р-зон в момент времени  $\Delta\tau$ , используя (9), (11)–(13).

2. Решаем систему (14) из  $M$  линейных относительно плотности эффективного излучения С-зон и  $N - M$  нелинейных относительно температур Р-зон уравнений. В результате решения (14) находим  $E_{\text{эф},m}^{1/2}$  для  $m \leq M$  и  $t_m^1$  для  $m > M$ .

3. Определяем из (9) поток результирующего излучения С-зон  $E_{\text{рез},m}^{1/2}$ ,  $m \leq M$ .

4. После этого граничные условия (16), (17) в интервале  $[0, \Delta\tau]$  определены и решается система уравнений теплопроводности (15).

5. Определяем температуры С-зон в момент времени  $\Delta\tau$  из условия  $t_m^1 = \theta_m^{1/2}(\Delta\tau)|_{F_m}$  для  $m \leq M$ .

6. Повторяем все эти операции в последующие моменты времени. Таким образом на каждом шаге по времени  $\Delta\tau$  необходимо решить систему нелинейных уравнений (14). Используемые обычно для этих целей градиентные методы требуют для каждой итерации  $\sim N^3$  операций. Поскольку такую систему необходимо решать многократно, уже при

сравнительно небольшом числе зон ( $N \sim 30$ ) объем вычислений оказывается слишком большим для современных ЭВМ. Значительно эффективнее для системы уравнений вида (14) оказывается следующий итерационный метод:

$$X^{j+1} = A^{-1}Q^j, \quad (18)$$

где  $Q^j = (1 - \beta)Q^{j-1} + \beta Q^j$ ,  $Q^1 = Q^0$ , а компоненты вектора  $Q^j$  вычисляются по формулам (1), (2), (10)–(13), причем температуры С-зон в процессе итераций не меняются,  $t_m^j = t_m^i$  при  $m \leq M$ , а температуры Р-зон определяем из соотношений

$$t_m^j = t_m^i, \quad t_m^{j+1} = \sqrt[4]{(E_{\text{эф},m}^{0(j+1/2)} + \tilde{q}_m^j r_m^0 / F_m \varepsilon_m^0) / \sigma}, \quad m > M. \quad (19)$$

Здесь индексом  $j$  отмечены значения величин после  $j$ -й итерации, а индексы  $i$ ,  $i + 1/2$  соответствуют значениям величин в момент времени  $\tau_i$  и на интервале  $[\tau_{i+1}, \tau_i]$ .

Если итерационный процесс (18) сходится, то, при  $j \rightarrow \infty$ ,  $t_m^j \rightarrow t_m^{i+1}$  для  $m > M$ ,  $Q^j \rightarrow Q^{i+1/2}$ ,  $Q^j \rightarrow Q^{i+1/2}$ ,  $X^j \rightarrow X^{i+1/2}$ , а из (19) следует (9). Когда матрица  $A$  слабо зависит от температуры и легко обратима, такой итерационный процесс требует на каждом шаге  $\sim N^2$  операций.

Исследуем условия, при которых в случае удачного выбора  $\beta$  итерационный метод (18) сходится. Для  $i$ -го интервала времени  $[\tau_{i+1}, \tau_i]$  точное решение системы (14) удовлетворяет уравнению  $AX^{i+1/2} = AX^{i+1/2} - \beta(AX^{i+1/2} - Q^{i+1/2})$ , поэтому для невязки после  $j$ -й итерации  $\delta X^j = X^j - X^{i+1/2}$  имеем

$$A\delta X^{j+1} = A\delta X^j - \beta(A\delta X^j - \delta Q^j), \quad (20)$$

где  $\delta Q^j = Q^j - Q^{i+1/2}$ . Будем рассматривать окрестность решения  $\Omega$ ,  $\delta X \in \Omega_x$ ,  $\delta Q \in \Omega_q$ .

Обозначим  $(X, Q)$  скалярное произведение двух векторов. Пусть

$$M_1 = \sup_{\delta X \in \Omega_x} \frac{(A\delta X, \delta X) - (\delta Q, \delta X)}{(A\delta X, \delta X)}; \quad \mu_1 = \inf_{\delta X \in \Omega_x} \frac{(A\delta X, \delta X) - (\delta Q, \delta X)}{(A\delta X, \delta X)}.$$

Потребуем  $\mu_1 > 0$ , для чего достаточно, чтобы

$$(\delta Q, \delta X) < \mu_1 (\delta X, \delta X), \quad (21)$$

где  $\mu_1 = \inf_{\delta X \in \Omega_x} \frac{(A\delta X, \delta X)}{(\delta X, \delta X)} > 0$ , поскольку матрица  $A$  положительно определена. Тогда при  $\beta = 2/(\mu_1 + M_1)$  итерационный процесс (18) сходится [5].

Неравенство (21) справедливо при достаточно больших температурах, когда конвективно-кондуктивный перенос тепла для Р-зон мал по сравнению с радиационным:  $|\delta Q| < \mu_1 |\delta X|$  при  $\delta T \in \Omega_T$ ,  $\delta X \in \Omega_x$ . Такая оценка является слишком грубой, и, если она справедлива, итерационный метод (18) сходится при  $\beta = 1$ , что соответствует итерациям простейшего вида. В некоторых случаях удается показать, что  $(\delta Q^j, \delta X^j) < 0$  при всех  $j$ , откуда следует справедливость неравенства (21) и сходимость (18). Наиболее просто такие оценки делаются при отсутствии рассеяния в Р-зонах ( $r_m^0 = 0$ ,  $\varepsilon_m^0 = 1$  при  $m > M$ ). Для этого случая можно указать такое число  $M_2$ , что если используемые в (12) величины  $c_m/\Delta\tau > M_2$ ,  $m = M + 1, \dots, N$ , то итерации (18) сходятся. Отсюда следует, если теплоемкость Р-зон  $c_m \neq 0$ , то всегда можно выбрать настолько малый шаг по времени  $\Delta\tau$ , что (18) сходится. С другой стороны, если нас интересует только стационарное состояние, можно искусственно задать достаточно большие  $c_m$  и решать задачу методом установления. Сходимость итераций вида (18) можно доказать также для случая, когда конвективный тепло-

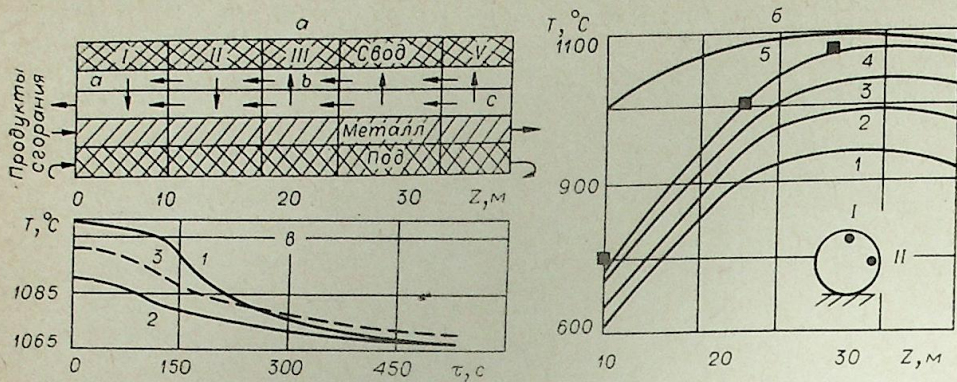


Рис. 1. Моделирование тепловой работы кольцевой печи.

а) геометрическая модель кольцевой печи; б) температура поверхности металла в процессе разогрева печи; кривые 1, 2, 3 соответствуют 5, 10 и 20 ч после начала разогрева, кривые 4, 5 — температуры поверхности металла и свода печи в стационарном режиме; ■ — экспериментальные температуры поверхности цилиндрических заготовок (температура точки 1); е) переходный процесс при останове печи, 1, 2 — экспериментальные значения температуры в точках I, II цилиндрической заготовки, 3 — расчетные значения температуры поверхности металла.

обмен между Р-зонами отсутствует (в выражении (12)  $g_{mn} = 0$ , если одновременно  $m > M$  и  $n > M$ ).

Практически оказывается, что итерации вида (18) сходятся достаточно быстро, если перенос тепла за счет излучения преобладает в тепловом балансе Р-зон. Значения  $\beta$  можно использовать из интервала  $0,5 \div 0,8$ . С ростом конвективно-кондуктивной составляющей в тепловом балансе Р-зон для сходимости итерационного процесса необходимо уменьшать величину  $\beta$ , при этом сходимость постепенно ухудшается и использование  $\beta < 0,2$  не целесообразно.

Рассмотрим влияние конвективного теплообмена на сходимость итерационного процесса (18) на конкретном примере. Геометрическая модель пламенной кольцевой печи (рис. 1, а) представляет собой развертку в виде параллелепипеда, разбитого на 10 объемных зон (5 расчетных участков по длине и 2 зоны по высоте) и 15 поверхностных зон (3 зоны на каждом расчетном участке, соответствующие своду печи, ее стенкам и металлу). Схема движения газов в печи, распределение расхода топлива по зонам и экспериментальные замеры температуры поверхности металла взяты из работы [6].

С помощью метода (18) решалась задача определения температуры дымовых газов в момент включения горелок в холодной печи. Газовые зоны рассматривались как Р-зоны, а поверхности металла и кладки как С-зоны. В этом примере доля конвективного теплообмена в общем балансе тепла для газовых зон значительно больше, чем в реальном случае работающей печи. Она составляет приблизительно 0,6; 0,7; 0,85 для зон а, б, с соответственно (см. рис. 1, а). Тем не менее, как видно из рис. 2, итерации для зон а и б сходятся довольно быстро. Что касается зоны С, то перенос тепла излучением для нее очень мал в силу ее низкой температуры. Поэтому соответствующее зоне С балансовое уравнение системы (14) вырождено, и при итерациях возникают незатухающие колебания температуры этой зоны из-за ошибок округления. В реальных условиях доля конвективного теплообмена в печи данного типа не превышает 20% и уже 2—3 итерации вида (18) позволяют получить решение системы уравнений (14) с приемлемой точностью.

Предлагаемый алгоритм использован для построения динамической модели нагрева металла в кольцевой печи. Металл в печи условно моделировался пластиной, толщину которой принимали равной радиусу реальной цилиндрической заготовки. Удельную теплоемкость для пластины

определяли так, чтобы полная теплоемкость металла в пределах каждого расчетного участка совпала с теплоемкостью элемента пластины, заполняющего этот участок, а теплопроводность считали равной теплопроводности металла. Свод печи, ее стенки и под также моделировали пластинами. Пластины были разбиты на 5 элементов в соответствии с числом расчетных участков. Для каждого элемента была построена сетка из 8 узлов, необходимая для решения нелинейного уравнения теплопроводности. Общее количество узлов сетки составляло 160.

На внешней поверхности кладки печи температура считалась заданной, на границе металл — под задавали условия IV рода. Температура металла на входе в печь считалась заданной, тогда как для пода задавались циклические условия: температурные поля на выходе из печи и на входе в печь совпадают.

Стационарный тепловой режим печи не зависит от начальных условий. Удобно считать, что в начальный момент времени печь имеет температуру  $0^\circ\text{C}$  и заполнена металлом с той же температурой, хотя это не соответствует технологии прогрева печи. В этом случае время установления в печи стационарного режима 50 ч. Время пребывания металла в печи 1,5 ч, что соответствует производительности печи  $G = 54$  т/ч при диаметре заготовок 0,17 м и суммарной тепловой мощности  $B_{\Sigma} Q_{\text{H}}^p = 32$  МВт.

В стационарном режиме расчетные и экспериментально определенные температуры поверхности металла хорошо совпадают (см. рис. 1, б).

На рис. 1, в показана температура поверхности металла в III технологической зоне на начальной стадии переходного процесса, который возникает при внезапном останове печи, выведенной на рассмотренный выше стационарный режим. В III технологическую зону во избежание перегрева металла подается холодный воздух. Сравнение расчетных и экспериментальных данных показывает их качественное соответствие, однако полного количественного совпадения не наблюдается, поскольку в этом примере реальная заготовка, имеющая цилиндрическую форму, моделируется пластиной.

В заключение отметим, что предложенный метод без каких-либо изменений переносится на случай нагрева тел сложной формы в условиях радиационно-конвективного теплообмена. Расчеты показали довольно высокую эффективность предложенного алгоритма: моделирование нагрева заготовки в кольцевой печи, протекающего в реальных условиях в течение 1,5 ч, требует 9 с машинного времени при использовании ЭВМ. Это позволяет ожидать приемлемых затрат машинного времени при использовании алгоритма для моделирования нагрева тел сложной формы.

Уральский политехнический институт  
им. С. М. Кирова, Свердловск

Поступила в редакцию  
17/XI 1980

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лисенко В. Г. Зональная модель теплообмена при нагреве металла в пламенных печах. — ИВУЗ. Черная металлургия, 1972, № 8.
2. Андрианов В. Н. Основы радиационного и сложного теплообмена. М. Энергия, 1972.
3. Невский А. С. Лучистый теплообмен в печах и топках. М.: Металлургия, 1971.
4. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.
5. Бахвалов Н. С. Численные методы, т. 1. М., 1975.
6. Гончаров А. Л. Разработка тепловых режимов и исследование теплообмена в нагревательных печах с движущимся металлом при изменении производительности в широком диапазоне. Канд. дис. Свердловск, 1979.

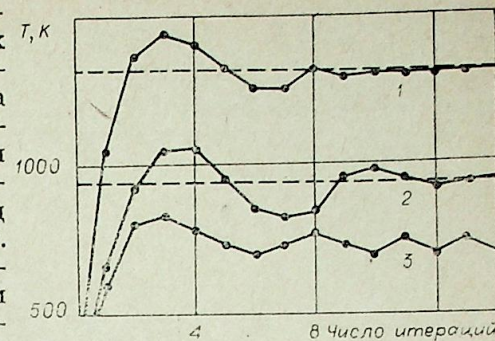


Рис. 2. Сходимость итерационного процесса при включении факела в холодной печи. 1, 2, 3 — значения температур зон а, б, с в процессе итераций.

УДК 541.11

П. С. ГОРДИНЕНКО, А. В. ЕФИМЕНКО, Л. Ф. ГОРИН,  
Н. Я. КОВАРСКИЙ, А. С. ИМБЕРГ, Р. А. МАШКОВСКАЯ

### ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ГАЛЬВАНИЧЕСКИХ ДАТЧИКОВ ТЕПЛОВЫХ ПОТОКОВ

Теплопроводящие микрокалориметры находят широкое применение в различных областях научных исследований. Это объясняется, во-первых, высокой чувствительностью подобных устройств [1], во-вторых, использование дифференциальных калориметрических устройств дало возможность исследования процессов, протекающих довольно длительное время с малыми энергетическими изменениями.

Анализ существующих микрокалориметрических устройств показывает, что при разработке подобных устройств необходимо решать довольно сложные задачи. В работе [2] эти задачи четко сформулированы. Прежде всего необходимо расширить рабочий диапазон температур калориметрических устройств, добиться значительного снижения постоянной времени. В [3, 4] показаны возможности изготовления малоинерционных, высокочувствительных термобатарей для теплопроводящих калориметров. На основе гальванических термобатарей разработаны и успешно применяются калориметрические устройства с максимальной рабочей температурой до 900—1000 К.

Повышению рабочих температур калориметрических устройств препятствует то, что с ростом температуры происходит разрушение материалов термодатчиков. Причины разрушения и выхода из строя могут быть самые разнообразные. Так, при нагреве калориметрического блока в атмосфере воздуха происходит окисление термоэлектродов и резкое снижение термоэлектродвижущей силы термобатареи. Это относится в первую очередь к датчикам, изготовленным гальваническим осаждением одного из термоэлектродных материалов на основной термоэлектрод. Нами проведены исследования зависимости ТЭДС некоторых пар термоэлектродов, которые могут быть использованы в микрокалориметрических устройствах до температуры 1300 К.

Спираль с последующим электроосаждением никеля или платины были приготовлены из хромеля, нихрома, никеля, платинородия.

Технология электроосаждения никеля на нихром и хромель к настоящему времени достаточно хорошо отработана и проводится по методике, описанной в работе [5]. Контроль электроосаждения проверялся металлографически, визуалью и по измерению ТЭДС  $\epsilon'$ .

Как видно из микрофотографии поперечного шлифа термоэлектрода (рис. 1, а, сверху), электроосаждение получалось качественное, несплошность между основой и осажденным никелем отсутствует, наблюдается переходная область (1) (рис. 1, а, сверху, участок 3). В настоящее время для электроосаждения платины предложено значительное количество электролитов, однако получаемые осадки по различным показателям все еще не полностью отвечают необходимым требованиям. Нами проводи-

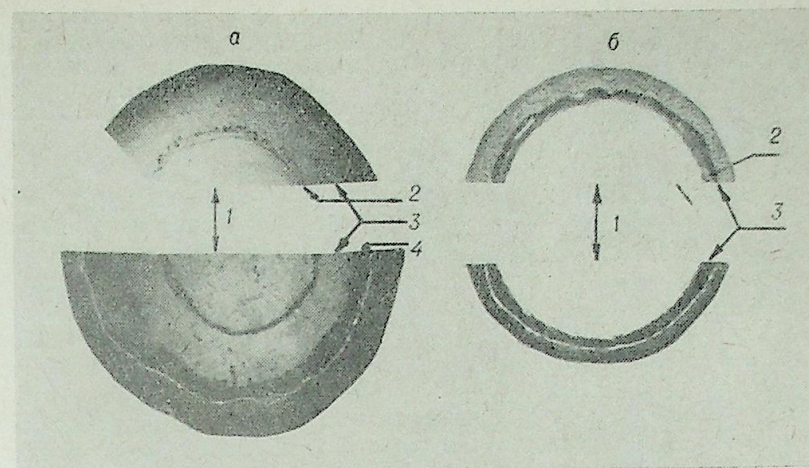


Рис. 1. Микрофотографии поперечных шлифов, неотожженных (вверху) и отожженных в течение 8 ч при  $T=1300$  К (внизу), хромель-никелевого (а) и платина-платинородиевого (б) гальванических датчиков.

Участки: 1 — хромелевая (а) и платинородиевая (б) основы; 3 — гальванически нанесенные слои никеля (а) и платины (б); 2 — граница между покрытием и основой.  $\times 150$ .

лись электроосаждения платины на никель, хромель, нихром и платинородий. Как показали исследования, лучшие результаты дало использование следующей методики.

Состав электролита (в г/л):  $\text{H}_2\text{PtCl}_6 \cdot 6\text{H}_2\text{O} - 24$ . В пересчете на металл Pt — 9;  $\text{NaHPO}_4 \cdot 12\text{H}_2\text{O} - 120$ ;  $(\text{NH}_4)_2\text{HPO}_4 - 24$ . Режимы осаждения: рабочая температура —  $50^\circ\text{C}$ ; катодная плотность тока  $\text{A}/\text{dm}^2 - 0,3$ ; периодичность тока, электролиз — 20 мин; пауза — 2 мин; нерастворимые аноды — платина.

Для хорошего сцепления с подложкой применялся такой режим предварительной обработки покрываемой поверхности:  $2\text{HNO}_3 - 15$  мин,  $2\text{HCl} - 10$  мин при температуре 360 К с последующей промывкой в воде.

Платиновые покрытия исследовались металлографически. Как видно на микрофотографии поперечного шлифа платина-платинородиевого датчика, покрытие получалось довольно качественное (см. рис. 1, б, сверху). Платиновые покрытия наносились толщиной 10—20 мкм.

Для указанных выше пар термоэлектродов были проведены расчеты зависимостей эффективных значений ТЭДС от температуры и от толщины напыления. Зависимость эффективной ТЭДС гальванической пары определялась по эмпирической формуле, предложенной в [3]:

$$\epsilon' = \frac{\epsilon_0 - \Delta T}{1 + \rho_2/\rho_1 \cdot S_1/S_2}, \quad (1)$$

где  $\epsilon_0$  — коэффициент ТЭДС, мВ/град;  $\rho_1, \rho_2, S_1, S_2$  — удельные электропроводности и сечения термоэлектродов основного и напыленного соответственно;  $\Delta T$  — перепад температур на спаях, град.

Для расчета отношения удельных электропроводностей выбранных пар термоэлектродных материалов измерены их электропроводности.

Электропроводность измерялось с помощью потенциометра Р-343 в диапазоне температур 290—1300 К. Полученные зависимости удельного сопротивления от температуры представлены на рис. 2. Расчетные значения зависимостей  $\epsilon'$  от  $T$  для исследуемых пар термоэлектродов показаны на рис. 3.

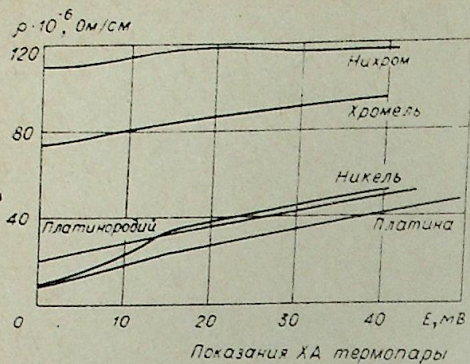


Рис. 2. Зависимости удельных сопротивлений нихрома, хромеля, никеля, платинородия и платины от температуры.

С ростом температуры  $\epsilon'$  для всех исследуемых пар термоэлектродов уменьшается, причем характер поведения зависимостей, как правило, нелинейный. Для термоэлектродов с отношением сечений  $S_1/S_2 = 0,1$  зависимостью  $\epsilon'$  от  $T$  в первом приближении можно считать линейной. Как видно из

рис. 3, для термоэлектродов, одним из которых является Ni, в зависимостях  $\epsilon'$  от  $T$  в области температуры 630 К наблюдается излом. Это связано с тем, что  $\epsilon'$  является функцией удельного сопротивления, а зависимость удельного сопротивления никеля от  $T$  в рассматриваемой области температур имеет перегиб вследствие фазового перехода в никеле при  $T = 637$  К [6]. В реальных условиях зависимость  $\epsilon'$  от температуры для термоэлектродов, отожженных на воздухе в течение длительного времени, не совпадает с расчетными значениями. Это объясняется тем, что происходит окисление поверхности термодатчика, т. е. меняется отношение сечений  $S_1/S_2$ .

Нами проведены длительные отжиги исследуемых датчиков на воздухе при  $T = 1300$  К. На датчики с платиновыми покрытиями длительные отжиги на воздухе при  $T = 1300$  К заметного влияния не оказывали. Как видно из сравнения микрофотографий поперечного шлифа элемента датчика платина-платинородиевого, неотожженного (см. рис. 1, б, сверху) и отожженного в течение нескольких часов (см. рис. 1, б, внизу), каких-либо существенных изменений в покрытии не происходит.

Наиболее существенное влияние оказывают отжиги на воздухе при  $T = 1300$  К на датчики с никелевым покрытием. На микрофотографии шлифа датчика никель — хромель (см. рис. 1, а, внизу), видно, что в результате отжигов при  $T = 1300$  К в течение 8 ч поверхность датчика окисляется.

Как показали измерения зависимости эффективного значения ТЭДС  $\epsilon'$  никель-хромелевого датчика от времени отжига на воздухе при  $T = 1300$  К (рис. 4), в течение 8 ч, величина  $\epsilon'$  уменьшается на 30%. Толщина окисного слоя, образовавшегося в течение 8 ч, равнялась 15 мкм. Расчет производился по соотношению (1). Измерения толщины окисного слоя по микрофотографии дали такую же величину.

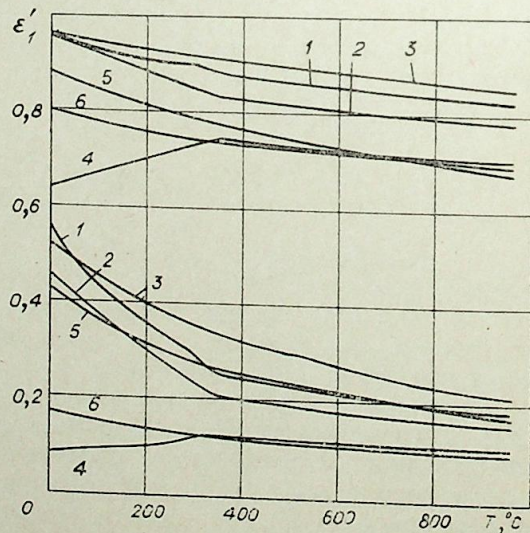
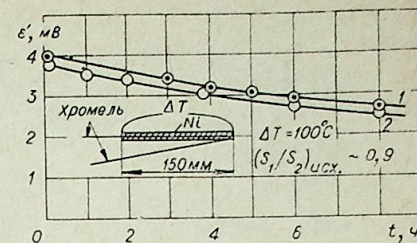


Рис. 3. Зависимости эффективных относительных значений ТЭДС  $\epsilon'$  гальванических пар от температуры;

1 — платина — нихром, 2 — никель — хромель, 3 — никель — нихром, 4 — платина — никель, 5 — платина — хромель, 6 — платина — платинородий. Верхние кривые — для отношения сечений основного и гальванически нанесенного термоэлектродов  $S_1/S_2 = 0,5$  и нижние — для  $S_1/S_2 = 10$ .

Рис. 4. Зависимость эффективного значения ТЭДС  $\epsilon'$  гальванического никель-хромелевого датчика от времени отжига при  $T = 1300$  К.



Для стабилизации термоэлектрических параметров хромель-никелевых, нихром-никелевых датчиков, работающих при температурах до 1300 К в обычной атмосфере, прежде всего необходимо исключить процессы окисления поверхностей термоэлектродов. Предотвратить окисление можно путем нанесения на датчики антикоррозионного высоко-температурного покрытия. Кроме того, из-за конструктивных особенностей термоэлектродов желательно, чтобы покрытие имело высокие электроизоляционные свойства при температурах до 1300 К.

Нами были приготовлены покрытия, удовлетворяющие этим требованиям, и проведены исследования эффективности их защиты.

В работе использовались покрытия на основе полукolloидных растворов и органосиликатные покрытия. Полукolloидные растворы представляют собой смеси золя 0-кремниевой кислоты и растворы солей (нитратов). При нагревании таких составов происходит разложение солей и на поверхности металла образуется тонкая, прочная пленка окислов или шпинелей  $Me(AlO_2)_2$ , обладающая антикоррозионными и электроизоляционными свойствами.

Полученное покрытие имеет прочное сцепление с подложкой, тонко-слоиное, светло-зеленого цвета. Для электро- и антикоррозионной защиты датчиков нами также применялось органосиликатное покрытие ОС-92-05 ГОСТ (ТУ-84-725-78).

Для нанесения полукolloидного покрытия металл окунали в состав, высушивали на воздухе, выдерживали в течение 3 ч при  $T = 550$  К, затем нагревали до 1300 К и выдерживали при этой температуре в течение 1—2 мин.

Как было выяснено ранее, гальванизированные никелем датчики теряют стабильность термоэлектрических параметров при отжиге за счет окисления слоя никеля. Поэтому испытание стойкости покрытия (коррозионной, электроизоляционной) проводилось на никеле. В качестве образцов использовали спирали из проволоки никеля, отсутствие окисления образцов, отжигаемых на воздухе при  $T = 1300$  К, регистрировали методом измерения электросопротивления по привесу и изучали металлографически. Сущность метода электросопротивлений заключается в том, что в результате окисления уменьшается диаметр образца за счет образования окислы, следовательно, общее сопротивление образца увеличивается:

$$\Delta R = \rho \frac{l}{\pi} \left( \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1^3 r_2^2} \right);$$

где  $\rho$  — удельное сопротивление материала образца,  $l$  — длина,  $r_1$  — радиус образца,  $\delta$  — толщина окисного слоя, образовавшегося в результате отжига;  $r_2 = r_1 - \delta$ .

Нами проведены измерения электросопротивления при  $T = 1300$  К в течение 8 ч. Электросопротивление не менялось, следовательно, покрытие достаточно надежно защищает никель от коррозии при  $T = 1300$  К.

Измерения по привесу дали такие же результаты. В этом случае отжиги при  $T = 1300$  К велись в течение 20 ч. Отожженные образцы исследовались металлографически. Как видно из микрофотографии поперечного шлифа термоэлектрода, защищенного электроизолирующим по-

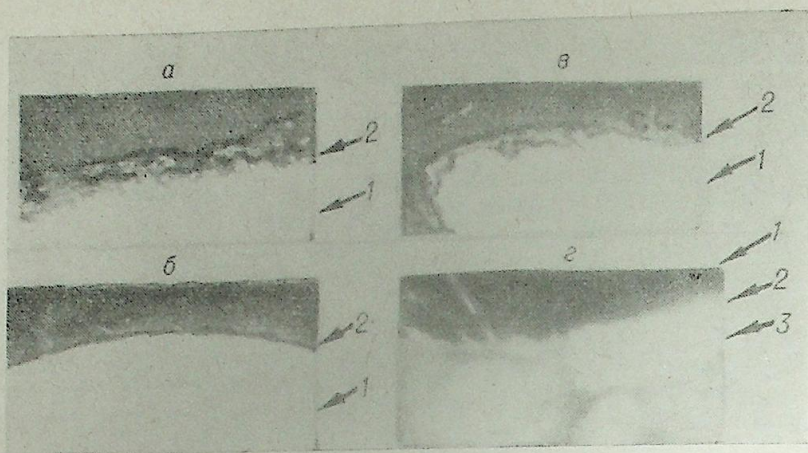


Рис. 5 Микрофотография шлифов образцов, отожженных на воздухе при  $T=1300$  К в течение 8 ч: никеля (а) и хромеля (в), незащищенных покрытием, и никеля (б, г), защищенного изолирующим покрытием.

а, в: 2 — окисные слои никеля и хромеля, 1 — никель, хромель; б, г: 2 — поверхность никеля, 3 — часть изолирующего покрытия, 1 — никель. а)  $\times 400$ , б)  $\times 200$ , в)  $\times 125$ , г)  $\times 440$ .

крытием, отожженного при  $T=1300$  К в течение 8 ч (рис. 5, б, участок 2), поверхность никеля не окисляется, отсутствуют характерные коррозионные углубления (на фотографии представлена очищенная от покрытия поверхность образца). На микрофотографии, полученной в поляризованном свете (см. рис. 5, г), показан участок (1) поверхности образца термоэлектрода, защищенного покрытием, и часть поверхности, свободной от покрытия. На поверхности термоэлектрода не наблюдаются окисные слои. При аналогичных условиях опыта без защитного покрытия на поверхности термоэлектрода образуются окисные слои в несколько микрон (см. рис. 5, а, в, участки 2).

Нами исследованы термоэлектрические параметры датчиков, защищенных покрытием на основе полукolloидных растворов (состав указан выше). Как показали измерения эффективного значения ТЭДС датчиков, гальванизованных никелем при отжигах до 20 ч на воздухе при  $T=1300$  К,  $\epsilon'$  практически не меняется и совпадает с расчетными значениями.

Таким образом, нами исследованы датчики тепловых потоков, изготовленные из платинородия, нихрома, хромеля с последующим гальваническим нанесением платины или никеля. Были рассчитаны и проанализированы зависимости эффективных значений  $\epsilon'$  от температуры и соотношения сечений для исследуемых пар термоэлектродов, разработана методика электроосаждения платины на термоэлектродные материалы: никель, хромель, нихром, платинородий. Изготовлены и исследованы датчики тепловых потоков, гальванизированные платиной и никелем.

Как показали измерения эффективных значений ТЭДС ( $\epsilon'$ ), отжиги датчиков с платиновым покрытием при  $T=1300$  К в атмосфере практически не приводят к изменению ее значения. Параметры датчиков, гальванизованных никелем и отожженных в атмосфере при  $T=1300$  К, изменяются за счет окисления поверхности никеля.

Нами разработано высокотемпературное покрытие на основе полукolloидных растворов, предохраняющее датчики от коррозии при  $T=1300$  К в атмосфере. Как показали измерения электросопротивления, привеса, металлографический анализ, покрытие надежно защищает никель от коррозии при  $T=1300$  К в течение длительного времени. Испы-

тание датчиков, покрытых разработанным составом, показало, что в результате отжигов при  $T=1300$  К в атмосфере в течение длительного времени (до 20 ч) ТЭДС  $\epsilon'$  датчиков практически не изменялась. Небольшие изменения до 3% от измеряемой величины наблюдались в течение первых 10 ч отжига датчиков. Очевидно, это связано с процессами рекристаллизации термоэлектродных материалов.

Институт химии ДВНЦ АН СССР,  
Владивосток

Поступила в редакцию  
20/XII 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кальве Э., Прат А. Макрокалориметрия. М.: ИЛ, 1963.
2. Гальперин Л. Н. Расширенные тез. докл. VII Всесоюз. конф. по калориметрии 31.I—3.II 1977 г. Черноголовка, 1977.
3. Геращенко О. А., Федоров В. Г. Тепловые и температурные измерения. Киев: Наукова думка, 1965.
4. Гордиенко П. С., Васильев А. П., Горев М. В. Деп. ВИНТИ № 4375-77, 5.XII 1977.
5. Гордиенко П. С., Лопарев М. П., Галайкин А. Ф.— В кн.: Машини и приборы для испытания материалов. М.: Металлургия, 1971.
6. Таблицы физических величин. Справочник/Под ред. И. К. Кикоина. М.: Атомиздат, 1976.

УДК 517.947.42

В. В. ДЕЙНЕКО

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ  
КРИСТАЛЛИЗАЦИИ

Решение данной проблемы было инициировано задачами управления технологическим процессом непрерывной разливки и кристаллизации металлов. Рассматриваемый вопрос относится к процессам теплопередачи с изменением агрегатного состояния. В математическом отношении это так называемые задачи со свободной границей, они являются существенно нелинейными и поэтому аналитические исследования их крайне сложны.

Аналогичные задачи решались в работах [1—3], однако в них не рассматривалось возникновение фазы на фиксированных границах. Например, в работе [3], посвященной методу сквозного счета для задачи Стефана со вторыми краевыми условиями, в постановке оговаривается постоянное наличие вдоль фиксированных границ только одной фазы.

В настоящей работе предложен сравнительно простой метод численного решения задачи Стефана с рассмотрением вопроса взаимодействия линии фазового перехода и фиксированных границ.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Область  $D$  прямоугольной формы в начальный момент времени заполнена двумя фазами одного вещества, занимающими односвязные области  $D_1$  и  $D_2$  (рис. 1). Пусть  $\gamma$  — линия раздела фаз. На границе  $\partial D \setminus \gamma$  заданы краевые условия 1-го и 2-го рода, не противоречащие фазовому состоянию. Фазовый переход 1-го рода происходит при постоянной температуре  $T_0$  со скрытой теплотой фазового перехода  $s$ . Теплопередача осуществляется молекулярной теплопроводностью. Задача состоит в нахождении линии фронта фазового перехода и распределения температур в фазах со временем.

Запишем уравнения теплопроводности для двух фаз:

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( a_i \frac{\partial T_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( a_i \frac{\partial T_i}{\partial y} \right), \quad i = 1, 2, \quad (x, y) \in D_i, \quad (1.1)$$

где  $T_i$  — температура  $i$ -й фазы,  $a_i$  — коэффициент температуропроводности  $i$ -й фазы.  $D_1 = \{x, y | x \in [0, L(y, t)], y \in [0, H]\}$ ,  $D_2 = \{x, y | x \in [L(y, t), L_0], y \in [0, H]\}$ ,  $L_0, H$  — геометрические размеры области  $D$ .

Краевые условия системы (1.1):

$$T_i|_{t=0} = T_{i0}(x, y), \quad (x, y) \in D_i,$$

$$T_i|_{\gamma} = T_0, \quad -\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial n} \Big|_{y=0, H} = Q(s), \quad i = 1, 2, \quad (1.2)$$

$$T_1|_{x=0} = T_1^*(y), \quad T_2|_{x=L_0} = T_2^*(y),$$

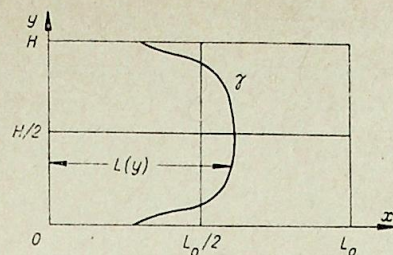


Рис. 1.

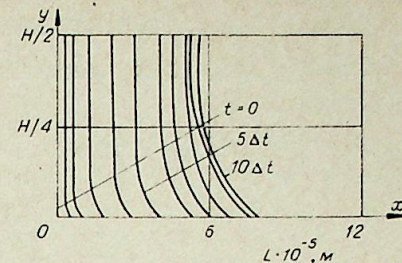


Рис. 2.

где  $n$  — внутренняя нормаль к области  $D$ ,  $\lambda_i$  — коэффициент теплопроводности,  $s$  — параметр границы  $y = 0, y = H$ .

Уравнение движения свободной границы вытекает из условия сохранения энергии при переходе через линию раздела фаз:

$$c\rho_1 \frac{\partial N}{\partial t} = -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} \Big|_{\gamma^-} + \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} \Big|_{\gamma^+}, \quad (1.3)$$

где  $dN = dL/\sqrt{1 + (\partial L/\partial y)^2}$ ;  $L(y)$  — протяженность 1-й фазы.

Начальное условие для (1.3)

$$L|_{t=0} = L_0^*(y).$$

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ

Области  $D_1, D_2$ , изменяемые подвижной свободной границей  $\gamma$ , приведем путем преобразования координат к единичным квадратам — областям  $D_1^*, D_2^*$ .

Для 1-й фазы:  $x^* = x/L(y, t)$ ,  $y^* = y/H$ ,  $l = L/L_0$ ;

для 2-й  $x^* = (x - L(y, t))/(L_0 - L(y, t))$ ,  $y^* = y/H$ ,

после чего уравнения (1.1) примут вид (\* опускаем).

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_i}{\partial t} = & a_i \left( \frac{\xi_i^2}{L_0^2} + \frac{\eta_i^2}{H^2} \right) \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^{*2}} + \frac{a_i}{H^2} \frac{\partial^2 T_i}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial T_i}{\partial x} \left[ \frac{\partial a_i}{\partial x} \left( \left( \frac{\xi_i}{L_0} \right)^2 + \left( \frac{\eta_i}{H} \right)^2 \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\eta_i}{H^2} \frac{\partial a_i}{\partial y} + a_i \left( \frac{\eta_i}{H^2} \frac{\partial \eta_i}{\partial x} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial \eta_i}{\partial y} + \frac{\xi_i}{L_0^2} \frac{\partial \xi_i}{\partial x} \right) - \tau_i \right] + \\ & + \frac{1}{H} \frac{\partial T_i}{\partial y} \left[ \frac{\partial a_i}{\partial y} \frac{1}{H} + \frac{\eta_i}{H} \frac{\partial a_i}{\partial x} \right] + 2a_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial x \partial y} \frac{\eta_i}{H^2}, \quad i = 1, 2, \quad (2.1) \end{aligned}$$

где  $\xi_1 = 1/l$ ,  $\eta_1 = -(x/l) \frac{\partial l}{\partial y}$ ,  $\tau_1 = -(x/l) \frac{\partial l}{\partial t}$ ,

$$\xi_2 = 1/(1-l), \quad \eta_2 = (x-l) \frac{\partial l}{\partial y} / (1-l), \quad \tau_2 = (x-1) \frac{\partial l}{\partial t} / (1-l).$$

Уравнение (1.3) и краевые условия (1.2) в новых координатах примут вид

$$\frac{\partial l}{\partial t} = \left( -\frac{\lambda_1}{l} \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=1} + \frac{\lambda_2}{(1-l)} \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=0} \right) \left( 1 + \left( \frac{\partial l}{\partial y} \frac{L_0}{H} \right)^2 \right) / (c\rho_1 L_0^2), \quad (2.2)$$

$$-\frac{x}{l} \frac{\partial l}{\partial y} \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} = -\frac{Q(x)}{\lambda_1} H(n, y), \quad (2.3)$$

$$\left( \frac{x-1}{1-l} \right) \frac{\partial l}{\partial y} \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} = -\frac{Q(x)}{\lambda_2} H(n, y). \quad (2.4)$$

### 3. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ

Систему (2.1), (2.2) представим в конечно-разностной аппроксимации:

$$[P_i](T_i, l) = 2a_i \frac{\eta_i}{H^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right] T_i, \quad i = 1, 2,$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} \right] l = [R](T_1, T_2, l),$$

где выражения, стоящие в квадратных скобках, представляют центральную аппроксимацию дифференциального оператора. Решение этой системы будем искать методом продольно-поперечной прогонки по итерационной схеме:

$$[P_i](T_i^m, l^{m-1}) = 2a_i \frac{\eta_i}{H^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right] T_i^{m-1}, \quad (3.1)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} \right] l^m = [R](T_1^m, T_2^m, l^{m-1}) \quad (3.2)$$

с крайевыми условиями:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial y} \right] T_1^m |_{y=0,1} = -\frac{Q(x)H}{\lambda_1}(n, y) + \left[ \frac{x}{l} \frac{\partial l}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right] T_1^{m-1}, \quad (3.3)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial y} \right] T_2^m |_{y=0,1} = -\frac{Q(x)H}{\lambda_2}(n, y) - \left[ \frac{x-1}{1-l} \frac{\partial l}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right] T_2^{m-1},$$

Однако решение системы (3.1), (3.2) с крайевым условием (3.3) может не дать удовлетворительного решения, так как мы не застрахованы при крайевых условиях 2-го рода от состояний, не свойственных данной фазе. Кроме того, вблизи фиксированных границ естественно ожидать больших значений  $\partial l / \partial y$ , которые приводят к большой погрешности при нахождении линии раздела фаз или даже к вырождению уравнения (2.1).

Мелкое разбиение сетки вблизи границы не устраняет особенностей, так как заранее неизвестна толщина «намерзшей» пленки.

Рассмотрим детально область вблизи фиксированной границы, на которой задано 2-е крайнее условие. Область по ширине равна одному шагу сетки по нормали к границе. Определим функцию  $N_0(x)$ , равную толщине слоя  $i$ -й фазы вдоль границы области  $D_{i+1}$ .

Пусть ось  $y$  совпадает с направлением внутренней нормали к области  $D$  в рассматриваемой части границы, тогда изменение положения  $\gamma$  вдоль  $x$  запишется

$$c\rho_i \frac{\partial N_0}{\partial t} = \left( Q(x) + \lambda_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial y} \right) (-1)^i, \quad i = 1, 2, \quad y = 0.$$

Сеточное значение протяженности  $L_h$  при  $y = 0$ ,  $H$  определим уравнением

$$\frac{\partial L_h}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{h} \int_0^{L_h} \frac{\partial N_0}{\partial t} dx.$$

В задачах, связанных с непрерывными процессами кристаллизации, важно знать точное значение  $L$  на границах объема.

Пусть линия раздела фаз  $\gamma$  представляет собой гладкую аппроксимацию среднеобъемных значений протяженностей фазы интервалов разбиения объема  $D$ . Малое значение  $N_0(x)$  (меньшее шага сетки) дает возможность пренебречь изменением геометрии за счет «намерзающих» пленок и заменить присутствие другой фазы в виде пленки на границе первым крайевым условием.

Для нахождения граничных значений протяженностей  $L(y)$  на фиксированных границах области  $D$ , на которых задано второе крайнее условие, введем характеристическую функцию  $\delta = \delta(s, T(s), N_0(s))$ , равную

1 либо 2, определяющую соответствующий тип крайевых условий:

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{если } T(s) = T_0, \quad N_0(s) > 0, \\ 2 & \text{если } T(s) \neq T_0, \quad N_0(s) = 0. \end{cases}$$

Тогда крайнее значение  $L$  определяется совокупностью  $s \in \partial D$ , в которых  $\delta(s) = 1$ . Значения  $\delta(s, T(s), N_0(s))$  уточняются в общем итерационном процессе решения системы (3.1), (3.2).

### 4. ПРИМЕР

Рассмотрим пример численного счета системы (3.1), (3.2) при различных значениях сжима тепла с границ, в малом диапазоне начального распределения температур, позволяющем пренебречь зависимостью физических параметров материалов от температуры.

Физические параметры вещества соответствуют паре вода — лед. Геометрические размеры и крайевые условия:

$$L_0 = 0,1 \text{ м}, \quad H = 0,03 \text{ м}, \quad T_1|_{t=0} = 1^\circ\text{C}, \quad T_2|_{t=0} = -1^\circ\text{C}, \quad \Delta t = 50 \text{ с}.$$

На рис. 2, 3 изображено смещение линии фазового перехода со временем при стоках тепла  $Q$  в 12 и 50 Вт/м<sup>2</sup> соответственно через границу  $y = 0$ . Хорошо видно качественное отличие процесса кристаллизации.

Задача была решена на вычислительной системе Р6060-0 ливетти.

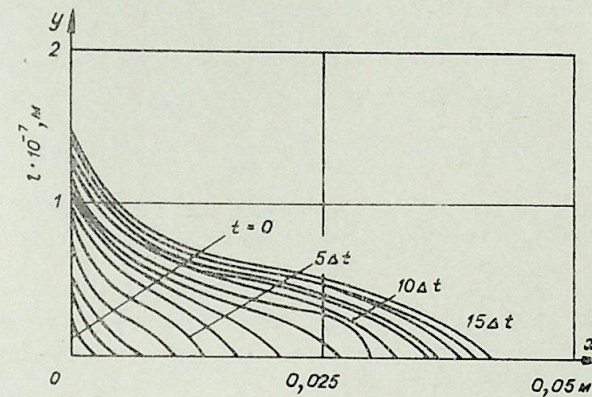


Рис. 3.

Численные эксперименты показывают возможность определения оптимального режима охлаждения из соображений увеличения скорости кристаллизации при отсутствии больших кромок твердой фазы вдоль охлаждающих границ. Достигнуть этого можно нахождением либо постоянного вдоль всей границы стока тепла, либо управлением величины потока тепла вдоль границ охлаждения. Необходимо иметь в виду, что вследствие нарастания кристаллизованных кромок появляются конвективные потоки, качественно меняющие картину теплопередачи.

Процесс кристаллизации дискретный и связан с переохлаждением (перегревом) вещества в зоне кристаллизации, поэтому численный результат непрерывного движения линии раздела фаз следует рассматривать как предельный (пренебрежимо малых кристаллов), а вдоль фиксированных границ — как потенциальную возможность образования фазы.

Специальное конструкторское бюро  
гидроимпульсной техники  
СО АН СССР, Новосибирск

Поступила в редакцию  
11/IV 1980

### ЛИТЕРАТУРА

- Saito T. Numerical Method for Multi-Dimensional Freezing Problems in Arbitrary Domains.— J. of Heat Transfer., Transactions of the ASME, 1978, v. 100, N 2.
- Kern J. A Simple and Apparently safe Solution to the Generalised Stefan Problem.— Inter. J. of Heat and Mass Transfer., 1977, v. 20, N 5.
- Валиуллин А. Н., Воронко В. П., Сафин Р. П. Экономичная разностная схема сквозного счета для решения осесимметрической задачи Стефана.— В кн.: Числ. методы механики сплошной среды, т. 4, № 3. Новосибирск, 1973.

Н. М. БЫЧКОВ, В. М. КОВАЛЕНКО

АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ СИЛЫ  
НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ ШЕРОХОВАТОМ ЦИЛИНДРЕ  
В ПОПЕРЕЧНОМ ПОТОКЕ

При исследовании обтекания вращающегося гладкого цилиндра в поперечном потоке с очень низкой степенью турбулентности обнаружены некоторые качественно новые явления, которые могут представлять практический и научный интерес [1]. В частности, при относительно небольших скоростях вращения наблюдались резкие и довольно значительные по величине изменения аэродинамических сил — подъемной и силы сопротивления — результат быстрой смены положения несимметричных точек отрыва пограничного слоя. Установлены основные закономерности изменения коэффициентов этих сил в зависимости от числа Рейнольдса и параметра вращения для малотурбулентного и турбулизованного потоков.

Обтекаемая поверхность, как правило, не является идеально или даже аэродинамически гладкой. Она может быть шероховатой, а также иметь отдельные неровности в виде стыков, выступов и т. д. Влияние однородной шероховатости на обтекание невращающегося цилиндра исследовалось в работах [2—5]. Однако для практических целей очень важно определить влияние шероховатости на аэродинамические силы также и при вращении тел, в частности кругового цилиндра в поперечном потоке.

**Экспериментальное оборудование и методика измерений.** Данная работа продолжает исследования, выполненные авторами на гладком вращающемся и неподвижном цилиндре, при этом экспериментальное оборудование и методика измерений остались без изменения [4, 5].

Испытания проведены в малотурбулентной аэродинамической трубе Т-324 Института теоретической и прикладной механики СО АН СССР с закрытой рабочей частью сечением  $1 \times 1$  м<sup>2</sup>. В опытах варьировались: скорость потока ( $U_\infty = 10 \div 60$  м/с), степень его турбулентности ( $\varepsilon = 0,04$ , или  $0,7\%$ ) и скорость вращения цилиндра ( $n = 0 \div 1600$  об/мин).

Повышенная турбулентность потока обеспечивалась с помощью турбулизирующей сетки, которую устанавливали перед входом в рабочую часть трубы. Шероховатость цилиндра создавалась наклеиванием на всю его поверхность наждачной бумаги с абразивным покрытием, имеющим размеры основной фракции  $h = 100$  мкм, так что относительная шероховатость составляла  $h/d = 6,7 \cdot 10^{-4}$ , где  $d = 150$  мм — диаметр цилиндра. Для гладкого цилиндра шероховатость поверхности не превышала  $0,3 \cdot 10^{-4}$ , отклонения  $\Delta R$  от круговой формы достигали  $0,02$  мм (рис. 1). Для шероховатого цилиндра наличие отслоений наждачной бумаги и в особенности стыка, расположенного под углом  $\varphi = 150^\circ$ , приводило к более заметным отклонениям от круговой формы, достигавшим  $0,2$  мм. Отмеченные дефекты поверхности при некоторых условиях

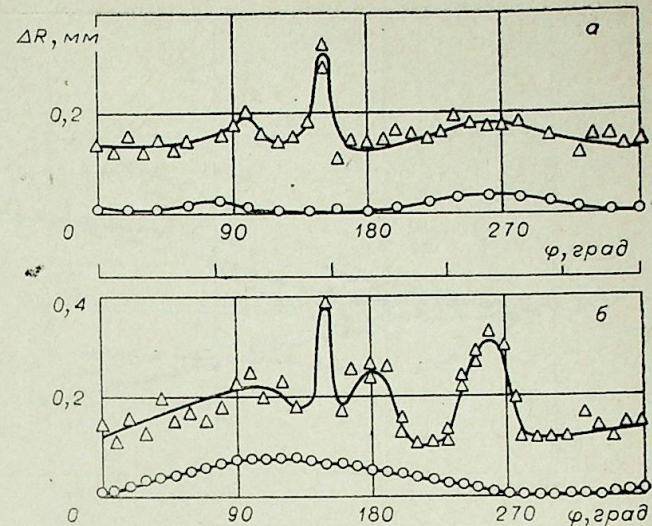
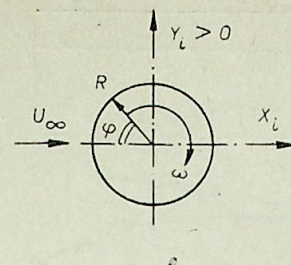


Рис. 1. Форма наружной поверхности цилиндра.

а) Весовая сечка; б) сечение через отверстие  $P_{ст}$ ;  $\circ$  — гладкая поверхность;  $\triangle$  — с наждачной бумагой ( $\varphi = 240 \div 280^\circ$  — местное отслоение).

оказывали влияние на обтекание неподвижного цилиндра [5], но они мало отражались на результатах измерения осредненных по времени аэродинамических сил при наличии вращения. Последнее объясняется близким к синусоидальному характером изменения мгновенных сил на вращающемся цилиндре под влиянием указанных дефектов формы.

С помощью тензометрических весов и плейфогового осциллографа И-117 измеряли и непрерывно регистрировали мгновенные значения подъемной силы  $Y_i$  и силы сопротивления  $X_i$  при различных скоростях вращения цилиндра, в том числе при  $n = 0$  до и после опыта ( $n$  — число об/мин). Это позволило определить коэффициенты аэродинамических сил  $C_{y_i}$  и  $C_{x_i}$  в зависимости от параметра вращения  $\theta = \pi d n / 60 U_i$  и числа Рейнольдса  $Re = U_\infty d / \nu$ , где  $U_\infty$ ,  $U_i$  — скорость потока соответственно без вращения и при вращении цилиндра,  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости.

Точность определения аэродинамических характеристик шероховатого цилиндра близка к указанной в [1, 5] для гладкого цилиндра, т. е. погрешность составляла в основном  $5-10\%$ . В отдельных случаях наличие стыка наждачной бумаги могло создавать дополнительные погрешности за счет увеличения амплитуды колебаний измеряемых сил. При вычислении средней скорости  $U_\infty$  или  $U_i$ , с которой происходило обтекание цилиндра, вводили поправку, учитывающую влияние загромождения рабочей части аэродинамической трубы, а также влияние вращения и вызванного им изменения сопротивления цилиндра, а следовательно, и сопротивления всего тракта аэродинамической трубы. Последнее связано с изменением положения точек отрыва пограничного слоя и ширины следа за цилиндром при его вращении [1, 5]. Увеличение шероховатости поверхности, так же как и повышение турбулентности потока, приводит к стабилизации положения точек отрыва, что подтверждается измерениями на неподвижном цилиндре [5]. Вследствие этого изменения относительной скорости  $\bar{U}_i = U_i / U_\infty$  при вращении шероховатого цилиндра заметно уменьшаются (рис. 2).

Поле скоростей перед цилиндром на расстоянии  $10-12$  калибров от него, как показали измерения, было равномерным. При наличии турбулизирующей сетки максимальные отклонения скорости от среднего значения в ядре потока достигали  $1,3\%$ .

На обтекание цилиндра в аэродинамической трубе закрытого типа могут, по-видимому, влиять также акустические возмущения, идущие

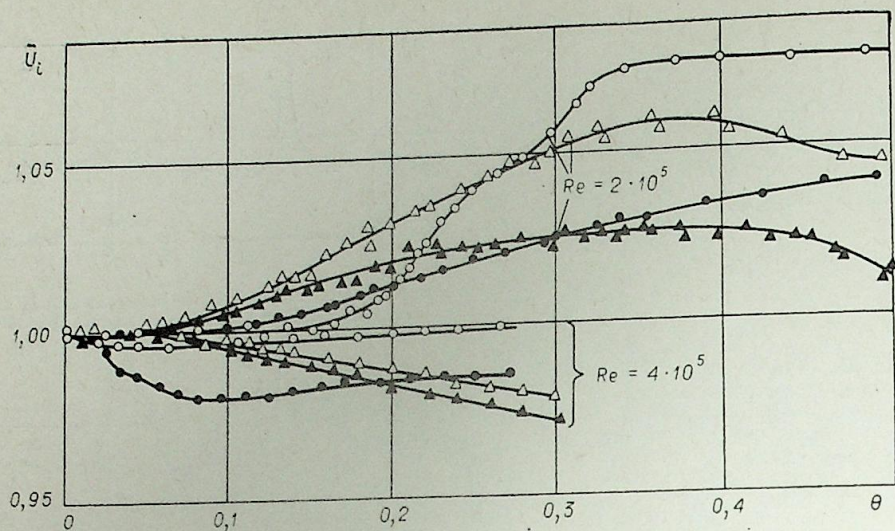


Рис. 2. Обусловленное вращением цилиндра изменение скорости потока в трубе при различных условиях.  
Гладкий цилиндр:  $\varepsilon=0,04$  (○), 0,7% (●); шероховатый цилиндр:  $\varepsilon=0,04$  (△), 0,7% (▲).

из области следа или отраженные от стенок трубы. Кроме того, могут сказываться трехмерные эффекты, которые характеризуются наличием вторичных течений и неодинаковой картиной обтекания по длине цилиндра. Эти вопросы исследованы еще недостаточно, частично они обсуждались в [1, 5].

**Результаты измерений. Подъемная сила.** На рис. 3 и 4 приведены коэффициенты подъемной силы  $C_{y_i}$  в зависимости от параметра вращения  $\theta$  при различных числах Рейнольдса соответственно в малотурбулентном и турбулизованном потоках. Основной отличительной особенностью поведения функций  $C_{y_i}(\theta)$  для шероховатого цилиндра по сравнению с гладким (см. [1]) является почти полное отсутствие отрицательных значений  $C_{y_i}$  в рассмотренном диапазоне чисел  $Re$  и параметра вращения  $\theta$ , кроме кривой при  $Re = 2 \cdot 10^5$ .

Все зависимости  $C_{y_i}(\theta, Re)$  для шероховатого цилиндра можно разделить на два основных вида, отличающихся диапазоном чисел Рейнольдса:  $Re < Re_{кр}$  и  $Re \geq Re_{кр}$ . При этом величина  $Re_{кр}$  не является постоянной, а зависит от условий в потоке и на границе обтекаемого тела. Для гладкого цилиндра в малотурбулентном потоке  $Re_{кр} \approx 4 \cdot 10^5$ , при увеличении степени турбулентности или шероховатости эта величина уменьшается и достигает  $3 \cdot 10^5$  в случае шероховатого цилиндра. Указанные значения  $Re_{кр}$  соответствуют точке минимума коэффициента сопротивления неподвижного цилиндра в зависимости от числа Рейнольдса [5]. Они могут быть определены также на основе особенностей поведения аэродинамических характеристик вращающегося цилиндра [1].

Зависимости  $C_{y_i}(\theta)$  при  $Re < Re_{кр}$  имеют более сложный вид, который характеризуется немонотонностью, неоднозначностью, наличием участков с отрицательными значениями. Неоднозначность, как и отрицательные значения подъемной силы, наблюдалась лишь в некотором диапазоне параметра вращения  $\theta$  при числе  $Re = 2 \cdot 10^5$  и представлена на рис. 3 и 4 двумя ветвями  $C_{y_i}(\theta)$ , причем в опытах переход с одной ветви на другую происходил хаотично.

При  $Re \geq Re_{кр}$  функции  $C_{y_i}(\theta)$  для шероховатого цилиндра в рассмотренной области значений  $Re$  и  $\theta$  только положительны и имеют вид, близкий к линейному. Однако коэффициент наклона указанных функций

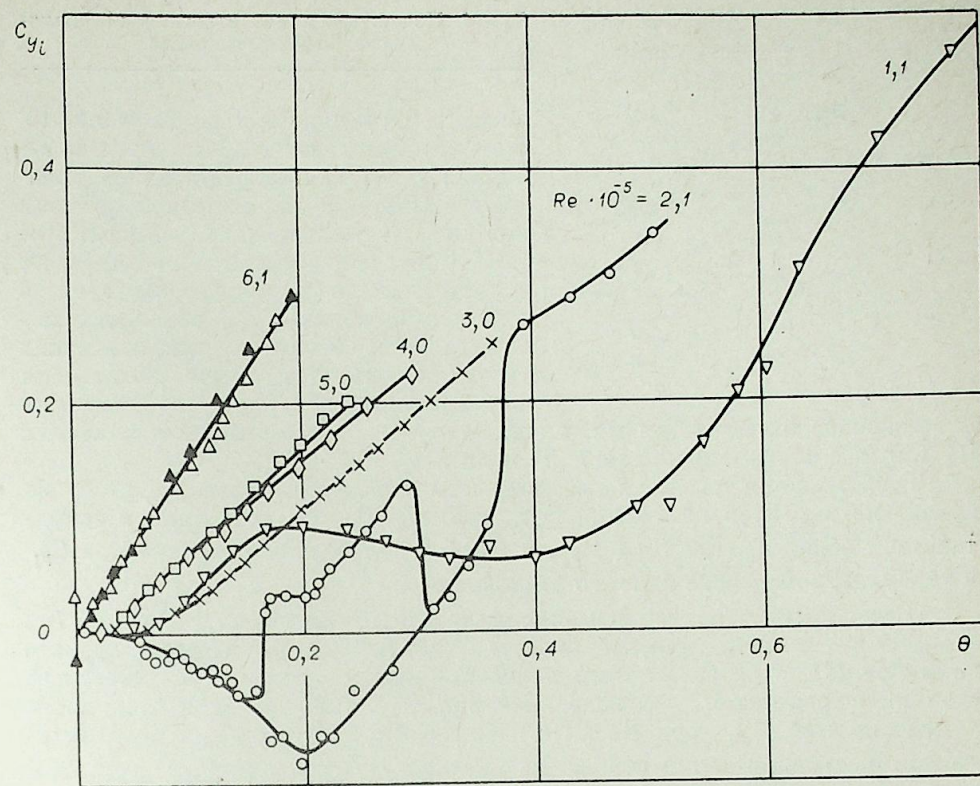


Рис. 3. Коэффициент подъемной силы вращающегося шероховатого цилиндра в малотурбулентном потоке при числах  $Re = (1,1 \div 6,1) \cdot 10^5$ .  
▲ — при уменьшении  $\theta$ ; остальные точки — при увеличении  $\theta$ .

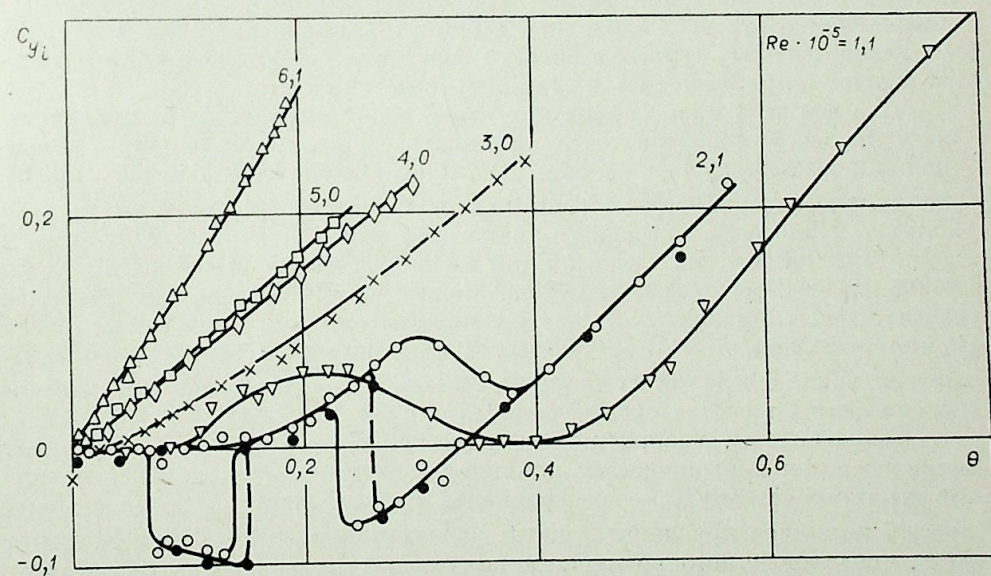


Рис. 4. Коэффициент подъемной силы вращающегося шероховатого цилиндра в турбулизованном потоке при числах  $Re = (1,1 \div 6,1) \cdot 10^5$ .  
● — при уменьшении  $\theta$ ; остальные точки — при увеличении  $\theta$ .

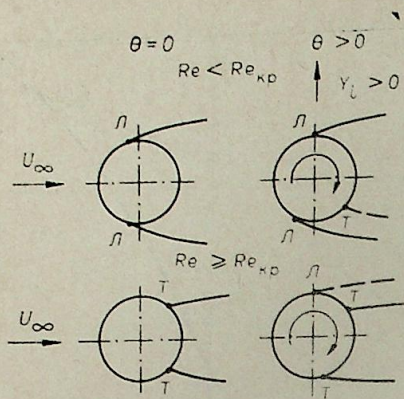


Рис. 5. Положение точек отрыва в пограничном слое на цилиндре.

зависит от числа  $Re$ . При  $Re = 6,1 \cdot 10^5$  этот коэффициент приближается к величине  $b = 1,6$ , соответствующей гладкому цилиндру в малотурбулентном потоке [1]. Зависимость коэффициента  $b$  для шероховатого цилиндра от числа Рейнольдса свидетельствует о том, что моделирование обтекания цилиндра при больших закритических числах Рейнольдса путем увеличения шероховатости поверхности [3, 4], если

и возможно, то, по-видимому, начиная только с определенных значений  $Re$  и  $h/d$ , в частности при  $Re > 6 \cdot 10^5$  и  $h/d > 6,7 \cdot 10^{-4}$ .

Турбулизация потока в рассмотренных пределах относительно слабо влияет на характер изменения функций  $C_{y_i}(\theta, Re)$ , особенно в закритической области. При  $Re < Re_{кр}$  и  $\theta \geq 0,4$  величина коэффициентов  $C_{y_i}$  в турбулентном потоке заметно уменьшается.

Отмеченный характер изменения коэффициентов  $C_{y_i}(\theta, Re)$  в докритической и закритической областях связан, как и в случае гладкого цилиндра [1], с особенностями поведения точек отрыва пограничного слоя на шероховатом цилиндре. Из рис. 5 видно, что неоднозначность коэффициентов  $C_{y_i}$  при  $Re < Re_{кр}$  может быть обусловлена неустойчивостью положения точки отрыва на нижней стороне цилиндра, при этом хаотическим изменениям коэффициента  $C_{y_i}$  соответствуют, вероятно, столь же неупорядоченные переходы точки отрыва из положения Л в положение Т, и наоборот. При  $Re \geq Re_{кр}$  отрыв на обеих сторонах цилиндра происходит в точках, отмеченных индексом Т. Вращение цилиндра приводит к монотонному увеличению подъемной силы, знак которой положителен. Однако не исключено резкое уменьшение этой силы при достаточно больших значениях параметра вращения, что соответствует перемещению отрыва на верхней стороне цилиндра из точки Т в точку Л. Такие явления, причем в области гораздо меньших значений параметра вращения, наблюдались на гладком цилиндре [1].

Для иллюстрации сказанного выше о влиянии степени турбулентности потока и шероховатости цилиндра на величину и знак коэффициента подъемной силы на рис. 6 дано сравнение зависимостей  $C_{y_i}(\theta)$  для четырех вариантов условий при различных значениях числа Рейнольдса. Кривые для гладкого цилиндра относятся соответственно к докритической (а), критической (б) и закритической (в) областям чисел Рейнольдса, причем  $Re_{кр} \approx 4 \cdot 10^5$ . Кривые для шероховатого цилиндра соответствуют критической (а) и закритической (б, в) областям чисел Рейнольдса, при этом  $Re_{кр} \approx 3 \cdot 10^5$ . Форма кривых и знак  $C_{y_i}$  определяются в значительной степени положением точек отрыва при указанных условиях в соответствии со схемой на рис. 5.

**Сопротивление вращающегося цилиндра.** Как известно, коэффициент сопротивления вращающегося цилиндра может быть представлен в виде суммы двух слагаемых — коэффициента сопротивления  $C_{x_0}$  невращающегося цилиндра при данном числе  $Re$  и дополнительного коэффициента  $\Delta C_{x_i}$ , обусловленного вращением цилиндра [1]. Величина  $\Delta C_{x_i}$  может быть как положительной, так и отрицательной в зависимости от числа  $Re$ , параметра вращения  $\theta$ , а также от степени турбулентности потока и шероховатости поверхности цилиндра.

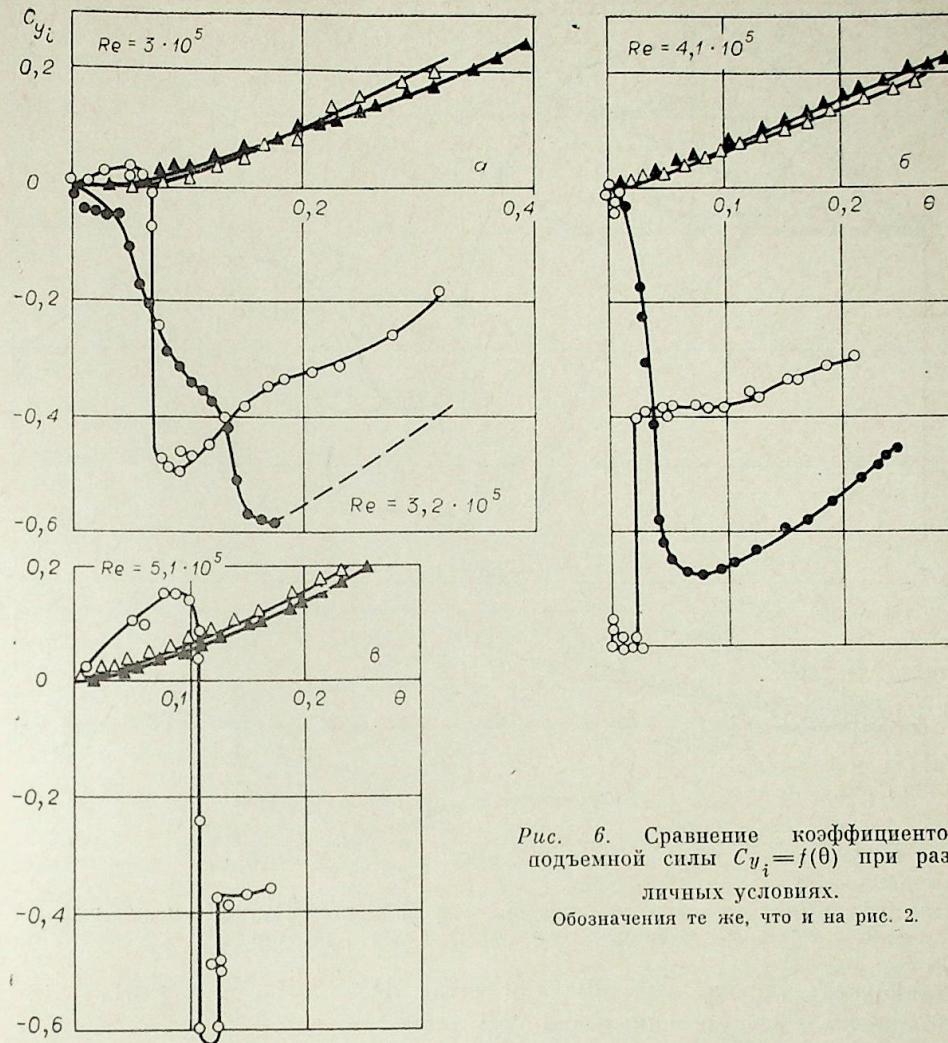


Рис. 6. Сравнение коэффициентов подъемной силы  $C_{y_i} = f(\theta)$  при различных условиях. Обозначения те же, что и на рис. 2.

Рассмотрим влияние различных факторов на величину  $\Delta C_{x_i}$ . На рис. 7, а представлены коэффициенты  $\Delta C_{x_i}$  для шероховатого цилиндра в малотурбулентном потоке, а на рис. 7, б — соответственно в турбулизованном. Характер изменения коэффициентов дополнительного сопротивления  $\Delta C_{x_i}$  на шероховатом цилиндре, как и коэффициентов подъемной силы  $C_{y_i}$ , определяется в значительной степени положением точек отрыва. При  $Re < Re_{кр}$  в рассмотренном диапазоне  $\theta$  зависимости  $\Delta C_{x_i}(\theta)$  имеют более сложный вид, чем при  $Re > Re_{кр}$ . Отметим, что в закритической области с увеличением числа Рейнольдса коэффициент  $C_{y_i}$  возрастает, а коэффициент  $\Delta C_{x_i}$ , наоборот, уменьшается, что приводит к значительному увеличению отношения  $C_{y_i}/\Delta C_{x_i}$  — аэродинамического качества, обусловленного вращением. При  $Re = 6 \cdot 10^5$  эта величина достигает 20 в рассмотренном диапазоне параметра вращения.

Турбулентность потока при  $Re > Re_{кр}$  существенно не влияет на величину и характер изменения коэффициента дополнительного сопротивления шероховатого цилиндра — аналогично коэффициенту подъемной силы. Однако в докритической области влияние турбулентности оказывается более заметным. Следует также отметить изменения, которые

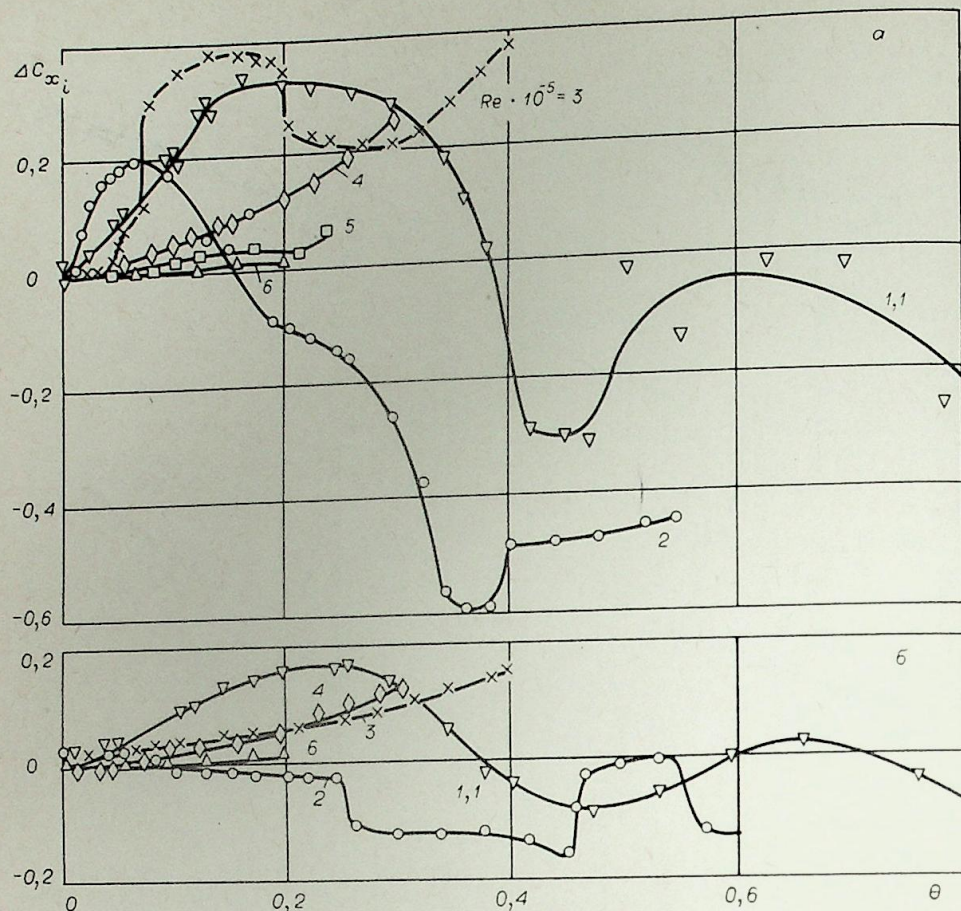


Рис. 7. Обусловленное вращением изменение коэффициента сопротивления шероховатого цилиндра в малотурбулентном (а) и турбулизованном (б) потоках.

претерпевает кривая  $\Delta C_{x_i}(\theta)$  при числе  $Re = 3 \cdot 10^5$ , т. е. в критической области. Более линейный вид этой кривой на рис. 7, б чем на рис. 7, а свидетельствует об уменьшении величины  $Re_{кр}$  под влиянием повышенной степени турбулентности потока. Такой же эффект уменьшения  $Re_{кр}$  наблюдался и в случае неподвижного цилиндра [5].

На рис. 8 сравниваются коэффициенты  $\Delta C_{x_i}(\theta)$  для четырех вариантов условий при двух значениях числа Рейнольдса:  $Re \approx 3,2 \cdot 10^5$

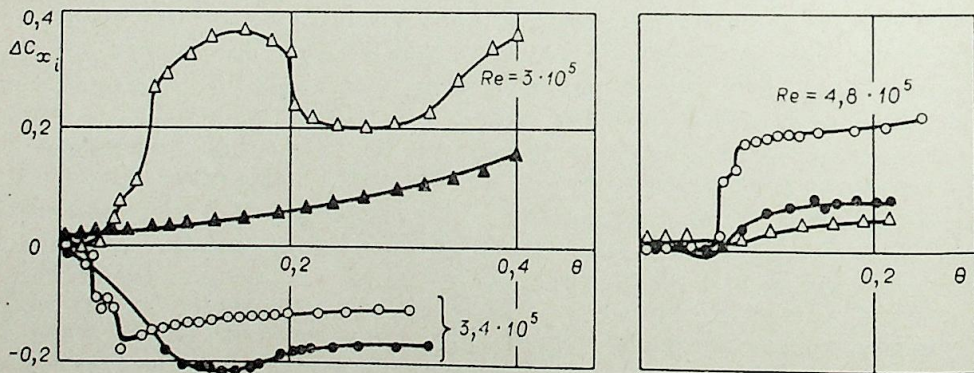
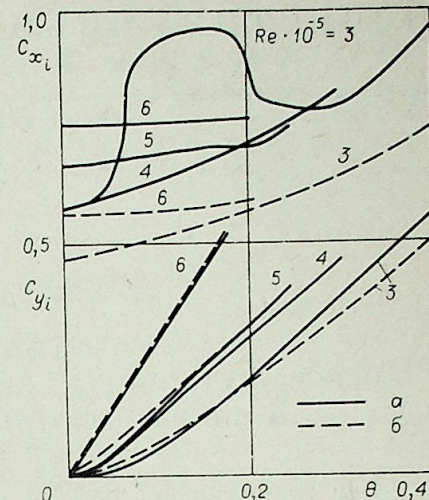


Рис. 8. Сравнение коэффициентов сопротивления цилиндра при различных условиях. Обозначения те же, что и на рис. 2.

Рис. 9. Коэффициенты сопротивления и подъемной силы шероховатого цилиндра в малотурбулентном (а) и турбулизованном (б) потоках при числах  $Re \geq Re_{кр}$ .



и  $4,8 \cdot 10^5$ . Для шероховатого цилиндра при обоих числах Рейнольдса коэффициенты  $\Delta C_{x_i}$  положительны, т. е. сопротивление вращающегося цилиндра возрастает по сравнению с неподвижным, причем в закритической области в меньшей степени, чем для гладкого цилиндра.

На рис. 9 приведены значения  $C_{x_i}$  — коэффициенты полного сопротивления вращающегося шероховатого цилиндра, а также для сравнения коэффициенты  $C_{y_i}$  при числах  $Re \geq Re_{кр}$ .

Видно, что как в малотурбулентном, так и в турбулизованном потоке при  $\theta > 0,2$  значения  $C_{x_i}$  стремятся к некоторым асимптотам, т. е. перестают зависеть от числа Рейнольдса. При  $Re < Re_{кр}$  имеющихся данных недостаточно для определения аналогичной закономерности.

По представленным материалам экспериментального исследования можно сделать следующие основные выводы. Характер изменения коэффициентов аэродинамических сил вращающегося шероховатого цилиндра существенно отличается от случая гладкого цилиндра, что связано с особенностями течения в пристенной области и с положением точек отрыва пограничного слоя. С увеличением шероховатости до значения  $h/d = 6,7 \cdot 10^{-4}$  почти полностью исключаются большие отрицательные подъемные силы и сглаживаются их резкие изменения, характерные для гладкого цилиндра, особенно в малотурбулентном потоке. Поведение коэффициентов аэродинамических сил шероховатого цилиндра в зависимости от параметра вращения определяется диапазоном чисел Рейнольдса. В закритической области эти зависимости имеют более простой вид, приближающийся к линейному. Увеличение степени турбулентности потока в области чисел  $Re > Re_{кр}$  не оказывает заметного влияния на аэродинамические силы шероховатого цилиндра в рассмотренных пределах  $\varepsilon$  и  $h/d$ .

Институт теоретической и прикладной механики СО АН СССР,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
2/X 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бычков Н. М., Коваленко В. М. Аэродинамические силы на вращающемся гладком цилиндре в поперечном потоке.— Изв. СО АН СССР, 1980, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.
2. Achenbach E. Influence of surface roughness on the cross-flow around a circular cylinder.— J. of Fluid Mech., 1971, v. 46, pt. 2.
3. Гювен, Пател, Фарелл. Модель обтекания круговых цилиндров с шероховатой поверхностью при высоких числах Рейнольдса.— В кн.: Теоретические основы инженерных расчетов, вып. 3. М.: Мир, 1977.
4. Szechenyi E. Supercritical Reynolds number simulation for two-dimensional flow over circular cylinders.— J. of Fluid Mech., 1975, v. 70, pt. 3.
5. Бычков Н. М., Коваленко В. М. Аэродинамические характеристики кругового цилиндра в поперечном потоке.— Изв. СО АН СССР, 1980, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

В. П. ЛЕБЕДЕВ, П. В. НИКИТИН

КОЭФФИЦИЕНТ РАСХОДА  
ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СВЕРХЗВУКОВЫХ СОПЕЛ ЛАВАЛЯ  
И ВЛИЯНИЕ НА НЕГО ВХОДНЫХ УСЛОВИЙ

При элементарном расчете сверхзвукового сопла течение в нем считается изэнтропийным и все характеристики потока определяются путем использования соотношения для идеальной адиабаты. Одна из важных характеристик течения — секундный массовый расход газа. Его удобно определять по параметрам потока в критическом сечении сопла:

$$G_T = \rho_* w_* F_* \quad (1)$$

Здесь  $\rho_*$ ,  $w_*$ ,  $F_*$  — плотность, скорость газа и площадь в критическом сечении. При замене с помощью соотношений для идеальной адиабаты значений плотности и скорости в критическом сечении соответствующими значениями на входе в сопло, выражение (1) принимает вид из [1, 2]

$$G_T = \frac{p_0 F_*}{\sqrt{T_0}} \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \left( \frac{k}{R} \right)^{1/2}, \quad (2)$$

где  $p_0$ ,  $T_0$  — полное давление и температура торможения газа,  $k$  — показатель адиабаты,  $R$  — газовая постоянная.

В реальных условиях течения вследствие вязкости на стенке сопла образуется пограничный слой и действительный расход газа отличается от теоретического, определяемого соотношением (2). Отношение действительного расхода  $G$  к теоретическому  $G_T$ , вычисленному для изэнтропийного течения, принято называть коэффициентом расхода:

$$\mu_c = G/G_T \quad (3)$$

В ряде экспериментальных и теоретических работ, например [1–5], исследовался коэффициент расхода. Однако влияние входных возмущающих факторов на коэффициент расхода практически не изучено. В настоящей работе приводятся результаты экспериментального исследования влияния целевого вдува воздуха на входе в сопло и различных длин предвключенного участка на  $\mu_c$ . Одновременно изучено влияние давления торможения и угла сужения дозвуковой части сопла.

Опыты проводились на аэродинамическом стенде, описание которого дано в работе [6]. В качестве рабочих участков использовались конические сверхзвуковые осесимметричные сопла, выполненные из текстолита. Диаметры на входе и в критическом сечении, а также радиус скругления в горле сопла были постоянными и равными соответственно  $D_1 = 80$ ,  $D_* = 20$  и  $r_c = 15$  мм. Полууглы конусности дозвуковой части составляли  $30$  и  $60^\circ$ , а сверхзвуковой —  $6$  и  $15^\circ$ .

Измерение действительного расхода воздушного потока  $G$  проводилось с помощью мерной шайбы, установленной в трубе диаметром  $80$  мм

выше по потоку от рабочих участков. Погрешность измерения составляла  $\pm 1\%$ . В опытах с вдувом воздуха через кольцевую щель расход вторичного потока  $G_s$  также определялся по мерной диафрагме. Расход основного потока в опытах составлял  $0,22$  —  $0,65$  кг/с, а вторичного от  $7,5 \cdot 10^{-3}$  до  $23,5 \cdot 10^{-3}$  кг/с. Давление торможения изменялось в пределах  $p_0 = 3 \cdot 10^5$  —  $10^6$  Па, что соответствовало числам Рейнольдса на входе в сопло

$$\overline{Re}_1 = \rho_1 \bar{w}_1 D_1 / \mu_1 = 1,29 \cdot 10^5 - 6,43 \cdot 10^5,$$

где  $\bar{w}_1$  — среднерасходная скорость,  $\rho_1$  — плотность,  $\mu_1$  — вязкость.

Сначала исследовали влияние продольного градиента скорости на коэффициент расхода. Изменение градиента скорости осуществлялось за счет разных углов сужения сопел. В экспериментах использовались сменные сопла с полууглами конусности дозвуковой части  $30$  и  $60^\circ$ . Диапазон изменения максимального значения параметра ускорения для сопла с полууглом  $\alpha = 30^\circ$  составлял  $K = (\mu/\rho w^2)/(dw/dx) = 3,3 \cdot 10^{-6}$  —  $9,5 \cdot 10^{-6}$ , а для сопла с  $\alpha = 60^\circ$   $K = 6,5 \cdot 10^{-6}$  —  $18,3 \cdot 10^{-6}$ . Здесь  $x$  — расстояние вдоль оси сопла. В данной серии опытов перед соплами устанавливались конфузор со степенью поджатия потока  $1:6,25$ , вследствие этого начальная толщина пограничного слоя  $\delta_1$  была небольшой ( $\delta_1/R_1 \approx 0,07$ , где  $R_1$  — входной радиус сопла). Коэффициент расхода находился по соотношению (3).

Эксперименты показали, что для исследованных сопел коэффициент расхода был постоянным  $\approx 0,98$ . Это наблюдалось во всем диапазоне изменения числа Рейнольдса  $\overline{Re}_1 = 1,93 \cdot 10^5$  —  $5,77 \cdot 10^5$ . Найденное значение коэффициента расхода соответствует опытным данным и расчетным зависимостям, полученным другими авторами для такой же геометрии околосзвуковой части сопла ( $r_c/R_* = 1,5$ ,  $R_*$  — радиус критического сечения). Это показано на рис. 1, заимствованном из работы [3], где приведены экспериментальные и теоретические данные различных авторов (значки и кривые) по зависимости  $\mu_c$  от отношения радиуса скругления в горле сопла к радиусу критического сечения. Заштрихованная область — экспериментальные результаты данной работы. Из графика видно, что существенное влияние на коэффициент расхода оказывает отношение  $r_c/R_*$ . Значительное снижение  $\mu_c$  наблюдается в области  $r_c \ll R_*$ .

Представляет интерес определить влияние на коэффициент расхода целевого вдува газа, поскольку он часто используется на практике для защиты стенок от воздействия высокотемпературных газовых потоков. Была проведена серия опытов по определению коэффициента расхода при вдуве вторичного потока воздуха на входе в сопло через кольцевую тангенциальную щель высотой  $s = 2,7$  мм. Эксперименты проведены для различных геометрий сопел в диапазоне давлений торможения  $p_0 = 3,5 \cdot 10^5$  —  $10^6$  Па. Относительная массовая скорость вдува изменялась в пределах  $m = \rho_s w_s / \rho_0 w_0 = 0 \div 0,5$ . Здесь индекс  $s$  относится к параметрам воздуха в щели, а нуль — к параметрам основного потока. В данном случае действительный расход определялся как сумма измеренных расходов основного и вторичного потоков:  $G = G_0 + G_s$ . Результаты экспериментов представлены на рис. 2 в виде зависимости  $\mu_c = f(m)$ . Как видно из этого графика, коэффициент расхода сопел имеет ту же величину ( $\mu_c \approx 0,98$ ), что и при отсутствии целевого вдува. Вдув вторичного потока приводил к уменьшению расхода основного потока, оставляя неизменным суммарное количество воздуха, проходящего через сопло.

На следующем этапе исследовалось влияние толщины пограничного слоя на входе в сопло на коэффициент расхода. Для изменения начальной толщины пограничного слоя перед соплами устанавливались цилиндрические каналы различной длины  $x_1$  ( $x_1/D_1 = 7,5$  и  $x_1/D_1 = 39$ ) и диа-

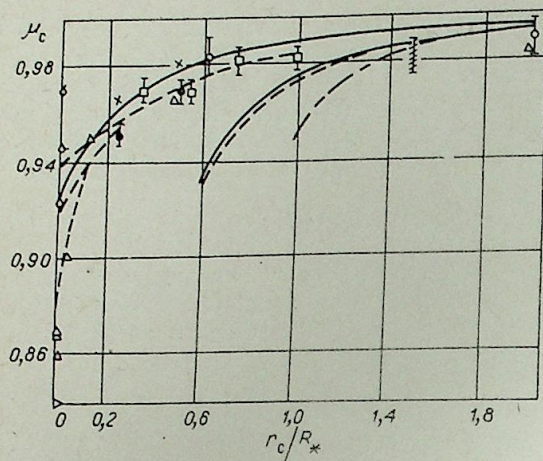


Рис. 1. Сопоставление измеренного коэффициента расхода сопел с результатами других авторов.

метром  $D_1 = 80$  мм. Входные торцы каналов имели острую кромку и вставлялись в успокоительную камеру большого диаметра. При этом пограничный слой нарастал с передней кромки цилиндрического канала, достигая заданной толщины в конце его перед входом в сопло. Эта толщина пограничного слоя определялась длиной цилиндрического ка-

нала и величиной давления торможения. Значение толщины пограничного слоя и распределение скорости в нем находились путем измерения профиля скорости.

Скорости измерялись с помощью трубок полного и статического давления, укрепленных на одной державке. Трубка полного напора имела эллипсообразное сечение высотой 0,4 мм. В трубке для отбора статического давления были просверлены четыре отверстия диаметром 0,3 мм. Перемещение датчика скорости осуществлялось с помощью координатника с шагом по вертикали 0,5 мм. Динамический напор фиксировался дифференциальным манометром типа ДТ-50. Для увеличения точности измерения перепада давления шкала дифманометра устанавливалась наклонно. По данным этих измерений выяснилось, что при длинном предвключенном участке ( $x_1/D_1 = 39$ ) отношение толщины пограничного слоя на входе в сопло к радиусу при разных давлениях составляло  $\delta_1/R_1 = 0,6-0,8$ , т. е. в некоторых случаях пограничные слои были близки к смыканию. При коротком предвключенном участке смыкания пограничных слоев не происходило, а отношение  $\delta_1/R_1$  составляло 0,2-0,3.

Все измеренные профили скорости в безразмерном виде согласовались между собой и удовлетворительно описывались степенной зависимостью для развитого турбулентного пограничного слоя с показателем степени 1/7.

Интегральной характеристикой пограничного слоя, от которой зависит коэффициент расхода сопла, является толщина вытеснения:

$$\delta^* = \int_0^{\delta} (1 - \rho w / \rho_0 w_0) (1 - y/R) dy,$$
 где  $\rho$ ,  $w$  и  $\rho_0$ ,  $w_0$  — плотность и скорость в рассматриваемой точке пограничного слоя и на его внешней границе,  $\delta$  — толщина пограничного слоя,  $y$  — расстояние от стенки по нормали,  $R$  — радиус канала. Значение этой величины на входе в сопло  $\delta_1^*$  определялось по измеренным профилям скорости путем графическо-

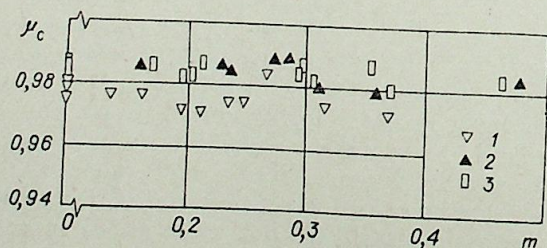


Рис. 2. Коэффициент расхода сопел при наличии щелевого вдува.

Опыты при  $p_0 = (3,5-10)10^5$  Па: Сопло  $30-6^\circ$  (1),  $30-15^\circ$  (2),  $60-6^\circ$  (3).

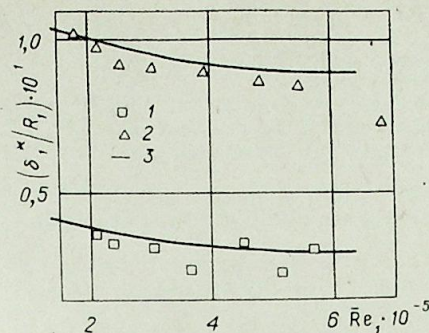


Рис. 3. Толщина вытеснения в конце предвключенных участков различной длины.

Опыты: 1 —  $x_1/D_1 = 7,5$ , 2 —  $x_1/D_1 = 39$ ; 3 — расчет по формулам (4) и (5).

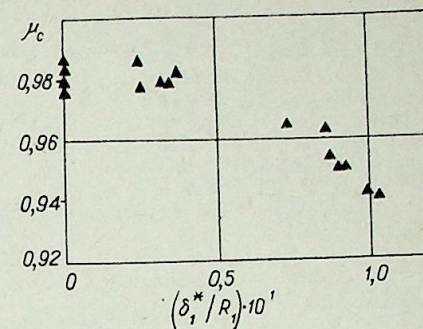


Рис. 4. Зависимость коэффициента расхода от толщины вытеснения пограничного слоя на входе в сопло.

го интегрирования. В проведенных экспериментах была получена зависимость  $\delta_1^*$  от числа Рейнольдса  $Re_1$ , рассчитанного по среднерасходной скорости и начальному диаметру сопла. Изменение числа  $Re_1$  происходило за счет давления торможения (плотности) потока. Полученные результаты представлены на рис. 3 в виде зависимости  $(\delta_1^*/R_1) = f(Re_1)$  для короткого (опыт 1) и длинного (опыт 2) предвключенных цилиндрических участков. Видно, что с увеличением числа Рейнольдса толщина вытеснения убывает. На длинном предвключенном участке толщина вытеснения в  $\sim 2,5$  раза больше, чем на коротком, при одинаковом числе  $Re_1$ . На этом же рисунке приведен расчет толщины вытеснения по формулам для течения в начальном участке цилиндрической трубы [7]

$$\left[ \frac{5}{4} (1 + H) + 1 \right] \left[ 4 (\tilde{w}_1 - 1)^{0,25} - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{(\tilde{w}_1 - 1)^{0,5} + \sqrt{2} (\tilde{w}_1 - 1)^{0,25} + 1}{(\tilde{w}_1 - 1)^{0,5} - \sqrt{2} (\tilde{w}_1 - 1)^{0,25} + 1} - \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2} (\tilde{w}_1 - 1)^{0,25}}{1 - (\tilde{w}_1 - 1)^{0,5}} \right] - (1 + H) \frac{(\tilde{w}_1 - 1)^{1,25}}{\tilde{w}_1} = \frac{0,0725 H^{1,25}}{Re_1^{0,25}} \bar{x}_1, \quad (4)$$

$$\tilde{Re}_1^{**} = \frac{\tilde{w}_1 - 1}{4H}. \quad (5)$$

Здесь  $H = \delta_1^*/\delta_1^{**} = 1,3$  — формпараметр,  $\delta_1^{**}$  — толщина потери импульса в конце цилиндрической трубы,  $\bar{x}_1 = x_1/D_1$ ,  $x_1$  — длина цилиндрического канала,  $\tilde{w}_1 = w_1/w_{вх}$ ,  $w_{вх}$  — скорость на входе цилиндрического канала,  $w_1$  — скорость на внешней границе пограничного слоя в выходном сечении канала,  $Re_1 = \rho w_{вх} D_1 / \mu$  (в рассматриваемом нами случае скорость на входе в цилиндрический канал равна среднерасходной скорости, т. е.  $w_{вх} = \bar{w}_1$ ),  $\tilde{Re}_1^{**} = Re_1^{**}/Re_1$ ,  $Re_1^{**} = \rho_1 w_1 \delta_1^{**} / \mu_1$ . Можно отметить удовлетворительное совпадение эксперимента с расчетом.

Влияние толщины вытеснения на входе в сопло на коэффициент расхода показано на рис. 4. Из графика видно, что с увеличением  $\delta_1^*$  коэффициент расхода уменьшается. В условиях проведенных экспериментов  $\mu_c$  снижается от 0,98 до 0,94, что составляет  $\sim 4\%$ . Максимальное снижение  $\mu_c$  соответствует условиям, близким к смыканию пограничных слоев.

1. Абрамович Г. Н. Прикладная газовая динамика. М.: Наука, 1969.
2. Дейч М. Е. Техническая газодинамика. М.: Энергия, 1974.
3. Back L. H., Cuffel R. F. Flow coefficients for supersonic nozzles with comparatively small radius of curvature throats.— J. Spacecraft and Rockets, 1977, v. 8, N 2.
4. Kleigel J. R., Levine L. N. Transonic flow in small throat radius of curvature nozzles.— AIAA J., 1969, v. 7, N. 7.
5. Back L. H., Massier P. F., Gier H. L. Comparison of measured and predicted flows through conical supersonic nozzles, with emphasis on the transonic region.— AIAA J., 1965, v. 3, N 9.
6. Волчков Э. П., Козьменко В. К., Лебедев В. П. Влияние градиента скорости потока на эффективность газовой завесы в осесимметричных соплах.— ИМТФ, 1977, № 2.
7. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И. Теплообмен и трение в турбулентном пограничном слое. М.: Энергия, 1972.

В. В. КОЗЛОВ, М. П. РАМАЗАНОВ  
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ  
УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ

В настоящее время имеется большое количество теоретических работ по гидродинамической устойчивости и развитию возмущений (см. [1]) для течения в канале. Это связано в первую очередь с тем, что существует точное решение уравнений Навье — Стокса для данного течения и уравнения для возмущений имеют наиболее простой вид в силу параллельности среднего течения.

Как правило, экспериментальные работы по исследованию процесса развития возмущений и возникновения турбулентности в сдвиговых течениях протекают в два этапа. Первый этап заключается в создании ламинарного среднего течения с возможно более высокими числами Рейнольдса и минимальной возмущенностью потока, что позволяет исследовать процесс «естественного» перехода к турбулентности в этих условиях. На втором этапе в этом течении создаются искусственные контролируемые возмущения, приводящие к турбулентности и позволяющие моделировать и изучать тот или иной механизм этого перехода. Проследим это на примере исследования процесса перехода к турбулентности для течения в плоском канале.

Линейная теория гидродинамической устойчивости для плоского течения Пуазейля дает критическое число Рейнольдса потери устойчивости —  $Re = 5772$  [1]. Естественно, что для подтверждения или опровержения данного факта необходимо реализовать ламинарное течение при «естественных» возмущениях до больших чисел Рейнольдса.

По-видимому, первые экспериментальные исследования в канале проведены Девисом и Вайтом [2], переход к турбулентности у которых наблюдался при числе Рейнольдса около 1000. В более поздних экспериментах в прямоугольном канале Шерлипа [3], Нараяна и Нараяна [4], Патела и Хэда [5] и в других исследованиях числа Рейнольдса были около 2500 и ниже. При этом отмечалось, что переход к турбулентности начинался с «внезапного» появления турбулентных пятен. Переход к турбулентности в этих исследованиях, как видно, наступал значительно раньше, чем терялась устойчивость течения.

В 1974 г. Карницу, Поттеру и Смитту [6] путем снижения уровня турбулентности в канале до 0,3% удалось сохранить течение ламинарным до числа Рейнольдса 5000. При этом в данной работе были отмечены достаточно регулярные синусоидальные возмущения, предшествующие переходу, при числах Рейнольдса, больших 4000.

К работам, в которых были бы проделаны последовательно оба этапа, т. е. создание ламинарного течения и исследования по развитию контролируемых возмущений, можно отнести работы Као и Парка [7] и Нишиоки, Ииды, Ичикавы [8]. В первой работе числа Рейнольдса, при которых реализовалось ламинарное течение, не превышало 1500,

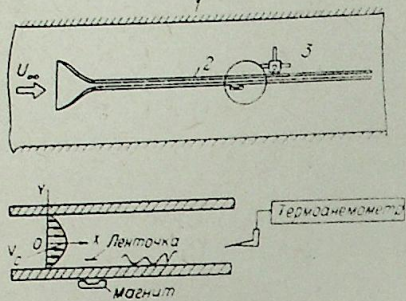


Рис. 1. Схема экспериментальной установки.

1 — рабочая часть аэродинамической трубы Т-324; 2 — канал; 3 — координатник.

а критическое число Рейнольдса потери устойчивости было получено равным 1100. В работе [8] ламинарное течение реализовывалось, по словам авторов, до чисел Рейнольдса порядка 8000, которое позволило исследовать данное течение на устойчивость по отношению к малым возмущениям и сравнить с линейной теорией гидродинамической устойчивости в диапазоне чисел Рейнольдса от 3000 до 7500. Критическое число Рейнольдса потери устойчивости было получено равным 6000.

Следовательно, устойчивость течения в плоском канале экспериментально исследовалась в небольшом числе работ. При этом имеются противоречивые данные как по числам Рейнольдса перехода к турбулентности, так и по числам Рейнольдса потери устойчивости. Практически не исследовано развитие возмущений на входном участке плоского канала, что, по-видимому, объясняет такое большое различие в числах Рейнольдса перехода к турбулентности в «естественных» условиях.

Для исследования течения в канале в Институте теоретической и прикладной механики СО АН была создана экспериментальная установ-

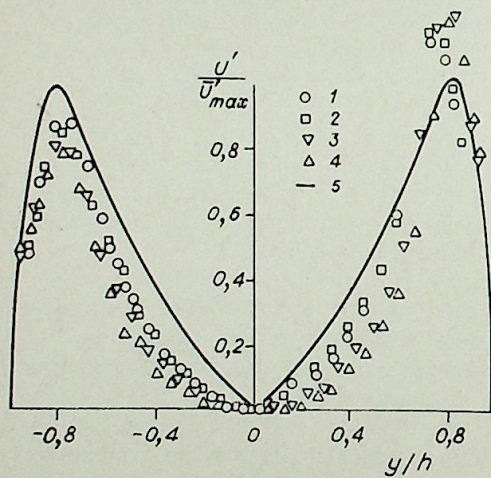


Рис. 3. Профили пульсационной составляющей скорости.  
1 — Re=3000; 2 — Re=4000; 3 — Re=5000; 4 — Re=6000; 5 — теория [10] (Re=4000).

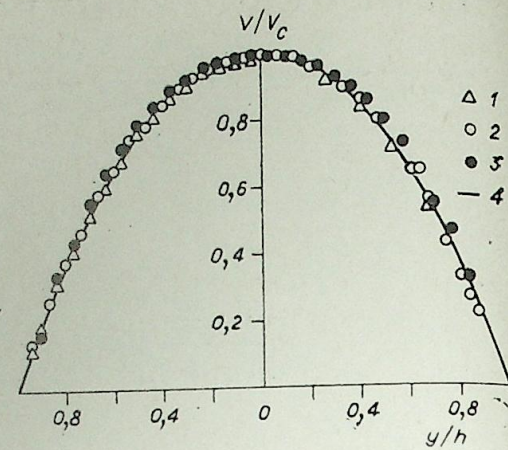


Рис. 2. Профили средней скорости в канале.  
1 — Re=3000; 2 — Re=4000; 3 — Re=5000; 4 — теория [9].

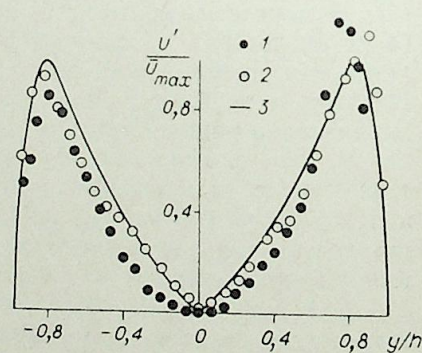


Рис. 4. Профили пульсационной составляющей скорости (Re=4000).  
1 — данная работа; 2 — работа [8]; 3 — теория [10].

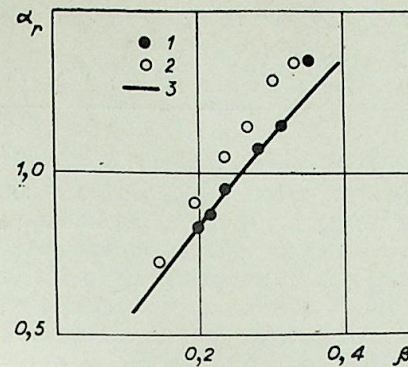


Рис. 5. Зависимость волнового числа от частного параметра.

Обозначения те же, что на рис. 4.

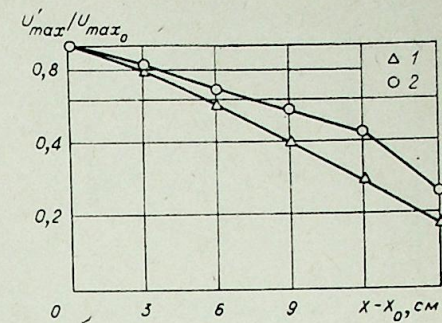


Рис. 6. Типичные кривые развития малых возмущений (Re=4000).

1 —  $f=42,6$  Гц,  $U'_{max}/U_c=0,2\%$  2 —  $f=50,4$  Гц,  $U'_{max}/U_c=0,4\%$ .

ка, на которой удалось получить течение Пуазейля и сохранить его до чисел Рейнольдса порядка 7000.

На рис. 1 представлена схема установки, которая размещалась внутри рабочей части аэродинамической трубы Т-324 ИТПМ СО АН СССР. Установка состоит из входного устройства и канала с рабочей секцией. Входное устройство служит для плавного втекания воздуха в канал и для снижения уровня турбулентности за счет поджатия потока и применения успокоительных сеток. Благодаря малой степени турбулентности набегающего потока и большому поджатию удалось получить уровень турбулентности внутри канала порядка 0,1%. Из входного устройства воздух попал в канал, где происходило формирование течения Пуазейля. Длина канала 4500 мм, ширина 15, высота 400 мм. На расстоянии 3600 мм от входа в канал размещалась рабочая секция, в которой изучалось развитие вводимых искусственных возмущений.

Возмущения в поток вводились по всей ширине канала с помощью металлической ленточки толщиной 0,05 мм шириной 3 мм, помещенной около стенки канала на расстоянии  $Y=0,3$  мм в постоянное магнитное поле. Через ленточку пропускали переменный ток с частотой, задаваемой генератором синусоидальных сигналов (ГЗ-34). Частоту контролировали частотометром (ЧЗ-34А).

Структуру течения исследовали с помощью термоанемометра постоянной температуры 55D00 фирмы DISA с линейризованной характеристикой. Державку датчика термоанемометра диаметром 3 мм вводили в поток и перемещали при помощи координатника вниз по потоку по координате X и поперек канала по координате Y (см. рис. 1). Точность установки датчика по координате X 0,1 мм, а по координате Y 0,01 мм. В качестве чувствительного элемента использовали вольфрамовую нить диаметром 6 мкм и длиной 2 мм. Скорость в канале варьировали от 6 до 14 м/с. Число Рейнольдса определяли по максимальной скорости  $U_c$  в канале и его полуширине  $h$ . Центр канала принимался за точку  $Y=0$ , координаты стенок канала были соответственно равны 1 и -1.

На рис. 2 приведены профили средней скорости, измеренные термоанемометром при числах Рейнольдса, равных 3000, 4000 и 5000 соответственно. Здесь же приведен теоретический профиль [9]. Видно, что результаты эксперимента хорошо согласуются с теорией и дают нам уверенность в том, что полученное течение в канале действительно является течением Пуазейля. Профили искусственных возмущений для малых значений амплитуды возмущений при различных значениях числа Рейнольдса показаны на рис. 3, обезразмеривание проводилось по двум

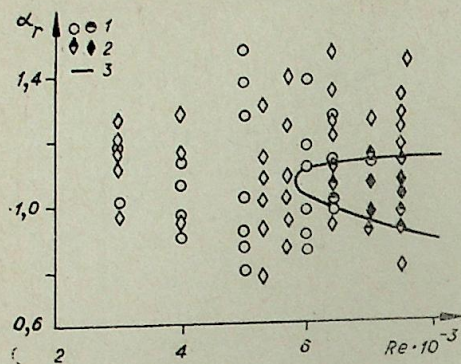


Рис. 7. Граница устойчивости для малых возмущений.  
1 — данная работа; 2 — работа [8]; 3 — теория [1].

максимумам, среднее значение между пиками  $\bar{U}'_{\max}$  бралось за единицу. Видна небольшая асимметрия (наблюдаемая также и в экспериментах работы [8]), связанная, по-видимому, с искажением потока, вносимым датчиком и ленточкой. В середине сечения при проведении

экспериментов всегда наблюдалась смена фазы на  $180^\circ$ , свидетельствующая о том, что возмущения антисимметричны. На рис. 4 приведены профили пульсационной составляющей скорости при  $Re = 4000$ . Для сравнения нанесены также точки работы [8] и теоретическая кривая [10] для этих же параметров. Наблюдается хорошее совпадение экспериментальных результатов между собой. Фаза вводимого возмущения изменялась при движении вниз по потоку. Это позволяло определять длины волн возмущений.

Получена зависимость волнового числа  $\alpha_r = 2\pi h/\lambda$  от частотного параметра  $\beta = 2\pi f h/U_c$  (рис. 5), где  $\lambda$  — длина волны возмущения;  $f$  — частота. Здесь же нанесены экспериментальные точки из работы [8] и теоретический расчет [10], видно их хорошее совпадение.

Кроме того, были получены кривые парастания искусственных возмущений различных частот (рис. 6), это дало возможность получить точки кривой нейтральной устойчивости (рис. 7). Так же как в работе [8], все возмущения до чисел Рейнольдса 6000 затухают, и только при 6000 и выше появляются возмущения, которые не затухают, и их можно отнести к точкам нейтральной кривой.

Таким образом, эксперименты показали, что при развитии возмущений малой амплитуды нарастающих возмущений не наблюдается до числа Рейнольдса, равного 6000, что согласуется с результатами работы [8] и подтверждает выводы линейной теории гидродинамической устойчивости для течения Пуазейля.

Институт теоретической и прикладной  
механики СО АН СССР,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
20/XI 1980

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдштин А. М., Штерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск. Наука, 1977.
2. Davies S. J., White C. M. An experimental study of the flow of water in pipe of rectangular section. — Proc. Roy. Soc., 1928, v. 19.
3. Sherlin G. C. Behaviour of isolated disturbances superimposed on laminar flow in a rectangular pipe. — J. Res. N. B. S. Sec. A Phys. and Chem., 1960, v. 64A.
4. Narayanan M. A., Narayana T. Some studies on transition from laminar to turbulent flow in a two-dimensional channel. — J. Agnew. Math. Phys., 1967, v. 48.
5. Patel V. C., Head M. R. Some observation on skin friction and velocity profiles in fully developed pipe and channel flows. — J. Fluid Mech., 1969, v. 38.
6. Karnitz M. A., Potter M. C., Smith M. C. An experimental investigation of transition of a plane Poiseuille flow. — Fluids Engng., 1974, v. 96.
7. Као Т. В., Парк С. Экспериментальное исследование устойчивости течений в канале. — J. Fluid Mech., 1970, v. 43.
8. Nishioka M., Iida S., Ichikawa Y. An experimental investigation of the stability of plane Poiseuille flow. — J. Fluid Mech., 1975, v. 72.
9. Шлихтин Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969.
10. Itoh N. Spatial growth of finite wave disturbances in parallel and nearly parallel flows. — Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci., 1974, v. 17.

В. Н. ШЕПЕЛЕНКО

### К РАСЧЕТУ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ В ПРОДОЛЬНОМ ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ

В работе рассматривается задача о струйном обтекании конуса в рамках идеальной несжимаемой жидкости. Течение предполагается потенциальным и стационарным, скорость набегающего потока и сила тяжести — параллельными оси конуса.

Система уравнений, описывающая течение, в безразмерных переменных имеет вид (см. рис. 1)

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -r \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = r \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (1)$$

$p = 1 - v^2 + G(x - RN) = \text{const}$  на свободной границе,

$$G = 2gD/v_\infty^2 = 2/Fr^2,$$

где  $p$  и  $v$  — давление и скорость на свободной границе,  $D$  — характерный линейный размер задачи, например диаметр основания обтекаемого конуса. Размеры  $RX$  и  $RS$  области интегрирования определяются после предварительного грубого решения задачи из условия  $|v_x - 1| \leq 0,001$  на границе.

В данной постановке задачи длина проекции свободной границы на ось  $x$  задается, давление на свободной границе определяется в процессе счета задачи. Свободная граница замыкается из условия гладкого сопряжения границ. Высота усеченного конуса берется равной длине последнего шага сетки под свободной границей.

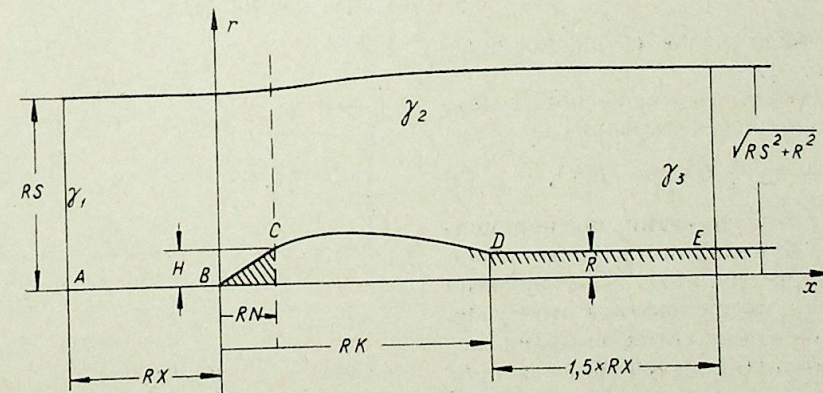


Рис. 1.

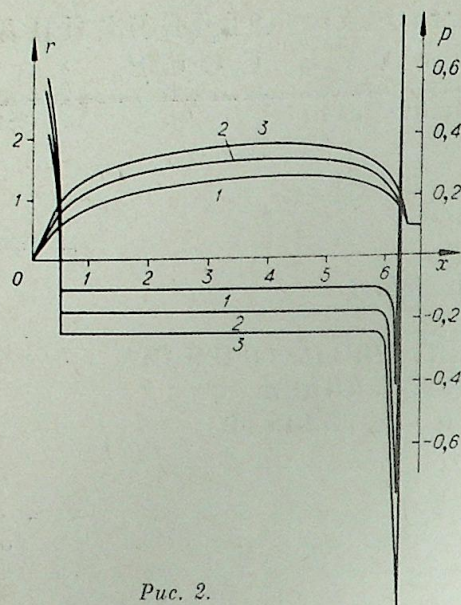


Рис. 2.

Выберем в качестве независимых переменные  $x$  и  $\psi$ , а в качестве искомой функции  $z = r^2$ , тогда рассматриваемая задача сведется к интегрированию уравнения

$$z_{\psi}^2 z_{xxx} - 2z_x z_{\psi} z_{x\psi} + (4z + z_x^2) z_{\psi\psi} = 0 \quad (2)$$

в прямоугольной области переменных  $x, \psi$  при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} z &= 2\psi \text{ на } \gamma_1, z = 0 \text{ на } AB, \\ z_{\psi} &= 2 \text{ на } \gamma_2, z = \omega^2(x) \text{ на } BC, \\ z &= 2\psi + R^2 \text{ на } \gamma_3, z = R^2 \text{ на } DE, \end{aligned} \quad (3)$$

$$p = 1 - \frac{4z + z_x^2}{zz_{\psi}^2} + G(x - RN)$$

на  $CD$ ,  
где  $\omega(x)$  — уравнение конуса.

Для интегрирования уравнения (2) используется схема стабилизирующей поправки, обладающая свойством полной аппроксимации\*.

$$\mu \left( z^{\frac{n+1}{2}} z^n \right) = (z_{\psi}^n)^2 z_{xxx}^{\frac{n+1}{2}} - 2z_x^n z_{\psi}^n z_{x\psi}^n + (4z^n + (z_x^n)^2) z_{\psi\psi}^n, \quad (4)$$

$$\mu \left( z^{n+1} - z^{\frac{n+1}{2}} \right) = (4z^n + (z_x^n)^2) (z_{\psi\psi}^{n+1} - z_{\psi\psi}^n).$$

Пересчет свободной границы  $CD$  и линии тока  $\gamma_2$  выполняется соответственно по разностным аналогам условий (3):

$$\begin{aligned} z_x^n z_x^{n+1} + (4 - \alpha\omega) z^{n+1} &= \omega (z_{\psi}^n - \alpha z^n), \\ \omega &= z^n z_{\psi}^n (1 - p + G(x - RN)) \end{aligned} \quad (5)$$

на свободной границе  $CD$  и

$$z^{n+1} = z^n + (2 - z_{\psi}^n)/\beta \quad (6)$$

на линии тока  $\gamma_2$ . Здесь  $\alpha$  и  $\beta$  — первые коэффициенты разложений:

$$\begin{aligned} z_{\psi} &= \alpha_1 z_{i1} + \alpha_2 z_{i2} + \alpha_3 z_{i3} \text{ на } CD, \\ z_{\psi} &= \beta_1 z_{iM} + \beta_2 z_{iM-1} + \beta_3 z_{iM-2} \text{ на } \gamma_2, \end{aligned} \quad (7)$$

$M$  — число узлов сетки по переменной  $\psi$ .

Давление на свободной границе вычисляется по формуле

$$p = 1 - v_{\Sigma}^2 + G(x_{\Sigma} - RN), \quad (8)$$

где  $x_{\Sigma}$  — узел сетки по переменной  $x$ , ближайший к точке схода свободной границы;  $v_{\Sigma}$  — значение скорости, вычисленное в этом узле.

Расчетная сетка выбрана неравномерной со сгущением в кри-

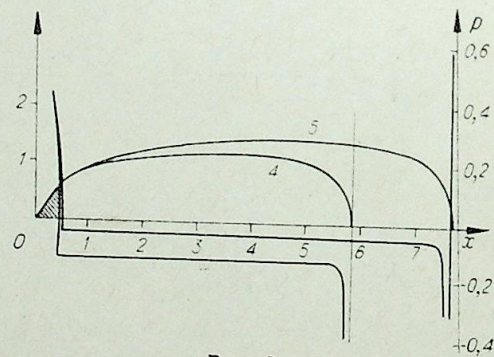


Рис. 3.

тических точках течения  $B, C, D$  и в окрестности нулевой линии тока. Сгущение сетки выполнено по экспоненциальному закону:  $x = \xi^{\lambda}$ ,  $\psi = z \xi^{\rho}$ ,  $0 \leq \xi \leq 1$ ,  $\lambda, \rho \geq 1$ . Параметры  $\mu, \lambda$  определяются из условия сопряжения сетки.

На рис. 2 и 3 приведены результаты расчетов для пяти вариантов геометрии задачи:

Вариант	RN	RK	H	R	Fr	-P	C <sub>f</sub>
1	0,455	6,364	0,545	0,500	6,088	0,1028	0,3082
2	0,455	6,364	0,727	0,500	6,088	0,1783	0,3658
3	0,455	6,364	0,909	0,500	6,088	0,2464	0,4193
4	0,418	5,818	0,500	0,000	6,088	0,1215	0,3034
5	0,418	7,636	0,500	0,000	6,088	0,0527	0,3764

Расчеты проведены на сетке с числом узлов  $105 \times 30$ .

Институт теоретической и прикладной  
механики СО АН СССР,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
6/VI 1978

\* Яненко Н. Н. Метод дробных шагов. М.: Наука, 1967.

Л. Ю. ФЕРДИГАЛОВ

ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ВДОЛЬ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ  
ПРИ БОЛЬШИХ ДОКРИТИЧЕСКИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

Течение вязкой жидкости вдоль колеблющейся границы рассматривалось в связи с созданием этой границей предполагаемого эффекта уменьшения гидродинамического сопротивления. Цель настоящей работы — показать возможность существования данного эффекта, когда колебания границы согласованы с течением специального вида, которое возникает в окрестности границы при больших докритических числах Рейнольдса.

Рассмотрим течение вязкой жидкости в бесконечном плоском канале, ограниченном сверху движущейся плоской стенкой, а снизу — непроницаемой для жидкости границей, совершающей колебания в виде поперечной бегущей волны, длина которой  $2\lambda$  (рис. 1). Амплитуду волны и ее форму примем неизменными во времени, а направление вектора фазовой скорости совместим с положительным направлением оси  $ox$ . Предположим, что движение жидкости в канале с периодическими граничными условиями периодически и квазистационарно.

Поперечная бегущая волна в общем случае задается уравнением вида  $y = f(kx - \Omega t)$ , где  $k$  — частота связанная с длиной волны соотношением  $k = \pi/\lambda$ , а  $\Omega$  — круговая частота. Фазовая скорость  $u_\phi$  определяется отношением частот  $u_\phi = \Omega/k$ .

Введем систему координат, связанную с гребнем бегущей волны. В этой (относительной) системе координат бегущая волна представится неподвижной волнообразной кривой  $y = f(kx)$ , а все ее точки приобретут постоянную горизонтальную скорость, равную фазовой скорости  $u_\phi$ , взятой с противоположным знаком. В новой системе координат форма границы и скорости на границе оказываются не зависящими от времени, а течение становится стационарным.

В системе безразмерных величин, введенных по формулам  $\bar{x} = \frac{\pi}{\lambda} x$ ,  $\bar{y} = \frac{\pi}{\lambda} y$ ,  $\bar{u} = \frac{u}{u_\phi}$ ,  $\bar{v} = \frac{v}{u_\phi}$ ,  $\bar{\psi} = \frac{\pi}{u_\phi \lambda} \psi$ ,  $\bar{\omega} = \frac{\lambda}{\pi u_\phi} \omega$ ,  $Re = \frac{\lambda u_\phi}{\pi \nu}$  ( $u$  и  $v$ ,  $x$  и  $y$  — компоненты вектора скорости,  $\psi$  — функция тока,  $\omega$  — вихрь,  $Re$  — число Рейнольдса) уравнение криволинейной границы, вертикальная и касательная скорости границы определяются соответственно выражениями

$$\bar{y} = f(\bar{x}), \quad \bar{v} = -\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}, \quad (1)$$

$$\bar{u}_s = -\sqrt{1 + \left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}\right)^2}, \quad (2)$$

а уравнения движения в относительной системе координат будут иметь следующий вид:

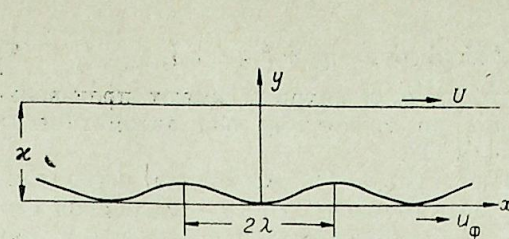


Рис. 1.

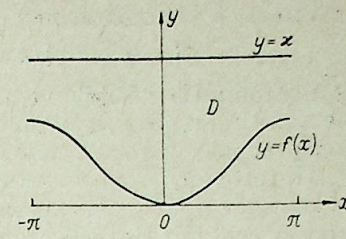


Рис. 2.

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} = \frac{1}{Re} \Delta \bar{\omega}, \quad (3)$$

$$\Delta \bar{\psi} = -2\bar{\omega}, \quad (4)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа.

В последующем изложении черточки над безразмерными величинами будем опускать. Случай, где это может вызвать недоразумения, будут оговариваться отдельно.

В относительной системе координат нижняя и верхняя границы области течения суть линии тока, поэтому граничными условиями для функции  $\psi$ , удовлетворяющей уравнениям движения (3), (4), служит условие равенства  $\psi$  постоянной величине на границах области, т. е.  $\psi_r = \text{const}$ .

В силу периодичности движения течение достаточно рассматривать лишь в пределах одной длины волны (рис. 2). Таким образом, область течения  $D$  — это  $2\pi$  — отрезок плоского канала, ограниченный сверху прямой линией  $y = x$ , а снизу — плавной волнообразной кривой  $y = f(x)$ , симметричной относительно оси  $oy$ .

В работе [2] показано, что при увеличении числа Рейнольдса течение вязкой жидкости в области  $D$  стремится к течению с постоянным вихрем. При достаточно большом числе Рейнольдса течение, близкое к однородно-вихревому, занимает всю область за исключением тонкого пристеночного слоя, где вследствие заданности движения границы постоянство вихря достигнуто быть не может. Естественно ставить задачу о нахождении таких движений границы, которые обеспечивают течение с постоянным вихрем и в пристеночном слое.

Для отыскания этих движений предположим, что в области  $D$  уже сформировано однородно-вихревое течение, причем вихрь в пристеночном слое и на самой границе имеет то же самое значение, что и в остальной части области. Это означает, что точки границы в гидродинамическом отношении ничем не отличаются от частиц жидкости, участвующих в однородно-вихревом движении. Форма такой границы заранее неизвестна и подлежит дальнейшему определению.

Уравнение переноса вихря (3) функцией  $\omega = \text{const}$  удовлетворяется тождественно, поэтому однородно-вихревое течение в области  $D$  описывается только одним уравнением — уравнением Пуассона с постоянной правой частью.

Зададим следующие граничные значения для функции  $\psi$ :

$$\psi[x, f(x)] = 0, \quad (5)$$

$$\psi(x, x) = \text{const}, \quad (6)$$

$$\psi(-\pi, y) = \psi(\pi, y) \text{ — условие периодичности.} \quad (7)$$

Расширим область определения функции  $\psi(x, y)$  до всей плоскости  $x, y$ . Тогда функция  $\psi$ , удовлетворяющая уравнению Пуассона (4), бу-

дет иметь, в частности, вид

$$\psi(x, y) = \omega[(a \operatorname{ch} y + b \operatorname{sh} y) \cos x - y^2 + b_0 y + a_0], \quad (8)$$

где постоянные коэффициенты  $a, b, a_0, b_0$  и вихрь  $\omega$  имеют произвольные значения. Эта функция четная по  $x$ , поэтому она автоматически удовлетворяет условию периодичности (7).

Потребуем, чтобы симметричная кривая (1) проходила через следующие две точки плоскости  $x, y$ :  $z_1(0, 0)$  и  $z_2(\pi, \sigma)$  ( $\sigma$  — удвоенная амплитуда волны). Потребуем также, чтобы горизонтальная скорость в точке  $z_2$  равнялась нулю. Равенство нулю выражения (8) в точках  $z_1$  и  $z_2$  вместе с условием (6) и условием совпадения горизонтальной скорости на гребне волны с фазовой скоростью  $u_\phi$  дает следующую систему четырех уравнений для определения четырех коэффициентов  $a, b, a_0$  и  $b_0$  через параметры  $\sigma$  и  $\kappa$ :

$$\begin{aligned} a + a_0 &= 0, \\ a \operatorname{sh} \sigma + b \operatorname{ch} \sigma + 2\sigma - b_0 &= 0, \\ a \operatorname{ch} \sigma + b \operatorname{sh} \sigma + \sigma^2 - b_0 \sigma - a_0 &= 0, \\ a \operatorname{ch} \kappa + b \operatorname{sh} \kappa &= 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, приходим к следующим выражениям для коэффициентов:

$$\begin{aligned} a &= \sigma^2 \frac{\operatorname{sh} \kappa}{\sigma \operatorname{ch}(\kappa - \sigma) + \operatorname{sh}(\kappa - \sigma) + \operatorname{sh} \kappa}, \\ b &= -\sigma^2 \frac{\operatorname{ch} \kappa}{\sigma \operatorname{ch}(\kappa - \sigma) + \operatorname{sh}(\kappa - \sigma) + \operatorname{sh} \kappa}, \\ b_0 &= \sigma \frac{\sigma \operatorname{ch}(\kappa - \sigma) + 2 \operatorname{sh}(\kappa - \sigma) + 2 \operatorname{sh} \kappa}{\sigma \operatorname{ch}(\kappa - \sigma) + \operatorname{sh}(\kappa - \sigma) + \operatorname{sh} \kappa}, \\ a_0 &= -a. \end{aligned}$$

Равенство  $\psi(x, y) = 0$  должно выполняться на всей кривой  $y = y(x)$  ( $y(x) = f(x)$ ), проходящей через выбранные точки, поэтому условие (5), переписанное в виде

$$[a \operatorname{ch} y(x) + b \operatorname{sh} y(x)] \cos x - y^2(x) + b_0 y(x) + a_0 = 0, \quad (9)$$

превращается в уравнение, определяющее эту неизвестную кривую.

Решение уравнения (9) отыскивается численным путем при помощи метода последовательных приближений

$$y_{v+1} = -\frac{a_0}{b_0} + \frac{1}{b_0} y_v^2 - \frac{1}{b_0} (a \operatorname{ch} y_v + b \operatorname{sh} y_v) \cos x_i,$$

где  $v$  — номер последовательного приближения в  $i$ -й точке отрезка  $[0, \pi]$ . Безусловная сходимость итерационного процесса в каждой  $i$ -й точке достигается в результате применения модифицированного метода последовательных приближений [3].

Уравнение (9) имеет два независимых решения  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  (рис. 3). Первое описывает кривую, проходящую через точки  $z_1$  и  $z_2$ , т. е. нижнюю границу области течения, а второе — кривую, которая ограничивает сверху систему замкнутых линий тока в области однородно-вихревого течения. Область, ограниченную этими двумя кривыми, будем называть ядром течения.

Определим постоянный вихрь  $\omega$ .

Горизонтальная  $U$  и вертикальная  $V$  скорости однородно-вихревого течения определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = \omega[(a \operatorname{sh} y + b \operatorname{ch} y) \cos x - 2y + b_0], \\ V(x, y) &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \omega(a \operatorname{ch} y + b \operatorname{sh} y) \sin x, \end{aligned} \quad (10)$$

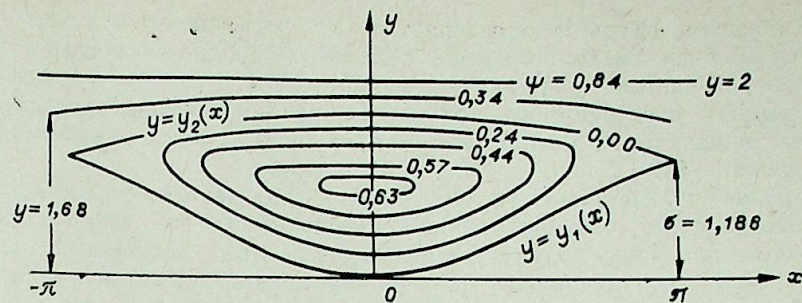


Рис. 3.

а касательная скорость на нижней границе области течения запишется в виде

$$U_s = -U[x, y_1(x)] \sqrt{1 + \left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2}, \quad (11)$$

где

$$\frac{dy_1}{dx} = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big/ \frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{y=y_1(x)}.$$

В случае колеблющейся границы, точки которой совершают движение только вверх-вниз, скорость проскальзывания (среднее значение касательной скорости на границе) выражается формулой

$$u_{\text{пр}} = -\frac{1}{L} \int_0^L u_s ds, \quad (12)$$

где  $L$  — длина криволинейной границы,  $ds$  — элемент ее дуги;  $u_s$  определяется формулой (2). В абсолютной системе координат скорость проскальзывания такой границы равна нулю.

В однородно-вихревом течении скорость проскальзывания границы, отнесенная к движущейся (относительной) системе координат, выражается формулой

$$U_{\text{пр}} = -\frac{1}{L} \int_0^L U_s ds. \quad (13)$$

Эта скорость в абсолютной системе координат в общем случае нулю не равна.

Введем условие равенства скоростей (12) и (13). На основании (2) и (11) это условие запишется так:

$$\int_0^L U[x, y_1(x)] \sqrt{1 + \left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2} ds = -\int_0^L \sqrt{1 + \left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2} ds. \quad (14)$$

Примем обозначение  $U^0(x, y) = [(a \operatorname{sh} y + b \operatorname{ch} y) \cos x - 2y + b_0]$  и подставим в равенство (14) значения  $U[x, y_1(x)]$  и  $ds$  ( $U = \omega U^0$ ,  $ds = \sqrt{1 + (dy_1/dx)^2} dx$ ). В результате получим следующее выражение для вихря

$$\omega = -\frac{\int_0^\pi \left[1 + \left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2\right] dx}{\int_0^\pi U^0[x, y_1(x)] \left\{1 + \left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2\right\} dx}.$$

Таким образом, вихрь  $\omega$  определяется из условия равенства нулю скорости проскальзывания границы области однородно-вихревого течения в абсолютной системе координат.

Картина рассчитанного при  $\kappa = 2$ ,  $\sigma = 1,186$  однородно-вихревого течения показана на рис. 3. Полученное из (15) численное значение вихря равно  $-1,207$ .

Горизонтальные скорости (10) точек границы переменны вдоль ее дуги: это означает, что для поддержания течения с постоянным вихрем в пристеночном слое граница, кроме поперечных колебаний, должна совершать также «продольные» колебания в касательном к  $s$  направлении. Продольные колебания осуществляют функцию управления пристеночным течением.

Найдем работу (мощность) движущихся границ.

Введем понятие «толщины» плоского течения, т. е. его размер по оси, перпендикулярной плоскости  $xoy$ . Эту величину выберем так, чтобы в нашей системе безразмерных величин она всегда равнялась единице, т. е. введем ее по формуле  $l = \lambda/\pi$ . Сила, приложенная к элементарной площадке ширины  $l$  и длины  $ds$ , расположенных на границе области течения, определяется как  $F = 2\omega\mu l ds$ , где  $\mu$  — вязкость. (Здесь и далее черточка отсутствует над размерными величинами.) Работа этой силы в единицу времени равна

$$A = FU_s = 2\omega\mu l U_s ds, \quad (16)$$

где  $U_s$  — касательная скорость границы.

Безразмерная работа  $\bar{A}$  определится выражением

$$\bar{A} = \frac{A}{\rho u_\phi^2 \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\lambda}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{\pi} u_\phi} = \frac{4}{\text{Re}} \bar{\omega} \bar{U}_s \bar{d}s.$$

Работа всей границы определится интегралом от величины  $\bar{A}$

$$\bar{A}_s = \frac{4}{\text{Re}} \bar{\omega} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{U}_s \sqrt{1 + \left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}\right)^2} d\bar{x}.$$

Численные значения работы нижней границы области течения и работы верхней границы однородно-вихревого ядра могут быть получены только в результате численного интегрирования, так как ни та, ни другая граница аналитического выражения не имеет. Например, для течения в области, заданной геометрическими параметрами  $\sigma$  и  $\kappa$ , равными  $\sigma = 0,1$  и  $\kappa = 10$ , безразмерные работы нижней границы области течения  $\bar{A}_n$  и верхней границы однородно-вихревого ядра  $\bar{A}_ж$ , вычисленные с точностью  $\varepsilon = 10^{-6}$ , имеют следующие значения:  $\bar{A}_n \cdot \text{Re} = 207,696$ ;  $\bar{A}_ж \cdot \text{Re} = 207,672$ . (Черточки над безразмерными величинами здесь и дальше снова опускаем.)

Периодическое течение жидкости в канале вызвано исключительно движением границ области течения, так как массовые силы предполагаются отсутствующими. В результате отсутствия изменения кинетической энергии на одном периоде волны диссипируемая в ядре энергия определяется только суммой работ  $\bar{A}_n$  и  $\bar{A}_ж$  ( $\bar{A}_n = \bar{A}_n + \bar{A}_ж$ ); численное ее значение для нашего примера равно  $\bar{A}_д = \frac{1}{\text{Re}} \cdot 415$ .

Предположим теперь, что над однородно-вихревым ядром находится безвихревое потенциальное течение с ограниченной скоростью на бесконечности  $U_\infty$ . Границей сопряжения обоих течений будет служить верхняя нулевая линия тока, которая либо совпадает с уже имеющейся, либо близка к ней.

Внешнее безвихревое течение опишется функцией  $\Psi(x, y)$ , удовлетворяющей уравнению Лапласа  $\Delta\Psi = 0$  и имеющей на бесконечности

ограниченную производную по  $y$ :  $(\Psi'_y)_{y=\infty} = \text{const}$ . Для функций  $\psi(x, y)$ ,  $\Psi(x, y)$  и их производных на линии сопряжения  $y = y_c(x)$  должны выполняться следующие условия:

$$\begin{aligned} \psi[x, y_c(x)] &= \Psi[x, y_c(x)] = 0, \\ (\psi'_x)_{y=y_c(x)} &= (\Psi'_x)_{y=y_c(x)}, \\ (\psi'_y)_{y=y_c(x)} &= (\Psi'_y)_{y=y_c(x)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Для отыскания функции  $\Psi$  воспользуемся тем обстоятельством, что верхняя нулевая линия тока мало отличается от прямой  $y = h$ , где  $h$  — среднее удаление нулевой линии тока от оси  $ox$ , и вместо функции  $\Psi$  будем искать близкую к ней функцию, для которой равенства (17) выполняются на прямой  $y = h$ . Сохраним для искомого функции то же обозначение и запишем ее в виде

$$\Psi(x, y) = Ae^{-y} \cos x + By + C,$$

где  $A, B, C$  — коэффициенты, имеющие произвольные значения. Выполнение условия  $\psi(x, y) = \Psi(x, y)$  и третьего условия (17) на прямой  $y = h$  приводит к следующим четырем уравнениям:

$$Ae^{-h} = \omega(a \operatorname{ch} h + b \operatorname{sh} h), \quad (18)$$

$$Bh + C = \omega(h^2 + b_0 h + a), \quad (19)$$

$$Ae^{-h} = \omega(a \operatorname{sh} h + b \operatorname{ch} h),$$

$$B = \omega(2h - b_0).$$

Вычтем правую и левую части уравнения (19) из соответствующих частей уравнения (18) и в результате получим равенство

$$a \operatorname{sh} h + b \operatorname{ch} h + a \operatorname{ch} h + b \operatorname{sh} h = 0, \quad (20)$$

которое тождественно удовлетворяется в том случае, когда  $b = -a$ . Этот случай соответствует высокому расположению движущейся пластинки — верхней границы области однородно-вихревого течения. Ограничиваясь только этим случаем, будем считать равенство (20) выполненным. Тогда для определения коэффициентов  $A, B$  и  $C$  имеем систему трех уравнений, решив которую, получаем такие выражения для этих коэффициентов:  $A = -\omega a$ ,  $B = \omega(2h - b_0)$ ,  $C = \omega(a - h^2)$ . В результате функция  $\Psi$  запишется

$$\Psi(x, y) = -\omega[ae^{-y} \cos x - (2h - b_0)y - (a - h^2)], \quad (21)$$

а функция  $\psi$  с учетом равенства  $b = -a$  — в следующем виде:

$$\psi(x, y) = -\omega(ae^{-y} \cos x - y^2 + b_0 y - a). \quad (22)$$

Производные этих функций по  $x$  совпадают при любых  $y$ , а при  $y = h$  функция  $\psi(x, y)$  отличается от константы на величину, максимальное значение которой равно  $\omega a l^{-h}$ : с этой точностью прямая  $y = h$  представляет собой линию тока.

Введем параметр  $\varepsilon$  — максимальное отклонение нулевой линии тока  $y = y_c(x)$  — линии сопряжения от прямой  $y = h$ . Из (21) и (22) нетрудно получить следующие оценки

$$\max_x |\psi[x, y_c(x)] - \Psi[x, y_c(x)]| = \omega \varepsilon^2,$$

$$\max_x |\psi'_y[x, y_c(x)] - \Psi'_y[x, y_c(x)]| = 2\omega \varepsilon,$$

которые показывают, что, чем меньше величина  $\varepsilon$ , т. е. чем меньше кривая  $y = y_c(x)$  отличается от прямой линии, тем точнее выполняются условия сопряжения (17) двух течений, описываемых функциями  $\psi$  и  $\Psi$ .

Скорость на бесконечности внешнего течения определяется по формуле

$$U_{\infty \text{ отн}} = (\Psi'_y)_{y=\infty} = \omega(2h - b_0).$$

Для приведенного выше примера имеем  $\omega = -8,254$ ;  $h = 0,145$ ;  $b_0 = 0,195$ ;  $\varepsilon = 0,045$ . Поэтому  $U_{\infty \text{ отн}} = 0,784$ , а

$$\max_x |\Psi'_y[x, y_c(x)] - \Psi'_y[x, y_c(x)]| = 0,742.$$

В абсолютной системе координат безразмерная скорость на бесконечности равна  $U_{\infty} = U_{\infty \text{ отн}} + 1$ , т. е.  $U_{\infty} = 1,784$ .

Обратим теперь движение вдоль бегущей волны и будем считать, что в безграничной неподвижной жидкости влево с поступательной скоростью  $U_{\infty}$  движется полоса, которая совершает колебательные движения в соответствии с уже рассмотренной нами схемой. Полосу примем смачиваемой с одной стороны. Потребная для движения мощность, отнесенная к одной длине волны, известна — это диссипируемая в одной лунке волны энергия  $A_n$ .

Сравним мощность  $A_n$  с мощностью буксировки плоской пластинки длины  $2\lambda$ , протаскиваемой в неподвижной жидкости со скоростью  $U_{\infty}$ . (Далее над безразмерными величинами снова будем ставить черточки.)

Сопrotивление пластинки, смачиваемой с одной стороны, дается выражением

$$W = \frac{1,328}{2} b \sqrt{U_{\infty}^3 \mu \rho l},$$

где  $l$  — длина пластинки,  $b$  — ширина пластинки. Мощность, необходимая для буксирования пластинки со скоростью  $U_{\infty}$ , определяется по формуле  $\bar{A}_{пл} = W U_{\infty} = \frac{1,328}{2} b U_{\infty}^2 \sqrt{U_{\infty} \mu \rho l}$ .

Безразмерная мощность в выбранной здесь системе безразмерных величин имеет вид

$$\bar{A}_{пл} = \frac{1,328 \bar{U}_{\infty}^{5/2}}{\sqrt{Re}} \sqrt{\bar{l}}. \quad (23)$$

Положим  $\bar{l} = 2\pi$  и по формуле (23) подсчитаем мощность, необходимую для буксирования пластинки со скоростью  $\bar{U}_{\infty} = 1,742$ . Эта мощность равна  $\bar{A}_{пл} = 13,333/\sqrt{Re}$ . Сравнив  $\bar{A}_{пл}$  с  $\bar{A}_n = 415/Re$ , находим  $\bar{A}_{пл}/\bar{A}_n = 0,032 \sqrt{Re}$ . Таким образом, мощность, потребная для протаскивания пластинки, оказалась в  $0,032 \sqrt{Re}$  раз больше той мощности, которая рассеивается на одном периоде волны.

Мы считали, что диссипацией в однородно-вихревом ядре полностью исчерпываются все потери энергии, связанные с движением вдоль бегущей волны. Однако на границе сопряжения однородно-вихревого ядра и внешнего безвихревого течения происходит дополнительное рассеивание энергии, особенно значительное тогда, когда скорости этих течений на границе сопряжения точно не совпадают. Теоретический расчет диссипации здесь крайне затруднен, поэтому ее величину оценим приближенно.

Примем самую грубую модель течения в переходном слое, а именно, будем считать, что верхняя граница однородно-вихревого ядра — это плоская пластинка, которая обтекается внешним потоком со скоростью  $\bar{U}_{\infty} - \bar{u}_{пл}$ , где  $\bar{u}_{пл}$  — собственная скорость пластинки. Раньше мы видели, что максимальное значение разности скоростей внешнего и однородно-вихревого течений на линии их раздела составляет 0,742. Примем эту величину в качестве значения разности  $\bar{U}_{\infty} - \bar{u}_{пл}$  ( $\bar{U}_{\infty} - \bar{u}_{пл} = 0,742$ ). Обратив движение, можно считать, что в неподвижной жидкости букси-

руется пластинка с безразмерной скоростью, равной 0,742. По формуле (23) подсчитаем мощность, подводимую к пластинке длины  $2\pi$ . Эта мощность равна

$$\bar{A}_r = \frac{1,328 \cdot 0,742^{5/2}}{\sqrt{Re}} \sqrt{2\pi} = \frac{1,579}{\sqrt{Re}}.$$

Полная энергия диссипации на одном периоде волны будет, следовательно, равна сумме величин  $\bar{A}_n$  и  $\bar{A}_r$ ; обозначим ее через  $\bar{A}_n$  ( $\bar{A}_n = \bar{A}_n + \bar{A}_r$ ) и найдем отношение  $\bar{A}_{пл}/\bar{A}_n$ . Это отношение равно

$$\frac{\bar{A}_{пл}}{\bar{A}_n} = \frac{13,333 \sqrt{Re}}{415 + 1,579 \sqrt{Re}}.$$

Для  $Re = 10^4$  и  $Re = 10^8$  отношение  $\bar{A}_{пл}/\bar{A}_n$  принимает значения соответственно 2,32 и 8,22. Этим показано, что при больших числах Рейнольдса течение вязкой жидкости вдоль бегущей волны, осуществляющей управление вихревой структурой пристеночного слоя, в энергетическом отношении более выгодно, чем течение вдоль плоской пластинки.

Институт кибернетики АН УССР,  
Киев

Поступила в редакцию  
12/III 1980

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Меркулов В. И. Движение вязкой несжимаемой жидкости вдоль бегущей волны. — Изв. СО АН СССР, 1967, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.
2. Фердигалов Л. Ю. Постоянно-вихревое течение вязкой жидкости в плоском канале с колеблющимися границами. — В кн.: Респ. межвед. сборник. Гидромеханика. Киев: Наукова думка, 1978.
3. Ланс Дж. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. М.: ИЛ, 1962.

УДК 532.526.4.—2

К. Е. ДЖАУГАШТИН, А. В. СОЛДАТКИН

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СТРУИ  
ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ АРХИМЕДОВЫХ СИЛ

Рассмотрим нагретую струю несжимаемой жидкости, вытекающую из круглого сопла и распространяющуюся вертикально вверх в изотермической среде под действием архимедовых сил и начального импульса струи. Предельные случаи естественного и вынужденного конвективного струйного течения исследованы ранее [1—4]. Уравнение движения и тепла, граничные и начальные условия при однородном распределении по сечению сопла параметров потока и при постоянных физических свойствах среды в рамках теории пограничного слоя имеют вид [5]:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\nu}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \beta g \Delta T,$$

$$u \frac{\partial \Delta T}{\partial x} + v \frac{\partial \Delta T}{\partial y} = \frac{\nu}{\sigma y} \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\partial \Delta T}{\partial y} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial(yu)}{\partial x} + \frac{\partial(yv)}{\partial y} = 0.$$

$$\left. \begin{aligned} u = U_0, \quad \Delta T = \Delta T_0 \quad (0 \leq y \leq 1) \\ u = \Delta T = 0 \quad (1 < y < \infty) \end{aligned} \right\} x = 0, \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \Delta T}{\partial y} = 0 \quad (y = 0), \quad u \rightarrow 0, \quad \Delta T \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow \infty) \end{aligned} \right\} x > 0,$$

(где  $\Delta T = T - T_\infty$ ,  $T_\infty$  — температура окружающей среды).

Исследуем основной участок струи. С этой целью уравнения (1) взамен начальных условий (2) дополним соотношениями для импульса струи  $I$  и избыточного теллосодержания  $Q$ , полученными путем интегрирования уравнений движения и тепла с учетом уравнения неразрывности и граничных условий:

$$\frac{\partial I}{\partial x} = 2\pi\beta g \int_0^\infty \rho \Delta T y dy, \quad I = I_0 \quad \text{при} \quad x = 0,$$

$$Q = 2\pi \int_0^\infty \rho c_p u \Delta T y dy = \text{const}. \quad (3)$$

Решение, как и обычно, будем искать в виде

$$\frac{u}{u_m} = \frac{F'(\varphi)}{\varphi}, \quad \frac{\Delta T}{\Delta T_m} = \theta(\varphi), \quad \varphi = \frac{y}{\delta}, \quad (4)$$

где  $u_m$  и  $\Delta T_m$  — значения скорости и избыточной температуры на оси струи,  $\delta$  — условная ширина струи (штрих над величинами  $F'$  и  $\theta$  означает дифференцирование по  $\varphi$ , над  $u_m$ ,  $\delta$  и  $\Delta T_m$  — по  $x$ ).

Из уравнений (1), (3) и (4), используя метод локальной автомодельности [6, 7], получим выражения для масштабных и интегральных величин

$$u_m = \frac{I}{2\pi\alpha\rho\nu x}, \quad \delta = \sqrt{\frac{2\pi\alpha\rho}{I}} \nu x,$$

$$\Delta T_m = \frac{Q}{2\pi\lambda_1\rho c_p \nu x}, \quad I = \sqrt{I_0^2 + \frac{2\pi\alpha\rho\nu\beta g Q x^2}{\lambda_1 c_p}}, \quad (5)$$

$$\left( \alpha = \int_0^\infty \left( \frac{F'}{\varphi} \right)^2 \varphi d\varphi, \quad \lambda_1 = \int_0^\infty F' \theta d\varphi, \quad \gamma = \int_0^\infty \varphi \theta d\varphi \right)$$

и уравнения для определения профилей скорости и температуры

$$\frac{1}{\varphi} \left[ \varphi \left( \frac{F'}{\varphi} \right)' \right]' + \left( \frac{F'}{\varphi} \right)^2 + \frac{F}{\varphi} \left( \frac{F'}{\varphi} \right)' - \frac{\chi}{I_0^2 + \lambda\chi} \left[ \left( \frac{F'}{\varphi} \right)^2 - \theta \right],$$

$$(\varphi\theta)' + \sigma(F\theta)' = 0, \quad (6)$$

$$\left( \chi = \frac{2\pi\alpha^2\rho\nu\beta g Q x^2}{\lambda_1 c_p}, \quad \lambda = \frac{\gamma}{\alpha} \right)$$

с граничными условиями

$$F = 0, \quad F'/\varphi = 1, \quad \theta = 1 \quad \text{при} \quad \varphi = 0,$$

$$F'/\varphi \rightarrow 0, \quad \theta \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varphi \rightarrow \infty. \quad (7)$$

При  $I_0 = 0$  и  $Q_0 = 0$  из (5) и (6) получим выражения для масштабных величин и автомодельные уравнения движения, соответствующие естественной и вынужденной конвекции ( $I = 0$ ,  $u_m = \text{const}$ ,  $\delta \sim \sqrt{x}$ ;  $Q_0 = 0$ ,  $u_m \sim 1/x$ ,  $\delta \sim x$ ). Эти же режимы течения являются предельными в общем случае развития струи под действием архимедовых сил и сил инерции. При

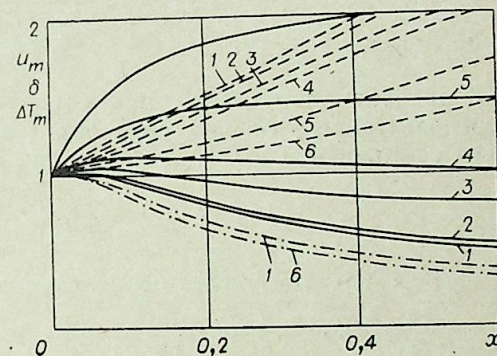


Рис. 1. Изменение значений скорости ( $u_m$  —), ширины ( $\delta$  —), температуры ( $\Delta T_m$  —) вдоль оси струи при  $\sigma = 0,71$ .  
Gr/Re = 0 (1); 0,1 (2); 1 (3); 2 (4); 5 (5); 10 (6).

этом естественная конвекция описывает закономерности распространения струи вдали от устья ( $x \rightarrow \infty$ ), а вынужденная — вблизи ее истока ( $x \rightarrow 0$ ). При смешанной конвекции течение неавтомодельно и расчет струи можно выполнить методом локальной автомодельности. Решение уравнения (6) для каждого заданного поперечного сечения существует и облегчается тем, что при неограниченном изменении  $x$  ( $0 < x < \infty$ ) коэффициент в правой части уравнения (6) изменяется в конечном интервале  $0 < \frac{\chi}{I_0^2 + \lambda\chi} < \frac{1}{\lambda}$ . При известных решениях уравнения (6) для нескольких значений этого комплекса решения для других значений  $x$  (или  $\chi$ ) могут быть определены путем интерполяции.

Отметим, что в частном случае  $\sigma = 2$  течение автомодельно и решение задачи имеет вид

$$\frac{F'(\varphi)}{\varphi} = \left( 1 + \frac{\varphi^2}{8} \right)^{-2}, \quad \theta(\varphi) = \left( 1 + \frac{\varphi^2}{2} \right)^{-4}. \quad (8)$$

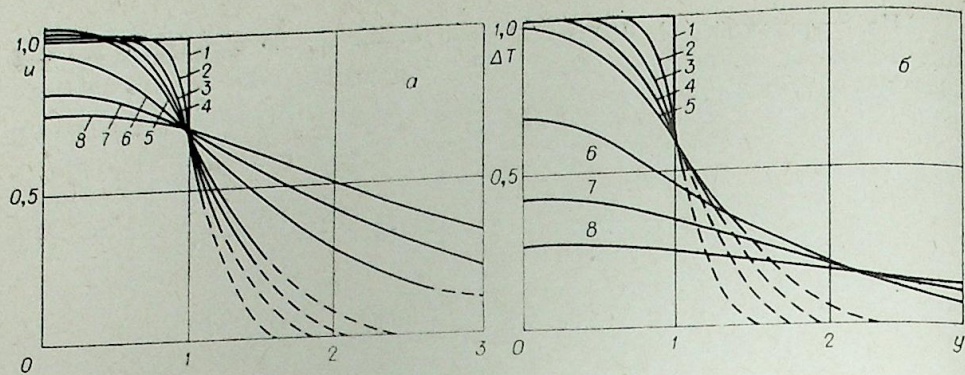


Рис. 2. Распределение скорости (а) и температуры (б) в поперечных сечениях струи.  
 $\sigma=0,71$ ;  $Gr/Re=1$ .  $x=0,2$  (1); 0,005 (2); 0,015 (3); 0,03 (4); 0,05 (5); 0,2 (6); 0,45 (7); 0,8 (8).

$$u_m = \sqrt{\left(\frac{3}{8x}\right)^2 + \frac{5}{8} \frac{Gr}{Re}}, \quad \delta = \frac{x}{\left[\left(\frac{3}{8x}\right)^2 + \frac{5}{8} \frac{Gr}{Re} x^2\right]^{1/4}}, \quad (9)$$

$$\Delta T_m = \frac{5}{8x}, \quad Gr = \frac{\beta g r^3 \Delta T_0}{\nu^2}, \quad Re = \frac{U_0 r}{\nu},$$

где  $u_m$ ,  $\delta$ ,  $\Delta T_m$ ,  $x$  — безразмерные величины. В качестве масштаба скорости, температуры и длины приняты начальные значения скорости  $U_0$ , избыточной температуры  $T_0 - T_\infty$  и радиус сопла  $r$  ( $T_0$  — температура струи в начальном сечении).

Исследование всей области развития струи выполним путем численного расчета исходных уравнений (1), записанных в безразмерном виде

$$\bar{x} = \frac{x}{r Re}, \quad \bar{y} = \frac{y}{r}, \quad \bar{u} = \frac{u}{U_0}, \quad \bar{v} = \frac{v}{U_0} Re, \quad Re = \frac{U_0 r}{\nu}, \quad \Delta \bar{T} = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}.$$

(Знак черты над безразмерными величинами ниже опущен.) Для этого воспользуемся условием сохранения избыточного теплосодержания (второе соотношение в (3)) и введем по аналогии с [8] замену переменных

$$\xi = x, \quad \eta = \left[ 2 \int_0^y \Delta T u y dy \right]^{1/2}. \quad (10)$$

В результате получим систему уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\Delta T^2}{\eta} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{y^2 u}{\eta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{\Delta T}{\eta^2} \left( 1 - \frac{1}{\sigma} \right) y^2 u \frac{\partial \Delta T}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{Gr}{Re} \cdot \frac{\Delta T}{u},$$

$$\frac{\partial \Delta T}{\partial \xi} = \frac{\Delta T^2}{\sigma \eta} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{y^2 u}{\eta} \cdot \frac{\partial \Delta T}{\partial \eta} \right) \quad (11)$$

с граничными условиями

$$\left. \begin{aligned} u = \Delta T = 1 \quad (0 \leq \eta < 1) \\ u = \Delta T = 0 \quad (\eta = 1) \end{aligned} \right\} \xi = 0, \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial \Delta T}{\partial \eta} = v = 0 \quad (\eta = 0) \\ u = \Delta T = 0 \quad (\eta = 1) \end{aligned} \right\} \xi > 0. \quad (12)$$

Поперечная компонента скорости  $v$  и связь переменных  $\eta$  и  $y$  определяются выражениями

$$v = -\frac{u}{y} \int_0^\eta \frac{1}{u^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\Delta T u}{\eta} y^2 \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) d\eta - \frac{Gr}{Re} \frac{u}{y} \int_0^\eta \frac{\eta}{u^3} d\eta,$$

$$y = \left[ 2 \int_0^\eta \frac{\eta d\eta}{\Delta T u} \right]^{1/2}.$$

Численный расчет уравнений (11) был выполнен, как и в [2], методом прямых при равномерном разбиении поля полосы  $\xi \geq 0$ ,  $0 \leq \eta \leq 1$  на 40 частей. Некоторые особенности аппроксимации искомых функций на оси струи указаны в [9].

Результаты расчета для нескольких значений параметра  $Gr/Re$  приведены на рис. 1. С увеличением параметра  $Gr/Re$  значение скорости на оси струи увеличивается, а область смещения ( $\delta$ ) уменьшается. При этом максимальная избыточная температура изменяется незначительно. На больших расстояниях от сопла закономерность развития струи соответствует конвективной струе ( $u_m = \text{const}$ ,  $\delta \sim \sqrt{x}$ ), причем увеличение параметра воздействия приближает область такого режима течения ближе к устью струи. Отметим также, что при режимных параметрах, в которых предельная максимальная скорость меньше начальной скорости, вблизи сопла наблюдается увеличение скорости ( $u > 1$ ) вследствие влияния архимедовых сил. Это видно также из рис. 2, а, где приведено распределение скорости в поперечном сечении струи. Профиль температуры в различных сечениях струи показан на рис. 2, б.

Результаты точного и численного решения уравнения (11) при  $\sigma=2$  удовлетворительно согласуются между собой (рис. 3) при значении полюсного расстояния  $x_0 = -0,15$ .

Ленинградское высшее военно-морское училище Поступила в редакцию  
 им. В. И. Ленина 28/VI 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

- Schlichting H. Laminare Strahlbreitung. — ZAMM, 1933, 13.
- Белоглазов Б. П., Гиневский А. С. Расчет ламинарных спутных струй с точным удовлетворением условия постоянства избыточного импульса. — Уч. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 4.
- Зельдович Я. Б. Предельные зоны свободно восходящих конвективных потоков. — ЖЭТФ, 1937, 7, № 12.
- Grand R. S., Laahey F. I. The heated laminar vertical jet. — IFM, 1967, 29.
- Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
- Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. М.: ИЛ, 1962.
- Бектурганов Е., Джаугаштин К. Е., Сакипов З. Задача о струе жидкости, распространяющейся вдоль движущейся пластины. — Вестн. АН КазССР, 1973, 9.
- Белоглазов Б. П. Об одном преобразовании уравнений свободных струйных течений несжимаемой жидкости, основанном на их инвариантах. — Докл. АН СССР, 1974, № 3.
- Джаугаштин К. Е., Ярин А. Л. Расчет ламинарной неавтономной полуграниченной струи жидкости. — ИФЖ, 1977, т. 32, № 4.

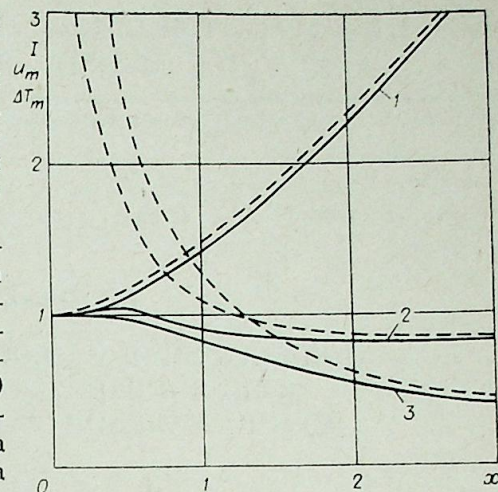


Рис. 3. Сравнение численного (—) и аналитического (---) решений при  $\sigma=2$ ;  $Gr/Re=1$ .  
 1 —  $u_m$ , 2 —  $\Delta T_m$ , 3 —  $\Delta T_m$ .

К. Б. ДЖАКУПОВ

О КОНВЕКТИВНОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ  
В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПРОСЛОЙКЕ  
ПРИ НАЛОЖЕНИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Расчет тепловой конвекции для различных значений критериев подобия в горизонтальных цилиндрических прослойках при наложении магнитного поля и без него представляет определенный теоретический и практический интерес [1, 2]. В данной работе приводятся результаты численного расчета ламинарной тепловой конвекции на основе полных уравнений Буссинеска, т. е. в предположении малости отклонения плотности от ее среднего значения и малости ускорений по сравнению с ускорением силы тяжести.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Горизонтальная цилиндрическая прослойка, расположенная между цилиндрами радиусов  $R_n$  и  $R_n$ ,  $R_n < R_n$ , имеющими отклонения температуры  $T_n$  и  $T_n$  соответственно, приведена на рис. 1, сила тяжести и индукция  $\vec{B}_0$  постоянного магнитного поля направлены противоположно и коллинеарно друг другу.

Уравнения Буссинеска в полярной системе координат с учетом электромагнитных сил Лоренца в случае электропроводящей жидкости ( $\sigma \neq 0$ ) имеют вид

$$\rho_0 \left( u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v^2}{r} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} = \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) + \rho_0 \beta T g \sin \varphi + \frac{1}{c} (\vec{j} \times \vec{B}_0)_r, \quad (1)$$

$$\rho_0 \left( u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{uv}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) + \rho_0 \beta T g \cos \varphi + \frac{1}{c} (\vec{j} \times \vec{B}_0)_\varphi, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0, \quad (3)$$

$$\rho_0 c_v \left( u \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right). \quad (4)$$

Система (1)–(4) замыкается обобщенным законом Ома для изотропно проводящей среды  $\vec{j} = \sigma \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B}_0 \right)$  и следствием закона Кирхгофа

$\int_{R_n}^{R_n} j_z dr = 0$ , так как возникающие электрические токи замыкаются на бесконечности.

В уравнениях (1)–(4)  $u$  — радиальная составляющая скорости  $\vec{v}$ ,  $v$  — азимутальная составляющая  $\vec{v}$ ,  $p$  — давление,  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости,  $\rho_0$  — средняя для всей прослойки плотность,  $r$  — радиус,  $\varphi$  — угловая координата,  $T$  — отклонение температуры от средней для всей прослойки температуры,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $c_v$  — удельная теплоемкость,  $c$  — скорость света,  $\vec{B}_0$  — магнитная индукция,  $\vec{j}$  — плотность тока,  $\beta$  — коэффициент теплового расширения,  $k$  — коэффициент теплопроводности,  $\vec{E}$  — напряженность электрического поля,  $x, y, z$  — декартовы оси.

Проекция силы Лоренца на оси  $r$  и  $\varphi$  равны

$$\frac{1}{c} (\vec{j} \times \vec{B}_0)_r = -\frac{\sigma}{c^2} (u \cos \varphi - v \sin \varphi) \cos \varphi \cdot B_y^2 - \frac{\sigma}{c} E_z B_y \cos \varphi,$$

$$\frac{1}{c} (\vec{j} \times \vec{B}_0)_\varphi = \frac{\sigma}{c^2} (u \cos \varphi - v \sin \varphi) \sin \varphi \cdot B_y^2 + \frac{\sigma}{c} E_z B_y \sin \varphi.$$

В результате перехода в (1)–(4) к безразмерным переменным

$$r' = \frac{r}{R_n}, \quad \varphi' = \frac{\varphi}{2\pi}, \quad T' = \frac{T - T_n}{T_n - T_n}, \quad u' = k^{-1} u \rho_0 c_v R_n,$$

$$p' = k^{-2} p \rho_0 c_v^2 R_n^2, \quad v' = k^{-1} v \rho_0 c_v R_n$$

(в дальнейшем штрихи опускаются), ввода безразмерной функции тока по формулам

$$u = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (5)$$

и вихря скорости

$$\omega = \frac{1}{4r^2 \pi^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (6)$$

а затем исключения безразмерного давления  $p'$  из уравнений движения, получается одно уравнение

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{4\pi^2 r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} + \text{Gr} \cdot \text{Pr} \left( \frac{\partial(T \sin 2\pi\varphi)}{2\pi \partial \varphi} - \frac{\partial(rT \cos 2\pi\varphi)}{\partial r} \right) - \text{Ha}^2 \left\{ \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \left( \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \cos 2\pi\varphi + \frac{\partial \psi}{\partial r} \sin 2\pi\varphi \right) \cos^2 \pi\varphi \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \cos 2\pi\varphi + \frac{\partial \psi}{\partial r} \sin 2\pi\varphi \right) \sin 2\pi\varphi \right] \right\}. \quad (7)$$

К системе (6), (7) присоединяются безразмерное уравнение теплопроводности

$$\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{4r^2 \pi^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}, \quad (8)$$

граничные условия на внутреннем цилиндре

$$r = R_n/R_n, \quad T = 0, \quad \psi = 0, \quad \partial \psi / \partial r = 0 \quad (9)$$

и на внешнем цилиндре

$$r = 1, \quad T = 1, \quad \psi = 0, \quad \partial \psi / \partial r = 0. \quad (10)$$

В уравнение (7) входят критерии подобия: числа Грасхофа  $\text{Gr} =$

$$= \frac{\rho_0^2 \beta g R_n^3 (T_n - T_v)}{\mu^2}, \quad \text{Прандтля} \quad \text{Pr} = \frac{\mu c_v}{k}, \quad \text{Гартмана} \quad \text{Ha} = \frac{\sigma B_y^2 R_n^2}{\mu c^2}.$$

### МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

Для применения каких-либо аналитических методов решения системы уравнений (6)–(8) достаточно сложна, в силу чего был разработан метод сеток. В область  $R_w/R_n \leq r \leq 1$ ,  $0 \leq \varphi \leq 1$  вводится сетка  $r_i = ih_1 + R_w/R_n$ ,  $i = 0, 1, \dots, N_1 = \frac{1 - R_w/R_n}{h_1}$ ,  $\varphi_j = j \cdot h_2$ ,  $j = 0, 1, \dots, N_2 = 1/h_2$ ; обозначаются:  $f(r_i, r_j) \equiv f_{ij}$ ,  $T_{\pm 1} f \equiv f_{i \pm 1, j}$ ,  $T_{\pm 2} f \equiv f_{i \pm 2, j}$ ,  $E f \equiv f_{ij} \equiv f$ ,  $\Delta_m = T_m - E$ ,  $\Delta_{-m} = E - T_{-m}$ ,  $m = 1, 2$ ,  $f_r \equiv \frac{\Delta_1 f}{h_1}$ ,  $f_{rr} \equiv \frac{\Delta_2 f}{h_1^2}$ ,  $f_\varphi \equiv \frac{\Delta_1 f}{h_2}$ ,  $f_{\varphi\varphi} \equiv \frac{\Delta_2 f}{h_2^2}$ ,  $f_{r\varphi} \equiv \frac{\Delta_1 \Delta_1 f}{h_1^2}$ ,  $f_{\varphi r} \equiv \frac{\Delta_2 \Delta_2 f}{h_2^2}$ ,  $f_{\tilde{r}} = 0,5 (f_r + f_r)$ ,  $f_{\tilde{\varphi}} = 0,5 (f_\varphi + f_\varphi)$ .

Краевая задача (6)–(10) аппроксимируется следующей разностной схемой, принципы построения которой изложены в работах [3, 4]:

$$A_1 \psi \equiv \frac{1}{4r_i^2 v^2} \psi_{\varphi\varphi} + \frac{1}{h_1} \psi_{rr} + \frac{1}{r_i} \psi_r = \omega, \quad (11)$$

$$1 \leq i \leq N_1 - 1, \quad 1 \leq j \leq N_2;$$

$$A_2 \omega \equiv \frac{|a_1| + a_1}{2} \omega_r + \frac{a_1 - |a_1|}{2} \omega_r + \frac{|a_2| + a_2}{2} \omega_\varphi + \frac{a_2 - |a_2|}{2} \omega_\varphi - \frac{v_1 \left(1 + \frac{|a_2| h_2}{2v_2}\right)}{1 + \frac{|a_1| h_1}{2v_1} + \frac{|a_2| h_2}{2v_2}} \omega_{rr} - \frac{v_2 \left(1 + \frac{|a_1| h_1}{2v_1}\right)}{1 + \frac{|a_1| h_1}{2v_1} + \frac{|a_2| h_2}{2v_2}} \omega_{\varphi\varphi} = \text{Gr} \cdot \text{Pr} \left( \frac{1}{2\pi} (T \sin 2\pi\varphi)_{\tilde{\varphi}} - (rT \cos 2\pi\varphi)_{\tilde{r}} - \text{Ha}^2 \left\{ \frac{1}{4\pi^2 r} (\psi_{\varphi\varphi} \cos^2 2\pi\varphi + 2\pi \cos 4\pi\varphi \cdot \psi_{\tilde{\varphi}}) + \frac{1}{2\pi} (\psi_{\tilde{r}} \cdot \sin 2\pi\varphi \cdot \cos 2\pi\varphi)_{\tilde{\varphi}} + \frac{1}{4\pi} \sin 4\pi\varphi \cdot \psi_{\tilde{r}\tilde{\varphi}} + (r\psi_{\tilde{r}})_{\tilde{r}} \sin^2 2\pi\varphi \right\}, \quad 2 \leq i \leq N_1 - 2, \quad 1 \leq j \leq N_2, \quad (12)$$

где

$$a_1 = \frac{1}{2\pi r_i \text{Pr}} \psi_{\tilde{\varphi}} - \frac{1}{r_i}, \quad a_2 = \frac{1}{2\pi r_i \text{Pr}} \psi_{\tilde{r}}, \quad v_1 = 1, \quad v_2 = \frac{1}{4\pi^2 r_i^2}, \quad (13)$$

$$A_3 T \equiv \frac{|b_1| + b_1}{2} T_r + \frac{b_1 - |b_1|}{2} T_r + \frac{|b_2| + b_2}{2} T_\varphi + \frac{b_2 - |b_2|}{2} T_\varphi - \frac{v_1 \left(1 + \frac{|b_2| h_2}{2v_2}\right)}{1 + \sum_{m=1}^2 \frac{|b_m| h_m}{2v_m}} T_{rr} - \frac{v_2 \left(1 + \frac{|b_1| h_1}{2v_1}\right)}{1 + \sum_{m=1}^2 \frac{|b_m| h_m}{2v_m}} T_{\varphi\varphi} = 0, \quad (14)$$

$$1 \leq i \leq N_1 - 1, \quad 1 \leq j \leq N_2.$$

Здесь

$$b_1 = \frac{1}{2\pi r_i} \psi_{\tilde{\varphi}} - \frac{1}{r_i}, \quad b_2 = \frac{1}{2\pi r_i} \psi_{\tilde{r}}, \quad (15)$$

$$T_{0j} = 0, \quad \psi_{0j} = 0, \quad A_4 \psi \equiv \frac{3\psi_{0j} - 4\psi_{1j} + \psi_{2j}}{2h_1} = 0, \quad 1 \leq j \leq N_2, \quad (16)$$

$$T_{N,j} = 0, \quad \psi_{N,j} = 0, \quad A_4 \psi \equiv \frac{3\psi_{N_1 j} - 4\psi_{N_1-1 j} + \psi_{N_1-2 j}}{2h_1} = 0, \quad 1 \leq j \leq N_2; \quad (17)$$

условия периодичности:

$$f_{i0} = f_{iN_2}, \quad f_{i1} = f_{iN_2+1}, \quad 0 \leq i \leq N_1, \quad f = \psi, \omega, T. \quad (18)$$

Разностная схема (11), (12), (14), (16), (17) аппроксимирует исходную краевую задачу с погрешностью  $O(h_1^2 + h_2^2)$  в классе достаточно гладких решений задачи (6)–(10).

Система нелинейных алгебраических уравнений (11), (12), (14), (16), (17) является замкнутой. В данном методе не требуется вычисления вихря скорости на твердых стенках. Такой алгоритм был впервые указан в работе Пирсона [5] и развит для явных схем и схем метода дробных шагов в работах [6, 7]. Следует указать и на другую интерпретацию этого алгоритма в [8], в которой, однако, для функции тока возникает переопределенная система уравнений.

### ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РАСЩЕПЛЕНИЯ С ВАРИАЦИОННОЙ ОПТИМИЗАЦИЕЙ И С УСКОРЕНИЕМ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИЙ

В силу нелинейности система (11), (12), (14), (16), (17) может быть решена только с помощью итерационного процесса, в качестве которого здесь используется метод расщепления с вариационной оптимизацией [9] (верхние индексы — номера итераций):

$$R_2^k = A_2^k \omega^k - F^k, \quad 2 \leq i \leq N_1 - 2, \quad 1 \leq j \leq N_2, \quad B_2^k = B_{21}^k B_{22}^k, \quad (19)$$

$$B_{2m}^k = E + \frac{|a_m^k| + a_m^k}{2h_m} \Delta_{-m} + \frac{a_m^k - |a_m^k|}{2h_m} \Delta_m + \frac{v_m \left(1 + \frac{|a_{3-m}^k| h_{3-m}}{2v_{3-m}}\right)}{\left(1 + \sum_{n=1}^2 \frac{|a_n^k| h_n}{2v_n}\right) h_m^2} (\Delta_{-m} - \Delta_m), \quad m = 1, 2,$$

$$\alpha_k = - \frac{\sum_{i=2}^{N_1-2} \sum_{j=1}^{N_2} R_{2ij}^k (A_2^k (B_2^k)^{-1} R_2^k)_{ij}}{\sum_{i=2}^{N_1-2} \sum_{j=1}^{N_2} (A_2^k (B_2^k)^{-1} R_2^k)_{ij}^2}, \quad \omega_{ij}^k \Big|_{i=N_1-1} = A_1 \psi^k, \quad R_{ij}^k \Big|_{i=N_1-1} = 0,$$

$$1 \leq j \leq N_2, \quad \omega^{k+1} = \omega^k + \alpha_k (B_2^k)^{-1} R_2^k, \quad 2 \leq i \leq N_1 - 2, \quad 1 \leq j \leq N_2;$$

$$R_3^k = A_3^k T^k, \quad 1 \leq i \leq N_1 - 1, \quad 1 \leq j \leq N_2, \quad B_3^k = B_{31}^k B_{32}^k,$$

$$B_{3m}^k = E + \frac{|b_m^k| + b_m^k}{2h_m} \Delta_{-m} + \frac{b_m^k - |b_m^k|}{2h_m} \Delta_m + \frac{v_m \left(1 + \frac{|b_{3-m}^k| h_{3-m}}{2v_{3-m}}\right)}{\left(1 + \sum_{n=1}^2 \frac{|b_n^k| h_n}{2v_n}\right) h_m^2} (\Delta_m - \Delta_{-m}), \quad m = 1, 2, \quad (20)$$

$$\beta_k = - \frac{\sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2} R_{3ij}^k (A_3^k (B_3^k)^{-1} R_3^k)_{ij}}{\sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2} (A_3^k (B_3^k)^{-1} R_3^k)_{ij}^2}, \quad R_{3ij}^k \Big|_{i=0} = 0, \quad 1 \leq j \leq N_2,$$

$$T^{k+1} = T^k + \beta_k (B_3^k)^{-1} R_3^k, \quad 1 \leq i \leq N_1 - 1, \quad 1 \leq j \leq N_2;$$

$$R_1^s = A_1 \psi^s - \omega^k, \quad 2 \leq i \leq N_1 - 2, \quad 1 \leq j \leq N_2,$$

$$R_{1ij}^s \Big|_{i=N_1-1} = A_4 \psi^s, \quad 1 \leq j \leq N_2, \quad B_1 = B_{11} B_{12},$$

$$B_{11} = E - \left[ \frac{1}{1 + \frac{h_1}{2r_i}} (\Delta_1 - \Delta_{-1}) + \frac{1}{r_i} \Delta_1 \right] \text{sign}((i-1)(N_1-1-i)) + \\ + \frac{1 - \text{sign}(i-1)}{2} \cdot \frac{4E - T_{+1}}{2h_1} + \frac{1 + \text{sign}(i-N_1+1)}{2} \cdot \frac{4E - T_{-1}}{2h_1}, \quad (21)$$

$$B_{12} = E - \frac{1}{4r_i^2 \pi^2} (\Delta_2 - \Delta_{-2}), \quad \gamma_s = - \frac{\sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2} R_{1ij}^s (A_1 B_1^{-1} R_1^s)_{ij}}{\sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2} (A_1 B_1^{-1} R_1^s)_{ij}^2},$$

$$\psi^{s+1} = \psi^s + \gamma_s B_1^{-1} R_1^s, \quad 1 \leq i \leq N_1 - 1, \quad 1 \leq j \leq N_2;$$

$$s = 0, 1, \dots, \psi^0 = \psi^{k-1}, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \psi^s = \psi^k; \quad k = 0, 1, \dots$$

Процессы (19), (20), (21) ведутся до выполнения условий  $\max_{i,j} |R_{2ij}^k| < \varepsilon_2$ ,  $\max_{i,j} |R_{3ij}^k| < \varepsilon_3$ ,  $\max_{i,j} |R_{1ij}^k| < \varepsilon_1$ , где  $\varepsilon_m > 0$ ,  $m = 1, 3$  — заданные малые числа, в наших расчетах было  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0,09$ . Следует заметить, что в некоторых (непредсказуемых) случаях внутренние итерации для функции тока не являются необходимыми для сходимости внешнего итерационного процесса по  $k$ . Для ускорения сходимости итераций эффективно чередование через каждые два цикла с итерационными процессами вида

$$\omega^{k+2} = (1 - c_1) \omega^{k+1} + c_1 \omega^{k-1}, \quad c_1 = \frac{\sum_{i=2}^{N_1-2} \sum_{j=1}^{N_2} R_{2ij}^{k+1} (A_2^{k+1} (\omega^{k+1} - \omega^{k-1}))_{ij}}{\sum_{i=2}^{N_1-2} \sum_{j=1}^{N_2} (A_2^{k+1} (\omega^{k+1} - \omega^{k-1}))_{ij}^2};$$

$$T^{k+2} = (1 - c_2) T^{k+1} + c_2 T^{k-1}, \quad c_2 = \frac{\sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2} R_{3ij}^{k+1} (A_3^{k+1} (T^{k+1} - T^{k-1}))_{ij}}{\sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2} (A_3^{k+1} (T^{k+1} - T^{k-1}))_{ij}^2};$$

$$\psi^{s+2} = c_3 \psi^{s+1} + 1(1 - c_3) \psi^{s+1-t}, \quad c_3 = - \frac{\sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2} R_{1ij}^{s+1-t} (R_{1ij}^{k+1} - R_{1ij}^{s+1-t})}{\sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2} (R_{1ij}^{k+1} - R_{1ij}^{s+1-t})^2},$$

$$2 \leq t \leq s + 1,$$

Операторы  $B_{11}^k, B_{21}^k, B_{31}^k$  обращаются трехточечными прогонами по  $r$ , операторы  $B_{12}^k, A_{22}^k, B_{32}^k$  — периодическими прогонами по  $\varphi$ .

### О РЕЗУЛЬТАТАХ РАСЧЕТОВ

На сетке  $15 \times 15$  получены решения при  $Pr = 0,001$ ,  $R_n/R_n = 0,95$  для  $Gr = 10^3$ ;  $Na = 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60$  для  $Gr = 5 \cdot 10^3$ ;  $Na = 0, 10, 20$  для  $Gr = 10^3$ ;  $Na = 0, 5$ ;  $Gr = -10^5$ ,  $Na = 0$  и для  $Gr = 10^4$ ,  $Na = 0$ ,

$R_n/R_n = 0,3$ . По найденным распределениям температур вычислялись местные числа Нуссельта  $Nu = -\partial T / \partial r$  на обеих поверхностях в граничных узлах сетки и средние числа Нуссельта, характеризующие средние безразмерные тепловые потоки через поверхности цилиндров:

$$q_n = - \int_0^{2\pi} R_n k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_n} d\varphi / (2\pi R_n), \quad Nu_n = \frac{q_n R_n}{k(T_n - T_b)};$$

$$q_b = - \int_0^{2\pi} R_b k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_b} d\varphi / (2\pi R_b), \quad Nu_b = \frac{q_b R_n}{k(T_n - T_b)}.$$

Во всех случаях, кроме  $R_n/R_n = 0,3$ , было получено  $Nu_b = -20,521$ ,  $Nu_n = -19,495$ , распределение температуры по прослойке практически не зависит от угла, лишь при  $Gr = 10^5$  на соседних лучах замечаются отклонения порядка  $10^{-7}$  (см. табл. 1). При  $Gr = 10^5$  безразмерные ско-

Таблица 1

$i$		$i$		$i$		$i$	
0	0	4	0,2909	8	0,5776	12	0,5602
1	0,0731	5	0,3630	9	0,6487	13	0,9302
2	0,1460	6	0,4348	10	0,7194	14	1
3	0,2186	7	0,5064	11	0,7899		

рости  $u \approx 10^{-5}$ ,  $v \approx 10^{-4}$ , функция тока  $\psi \approx 10^{-5}$ ,  $|\omega| \leq 0,26$ ; при  $Gr = 10^3$ ;  $5 \cdot 10^3$  —  $u \approx 10^{-7}$ ,  $v \approx 10^{-6}$ ,  $\psi \approx 10^{-7}$ ,  $|\omega| \leq 0,026$  и влияние магнитного поля при указанных числах  $Na$  практически не ощутимо. Малую интенсивность конвективного движения в прослойке можно объяснить узостью зазора, из-за чего весьма сильно влияние торможения на твердых стенках, и при данных числах Релея ( $Gr \cdot Pr$ ) силы вязкого

Таблица 2

$i$		$i$		$i$		$i$	
0	0	4	0,4236	8	0,7033	12	0,9123
1	0,1277	5	0,5028	9	0,7607	13	0,9573
2	0,2384	6	0,5752	10	0,8143	14	1
3	0,3362	7	0,6417	11	0,8648		

торможения превосходят намного архимедову силу. С другой стороны, действие архимедовой силы, которая в случае  $Gr > 0$  (внешний цилиндр более нагрет) действует в нижней половине кольца, ослабляется покоем в верхней половине, ибо в этой части нагретая жидкость находится над холодной. Это подтверждается расчетом для широкого зазора  $R_n/R_n = 0,3$ ,  $Gr = 10^4$ ,  $Pr = 0,001$ ,  $Na = 0$ . В широкой прослойке влияния торможения со стороны твердых стенок незначительно и  $|u| < 8 \cdot 10^{-3}$ ,  $|v| < 9 \cdot 10^{-2}$ ,  $|\omega| \leq 0,270$ ,  $|\psi| \leq 5 \cdot 10^{-3}$ . Конвекция все еще слабо переносит тепло, различие температур на одном радиусе двух соседних лучей имеет порядок  $10^{-6}$ , т. е. зависимость от  $\varphi$  весьма малая. В табл. 2 приведено распределение температуры на одном луче для  $R_n/R_n = 0,3$ .

На рис. 1 представлена картина линий тока для  $R_n/R_n = 0,3$ ,  $Gr = 10^4$ ,  $Pr = 0,001$ ,  $Na = 0$ ; на рис. 2 — соответствующее распределение азимутальной скорости на лучах  $j = 0, j = 3, j = 4, j = 7, j = 9, j = 11$ . Следует отметить идентичность картин линий тока и эпюр азимуталь-

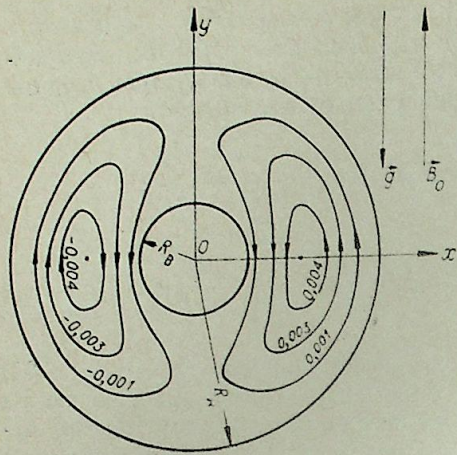


Рис. 1.

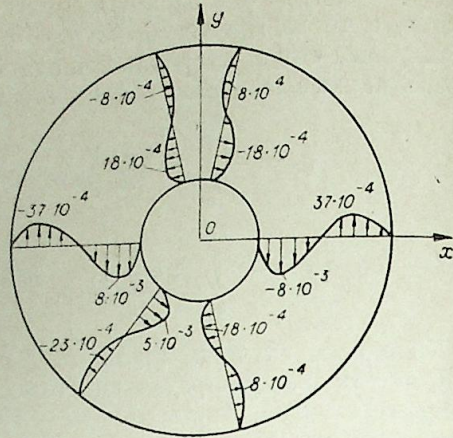


Рис. 2.

ной скорости и для других отношений  $R_n/R_0$  с приведенными на рис. 1, 2. Численный расчет данной задачи проводился также методом, изложенным в работах [9, 10]. В этом методе вместо уравнений (6), (7) применялись уравнения

$$\frac{1}{Pr} \left( u \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{v}{2\pi r} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} + Gr \cdot Pr \left( \frac{1}{2\pi} \frac{\partial (T \sin 2\pi\varphi)}{\partial \varphi} - \frac{\partial (rT \cos 2\pi\varphi)}{\partial r} \right) - Na^2 \left\{ \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \varphi} [(u \cos 2\pi\varphi - v \sin 2\pi\varphi) \cos 2\pi\varphi] + \frac{\partial}{\partial r} [r(u \cos 2\pi\varphi - v \sin 2\pi\varphi) \sin 2\pi\varphi] \right\},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial (c\Phi)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0;$$

$$u = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} + c\Phi \right), \quad c \neq 0, \quad \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial (rv)}{\partial r} = - \frac{\partial (r^2 \omega)}{\partial r}; \quad (22)$$

$$r = 1, \quad r = R_n/R_0, \quad \omega = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}.$$

Метод численного решения этих уравнений аналогичен изложенному в п. 2, только уравнение неразрывности аппроксимируется во всех узлах сетки и решается относительно  $\Phi$  прогонами [10] на каждой итерации. Результаты, полученные обоими методами, совпадают друг с другом с точностью, зависящей от погрешности аппроксимаций раз-

Таблица 3

$j$	(7)	(21)	$\omega$	$j$	(7)	(21)	$\omega$	$j$	(7)	(21)	$\omega$
1	0,0695	0,0676	$3 \cdot 10^{-5}$	6	-0,0695	-0,0664	$3 \cdot 10^{-5}$	11	0,0171	0,0171	$6 \cdot 10^{-5}$
2	0,0481	0,0470	$5 \cdot 10^{-5}$	7	-0,0771	-0,0738	0	12	0,0481	0,0469	$5 \cdot 10^{-5}$
3	0,0171	0,0171	$6 \cdot 10^{-5}$	8	-0,0695	-0,0664	$3 \cdot 10^{-5}$	13	0,0695	0,0676	$3 \cdot 10^{-5}$
4	-0,0171	-0,0159	$6 \cdot 10^{-5}$	9	-0,0481	-0,0458	$5 \cdot 10^{-5}$	14	0,0772	0,0750	0
5	-0,0481	-0,0458	$5 \cdot 10^{-5}$	10	-0,0171	-0,0159	$6 \cdot 10^{-5}$				

ностных схем и точности итераций. В табл. 3 представлены в верхней строчке значения  $\omega$ , полученные методом п. 2, в средней строчке  $\omega$ , полученные из (21), для  $R_n/R_0 = 0,3$ ,  $Gr = 10^4$ ,  $Pr = 0,001$ ,  $Na = 0$ ,  $N_1 = N_2 =$

$= 14$ ,  $i = 12$ ,  $1 \leq j \leq N_2$ . В четвертой графе табл. 3 представлены для тех же данных разности радиальной скорости, полученные методом (6), (7) и (21).

Преимущество (21) перед (6), (7) особенно проявляется в задачах с переменной плотностью, типа указанных в [10].

Казахский государственный университет  
им. С. М. Кирова,  
Алма-Ата

Поступила в редакцию  
20/III 1980

#### ЛИТЕРАТУРА

- Гершун Г. Э., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., 1972.
- Исаченко В. П., Осипова В. А., Сукомел А. С. Теплопередача. М.: Энергия, 1975.
- Джакупов К. Б. О некоторых разностных схемах для уравнений Навье — Стокса. — В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Т. 2, № 1. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1971.
- Джакупов К. Б. К численному решению уравнений гидротермодинамики атмосферных процессов на плоской земле. — Изв. АН КазССР, сер. физ.-мат. наук, 1973.
- Пирсон К. Е. Численный метод для вязкого потока. — Механика, Сборник переводов иностр. статей, 1965, № 6.
- Джакупов К. Б., Кузнецов Б. Г. Численный расчет одного неустановившегося течения вязкой несжимаемой жидкости. — Изв. СО АН СССР, 1967, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.
- Джакупов К. Б. О некоторых численных методах расчета уравнений Навье — Стокса вязкой несжимаемой жидкости. — Тр. II Всесоюз. семинара по числ. методам механики вязк. жидкости. Новосибирск, 1969.
- Полежаев В. И., Грязнов В. Л. Метод расчета граничных условий для уравнений Навье — Стокса в переменных «вихрь, функция тока». — ДАН СССР, 1974, т. 219, 2.
- Джакупов К. Б. О методе решения неэволюционных задач механики вязкой жидкости с привлечением уравнений для вихря скорости и компонент скорости. — Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. наук, 1978, № 5.
- Джакупов К. Б. О влиянии фазового перехода на конвективное движение вязкой жидкости в замкнутой полости. — Изв. СО АН СССР, 1979, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.

УДК 531.17 : 531.66

В. И. ПИНАКОВ

### АВТОКОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ В ГАЗОВОМ ПОТОКЕ

Рассмотрим жесткий стержень, подвешенный в канале на нерастяжимой гибкой нити, и покажем, что при течении газа по каналу существует режим, при котором стержень совершает устойчивое периодическое движение, сопровождающееся ударами о стенки канала. Фазы колебания изображены на рис. 1 (вертикальные стрелки указывают направление потока).

Предположим, что в начальный момент стержень удерживают так, что он, касаясь верхним концом  $A$  правой стенки, перекрывает сечение канала. Газ не течет, на стержень действует перепад давлений на участке  $AB$  (точка  $B$  находится на уровне нижнего среза канала), при этом сила направлена вправо. Если стержень отпустить, то он начнет с ускорением поворачиваться вокруг оси, проходящей через точку  $A$  (фаза  $a$ ). Происходит соударение нижнего конца  $B$  со стенкой, которое будем считать абсолютно неупругим.

Для дальнейших рассуждений необходимо использовать понятие «центр удара» [1]. Центром удара твердого тела относительно заданной оси называют точку, приложение ударного импульса в которой не вызывает изменения скорости точек, лежащих на этой оси. Центр массы всегда ближе к оси, чем центр удара, лишь в случае поступательного движения они совпадают. Для однородного стержня расстояние от оси, проходящей через один из его концов, до соответствующего ей центра удара составляет две трети от длины стержня.

После удара нижним концом движение стержня продолжается лишь тогда, когда центр удара относительно оси, проходящей через точку  $A$ ,

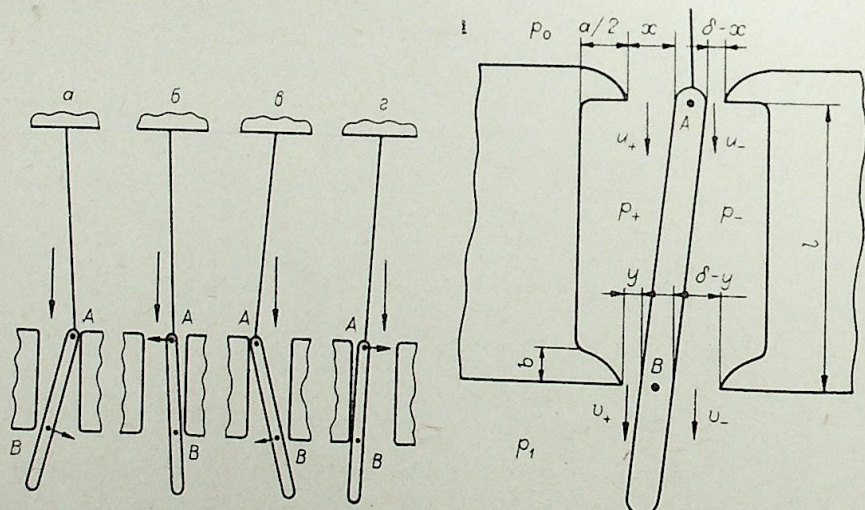


Рис. 1.

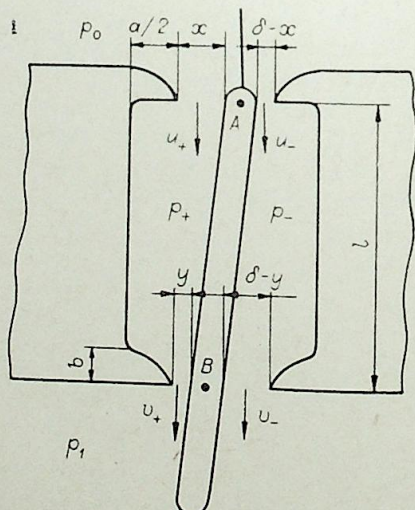


Рис. 2.

находится за пределами отрезка  $AB$ . При этом направление вращения сохраняется, его центром в момент удара становится точка  $B$  (фаза  $б$ ). Точка  $A$  перемещается влево, сила, действующая со стороны газа, также направлена влево, и скорость растет. После удара верхнего конца о левую стенку следует фаза  $в$ , аналогичная фазе  $а$ . Фаза  $г$  следует за  $в$ , так же как  $б$  — за  $а$ . При дальнейшем движении стержень занимает положение, соответствующее начальной фазе следующего периода.

Прежде чем перейти к количественному анализу, введем обозначения (рис. 2). Через вертикальный канал длиной  $l$  вниз течет газ под действием перепада давления  $\Delta p = p_0 - p_1$ . В канале движется жесткий стержень, подвешенный на нерастяжимой гибкой нити так, что верхний его конец  $A$  находится на уровне входа в канал, а центр инерции  $B$  — на уровне выхода, последнее обеспечивает необходимое положение центра удара. Поперечный ход стержня  $\delta$ ; его масса  $m$ ; отношение моментов инерции относительно точек  $A$  и  $B$   $I_A/I_B = \gamma$ , для однородного стержня  $\gamma = 4$ , технически выполним стержень с  $\gamma = 9$ , эти числа определяют рассматриваемый диапазон изменения  $\gamma$ . В стенках канала выполнены выборки глубиной  $a/2$  так, что на входе и выходе имеет место плавное сужение и отрыв потока от стенки при резком расширении канала. Длина зон сужения  $b$ , размер стержня и канала в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка  $h$ , взаимодействие со стенками канала абсолютно неупругое.

Обозначим через  $x$  левый верхний зазор, через  $y$  — левый нижний, скорость потока в левом верхнем зазоре —  $u_+$ , левом нижнем —  $v_+$ , давление в левой полости —  $p_+$ . Те же величины для течения справа обозначим нижним индексом «-».

Для определения воздействия на стержень со стороны газа наложим ограничения, позволяющие рассмотреть течение в рамках гидравлического приближения:

$$\frac{\delta}{a} \ll 1, \quad (1) \quad \frac{b}{l} \sim \frac{\delta}{l} \ll 1, \quad (2)$$

$$\frac{\Delta p}{\rho} \ll 1, \quad (3) \quad \frac{dx}{dt} \leq \frac{\delta^2}{at} \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}}, \quad (4)$$

$$\frac{dy}{dt} \leq \frac{\delta^2}{at} \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}}. \quad (5)$$

Здесь  $\rho$  — плотность газа,  $t$  — время.

Условие (1) говорит о том, что динамическим напором газа в канале можно пренебречь и считать статические давления в полостях постоянными везде, кроме переходных зон на входе и выходе. Из условия (2) следует, что протяженность этих зон пренебрежимо мала и статические давления можно считать постоянными на всей длине канала. Условие (3) позволяет не учитывать сжимаемость газа. В свою очередь, условия (4) и (5) позволяют рассматривать процесс как квазистационарный и не учитывать влияние скорости движения стержня на  $p_+$  и  $p_-$ .

Отрывы потока на входе и выходе аналогичны отрыву в трубе с резким расширением сечения [2]. С учетом условия (1) можно для течений слева и справа от стержня записать системы алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} x u_+ &= y v_+, & (\delta - x) u_- &= (\delta - y) v_-, \\ \rho u_+^2 &= 2(p_0 - p_+), & \rho u_-^2 &= 2(p_0 - p_-), \\ \rho v_+^2 &= 2(p_+ - p_1); & \rho v_-^2 &= 2(p_- - p_1); \end{aligned}$$

из которых следует

$$p_+ = \frac{p_0 x^2 + p_1 y^2}{x^2 + y^2}, \quad p_- = \frac{p_0 (\delta - x)^2 + p_1 (\delta - y)^2}{(\delta - x)^2 + (\delta - y)^2},$$

$$p_+ - p_- = \Delta p \frac{x^2 (\delta - x)^2 - y^2 (\delta - y)^2}{(x^2 + y^2) [(\delta - x)^2 + (\delta - y)^2]}.$$

Введем безразмерные координаты  $\xi = x/\delta$ ,  $\eta = y/\delta$ , тогда сила, действующая на стержень, определится выражением

$$f = f_0 \psi(\xi, \eta),$$

где

$$f_0 = \Delta p h l, \quad \text{а } \psi = \frac{\xi^2 (1 - \eta)^2 - \eta^2 (1 - \xi)^2}{(\xi^2 + \eta^2) [(1 - \xi)^2 + (1 - \eta)^2]}.$$

Сила приложена на расстоянии  $l/2$  от точки  $A$  и направлена перпендикулярно стержню.

В режиме установившихся колебаний движение стержня во второй половине периода является зеркальным отражением движения в первой половине, т. е.

$$\begin{cases} x(t) = \delta - x(t + T/2), \\ y(t) = \delta - y(t + T/2), \end{cases} \quad (6)$$

где  $T$  — период колебаний. Это означает, что для решения задачи достаточно найти  $x(t)$  и  $y(t)$  на отрезке времени, равном половине периода колебаний  $0 \leq t \leq T/2$ . Кроме того, в течение полупериода можно выделить два цикла: один, когда точка  $A$  покоится, а точка  $B$  движется в сторону точки  $A$ ; и другой, когда точка  $A$  движется после удара конца  $B$  по стенке.

Закономерен вопрос, возможен ли в рамках гидравлического приближения удар конца  $B$  о нижний выступ с замыканием полости выборки? Рассмотрение этой ситуации с учетом сжимаемости газа показывает, что замыкание полости возможно, если кроме условия (3) на перепад давлений дополнительно наложить ограничение снизу.

$$\frac{\Delta p}{p_0} > 0,3 \chi \frac{\delta}{a}, \quad (7)$$

где  $\chi$  — показатель политропы, а  $\delta/a \leq 0,1$ .

Выпишем уравнение неразрывности для истечения газа из правой полости через нижний зазор с учетом сжимаемости:

$$(\delta - y) v_- = \frac{l}{2} \frac{dy}{dt} - \frac{al}{2\rho} \frac{dp_-}{dt}.$$

Отсюда следует, что

$$v_- < \frac{l}{2} \frac{1}{(\delta - y)} \frac{dy}{dt}.$$

Подставим в неравенство выражение  $dy/dt$  из (5).

$$v_- < \frac{1}{2} \frac{\delta}{a} \frac{\delta}{\delta - y} \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}}.$$

Следовательно, в процессе движения стержня

$$p_- - p_1 = \frac{\rho v_-^2}{2} < \frac{1}{4} \frac{\delta^2}{a^2} \frac{\delta^2}{(\delta - y)^2} \frac{\Delta p}{2}.$$

Положим  $(\delta - y) = 0,1\delta$ , тогда

$$p_- - p_1 < 25 \frac{\delta^2 \Delta p}{a^2 2}.$$

Верхний конец не начнет двигаться до удара нижнего конца, если  $p_- - p_1 \leq \Delta p/2$ , т. е. если при дальнейшем движении изменение давления  $p_-$  не превысит  $(1 - 25 \frac{\delta^2}{a^2}) \frac{\Delta p}{2}$ . Предположим, что на этой стадии движения газ из полости не вытесняется, а адиабатически сжимается в ней, тогда

$$\chi \frac{\delta - y}{a} p_0 < \frac{\Delta p}{2} \left(1 - 25 \frac{\delta^2}{a^2}\right).$$

Отсюда

$$\frac{\Delta p}{p_0} > \frac{0,2 \chi \delta}{(1 - 25 \delta^2/a^2) a}.$$

Член в скобках при  $\delta/a \leq 0,1$  удовлетворяет неравенствам:

$$3/4 \leq 1 - 25 \delta^2/a^2 < 1,$$

отсюда следует (7).

Это дает возможность четко выделить два цикла движения: первый ( $0 \leq t < t'$ ), когда точка  $A$  покоится у стенки канала, а точка  $B$  движется к ней; и второй ( $t' \leq t \leq T/2$ ), начинающийся с соударения конца  $B$ , в течение которого конец  $A$  перебрасывается к противоположной стенке. Введем следующие обозначения: величины, относящиеся к первому циклу, будем отмечать одним, а ко второму — двумя верхними штрихами; начальные значения величин в обоих циклах будем обозначать нижним индексом 0, а конечные — 1.

Рассмотрим случай, когда конец  $A$  прилегает, например, к правой стенке. Тогда в течение первого цикла  $x(t) = \delta$ , и уравнение движения описывает вращение стержня с центром в точке  $A$ :

$$\frac{I_A}{l} \frac{d^2 y'}{dt^2} = \frac{f'l}{2}.$$

При переходе к безразмерным переменным получим

$$\frac{d^2 \eta'}{d\theta^2} = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \psi',$$

где  $\theta = t \sqrt{\frac{l_0}{\delta m}}$  — безразмерное время.

Зададим некоторые начальные условия:

$$\eta'_0 = \lambda, \quad \left(\frac{d\eta'}{d\theta}\right)_0 = \beta.$$

Сила, действующая на стержень, определяется функцией

$$\psi^* = \psi(1, \eta) = \frac{1}{1 + \eta^2}.$$

Переход в уравнении к переменной  $\omega(\eta) = \frac{d\eta}{d\theta}$  и интегрирование

дают

$$\omega'(\eta) = \sqrt{\beta^2 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} (\arctg \eta - \arctg \lambda)},$$

отсюда

$$\omega'(1) = \omega'_1 = \sqrt{\beta^2 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(\frac{\pi}{4} - \arctg \lambda\right)}. \quad (8)$$

Продолжительность первого цикла  $\Delta\theta'$  определяется интегралом

$$\Delta\theta' = \theta' = \int_1^0 \frac{d\eta}{\sqrt{\beta^2 + \frac{\gamma-1}{\gamma} (\arctg \eta - \arctg \lambda)}}. \quad (9)$$

Перейдем к рассмотрению движения во втором цикле. Угловая скорость стержня в момент удара концом  $B$  не меняется, поскольку точка приложения импульса совпадает с центром инерции. Это означает, что начальная скорость точки  $A$  по модулю равна скорости точки  $B$  в конце первого цикла, или

$$v_0'' = -\omega_1' \left( v = \frac{d\xi}{d\theta} \right).$$

Движение стержня во втором цикле описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x''}{dt^2} &= \frac{g^2 y''}{dt^2} + \frac{f'' t^2}{2I_B}, \\ \frac{d^2 y''}{dt^2} &= \frac{f''}{m}; \end{aligned}$$

а при переходе к безразмерным переменным

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \beta''}{d\theta^2} &= \frac{\gamma+1}{\gamma} \psi'', \\ \frac{d^2 \eta''}{d\theta^2} &= \psi''. \end{aligned} \quad (10)$$

Начальные условия:

$$\xi_0'' = 1, \quad \eta_0'' = 1, \quad v_0'' = -\omega_1', \quad \omega_0'' = 0. \quad (11)$$

Переход в уравнениях к переменным  $v$  и  $\omega$  позволяет разрешить их относительно  $v$ :

$$v'' = \left\{ (\omega_1')^2 + (\gamma+1) \int_0^{\eta''} \psi[\varphi, \eta''(\varphi)] d\varphi \right\}^{1/2}, \quad (12)$$

где  $\eta''(\xi)$  — неизвестное решение системы (10) при условиях (11). Отсюда продолжительность второго цикла

$$\Delta\theta'' = \frac{\Theta}{2} - \theta' = \int_0^1 \left\{ (\omega_1')^2 + (\gamma+1) \int_0^{\xi} \psi[\varphi, \eta''(\varphi)] d\varphi \right\}^{-1/2} d\xi, \quad (13)$$

где  $\Theta$  — безразмерный период колебаний.

Из системы (10) следует, что

$$\frac{d^2 \eta''}{d\theta^2} = \frac{2}{\gamma+1} \frac{d^2 \xi''}{d\theta^2}.$$

Интегрируя по времени последнее уравнение, учитывая при этом условия (11), получим для движения во втором цикле

$$\omega'' = \frac{2}{\gamma+1} (v'' - v_0'') \quad (14)$$

и после повторного интегрирования —

$$1 - \eta'' = \frac{2}{\gamma+1} [(1 - \xi'') + v_0'' (\theta - \theta')].$$

Так как  $\xi(\theta'') = 0$ ,

$$1 - \eta_1'' = \frac{2}{\gamma+1} (1 + v_0'' \Delta\theta''), \quad (15)$$

где  $\Delta\theta''$  дано выражением (13). Равенство (15), если учесть соотношение (6), дает начальную координату следующего полупериода через параметры предыдущего.

Чтобы получить выражение для начальной скорости следующего полупериода, применим к соударению в момент  $t = T/2$  закон сохранения момента количества движения, считая положительным направление движения часовой стрелки:

$$ml \left( \frac{dy}{dt} \right)_1'' - \frac{I_B}{l} \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)_1'' - \left( \frac{dy}{dt} \right)_1'' \right] = \frac{I_A}{l} \left( \frac{dY}{dt} \right)_0'$$

или в безразмерной форме

$$\omega_1'' - \frac{1}{\gamma-1} (v_1'' - \omega_1'') = \frac{\gamma}{\gamma-1} \Omega_0',$$

где  $\left( \frac{dY}{dt} \right)_0'$  и  $\Omega_0'$  — обычная и безразмерная скорости точки  $B$  в начале следующего полупериода. Подставим в последнее уравнение выражение для  $\omega_1''$  из (14), тогда

$$\Omega_0' = \frac{\gamma-1}{\gamma(\gamma-1)} v_1'' - \frac{2}{\gamma+1} v_0''.$$

$v_1''$  определяется соотношением (12), в котором следует положить  $\xi = 1$ , а  $v_0'' = -\omega_1'$ , зависимость для  $\omega_1'$  дается выражением (8). Их подстановка выразит связь начальной скорости следующего полупериода с параметрами предыдущего.

При установившемся движении начальные значения координаты и скорости постоянны и в соответствии с (6)

$$-\Omega_0' = \beta, \quad 1 - \eta_1'' = \lambda.$$

Отсюда следует система уравнений для  $\lambda$  и  $\beta$ , содержащая неизвестную нам функцию  $\eta''(\xi)$ :

$$\lambda = \frac{2}{\gamma+1} \left\{ 1 - \omega_1' \int_0^1 \left[ (\omega_1')^2 + (\gamma+1) \int_1^{\xi} \psi(\varphi, \eta''(\varphi)) d\varphi \right] d\xi \right\}^{-1/2}, \quad (16)$$

$$\beta = \frac{\gamma-1}{\gamma(\gamma+1)} \left[ (\omega_1')^2 + (\gamma+1) \int_1^0 \psi(\xi, \eta''(\xi)) d\xi \right]^{1/2} - \frac{2}{\gamma+1} \omega_1'.$$

Поиск точного решения уравнений затруднителен, поэтому сделаем оценки.

Можно представить себе некую механическую систему, которая, не воздействуя непосредственно на стержень, управляет сечением выходных зазоров справа и слева от стержня так, что их сумма остается равной  $\delta$ . Если такое устройство периодически в течение второго цикла перекрывает нижний зазор, который появляется после соударения нижнего конца, то сила, действующая на стержень, увеличивается. Система должна отреагировать на это воздействие увеличением  $\lambda$ :  $\lambda_b(\gamma) > \lambda(\gamma)$ . Сила, действующая на стержень во втором цикле, определится при этом функцией

$$\psi_b'' = \psi(\xi, 1) = \frac{1}{1 + \xi^2}.$$

Ее подстановка в систему (16) дает в результате систему уравнений, легко решаемую итерационным методом. Решение велось на ЭВМ «Olivetti». В качестве начального приближения вводились значения  $\lambda = \beta = 0$ ;

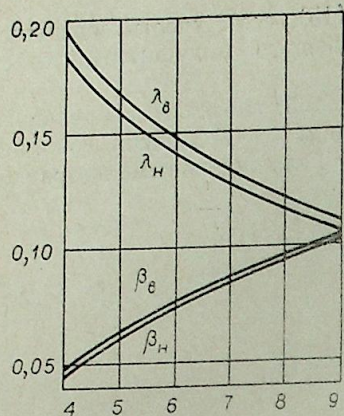


Рис. 3.

лебаний стержня из состояния с нулевыми значениями начальных условий.

Если теперь представить, что упомянутая механическая система в течение второго цикла уже не перекрывает, а, наоборот, открывает зазор больше, чем это происходит при истинном движении, то можно сделать для  $\lambda$  оценку снизу. Пусть в течение второго цикла движения обеспечена прямая пропорциональность правого нижнего зазора правому верхнему с коэффициентом пропорциональности  $\lambda_v$ . В этом случае сила, действующая на стержень, будет определяться функцией  $\psi''$ :

$$\psi'' = \psi(\xi, 1 - \lambda_v(1 - \xi)).$$

Она рациональна, а значит, интегрируема; ее подстановка в (16) и численный расчет дают  $\lambda_n$  и  $\beta_n$ .

На рис. 3 приведены зависимости  $\lambda_n(\gamma)$ ,  $\lambda_v(\gamma)$ ,  $\beta_n(\gamma)$  и  $\beta_v(\gamma)$ . Относительная погрешность оценки максимальна для  $\lambda$  при  $\gamma=4$  и составляет 8%, с ростом  $\gamma$  погрешность уменьшается.

На основании соотношений (8), (9), (12) и (13) были получены зависимости для скорости соударений и продолжительности циклов. Относительная погрешность оказалась максимальной для  $\Delta\theta'$  при  $\gamma=4$  и составила 1%. Результаты расчета кинематики движения стержня в виде кривых  $\xi(\theta)$  и  $\eta(\theta)$  при  $\gamma=9$  приведены на рис. 4. Здесь разница между функциями, получаемыми из нижней и верхней оценок, меньше, чем толщина линий.

На рис. 5 графически представлены в зависимости от  $\gamma$  следующие безразмерные функции: 1 — продолжительность первого цикла  $\Delta\theta'$ , 2 — продолжительность второго цикла  $\Delta\theta''$ , 3 — период колебаний  $\Theta$ , 4 — скорость соударения верхнего конца  $|v_1''|$ , 5 — скорость соударения нижнего конца  $|v_1''|$ . Для перехода к размерным величинам необходимо функции 1, 2 и 3 домножить на  $\sqrt{\frac{\delta m}{\Delta p l h}}$ , а функции 4 и 5 — на  $\sqrt{\frac{\Delta p l h \delta}{m}}$ .

Применение результатов расчета может осложниться тем, что не всегда известен или может быть измерен перепад давлений  $\Delta p$ , а известной величиной является средний массовый расход  $\mu$ . В этом случае перепад давлений дается выражением

$$\Delta p = \Delta \pi(\gamma) \mu^2 \rho^{-1} \delta^{-2} h^{-2}.$$

Здесь  $\Delta \pi$  — безразмерная функция, результат расчета которой пред-

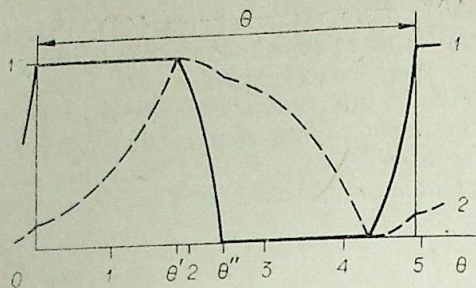


Рис. 4.

были получены зависимости  $\lambda_v(\gamma)$  и  $\beta_v(\gamma)$ . Применение итерационного метода имеет в данном случае физический смысл, так как результаты последовательных итераций описывают процесс установления ко-

ставлен на рис. 5 кривой 6. Кривая 7 — безразмерный период колебаний  $\tau(\gamma)$  в том случае, когда задан средний массовый расход:

$$T(\gamma) = \tau(\gamma) \mu^{-1} \rho^{1/2} \delta^{3/2} h^{1/2} l^{-1/2} m^{1/2},$$

$$\tau(\gamma) = \frac{\Theta(\gamma)}{\sqrt{\Delta \pi(\gamma)}}.$$

Ударная мощность

$$N(\gamma) = \varphi(\gamma) \mu^3 \delta^{-5/2} \rho^{-3/2} l^{3/2} h^{-3/2} m^{-1/2},$$

$\varphi(\gamma)$  определено кривой 8, ее ход наглядно свидетельствует о том, что при прочих равных условиях рост параметра  $\gamma$  увеличивает мощность ударного воздействия.

Все зависимости получены при выполнении ограничений (1)–(5) и (7). Нетрудно показать, что последнее условие несущественно, его несоблюдение приводит к малому относительному отклонению от полученных зависимостей. Например, для периода колебаний это отклонение не превышает 3%.

Для проверки расчета изготовлена экспериментальная установка в соответствии со схемой, представленной на рис. 2, со следующими параметрами  $l=10$  см,  $h=3,6$  см,  $a/2=0,5-1$  см; газ из канала выходил в атмосферу. Канал верхним срезом примыкал к полости объемом около  $10^3$  см<sup>3</sup>, соединенной с источником сжатого воздуха. Перепад давлений, равный избыточному давлению газа в полости, измерялся U-образным водяным манометром. Стержни и выступы на стенках канала выполнены из стали. Испытывались четыре стержня толщиной 8 мм с различными значениями  $\gamma$ : 4; 5,5; 8 и 9. Зазор  $\delta$  изменялся от 1 до 3 мм, перепад давлений от 0 до 1 м водяного столба. На установке проведены измерения  $\Theta(\gamma)$ . Датчиком сигналов при этом служил фотодиод, т. е. измерения не влияли на движение стержня. Основная трудность эксперимента заключалась в одновременном уменьшении трения и перетечек между стенками и стержнем. И то, и другое приводит к увеличению периода колебаний, поэтому, как правило, экспериментальное значение  $\Theta$  превышало теоретическое. На рис. 5 приведены результаты измерений в виде точек, отмеченных позицией 9. Соответствие теоретической кривой и данных эксперимента свидетельствует об удачном выборе математической модели.

Подведем итог. Предложена и рассмотрена механическая система, преобразующая энергию движущегося по каналу газа в энергию поперечных колебаний стержня. При практическом применении подобной системы для определения или оценки параметров автоколебаний могут быть использованы результаты настоящей работы.

В заключение автор выражает благодарность В. И. Дейнеке, обеспечившему вычисления, З. А. Богдевич за проведение измерений и члену-корреспонденту АН СССР Н. В. Черскому за внимание к работе.

Специальное конструкторское бюро  
гидроимпульсной техники СО АН СССР,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
4/VIII 1980

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики. Ч. 2. М.: Наука, 1972.
2. Бетчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.

Ю. М. ГРИШИН, Н. П. КОЗЛОВ, А. А. МОСИН,  
В. И. ХВЕСЮК

## СИЛЬНОТОЧНЫЙ ПЛОСКИЙ ПРИЖАТЫЙ РАЗРЯД В ОПТИЧЕСКИ НЕПРОЗРАЧНОЙ ПЛАЗМЕ

Сообщение 1

Исследование импульсного сильноточного излучающего прижатого разряда в плотной плазме начато в работе [1]. Данная статья посвящена качественному анализу процессов в разряде такого типа — исследуются взаимосвязанные процессы в плазме разряда, взаимодействия плазмы со стенкой, а также в электрическом питающем контуре.

Конфигурация исследуемого разряда представлена на рис. 1. Ток к разряду подается от батареи конденсаторов емкостью  $C_0$  через металлические шины. Разряд инициируется вблизи межэлектродной вставки, и плазменное образование прижимается к ней возникающими электромагнитными силами. Возможны два конкретных варианта реализации такого разряда. В первом, будем называть его непоточным, можно пренебречь поступлением вещества межэлектродной вставки в зону разряда. Такой вариант может быть реализован, например, при взрыве металлической фольги, расположенной у поверхности стенки. В этом случае, как и при взрыве проволочек [2], можно считать постоянным число частиц в разряде  $N$ . В другом варианте, соответствующем условиям эксперимента [1], разряд горит в парах материала межэлектродной вставки, испаряющегося в результате взаимодействия с плазменным образованием. При этом число частиц, захваченных в разряд  $N$ , в каждый момент времени определяется процессами поступления частиц со стенки в зону разряда и ухода (организованного тем или иным способом, см. ниже) плазмы из области разряда в окружающее пространство.

Как показывают экспериментальные данные [1], по реализуемым параметрам (температура поверхности порядка  $T^* = 10^4 \div 10^5$  К, кон-

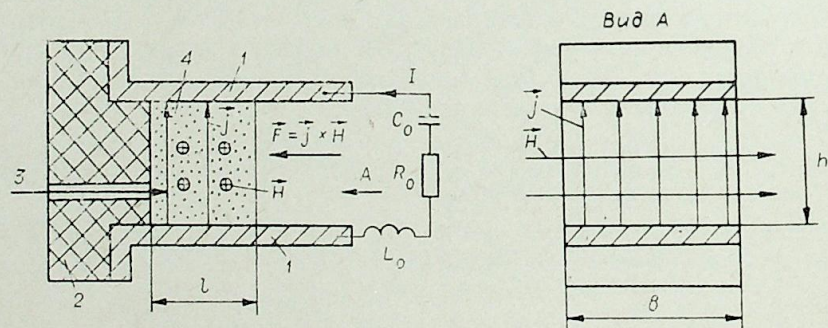


Рис. 1. Принципиальная схема разряда.

1 — электроды; 2 — межэлектродная вставка; 3 — свеча-игнайтер; 4 — плазменное образование.

центрация частиц  $n^* = 10^{17} \div 10^{20}$  см<sup>-3</sup> при устойчивом времени существования  $t^* \geq 50$  мкс и характерной толщине  $l^* = 1 \div 10$  см) сильноточечных разрядов [3]. Он обладает разновидностью сильноточных излучающих разрядов [3]. Он обладает рядом характерных особенностей: а) благодаря плоской конфигурации плазменного образования этот разряд свободен от силовых неустойчивостей, присущих цилиндрическим разрядам; б) размеры и ток разряда не имеют никаких принципиальных ограничений; в) разряд этого типа можно осуществить в газах, парах металлов и диэлектриков, что позволяет варьировать в широком диапазоне его излучательными и спектральными характеристиками; г) подобную разрядное устройство можно использовать многократно без перенастройки; д) разряд можно использовать в качестве источника света для накачки оптических квантовых генераторов с активным веществом плоской конфигурации; е) управление параметрами разряда осуществляется просто и т. д.

Приведенная область изменения основных параметров плазмы разряда позволяет рассматривать ее как полностью ионизованный идеальный газ. Вследствие большой частоты соударений электронов  $\nu_e$ , намного превышающей их циклотронную частоту  $\Omega_e$ :

$$\nu_e \approx \frac{50 n^*}{T^{*3/2}} \approx (10^{12} \div 10^{15}) c^{-1} \gg \Omega_e = \frac{eH}{m_e c} \approx (10^{11} \div 10^{12}) c^{-1},$$

можно считать, что плазма находится в состоянии локального термодинамического равновесия, а кинетические коэффициенты (электропроводность, теплопроводность и др.) изотропны. Таким образом, для описания динамики рассматриваемых типов излучающих плазменных образований применима система МГД-уравнений с учетом потока излучения [4], в которой можно пренебречь энергией излучения по сравнению с внутренней энергией частиц плазмы и электронной теплопроводностью, согласно оценкам [3].

Совместное решение системы уравнений гидродинамики с уравнением переноса излучения чрезвычайно затруднительно из-за сложной зависимости функции коэффициента поглощения среды и спектральной плотности излучения от параметров плазмы. В данной работе рассматривается предельный случай (приводящий к существенному упрощению задачи) оптически непрозрачной плазмы, когда в объеме плазмы происходит многократное поглощение квантов света, излучение носит поверхностный характер, а спектральная плотность интенсивности излучения близка к равновесной интенсивности излучения абсолютно черного тела. Разряды в оптически непрозрачной плазме весьма важны с практической точки зрения, поскольку их изучение близко к изучению абсолютно черного тела. Излучение выходит при этом только с поверхности плазменного образования, поэтому, чтобы эта поверхность имела достаточно высокую температуру, естественно необходима однородность температуры по сечению разряда [3], что и будем предполагать при дальнейшем анализе таких разрядов.

Система уравнений магнитной гидродинамики с учетом сказанного выше в однородном (без учета краевых эффектов) приближении, которое выполняется в случае, если толщина плазменного образования  $l$  и межэлектродный зазор  $h$  существенно меньше ширины системы  $b$  (см. рис. 1), имеет вид

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{c} jH, \quad (1)$$

$$j = \sigma \left[ E - \frac{1}{c} vH \right],$$

$$(dH/dx) = -(4\pi/c)j,$$

$$\rho = m_i n, P = (1+z)knT, \sigma = \alpha T^{3/2}/z,$$

где  $v$  — скорость плазмы;  $\rho$ ,  $n$  — соответственно плотность и концентрация частиц плазмы;  $P$  — газокинетическое давление,  $T$  — температура;  $j$  — плотность тока;  $H$  — напряженность собственного магнитного поля;  $\sigma$  — проводимость плазменного образования;  $z$  — эффективный заряд ионов массой  $m_i$ ;  $\alpha \approx 4 \cdot 10^7$  [5];  $k$  — постоянная Больцмана;  $c$  — скорость света. Число частиц в зоне разряда  $N$  и полный разрядный ток  $I$  определяются из соотношений

$$\hat{N} = h \int_0^l n(x) dx, \quad \hat{I} = \int_0^l j dx, \quad (2)$$

где  $\hat{N}$  и  $\hat{I}$  — соответственно погонные значения  $N$  и  $I$  на единицу ширины системы, так что  $\hat{N} = N/b$ ,  $\hat{I} = I/b$ . Для определения тока разряда  $I(t)$  воспользуемся уравнением электрической цепи разряда [6]:

$$\frac{L_0}{c} \cdot \frac{d^2 I}{dt^2} + R_0 \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C_0} + \frac{du}{dt} = 0, \quad (3)$$

где  $L_0$  — постоянная составляющая индуктивности электрического контура;  $R_0$  — активное сопротивление внешней цепи;  $C_0$  — емкость разрядного конденсатора;  $U = hE$  — падение напряжения на плазменном образовании. Уравнение (3) получено в предположении  $L_0(dI/dt) \gg d[L(t)I]/dt$ , где  $L(t)$  — переменная составляющая индуктивности контура, связанная с перемещением в течение времени границы разряда. Начальные условия для (3):

$$t = 0, \quad I = 0, \quad dI/dt = c^2 U_0 / L_0, \quad (4)$$

где  $U_0$  — напряжение на обкладках разрядного конденсатора  $C_0$  в момент  $t = 0$ .

В случае рассмотрения непроточного варианта разряда число частиц, захваченных в разряд, фиксировано (не зависит от времени) и при расчетах должно задаваться. Для проточного варианта разряда, когда разряд горит в парах материала межэлектродной вставки, величина  $N$  суть функция времени и определяется процессами поступления в зону разряда и ухода из него рабочего тела. Поэтому в дополнение к исходной системе необходимо записать уравнение баланса массы плазмы в разряде. Процессы испарения, нагрева и ионизации, происходящие в разряде, весьма сложны, и их исследование представляет самостоятельную задачу. Ограничимся исследованием упрощенной модели, позволяющей получить аналитическое решение задачи.

При рассмотрении испарения предположим, что энергия, которая расходуется на испарение и нагрев плазмы до температуры  $T$ , равна лучистой энергии, идущей из плазмы в сторону стенки [7], так что расход массы, поступающей в разряд, определится выражением

$$\dot{m}_+ = \frac{SE_{\text{изл}}}{\Omega}, \quad (5)$$

где  $\Omega$  — теплота испарения материала межэлектродной вставки;  $S$  — площадь поверхности испаряющейся стенки;  $E_{\text{изл}} = \hat{\sigma}T^4$  — плотность потока излучения из плазмы на стенку.

С точки зрения управления параметрами проточного разряда интересно рассмотреть два способа организации стока плазмы из зоны разряда: а) через открытые боковые поверхности разряда, где магнитное поле существенно меньше газокинетического давления; б) через отверстия в межэлектродной вставке при полностью закрытых боковых по-

верхностях разряда. В обоих случаях скорость истечения плазмы из зоны разряда принимается равной местной скорости звука:  $v^S \approx \sqrt{8kT/\pi m_i}$ . Следовательно, расход массы плазмы, покидающей зону разряда, будет определяться следующими выражениями:

а) боковой сток

$$\dot{m}_- = 2 \int_0^l v_S \cdot m_i n \cdot h dx; \quad (6a)$$

б) сток через окна

$$\dot{m}_- = v_s \cdot m_i \cdot n(x=0) \kappa S, \quad (6b)$$

где  $\kappa$  — доля площади окон в общей поверхности испаряющейся межэлектродной вставки.

Уравнение для определения  $\hat{N}(t)$  запишется в виде

$$\frac{d\hat{N}}{dt} = \frac{\dot{m}_+ - \dot{m}_-}{m_i b}. \quad (7)$$

Начальные условия:  $t = 0, \hat{N} = \hat{N}_0$ .

Для замыкания приведенной системы уравнений (1)–(7) необходимо ввести уравнение энергии разряда, которое запишем в следующей интегральной форме:

$$\frac{\partial E_{\text{вн}}}{\partial t} = W_{\text{дж}} - W_{\text{изл}} - W_{\text{кин}} - \lambda W_{\text{ион}}, \quad (8)$$

где  $E_{\text{вн}} \approx NkT$  — полная тепловая энергия плазменного образования;  $W_{\text{дж}} = j^2 V / \sigma$  — мощность джоулева тепловыделения в объеме плазмы  $V = lhb$ ;  $W_{\text{изл}} \approx 2S\hat{\sigma}T^4$  — мощность потока излучения с поверхности разряда, причем при выполнении условия одномерности модели  $l \ll b$  —  $S \approx bh$ ,  $W_{\text{кин}}$  — кинетическая энергия плазменного образования,  $W_{\text{ион}}$  — энергия, затраченная на ионизацию поступающих в момент времени  $t$  нейтралов с поверхности межэлектродной вставки. Коэффициент  $\lambda$  равен нулю для непроточного варианта разряда  $\hat{N}(t) = \hat{N}_0 = \text{const}$ , так как считаем, что в начальный момент времени разряда  $t = 0$  все захваченные в разряд частицы  $\hat{N}_0$  полностью ионизованы. Для проточного варианта разряда  $\lambda = 4$ .

Система уравнений (1)–(3) образует замкнутую систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно неизвестных:

$$I(t), N(t), n(x, t), \rho(x, t), P(x, t), T(t), j(t), v(x, t), l(t), U(t) —$$

и может быть решена только численно. Однако в ряде практически интересных случаев процессы формирования исследуемых разрядов можно рассмотреть упрощенно.

Будем считать, что деформация плазменного образования «медленная», т. е. характерное время изменения разрядного тока  $t^* \approx (d \ln I / dt)^{-1}$  существенно больше гидродинамического  $l^*/v_S^*$ , что хорошо выполняется, например, для условий эксперимента [1]. Проведем оценку членов в первых двух уравнениях системы (1) и членов в уравнении (8). Имеем для (1)

$$\left| \frac{dv}{dt} \right| : \left| \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} \right| \sim \frac{v^*}{l^*} : \frac{(v_S^*)^2}{l^*} \sim \left( \frac{v^*}{v_S^*} \right)^2 \sim 3 \cdot (10^{-1} \div 10^{-2}) \ll 1,$$

$$\left| \frac{1}{c} vH \right| : |E| \sim \frac{v^*}{cE^*/H^*} \sim (10^{-3} \div 10^{-2}) \ll 1.$$

Таким образом, в первом приближении можно пренебречь членами  $\frac{dv}{dt}$  и  $\frac{1}{c} vH$  в соответствующих уравнениях системы (1), так что по

структуре (1) будет совпадать с соответствующими уравнениями для стационарного случая  $v=0$ , т. е. «работает» квазистационарное приближение. Для уравнения баланса энергии (8) имеем

$$\left| \frac{\partial E_{\text{вн}}}{\partial t} \right| : |W_{\text{пол}}| \sim \left| \frac{\partial NkT}{\partial t} \right| : \left| \widehat{\sigma} T^4 \frac{V}{l} \right| \sim \frac{kn^* l^*}{l^* \widehat{\sigma} T^{*3}} \sim 10^{-2} \ll 1,$$

$$|W_{\text{кин}}| : \left| \frac{\partial E_{\text{вн}}}{\partial t} \right| \sim \frac{v_*^2}{kT^*} \sim \left( \frac{v_*}{\partial_\tau} \right)^2 \sim 10^{-2} \ll 1,$$

где  $v_* = 10^4 \sqrt{\frac{T^*}{\mu_i}}$  — тепловая скорость тяжелых частиц с молекулярным весом  $\mu_i$ . Следовательно, в первом приближении членами  $\frac{\partial NkT}{\partial t}$  и  $W_{\text{кин}}$  в (8) можно пренебречь, тогда получим

$$\frac{l^2}{\sigma} V = 2S\widehat{\sigma} T^4 + \lambda W_{\text{ион}}. \quad (9)$$

Для строгого расчета затрат энергии ионизации  $W_{\text{ион}}$  в (9) необходимо решение сложной системы уравнений кинетики. Но для качественного анализа приемлемой альтернативой расчета  $W_{\text{ион}}$  может служить следующий энергетический подход: в момент времени  $t$  все вновь поступившие в зону разряда частицы полностью ионизируются, при этом на ионизацию одного нейтрала расходуется некоторая средняя (эффективная) энергия ионизации  $I_{\text{ср}}$ , так что

$$W_{\text{ион}} \simeq \dot{N}_+ I_{\text{ср}} = \frac{m_+}{m_i} I_{\text{ср}} = S\widehat{\sigma} T^4 \frac{I_{\text{ср}}}{\Omega \cdot m_i}.$$

Следовательно, (9) можно записать в виде

$$\beta \frac{l^2}{\sigma} V = 2\widehat{\sigma} T^4 \cdot S, \quad (10)$$

где  $\beta = (1 + \lambda I_{\text{ср}} / 2m_i \Omega)^{-1}$  — коэффициент, величина которого учитывает долю джоулева тепловыделения, переходящую в энергию излучения.

Оценим величину  $\beta$  для случая, когда материалом межэлектродной вставки является фторопласт марки Ф-4. Имеем при проточном разряде ( $\lambda = 1$ )  $\Omega = 2 \cdot 10^{11}$  эрг/г,  $\mu_i \simeq 17$ ,  $I_{\text{ср}} \simeq 10$  эВ и  $\beta = 0,413$ , т. е. в энергию излучения в данном случае может преобразоваться менее половины вводимой в разряд энергии.

С учетом проведенных оценок решение системы уравнений (1), (2), (10) можно записать следующим образом:

$$T(t) = 5,63 \cdot 10^{-2} \left( \frac{\beta z h}{1+z} \right)^{2/13} \cdot \frac{\widehat{I}(t)^{8/13}}{\widehat{N}(t)^{2/13}},$$

$$l(t) = 1,91 \cdot 10^{-8} \left( \frac{1+z}{h} \cdot \sqrt{\beta z} \right)^{4/13} \left[ \frac{\widehat{N}(t)}{\widehat{I}(t)} \right]^{4/13},$$

$$H(x, t) = -\frac{4\pi}{c} \cdot \widehat{I}^2(t) \cdot \frac{x}{l(t)},$$

$$P(x, t) = \frac{4\pi}{c^2} \cdot \widehat{I}^2(t) \cdot \left\{ 1 - \left[ \frac{x}{l(t)} \right]^2 \right\}, \quad (11)$$

$$n(x, t) = 1,29 \cdot 10^{-11} \cdot \widehat{N}^{2/13}(t) \cdot \widehat{I}^{18/13}(t) \cdot \left\{ 1 - \left[ \frac{x}{l(t)} \right]^2 \right\},$$

$$U(t) = hE(t) = \frac{zh}{\alpha} \cdot \frac{\widehat{I}(t)}{l(t) \cdot T^{3/2}(t)}.$$

Здесь и далее мы считаем произвольным, но постоянным эффективным заряд ионов  $z$ . На самом деле  $z = f(T)$ , вид которой определяется

уравнением Саха. Хотя эта зависимость является слабой, однако ее в принципе необходимо учитывать, особенно в случае многократной ионизации, когда ионизационные уровни лежат близко. В диапазоне температур  $2 \cdot 10^4 \div 10^5$  К для большинства многоэлектронных атомов решение уравнения Саха дает зависимость  $z = f(T) \simeq (0,5 \div 0,6) T^{1/3}$  (где  $T$  в эВ), т. е.  $z$  изменяется в достаточно широких пределах  $z \simeq 1 \div 6$ .

Однако необходимо учитывать два момента:

1. Приближение постоянной температуры по сечению позволяет также считать и  $z(x) = \text{const}$  при вычислении пространственных распределений плотности, давления и магнитного поля. При расчете же величины  $T$  в случае многократно ионизованных атомов необходимо в (11) считать  $z = f(T)$  и в качестве достаточно точного приближения полагать  $z \simeq 0,5 T$  ( $T$  в эВ). При этом формулы для  $T(z)$  из (11) и  $z = f(T) \simeq 0,5 T$  следует рассматривать как уравнения для определения  $z$  и  $T$ . Но согласно (11) зависимость  $T(z)$  очень слабая:  $T \sim [z/(1+z)]^{2/13}$ , так что без большой погрешности вычислений можно считать  $z = \text{const}$ .

2. В случае тормозного механизма поглощения квантов света и поглощения веществами с одним ионизованным уравнением (типа лития) можно в диапазоне  $T = 10^4 \div 10^5$  К приблизительно считать  $z \simeq 1$  [3].

Отметим, что соотношения (11) при известных из эксперимента временных зависимостях  $\widehat{I}(t)$  и  $\widehat{N}(t)$  позволяют оценить величины основных параметров плазменного образования.

Рассмотрим непроточный вариант разряда. В этом случае, как указывалось выше, величина числа частиц, захваченных в разряд  $\widehat{N}$ , известна и не меняется во времени:  $\widehat{N} = \widehat{N}_0 = \text{const}$  ( $\lambda = 0$ ). Следовательно, определив зависимость  $I(t)$  из уравнения электрического контура (3), по уравнениям (11) можно будет определить изменение величин основных параметров разряда во времени и выяснить влияние на них геометрических характеристик системы, свойств рабочего вещества и параметров внешней электрической цепи. Далее для простоты, будем исследовать случай, когда активное сопротивление внешней цепи  $R_0 = 0$ .

Обезразмерим (3), введя в качестве характерных величины тока

$$I^* = cU_0 \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} \quad \text{и времени } t^* = \sqrt{C_0 L_0} / c. \quad \text{С учетом (11) уравнение (3) примет вид}$$

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} - \varepsilon y^{6/13} \frac{dy}{d\tau} + y = 0 \quad (12)$$

с начальными условиями:  $\tau = 0$ ,  $y = 0$ ,  $dy/d\tau = 1$ , где  $y = \widehat{I}(\tau) / \widehat{I}^*$ ,  $\tau = t/t^*$ ,  $\varepsilon = 3,2 \cdot 10^6 [\Phi(z)/Q] \cdot U_0^{6/13} \cdot (C_0/L_0)^{19/26}$ ,  $Q = \widehat{N}_0^{8/13} \cdot b^{11/13} / h^{21/13}$ ,  $\Phi(z) = [z/(1+z)]^{8/13}$ .

Уравнение (12), определяющее зависимость разрядного тока  $I$  от времени  $t$ , есть уравнение затухающих колебаний типа Льенара, оно не интегрируется в квадратурах. Форма кривой  $y$  от  $\tau$  определяется единственным безразмерным критерием  $\varepsilon > 0$ . Для случая небольших значений  $\varepsilon$  (см. ниже) методом Крылова — Боголюбова [8] можно получить приближенное решение

$$y(\tau) = \left( 1 + \varepsilon \frac{6B \left( \frac{3}{2}; \frac{19}{26} \right)}{13\pi} \cdot \tau \right)^{-\frac{13}{6}} \cdot \sin \tau + \varepsilon \cdot \Pi(\tau), \quad (13)$$

где  $B \left( \frac{3}{2}; \frac{19}{26} \right) \simeq 0,71$  — Бэта-функция [9];

$$\Pi(\tau) = \frac{1}{2\pi^2} \cdot \left(1 + \varepsilon \frac{6B\left(\frac{3}{2}; \frac{19}{26}\right)}{13\pi} \cdot \tau\right)^{\frac{19}{6}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{in} B\left(\frac{2i+1}{2}; \frac{19}{26}\right) \frac{\sin(2n+1)\tau}{n(n+1)};$$

$\alpha_{in}$  — коэффициенты выражения  $\sin(2n+1)x = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{in} \sin^{2i-1}x$  [10].

Решение (12) для произвольных значений  $\varepsilon$  было найдено численно на ЭВМ методом Рунге — Кутты. На рис. 2 приведены зависимости  $y(\tau)$ , полученные численно для некоторых значений  $\varepsilon$ . Отметим, что  $y(\tau)$ , найденная из (13), удовлетворительно совпадает с точным решением вплоть до  $\varepsilon \approx 2$ . При малых значениях  $\varepsilon \lesssim 1$  разряд в системе близок к периодическому, а при больших  $\varepsilon \gtrsim 8$  стремится к аperiodическому разряду с небольшими осцилляциями тока при больших значениях аргумента  $\tau$ . Здесь необходимо отметить, что предложенная квазистационарная модель формирования сильно точного прижатого разряда неверно отражает процессы в системе в начальный момент времени ( $\tau \approx 0$ ) и в моменты времени когда  $I \approx 0$ . Поэтому при использовании полученных результатов целесообразно ограничиться временным интервалом первого полу периода, не включающим моменты времени с  $I(\tau) \approx 0$ . Зная характер временной зависимости  $y(\tau)$  по соотношениям (11) можно определить все основные параметры плазменного образования. Так, для длины  $l$ , температуры  $T$ , активного сопротивления  $R$  и удельного светового потока  $E_{\text{изл}} = \sigma T^4$  справедливы следующие выражения:

Рис. 2. Безразмерный ток разряда от времени  $y(\tau)$ .  
 $\varepsilon=1$  (1); 2 (2); 4 (3); 9 (4).

характер временной зависимости  $y(\tau)$  по соотношениям (11) можно определить все основные параметры плазменного образования. Так, для длины  $l$ , температуры  $T$ , активного сопротивления  $R$  и удельного светового потока  $E_{\text{изл}} = \sigma T^4$  справедливы следующие выражения:

$$l(\tau) = l^*/y^{18/13}(\tau), \quad T(\tau) = T^* \cdot y^{8/13}(\tau),$$

$$R(\tau) = R^* y^{6/13}(\tau), \quad E_{\text{изл}} = E_{\text{изл}}^* \cdot y^{32/13}(\tau), \quad (14)$$

где

$$l^* = 5,24 \cdot 10^{-12} \left( \frac{z^2}{(1+z)^{11}} \right)^{1/13} \frac{\hat{N}_0^{11/13} \cdot b^{7/13}}{U_0^{18/13} (C_0/L_0)^{9/13}},$$

$$T^* = 1,6 \cdot 10^5 \left( \frac{z}{1+z} \right)^{2/13} \frac{U_0^{8/13} (C_0/L_0)^{4/13}}{b^{6/13} \hat{N}_0^{2/13}},$$

$$R^* = 2,28 \cdot 10^{-11} \cdot \varepsilon (C_0/L_0)^{-1/2},$$

$$E_{\text{изл}}^* = 3,7 \cdot 10^{16} \cdot \left( \frac{z}{1+z} \right)^{8/13} \frac{U_0^{32/13} (C_0/L_0)^{16/13}}{b^{24/13} \hat{N}_0^{8/13}}.$$

На рис. 3 приведены графики функций  $\frac{l(\tau)}{l^*}$ ,  $\frac{T(\tau)}{T^*}$ ,  $\frac{R(\tau)}{R^*}$ ,  $\frac{E_{\text{изл}}(\tau)}{E_{\text{изл}}^*}$

для двух значений  $\varepsilon$ , можно выявить характер изменения указанных параметров разряда во времени. В начальный период формирования разряда (напомним, что в рамках рассматриваемой модели процесса не рассматривается стадия «пробоя» и образования ионизированной плазмы в разряде с числом частиц  $\hat{N}_0$ ) происходит сжатие плазменного образо-

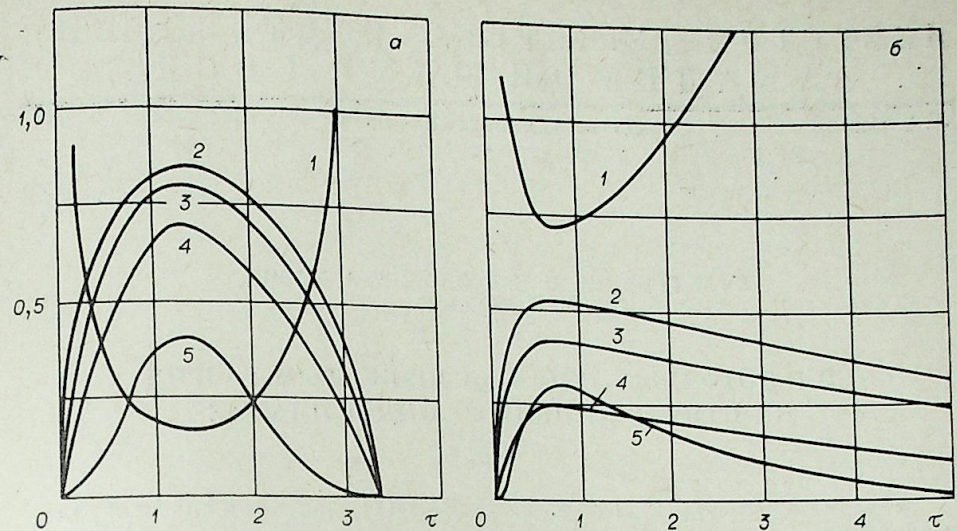


Рис. 3. Безразмерные параметры плазменного образования от времени  $\tau$ .

а)  $\varepsilon=1$ ; б)  $\varepsilon=10$ . 1 —  $l=l(\tau)$ ; 2 —  $T=T(\tau)$ ; 3 —  $R=R(\tau)$ ; 4 —  $y=y(\tau)$ ; 5 —  $q=q(\tau)$ .

вания с соответствующим ростом температуры, активного сопротивления и светового потока из плазмы. При максимальном токе длина разряда  $l$  минимальна, а температура и световой поток достигают своих максимальных значений. Для оценки экстремальных значений величины (14) (при максимальном значении тока разряда  $y(\tau_m) = y_m$ ) укажем, что величина максимальной амплитуды тока разряда в первом полу периоде для  $\varepsilon \in [0, 8]$  хорошо интерполируется выражением  $y_m = (1 + 0,86 \cdot \varepsilon)^{-0,622}$ .

В последующие моменты времени полу периода при ослаблении тока разряда протяженность плазменного образования  $l$  возрастает (стадия расширения), а температура и световой поток уменьшаются, достигая в момент времени нуля тока своих нулевых значений — разряд «гаснет». В следующие полу периоды тока картина процесса повторяется. В каждом конкретном случае абсолютные значения параметров плазменного образования в произвольный момент времени можно оценить по (14) с учетом (13) или результатов численного расчета  $y(\tau)$ .

Московское высшее техническое училище  
им. Н. Э. Баумана

Поступила в редакцию  
16/VII 1980

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гришин Ю. М., Мосин А. А., Хвесьюк В. И. Получение протяженных плазменных образований на основе ИСУ. — Тез. докл. III Всесоюз. конф. по плазменным ускорителям. Минск, 1976.
2. Александров А. Ф., Рухадзе А. А. Успехи физических наук, 1974, № 2.
3. Александров А. Ф., Рухадзе А. А. Физика сильно точных электроразрядных источников света. М.: Атомиздат, 1976.
4. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Физматгиз, 1963.
5. Спитцер Л. Физика полностью ионизованной плазмы. М.: ИЛ, 1957.
6. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Гостехтеориздат, 1957.
7. Губарев В. Я., Козлов И. П., Лесков Л. В., Протасов Ю. С. Определение теплового потока из плазмы на диэлектрик в импульсных эрозионных ускорителях. — В кн.: Плазменные ускорители/Под ред. Л. А. Арцимовича. М.: Машиностроение, 1972.
8. Боголюбов П. Н., Митропольский Ю. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1958.
9. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1977.
10. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.

Ю. М. ГРИШИН, Н. П. КОЗЛОВ, А. А. МОСИН,  
В. П. ХВЕСЮК

СИЛЬНОТОЧНЫЙ ПЛОСКИЙ ПРИЖАТЫЙ РАЗРЯД  
В ОПТИЧЕСКИ НЕПРОЗРАЧНОЙ ПЛАЗМЕ

Сообщение 2

Как указывалось в первой части работы [1], для проточного варианта реализации разряда представляют интерес два случая организации стока плазмы из зоны разряда: а) боковой сток — сток через открытые боковые поверхности разряда; б) сток через отверстия в межэлектродной вставке при полностью закрытых боковых поверхностях разряда. В обоих случаях число частиц в зоне разряда в произвольный момент времени неизвестно и должно определяться из уравнения баланса массы частиц в зоне разряда. Зависимости основных параметров плазменного образования от  $\hat{I}(t)$  и  $\hat{N}(t)$  определены [1]. Уравнения динамики плазмы, испарения диэлектрика с уравнением электрического контура образуют замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения всех основных параметров плазменного образования и характера изменения их во времени. Рассмотрим отдельно два случая организации стока.

**Боковой сток.** Для этого случая уравнение баланса массы с учетом [1] имеет вид

$$\frac{d\hat{N}}{dt} = 0,344 \cdot 10^{15} \frac{h}{\Omega \mu_i} \left\{ \frac{\beta z h}{1+z} \right\}^{8/13} \hat{I}(t)^{32/13} - \frac{6,88 \cdot 10^3}{b \sqrt{\mu_i}} \left\{ \frac{\beta z h}{1+z} \right\}^{1/13} \hat{I}^{4/13}(t) \cdot \hat{N}^{12/13}(t).$$

Введем в качестве характерных следующие величины:

$$t^* = \frac{\sqrt{C_0 L_0}}{c} - \text{время}; \quad I^* = c U_0 \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} - \text{ток};$$

$$\hat{N}_A^* = 8,6 \cdot 10^6 h \left( \frac{b}{\Omega \sqrt{\mu_i}} \right)^{13/20} \left( \frac{\beta z}{1+z} \right)^{7/20} \cdot \hat{I}^{7/5} - \text{погонное число частиц в зоне}$$

разряда для рассматриваемого случая бокового стока. Обозначив  $y(\tau) = \frac{I(\tau)}{I^*}$ ,  $\tau = t/t^*$ ,  $m(\tau) = \hat{N}(\tau)/\hat{N}_A^*$  и используя уравнение (3), (11), работы [1], получим из (1):

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + y = -\xi \frac{y^{6/13}}{m^{21/13}} \cdot \left\{ m \frac{dy}{d\tau} - \frac{8}{19} y \frac{dm}{d\tau} \right\}, \quad (2)$$

$$\frac{dm}{d\tau} = \delta \cdot \left\{ \frac{y^{32/13}}{m^{8/13}} - y^{1/13} \cdot m^{12/13} \right\},$$

где

$$\xi = \frac{1,63 \cdot 10^{-7}}{bh} \cdot \left( \frac{C_0}{L_0} \right)^{0,3} \left\{ \frac{z}{1+z} \cdot \frac{\Omega \sqrt{\mu_i}}{b U_0} \right\}^{2/5} \cdot \frac{1}{\beta^{9/20}},$$

$$\delta = 9,3 \cdot 10^{-6} \left( \frac{\beta \Omega z}{1+z} \right)^{1/20} \cdot \frac{(U_0 C_0^3 L_0^2)^{1/5}}{b^{5/4} \sqrt{\mu_i}}.$$

Начальные условия для (2):  $\tau = 0$ ,  $y = 0$ ,  $dy/d\tau = 1$ ,  $m = m_0 = \hat{N}_0/\hat{N}_A^*$ .  
**Сток плазмы разряда в окна межэлектродной вставки.** В этом случае уравнение баланса массы с учетом выражений (6б), (14) работы [1] запишется в виде

$$\frac{d\hat{N}}{dt} = \alpha_1(t) \hat{N}^{-8/13} - \alpha_2(t) \cdot \hat{N}^{1/13}, \quad (3)$$

$$\text{где} \quad \alpha_1(t) = 0,344 \cdot 10^{15} \frac{(1-\kappa) h}{\Omega \mu_i} \left\{ \frac{\beta z h}{1+z} \right\}^{8/13} \cdot \hat{I}^{32/13}(t),$$

$$\alpha_2(t) = 1,98 \frac{\kappa b}{\sqrt{\mu_i}} \cdot \left( \frac{\beta}{z} \right)^{1/13} \left\{ \frac{h}{1+z} \right\}^{12/13} \cdot \hat{I}^{22/13}(t).$$

В качестве характерных выберем следующие величины:  $t^* = \sqrt{C_0 L_0}/c$  — время;  $I^* = c U_0 \sqrt{\frac{C_0}{L_0}}$  — ток;  $\hat{N}_B^* = 1,9 \cdot 10^{20} h z (1+z)^{4/9} \cdot \beta^{7/9} \left( \frac{1-\kappa}{\kappa \Omega \sqrt{\mu_i}} \right)^{13/9}$ .  $\hat{I}^{*10/9}$  и обозначим  $y(\tau) = \hat{I}(\tau)/\hat{I}^*$ ,  $\tau = t/t^*$ ,  $f(\tau) = \hat{N}(\tau)/\hat{N}_B^*$ . Тогда уравнение (3) с учетом (11), (3) из [1] в безразмерной форме запишется как

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + y = -\gamma \left( \frac{y^6}{f^{21}} \right)^{1/13} \cdot \left( f \frac{dy}{d\tau} - \frac{8}{19} y \frac{df}{d\tau} \right),$$

$$\frac{df}{d\tau} = \varphi \left( \frac{y^{32/13}}{f^{8/13}} - f^{1/13} \cdot y^{22/13} \right), \quad (4)$$

где

$$\gamma = \frac{7,45 \cdot 10^{-14}}{h U_0^{2/9} \cdot b^{7/9}} \cdot \left( \frac{C_0}{L_0} \right)^{7/18} \left[ \frac{\kappa \Omega}{(1+z)(1-\kappa)} \sqrt{\frac{\mu_i}{\beta}} \right]^{8/9},$$

$$\varphi = 1,2 \cdot 10^{-22} \left[ \frac{\Omega}{(1+z)(1-\kappa)} \right]^{4/13} \cdot \frac{\kappa^{7/13} \cdot \mu_i^{1/6}}{z \cdot \beta^{25/39}} \cdot C_0^{5/6} \cdot U_0^{2/3} \cdot L_0^{1/6}.$$

Начальные условия:  $\tau = 0$ ,  $y = 0$ ,  $dy/d\tau = 1$ ,  $f = f_0 = \hat{N}/\hat{N}_B^*$ . Системы уравнений (2) и (4) решались численно на ЭВМ методом Рунге—Кутты. Величины безразмерных комплексных критериев  $\xi$ ,  $\delta$  для (2) и  $\gamma$ ,  $\varphi$  для (4), определяющие характер решения в каждом из рассматриваемых случаев, принимали значения из диапазона [0,5;  $10^{-1}$ ; 5; 10], а величины  $m_0 = f_0 = 10^{-2} \div 10^{-3}$ .

Здесь необходимо отметить, что в рамках рассматриваемого квазистационарного приближения [1], справедливого при выполнении неравенства  $\frac{v_s^*}{l^*/t^*} \gg 1$ , диапазоны изменения безразмерных параметров  $\xi$ ,  $\delta$  и  $\gamma$ ,  $\varphi$  соответственно для двух случаев организаций стока плазмы из зоны разряда ограничены следующим образом:  
— боковой сток:

$$\delta \gg \delta_{кр} = 1/M^3 \sqrt{\xi}, \quad (5)$$

где

$$M \simeq 8 \cdot 10^{-6} \frac{\Omega^{5/12} \cdot \mu_i^{0,233}}{F(z)} \cdot (bh U_0)^{1/3},$$

$$F(z) = z^{0,584} (1+z)^{0,416},$$

— сток в окна:

$$\gamma \leq \varphi, \quad \kappa \ll \varphi. \quad (6)$$

Величина  $M$  относительно слабо зависит от входящих в нее параметров, определяющих разряд, и для наиболее характерного диапазона их изменения меняется в пределах  $M \simeq 10 \div 50$  (так, например, для случая,

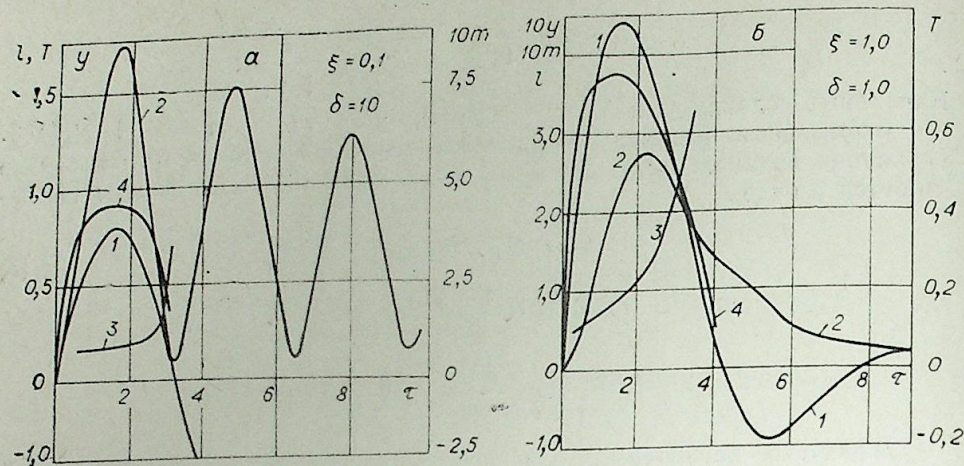


Рис. 1. Параметры разряда с боковым стоком плазмы.

а)  $\xi=0,1$ ,  $\delta=10$ ; б)  $\xi=1$ ,  $\delta=1,0$ .  
1 —  $y(\tau)$ ; 2 —  $m(\tau)$ ; 3 —  $l(\tau)$ ; 4 —  $T(\tau)$ .

когда рабочим телом является фторопласт-4 и  $\Omega = 2 \cdot 10^{11} \frac{\text{эрг}}{\text{г}}$ ,  $\mu_i \approx 17$ ,  $b = 10$  см,  $h = 5$  см,  $U_0 = 10$  ед. CGS,  $M \approx 10$ ). Следовательно, неравенство (5) можно переписать в виде  $\delta \geq 10\delta_{\text{кр}} \approx (\xi)^{-1/3}$ , откуда следует, что при изменении  $\xi \in [10^{-3}; 10^3]$  величина  $\delta$  должна соответствовать или превышать  $10^{-1} \div 10$ .

Величина относительной площади окон  $\kappa \in (0, 1)$  и приближение квазистационарности выполняется тем лучше, чем  $\varphi \gg 1$ . Отметим, что для  $\varphi \in (0, 1)$  квазистационарное приближение может работать, однако, как это требует (6), в этом случае необходимо рассматривать геометрию разряда с малой величиной площади окон для стока плазмы, т. е.  $\kappa \ll 1$ .

Некоторые результаты расчетов для диапазона изменения критериев, удовлетворяющего условиям (5) и (6), представлены на рис. 1, 2. Полученные результаты показывают, что в силу идентичности структуры уравнений, входящих в системы (2) и (4), влияние критериев  $\xi$ ,  $\delta$  для (2) и  $\gamma$ ,  $\varphi$  для (4) на поведение решения в обоих случаях тоже идентично. Поэтому анализ результатов счета приведем лишь для случая бокового стока плазмы. Для случая стока через окна в межэлектродной вставке результаты анализа аналогичны, если вместо  $\xi$  рассматривать  $\gamma$ , а вместо  $\delta$  —  $\varphi$ .

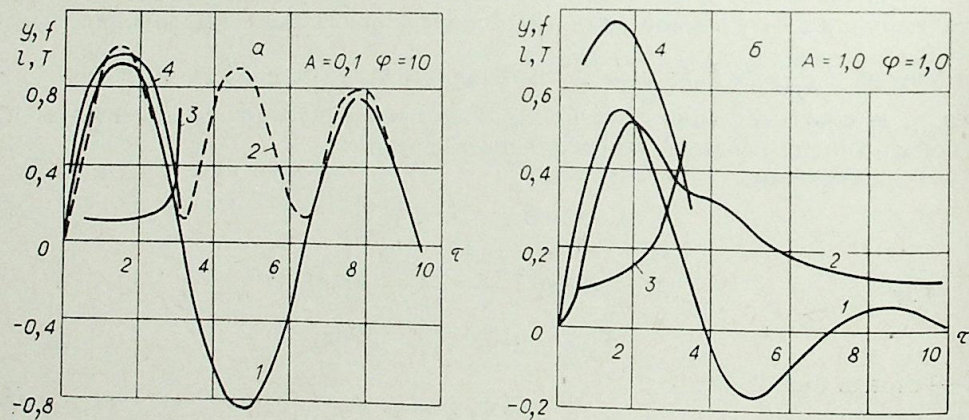


Рис. 2. Параметры разряда со стоком плазмы через окна в межэлектродной вставке.

а)  $A=0,1$ ,  $\varphi=10$ ; б)  $A=1,0$ ,  $\varphi=1,0$ .  
1 —  $y(\tau)$ ; 2 —  $f(\tau)$ ; 3 —  $l(\tau)$ ; 4 —  $T(\tau)$ .

На зависимость разрядного тока  $y$  от  $\tau$  влияет в основном величина  $\xi$ . При малых  $\xi$  ( $\xi \leq 0,1$ ) разряд близок к периодическому: имеет место относительно слабое затухание тока разряда; так, отношение амплитуды тока третьего полупериода к амплитуде тока первого полупериода составляет величину около 0,7 для  $\xi=0,1$ , а период разряда близок к  $2\pi$ . С увеличением  $\xi$  затухание колебаний тока усиливается, например, для  $\xi=1$  ( $\delta=1$ ) амплитуда тока второго полупериода приблизительно в 5 раз меньше амплитуды тока первого полупериода и стремится к аperiodическому при больших  $\xi$  ( $\xi \geq 10$ ). В пределах фиксированного  $\xi = \text{const}$  уменьшение  $\delta$  приводит к значительному растягиванию первого полупериода тока, причем эта тенденция усиливается при больших  $\xi \geq 1$ . На величину приведенного числа частиц  $m(\tau)$ , захваченных к моменту времени  $\tau$  в разряд, влияют критерии  $\xi$  и  $\delta$ , причем величина  $\delta$  более существенно.

Увеличение  $\delta$  (особенно характерно для больших  $\delta \geq 10$ ) при фиксированном незначительном  $\xi$  приводит к тому, что величина  $m(\tau)$  начинает «отслеживать» ток разряда  $y(\tau)$ , т. е. начинает осциллировать, подобно току  $y(\tau)$ , затухая по величине амплитуды от полупериода к полупериоду. Отметим, что сдвиг фаз осциллирующих кривых  $m(\tau)$  и  $y(\tau)$  для  $\delta \geq 10$  практически отсутствует и, что при нуле тока минимальная величина  $m$  отлична от нуля. С увеличением  $\xi$  (ток разряда при этом становится сильно затухающим и близок к аperiodическому) при малых  $\delta$  ( $\delta \geq 0,1$ ) зависимость  $m$  от  $\tau$  качественно сохраняется, но имеет место некоторое запаздывание моментов времени достижения экстремумов  $m(\tau)$ ,  $f(\tau)$  и  $y(\tau)$  (см. рис. 1, б, 2, б). При больших значениях  $\delta$  ( $\delta \geq 1$ ) и  $\xi$  ( $\xi \geq 1$ ) в отличие от случая малых  $\xi \leq 0,1$   $m(\tau)$  не «отслеживает» ток, происходит запаздывание выхода массы и монотонное уменьшение  $m(\tau)$  после прохождения максимума  $m$  с небольшими перегибами кривой  $m(\tau)$  в интервалах времени нуля и максимума тока во втором полупериоде разряда.

Зная временные зависимости  $y(\tau)$ ,  $m(\tau)$  и  $f(\tau)$  (а следовательно,  $\hat{l}(t)$  и  $\hat{T}(t)$ ), по соотношениям (11) из [1] можно установить характер изменения во времени и величины всех основных параметров плазменного образования для обоих случаев организации стока плазмы из зоны разряда. При этом необходимо помнить, что предлагаемое квазистационарное рассмотрение «работает» лишь на интервале времени разряда, которое не включает моменты времени начала разряда и прохождения тока через нулевые значения. На рис. 1, 2 для первого полупериода разрядного тока приведены в качестве примера зависимости безразмерных величин длины разряда  $\bar{l}(\tau) = m^{11/13}(\tau)/y^{18/13}(\tau)$ , температуры  $\bar{T}(\tau) = y^{8/13}(\tau)/m^{2/13}(\tau)$ . Функции  $\bar{l}(\tau)$  и  $\bar{T}(\tau)$  для всего диапазона изменения безразмерных критериев  $\xi$  и  $\delta$  носят идентичный характер.

В начале разряда температура растет, достигая максимального значения в некоторый момент времени  $\tau_1 \approx \tau_m$ , а далее монотонно уменьшается до нуля в момент времени нуля тока (разряд «гаснет»). Длина разряда  $\bar{l}(\tau)$  меняется следующим образом: в начальную период которого происходит сжатие плазменного образования, протяженность которого к некоторому моменту времени  $\tau_2 \approx \tau_m$  достигает минимального значения, а далее наступает стадия расширения плазмы. В отличие от  $\bar{T}(\tau)$  функция  $\bar{l}(\tau)$  (при значениях безразмерных критериев  $\xi \leq 1$ ,  $\delta \geq 10$  — для бокового стока и  $\gamma \leq \varphi \gg 1$  — для стока в окна) приблизительно постоянна в некотором интервале изменения времени разряда (см. рис. 1, а, 2, а), т. е. имеет место стабилизация длины разряда, что отмечено и в экспериментальных работах [2].

Влияние отдельных параметров системы (параметры электрического контура  $C_0$ ,  $L_0$ ,  $U_0$ , геометрия разряда  $b$ ,  $h$ ,  $\kappa$ ) и свойств материала межэлектродной вставки  $\Omega$ ,  $m_i$ ,  $\mu_i$ ,  $I_{\text{ср}}$ ), входящих в комплексные безразмерные критерии  $\xi$ ,  $\delta$  и  $\gamma$ ,  $\varphi$ , можно легко выявить из полученных резуль-

татов. Не останавливаясь на этом подробно, отметим некоторые наиболее существенные моменты.

Для варианта разряда с боковым стоком критерии  $\xi$  и  $\delta$ , определяющие характер решения, зависят от основных параметров разряда следующим образом. Наиболее сильное влияние на  $\xi$  и  $\delta$  оказывает геометрия разряда, так,  $\xi \sim h^{-1} \cdot b^{-7/5}$ ,  $\delta \sim b^{-3/4}$ , причем величина  $\delta$  в явной форме не зависит от  $h$  — межэлектродного расстояния. Увеличение начального напряжения  $U_0$  и индуктивности контура  $L_0$  приводит к росту  $\delta$  и снижению  $\xi$ . Увеличение емкости  $C_0$  ведет к одновременному росту  $\xi$  и  $\delta$ , причем  $\delta$  сильно зависит от  $C_0$  —  $\delta \sim C_0^{3/5}$ . Отметим достаточно сильное влияние коэффициента  $\beta$ , учитывающего потери энергии на ионизацию, на величину  $\xi \sim 1/\beta$ , а следовательно, на характер тока разряда. Критерий  $\delta$  очень слабо зависит от  $\beta$ . Свойства рабочего вещества межэлектродной вставки  $\Omega$  и  $\mu_i$  влияют на  $\xi \sim \Omega^{2/5} \cdot \mu_i^{1/5}$  и на  $\delta \sim \frac{\Omega^{1/20}}{\mu_i^{1/2}}$ . Рассмотрим

влияние отдельных параметров разряда на величину основной характеристики разряда  $T$ , от величины которой зависит мощность излучения разряда. Имеем  $T(\tau) \sim \bar{T}_A(\tau) \cdot U_0^{2/5} \cdot \left(\frac{C_0}{L_0}\right)^{1/5} \cdot \frac{\beta^{1/10} \cdot \Omega^{1/20} \cdot \mu_i^{1/40}}{b^{0,7/5}}$ . Отсюда видно, что на величину  $T$  основное влияние оказывают электрические параметры контура  $U_0$ ,  $C_0$ ,  $L_0$  и ширина системы  $b$  —  $T \sim b^{-0,7/5}$ .

Для варианта разряда со стоком в окна прежде всего необходимо отметить существенное влияние  $\kappa$  на величины  $\gamma$  и  $\varphi$ :

$$\gamma \sim \left(\frac{\kappa}{1-\kappa}\right)^{8,9}, \quad \varphi \sim \frac{\kappa^{7/13}}{(1-\kappa)^{4/13}},$$

что важно с точки зрения управления разрядом. Влияние свойств рабочего вещества в этом случае более сильно (особенно по  $\Omega$ ), причем с ростом молекулярного веса рабочего вещества  $\mu_i$ ,  $\varphi$  увеличивается (хотя и слабо  $\varphi \sim \mu_i^{1/6}$ ) в отличие от аналогичного критерия  $\delta$ . Отметим противоположное влияние  $U_0$  на коэффициенты  $\gamma \sim U_0^{-2/9}$  и  $\xi$ . Для температуры разряда  $T(\tau)$  имеем выражение  $T(\tau) \sim \bar{T}_B(\tau) \cdot \beta^{0,0342} \left(\frac{\kappa}{1-\kappa} \cdot \Omega \mu_i^2 U_0^2 \frac{C_0}{L_0}\right)^{2/9}$ .

$\frac{1}{b^{0,45}}$ , которое по структуре похоже на выражение  $T(\tau)$  в случае разряда с боковым стоком, но влияние параметров  $\Omega$ ,  $\mu_i$ ,  $(C_0/L_0)$ ,  $U_0$  более сильное. Необходимо подчеркнуть, что для варианта разряда со стоком в окна величина температуры поверхности  $T$  гораздо слабее зависит от коэффициента потери  $\beta$  и от ширины системы  $b$ :  $T \sim \frac{\beta^{0,0342}}{b^{0,45}}$ , так что при

прочих равных условиях в обоих вариантах проточного разряда вариант со стоком плазмы в окна позволяет реализовать разряд в более протяженной по ширине системе. С учетом всего сказанного, с точки зрения направленных экспериментальных разработок и исследований сильноточных прижатых разрядов, наиболее перспективным представляется вариант со стоком плазмы в окна межэлектродной вставки.

В заключение отметим, что сравнение результатов расчетов для случая проточного разряда с боковым стоком удовлетворительно согласуется с результатами имеющихся экспериментальных исследований прижатого разряда с аналогичной геометрической конфигурацией [2].

Таким образом, полученные результаты позволяют выявить в рамках рассмотренного приближения особенности динамики формирования сильноточных прижатых излучающих разрядов в оптически непрозрачной плазме для двух конкретных вариантов реализации разрядов — не-

проточного и проточного при двух способах организации стока, выбрать рабочее тело, параметры электрического контура и геометрию системы для получения оптимальных характеристик излучающего плазменного образования.

Московское  
высшее техническое  
училище им. Н. Э. Баумана

Поступила в редакцию  
16/VII 1980

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гришин Ю. М., Козлов Н. П., Мосин А. А., Хвесьюк В. И. Сильноточный плоский прижатый разряд в оптически непрозрачной плазме. I.— Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. Настоящий номер.
2. Гришин Ю. М., Мосин А. А., Хвесьюк В. И. Получение протяженных плазменных образований на основе ИПХ.— В кн.: Докл. III Всесоюз. конф. по плазменным ускорителям. Минск, 1976.

УДК 533.95

С. П. БОРИСКИН, В. Н. ДЕВЯТОВ

НАУЧНО-ИНЖЕНЕРНЫЙ ПОДХОД  
К ПРОБЛЕМЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ  
И АНАЛИЗА ДИНАМИКИ ПЛАЗМОТРОНА  
КАК ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА

III. АНАЛИЗ ДИНАМИКИ  
ПРИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ  
И МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ПЛАЗМОТРОНОВ

Анализ и разработка перспективных плазмотронов для плазмохимии с высокой степенью превращения электрической энергии в тепловую и соответственно при этом высокого целевого химического превращения определяют необходимость проведения исследования динамических характеристик. Эти характеристики в плазмотроне представляют собой весьма сложный комплекс индивидуальных процессов.

Первым этапом в изучении динамики всегда являлись вопросы устойчивости. По этой части выполнено много работ и получены существенные результаты, например, [1—5]. Однако необходимый второй этап в изучении динамики плазмотронов — рассмотрение самих переходных процессов (что обычно именуется задачами качества) до настоящего времени находится лишь на начальной стадии исследования. Наглядное представление о сложной динамической системе секционированного плазмотрона как технологического объекта (с химическими реакциями) дает структура взаимодействия энерготехнологических параметров по межэлектродным вставкам, которая представлена на рис. 1.

Динамические характеристики плазмотрона могут быть проанализированы путем применения понятия инерционностей. Динамика процесса

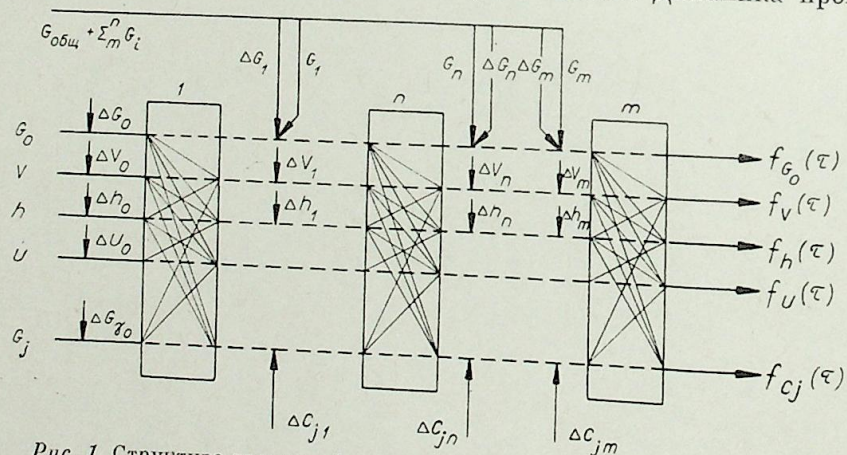


Рис. 1. Структура взаимодействия энерготехнологических параметров.

будет рассмотрена с учетом излучения электрической дуги. Для плазмотронов большой единичной мощности вклад от излучения электрической дуги в общий энергетический баланс становится существенным.

Рассмотрим систему общих уравнений (1)—(7) динамики плазмохимических процессов в плазмотроне, полученных в [6] с добавлением в уравнение (2) учета излучения дуги [7] —  $(1/\rho C_p)K_q I^2 P^0$  и в правую часть уравнения (4) выражения

$$K_G \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ G_0 + \sum_{i=1}^m G_i \right] + K_G V_z \frac{\partial}{\partial z} \left[ G_0 + \sum_{i=1}^m G_i \right].$$

Здесь

$$K_q = \frac{A_q I_{\text{н}}^2 P_{\text{н}}^0}{q_{\text{н}}}, \quad A_q = \text{const}, \quad K_G = \frac{l \cdot G_{\text{н}}}{F_{\text{н}} \rho_{\text{н}} V_{\text{н}}},$$

$G_{\text{н}}$  — общий расход газа с учетом защитного газа на обдув катода [8].

При рассмотрении системы уравнений динамики плазмотрона с химическими реакциями обращаем внимание на уравнение неразрывности. Это уравнение неразрывности отличается от уравнения (4) работы [6] правой частью и функцией переменного сечения плазмотрона  $F(z, \tau)$ , зависящей теперь от двух независимых переменных: линейной координаты  $z$  и времени  $\tau$ .

Обозначения и выражения безразмерных коэффициентов в уравнениях динамики даны в работе [6], а новые обозначения даются по тексту.

Наличие в уравнении неразрывности функции  $F(z, \tau)$  позволит в дальнейшем развивать теоретические обобщения, связанные с изменением внутренней геометрии плазмотронов и их отдельных элементов, обладающих оптимальными аэродинамическими качествами. Оптимальные аэродинамические качества будут сопутствовать оптимальному химическому процессу в плазмотроне. Задача изменения геометрии плазмотрона во времени и по осевой координате, т. е. организация подвижных стенок, носит пока проблематичный характер и будет связана, по-видимому, с чрезвычайно большими техническими трудностями. Вопрос изменяемой геометрии плазмотрона может найти дальнейшее развитие и применение в плазмодвигательных установках, ракетных системах, и конечно же, в плазмохимических агрегатах и химических реакторах. Вопросам, связанным с данной проблемой, посвящены монографии [9, 10]. В этих работах используется некоторый вариационный принцип, позволяющий проводить анализ заданной геометрии тел или численно рассчитать определенную геометрию при известных газодинамических параметрах. Однако они не рассматривают задачи предсказания нужной геометрии плазмотронов, плазмодвигательных и других установок. Используя изложенную здесь методику анализа динамики плазмотрона как технологического объекта, можно ставить и решать эту задачу в динамических условиях. При разработке новых плазмотронов эта задача имеет самостоятельное значение и одновременно связана с общей статической и динамической оптимизацией.

Общая система линеаризованных уравнений модели динамики плазмотрона с учетом указанных выше дополнений и при внешних возмущающих воздействиях распределенного и сосредоточенного характера будет иметь следующий вид\*

$$\frac{\partial \Delta C_1}{\partial \tau} + V_z^* \frac{\partial \Delta C_1}{\partial z} + \left( \frac{\partial \Delta C_1}{\partial z} \right)^* \Delta V_z = K_D \cdot D^* \frac{\partial^2 \Delta C_1}{\partial z^2} + A_{CT1} \cdot \Delta T + A_{CP1} \cdot \Delta P + A_{C1} \sum_{j=1}^h \Delta C_j + \Phi_{C1}(z, \tau).$$

\* Также как в [6], используются линеаризованные теплофизические характеристики плазмы.

$$\frac{\partial \Delta C_2}{\partial \tau} + V_z^* \frac{\partial \Delta C_2}{\partial z} + \left( \frac{\partial C_2}{\partial z} \right)^* \Delta V_z = K_D \cdot D^* \frac{\partial^2 \Delta C_2}{\partial z^2} + A_{CT2} \cdot \Delta T +$$

$$+ A_{CP2} \cdot \Delta P + A_{C2} \sum_{j=1}^h \Delta C_j + \varphi_{C2}(z, \tau).$$

$$\frac{\partial \Delta C_3}{\partial \tau} + V_z^* \frac{\partial \Delta C_3}{\partial z} + \left( \frac{\partial C_3}{\partial z} \right)^* \Delta V_z = K_D \cdot D^* \frac{\partial^2 \Delta C_3}{\partial z^2} + A_{CT3} \cdot \Delta T +$$

$$+ A_{CP3} \cdot \Delta P + A_{C3} \sum_{j=1}^h \Delta C_j + \varphi_{C3}(z, \tau). \quad (1a)$$

---


$$\frac{\partial \Delta C_h}{\partial \tau} + V_z^* \frac{\partial \Delta C_h}{\partial z} + \left( \frac{\partial C_h}{\partial z} \right)^* \Delta V_z = K_D \cdot D^* \frac{\partial^2 \Delta C_h}{\partial z^2} + A_{CTh} \cdot \Delta T +$$

$$+ A_{CP_h} \cdot \Delta P + A_{C_h} \sum_{j=1}^h \Delta C_j + \varphi_{C_h}(z, \tau).$$

$$\frac{\partial \Delta T}{\partial \tau} + V_z^* \frac{\partial \Delta T}{\partial z} + B_V \Delta V_z - 2 \frac{\partial \Delta P}{\partial z} - 2 V_z^* \frac{\partial \Delta P}{\partial z} = K_T a^* \frac{\partial^2 \Delta T}{\partial z^2} + B_T \Delta T +$$

$$+ B_P \cdot \Delta P + B_C \sum_{j=1}^h \Delta C_j + B_E \Delta E + B_I \cdot \Delta I + \varphi_T(z, \tau), \quad (2a)$$

$$\frac{\partial \Delta V_z}{\partial \tau} + V_z^* \frac{\partial \Delta V_z}{\partial z} + \left( \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^* \Delta V_z = - \left( \frac{1}{\rho} \right)^* \cdot \frac{\partial \Delta P}{\partial z} + K_V \cdot v^* \frac{\partial^2 \Delta V_z}{\partial z^2} + B_{VT} \cdot \Delta T +$$

$$+ B_{VP} \cdot \Delta P + B_{VC} \sum_{j=1}^h \Delta C_j + \varphi_V(z, \tau). \quad (3a)$$

$$\rho^* \frac{\partial \Delta F}{\partial \tau} + (\rho V_z)^* \frac{\partial \Delta F}{\partial z} + B_F \Delta F + A_{FT\tau} \frac{\partial \Delta T}{\partial \tau} + A_{FTz} \frac{\partial \Delta T}{\partial z} + A_{FT} \cdot \Delta T +$$

$$+ A_{FP\tau} \frac{\partial \Delta P}{\partial \tau} + A_{FPz} \frac{\partial \Delta P}{\partial z} + A_{FP} \cdot \Delta P +$$

$$+ (\rho F)^* \frac{\partial \Delta V_z}{\partial z} + \left[ F \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial F}{\partial z} \right]^* \cdot \Delta V_z = K_G \left[ \frac{\partial \left( \sum_{i=0}^m \Delta G_i \right)}{\partial \tau} + V_z^* \frac{\partial \left( \sum_{i=1}^m G_i \right)}{\partial z} \right] +$$

$$+ \varphi_F(z, \tau), \quad (4a)$$

$$\Delta P = K_P \Delta T + K_P T^* \sum_{j=1}^h \Delta C_j + \varphi_P(z, \tau), \quad (5a)$$

$$\frac{\partial \Delta I}{\partial z} + V_z^* \frac{\partial \Delta I}{\partial z} + \left( \frac{\partial I}{\partial z} \right)^* \Delta V_z + K_I \cdot \Delta I = 0, \quad (6a)$$

$$\Delta E = A_{ET} \cdot \Delta T + A_{EP} \cdot \Delta P + A_{EI} \Delta I. \quad (7a).$$

Значения коэффициентов  $A, B$  (с индексами) зависят от исходного стационарного состояния.

В уравнения (1a)–(5a) включены функции внешнего воздействия  $\varphi_\alpha(z, \tau)$ .

Сделаем предположение о характере функции внешнего воздействия  $\varphi_\alpha(z, \tau)$ , учитывающие реальные условия протекания технологического процесса в плазматроне. Прежде всего будем исходить из того факта, что распределенный процесс в плазматроне с межэлектродными вставками (МЭВ) подвергается обычно только локальным внешним воздействиям, которые поступают лишь в отдельные точки плазматрона. Таких точек промежуточного воздействия может быть несколько. Рассматривая слу-

чай одного промежуточного воздействия  $W(\tau)$ , можно показать, что задача легко обобщается как на случай конечного числа точек промежуточного воздействия, так и на случай непрерывно распределенного воздействия по длине плазматрона.

Внешнее воздействие  $W(\tau)$  в замкнутой системе регулирования плазматрона может быть использовано в качестве управляющего воздействия.

Введем функцию  $\chi(z)$ , отражающую характер распределения внешнего воздействия по длине плазматрона. Если это воздействие сосредоточено строго в одной точке плазматрона, то значение функции  $\chi(z)$  равно  $\infty$  в точке приложения внешнего воздействия и равно нулю в остальных точках  $[0, 1]$  ( $\delta$  — функция). Основываясь на физических соображениях, можно полагать, что  $\chi(z)$  является гладкой функцией с одним ярко выраженным экстремальным значением.

Функция внешнего воздействия  $\varphi_\alpha(z, \tau)$  представляется с учетом сказанного, в виде произведения функции  $W(\tau)$  и  $\chi_\alpha(z)$ , т. е.

$$\varphi_\alpha(z, \tau) = W_\alpha(\tau) \cdot \chi_\alpha(z). \quad (8)$$

В качестве функции распределения внешнего воздействия взята функция следующего вида:

$$\chi_\alpha(z) = \begin{cases} a(z - z_i)^b \exp[c(z - z_i)], & z \in [z_i, 1], \\ 0, & z \in [0, z_i], \end{cases} \quad (9)$$

где  $z_i$  — координата точки приложения внешнего воздействия.

Используя инерционности процесса как обобщенные понятия постоянной времени объекта, будем решать систему уравнений (1a)–(7a) в общем виде применительно к двум ступеням опытно-промышленного секционированного плазматрона ГНП-10 с МЭВ.

Последовательно дифференцируя  $n$  раз уравнения в частных производных (1a)–(7a), преобразованные по Лапласу — Карсону по параметру  $p$  ( $p = d/d\tau$ ), и переходя к пределу при  $p \rightarrow 0$ , будем получать обыкновенные дифференциальные уравнения, содержащие  $S_n^\alpha$  инерционности. Общий вид таких дифференциальных уравнений после соответствующих алгебраических преобразований будет:

$$(-1)^n g [S_{n-1}^{C_1} - \Delta C_1^{(n-1)} (+0)] + (-1)^n V_z^* \frac{dS_n^{C_1}}{dz} + (-1)^n \left( \frac{\partial C_1}{\partial z} \right)^* \cdot S_n^V =$$

$$= (-1)^n K_D \cdot D^* \frac{d^2 S_n^{C_1}}{dz^2} + (-1)^n A_{CT1} \cdot S_n^T + (-1)^n A_{CP1} \cdot S_n^P +$$

$$+ (-1)^n A_{C1} \sum_{j=1}^h S_n^{C_j} + (-1)^n \Phi(z, p)_n^{C_1},$$

$$(-1)^n g [S_{n-1}^{C_2} - \Delta C_2^{(n-1)} (+0)] + (-1)^n V_z^* \frac{dS_n^{C_2}}{dz} + (-1)^n \left( \frac{\partial C_2}{\partial z} \right)^* \cdot S_n^V =$$

$$= (-1)^n K_D \cdot D^* \frac{d^2 S_n^{C_2}}{dz^2} + (-1)^n A_{CT2} S_n^T + (-1)^n A_{CP2} \cdot S_n^P +$$

$$+ (-1)^n A_{C2} \sum_{j=1}^h S_n^{C_j} + (-1)^n \Phi(z, p)_n^{C_2},$$

$$(-1)^n g [S_{n-1}^{C_3} - \Delta C_3^{(n-1)} (+0)] + (-1)^n V_z^* \frac{dS_n^{C_3}}{dz} + (-1)^n \left( \frac{\partial C_3}{\partial z} \right)^* \cdot S_n^V =$$

$$= (-1)^n K_D \cdot D^* \frac{d^2 S_n^{C_3}}{dz^2} + (-1)^n A_{CT3} S_n^T + (-1)^n A_{CP3} S_n^P +$$

$$+ (-1)^n A_{C3} \sum_{j=1}^h S_n^{C_j} + (-1)^n \Phi(z, p)_n^{C_3}.$$

$$\begin{aligned}
& (-1)^n g [S_{n-1}^{Ck} - \Delta C_K^{(n-1)}(+0)] + (-1)^n V_z^* \frac{dS_n^{Ck}}{dz} + (-1)^n \left( \frac{\partial C_k}{\partial z} \right)^* S_n^V = \\
& = (-1)^n K_D \cdot D^* \frac{d^2 S_n^{Ck}}{dz^2} + (-1)^n A_{CTk} \cdot S_n^T + (-1)^n A_{CPk} \cdot S_n^P + \\
& + (-1)^n A_{CK} \sum_{j=1}^k S_n^{Cj} + (-1)^n \Phi(z, p)_n^{Ck}; \\
& (-1)^n g [S_{n-1}^T - \Delta T^{(n-1)}(+0)] + (-1)^n V_z^* \frac{dS_n^T}{dz} + (-1)^n B_V \cdot S_n^T - \\
& - (-1)^n 2g [S_{n-1}^P - \Delta P^{(n-1)}(+0)] - (-1)^n \cdot 2V_z^* \frac{dS_n^P}{dz} = \\
& = (-1)^n K_T \cdot a^* \frac{d^2 S_n^T}{dz^2} + (-1)^n B_{TS} S_n^T + (-1)^n B_P \cdot S_n^P + \\
& + (-1)^n B_C \sum_{j=1}^k S_n^{Cj} + (-1)^n B_E S_n^E + (-1)^n B_I S_n^I + (-1)^n \cdot \Phi(z, p)_n^T, \quad (25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (-1)^n g [S_{n-1}^V - \Delta V^{(n-1)}(+0)] + (-1)^n V_z^* \frac{dS_n^V}{dz} + (-1)^n \left( \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^* \cdot S_n^V = \\
& = (-1)^n \left( -\frac{1}{\rho} \right)^* \frac{dS_n^P}{dz} + (-1)^n \cdot K_V \cdot v^* \frac{d^2 S_n^V}{dz^2} + (-1)^n B_{VT} S_n^T + \\
& + (-1)^n B_{VP} \cdot S_n^P + (-1)^n B_{VC} \sum_{j=1}^k S_n^{Cj} + (-1)^n \Phi(z, p)_n^V, \quad (36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (-1)^n \rho^* g [S_{n-1}^F - \Delta F^{(n-1)}(+0)] + (-1)^n (\rho V_z)^* \frac{dS_n^F}{dz} + (-1)^n B_{FS} S_n^T + \\
& + (-1)^n A_{FT\tau} g [S_{n-1}^T - \Delta T^{(n-1)}(+0)] + (-1)^n A_{FTz} \frac{dS_n^T}{dz} + (-1)^n A_{FT} S_n^T + \\
& + (-1)^n A_{FP\tau} g [S_{n-1}^P - \Delta P^{(n-1)}(+0)] + (-1)^n A_{FPz} \frac{dS_n^P}{dz} + (-1)^n A_{FP} S_n^P + \\
& + (-1)^n (\rho F)^* \frac{dS_n^V}{dz} + (-1)^n \left[ F \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial F}{\partial z} \right]^* \cdot S_n^V = (-1)^n \Phi(z, p)_n^F + \\
& + (-1)^n K_{GG} \left[ \left( \sum_{i=1}^m \Delta \bar{G}_i \right)_{n-1} - \sum_{i=1}^m \Delta G_i^{(n-1)}(+0) \right] + (-1)^n V_z^* \frac{d \left( \sum_{i=1}^m \Delta \bar{G}_i \right)_n}{dz}, \quad (46)
\end{aligned}$$

$$(-1)^n S_n^P = (-1)^n \cdot K_P \cdot S_n^T + (-1)^n K_{PT}^* \sum_{j=1}^k S_n^{Cj} \Phi(z, p)_n^P \quad (56)$$

$$\begin{aligned}
& (-1)^n g [S_{n-1}^I - \Delta I^{(n-1)}(+0)] + (-1)^n V_z^* \frac{dS_n^I}{dz} + (-1)^n \left( \frac{\partial I}{\partial z} \right)^* S_n^V + \\
& + (-1)^n K_I \cdot S_n^I = 0, \quad (66)
\end{aligned}$$

$$(-1)^n S_n^E = (-1)^n A_{ET} S_n^T + (-1)^n A_{EP} S_n^P + (-1)^n A_{EI} S_n^I. \quad (76)$$

В уравнениях (16)–(76)  $g = 0$  при  $n = 0$ , и  $g = 1$  при  $n = 1, 2, 3, \dots$

В уравнениях (16)–(36)  $n$ -е инерционности, входящие в выражения  $\sum_{j=1}^k S_n^{Cj}$ , суммируются по всем химическим компонентам.

В уравнениях (16)–(56) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\Phi_\alpha(z, \tau) & \doteq \Phi(z, p)^\alpha, \quad \frac{\partial \left( \sum_{i=1}^m \Delta G_i \right)}{\partial \tau} \doteq \left( \sum_{i=1}^m \Delta \bar{G}_i \right), \\
\frac{\partial \left( \sum_{i=1}^m \Delta G_i \right)}{\partial z} & \doteq \frac{d \left( \sum_{i=1}^m \Delta \bar{G}_i \right)}{dz}.
\end{aligned}$$

Аналитические или численные выражения  $\Delta G_i$  обычно известны из теоретических соображений или по экспериментальным данным.

Значения начальных величин  $\Delta C_i(+0)$ ,  $\Delta T(+0)$ ,  $\Delta V(+0)$ ,  $\Delta F(+0)$ ,  $\Delta P(+0)$ ,  $\Delta I(+0)$  входят только в уравнения (16)–(76) для первых инерционностей ( $n = 1$ ). При всех других инерционностях ( $n = 0, 2, 3, 4, \dots$ ) начальные значения будут равны нулю. Верхние индексы ( $n - 1$ ) при начальных условиях означают ( $n - 1$ ) производную. Для определения различных инерционностей используем в общем виде систему уравнений (16)–(76). Значения величин в статике, помеченных знаком \*, определяем по методике, изложенной в работе [9]. В уравнениях (16)–(76) верхние индексы при инерционностях обозначают вид характеристики, к которой они относятся.

По уравнениям (16)–(76) методом конечных разностей [11] проведен численный счет инерционностей различных порядков, который позволяет представить процедуру решения такой системы уравнений. При этом для проведения численных расчетов на ЭВМ ЕС-1020 дифференциальные уравнения (16)–(76) были записаны в нормальной форме с учетом разностных схем. Численный расчет инерционностей различного порядка проведен по структурной схеме, представленной на рис. 2. Для начала счета задавались значения  $S_{n,0}^\alpha$ . При этом значения  $S_{n-1,0}^\alpha$  полагались равными нулю при  $n = 0$ .

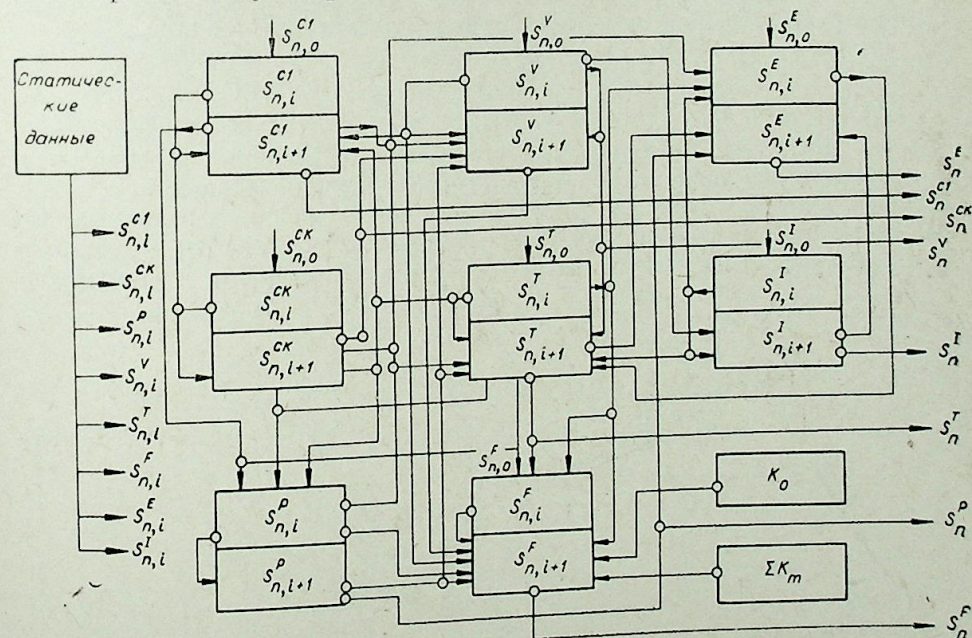


Рис. 2. Структурная схема расчета инерционностей различного порядка.

Определение инерционностей различного порядка начинается с нулевых инерционностей и далее в соответствии с исходными формулами (16)–(76). Заметим, что в зазорах МЭВ по координате  $z$  при нахождении инерционностей требуется учесть, что на выходе их секции плазменный поток смешивается с холодным газом. При этом меняются все тепловые и электрические величины за счет энергетического перераспределения плазмохимического потока по длине зазора между секциями МЭВ. Наряду с этим одновременно протекают все процессы преобразования электрической энергии в тепловую, которая, в свою очередь, способствует протеканию плазмохимических реакций, изменению напряженности электрического поля дуги, изменению скорости и т. д. При определении инерционностей по уравнениям (16)–(76) учитываются внешние воздействия, преобразованные по Лапласу — Карсону  $\Phi(z, p)_n^\alpha$ , начиная от координаты их приложения  $z_i$  и далее по плазменному потоку до  $z = 1$ .

Величины со знаком \* (в статике) берутся в тех же координатных точках, что и определяемые инерционности.

Для аналитического представления найденных численных значений инерционностей различного порядка применим алгоритм быстрого преобразования Фурье в комплексной области [12]. Инерционность тогда будет иметь следующее выражение

$$S_n^\alpha(z) \approx \sum_{k=0}^d a_{k,n} \exp(-iknz). \quad (8)$$

Обычно для решения большинства технических задач в выражении (8) достаточно взять два-три члена ряда.

Запишем функции переходных процессов [6] для различных индивидуальных характеристик в общем виде

$$f_\alpha(\tau) = S_0^\alpha + [\exp(-\lambda\alpha\tau)] \{ \lambda_\alpha S_1^\alpha \Phi_1(\tau) + \lambda_\alpha^2 S_2^\alpha \Phi_2(\tau) + \lambda_\alpha^3 S_3^\alpha \Phi_3(\tau) + \dots + \lambda_\alpha^n S_n^\alpha \Phi_n(\tau) + \lambda_\alpha^{n+1} \cdot S_{n+1}^\alpha \cdot \Phi_{n+1}(\tau) \}, \quad (9)$$

где  $S_n^\alpha$  берутся по выражениям (8).

Выражения функций времени  $\Phi_n(\tau)$ , входящих в формулу (9), до пятой степени приближения включительно приведены в таблице.

Функции  $f_\alpha(\tau)$  в (9) могут иметь следующие реализации:

$$f_{Cj}(\tau) = \Delta C_j(z, \tau), \quad f_T(\tau) = \Delta T(z, \tau), \quad f_V(\tau) = \Delta V(z, \tau), \\ f_F(\tau) = \Delta F(z, \tau), \quad f_P(\tau) = \Delta P(z, \tau), \quad f_I(\tau) = \Delta I(z, \tau), \quad f_E(\tau) = \Delta E(z, \tau).$$

На рис. 3–6 представлены зависимости переходных процессов в плазмотроне для тока, температуры, скорости и концентрации при  $n = 1$ . На этих рисунках даны последовательные приближения переходных характеристик. В частности, для тока и температуры четвертые приближения практически не отличаются от третьего, а для скорости и концентра-

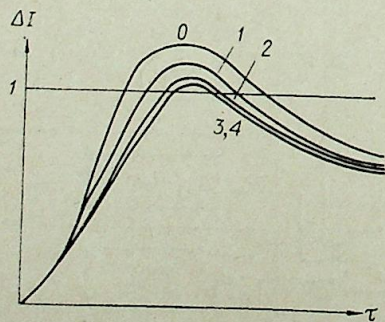


Рис. 3. Переходный процесс по току.

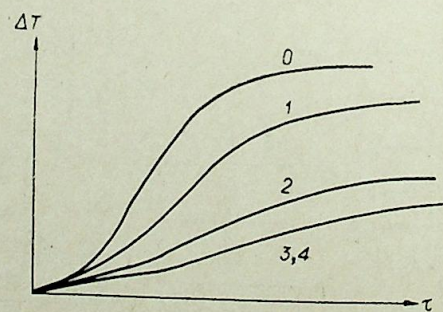


Рис. 4. Переходный процесс по температуре.

Степень приближения	$\Phi_1(\tau)$	$\Phi_2(\tau)$	$\Phi_3(\tau)$	$\Phi_4(\tau)$
1	$-2 + \lambda\tau$	$1 - \lambda\tau$	—	—
2	$-3 + 3(\lambda\tau) - (1/2)(\lambda\tau)^2$	$3 - 5(\lambda\tau) + (\lambda\tau)^2$	$-1 + 2(\lambda\tau) - (1/2)(\lambda\tau)^2$	—
3	$-4 + 6(\lambda\tau) - 2(\lambda\tau)^2 + 0,46667(\lambda\tau)^3$	$6 - 14(\lambda\tau) + 5,5(\lambda\tau)^2 - 0,5(\lambda\tau)^3$	$-4 + 11(\lambda\tau) - 5(\lambda\tau)^2 + 0,5(\lambda\tau)^3$	—
4	$5 + 10(\lambda\tau) - 5(\lambda\tau)^2 + 0,83333(\lambda\tau)^3 - 0,0416666(\lambda\tau)^4$	$10 - 30(\lambda\tau) + 17,5(\lambda\tau)^2 - 3,167(\lambda\tau)^3 + 0,1667(\lambda\tau)^4$	$10 + 35(\lambda\tau) - 23(\lambda\tau)^2 + 4,5(\lambda\tau)^3 - 0,25(\lambda\tau)^4$	—
5	$-6 + 15(\lambda\tau) - 10(\lambda\tau)^2 + 2,5(\lambda\tau)^3 - 0,25(\lambda\tau)^4 + 0,0083333(\lambda\tau)^5$	$15 - 55(\lambda\tau) + 42,5(\lambda\tau)^2 - 11,5(\lambda\tau)^3 + 1,208325(\lambda\tau)^4 - 0,0416666(\lambda\tau)^5$	$-2 + 85(\lambda\tau) - 73(\lambda\tau)^2 + 21,16666(\lambda\tau)^3 - 2,3333(\lambda\tau)^4 + 0,083333(\lambda\tau)^5$	—
Степень приближения	$\Phi_4(\tau)$	$\Phi_5(\tau)$	$\Phi_6(\tau)$	$\Phi_7(\tau)$
1	—	—	—	—
2	—	—	—	—
3	$1 - 3(\lambda\tau) + 1,5(\lambda\tau)^2 - 0,16667(\lambda\tau)^3$	—	—	—
4	$10 - 38(\lambda\tau) + 27(\lambda\tau)^2 - 5,66667(\lambda\tau)^3 + 0,33333(\lambda\tau)^4$	$-1 + 4(\lambda\tau) - 3(\lambda\tau)^2 + 0,66667(\lambda\tau)^3 - 0,416667(\lambda\tau)^4$	—	—
5	$15 - 69(\lambda\tau) + 63,5(\lambda\tau)^2 - 19,5(\lambda\tau)^3 + 2,25(\lambda\tau)^4 - 0,0833333(\lambda\tau)^5$	$-6 + 30(\lambda\tau) - 30(\lambda\tau)^2 + 10(\lambda\tau)^3 - 1,25(\lambda\tau)^4 + 0,05(\lambda\tau)^5$	$1 - 5(\lambda\tau) + 5(\lambda\tau)^2 - 1,66667(\lambda\tau)^3 + 0,2083333(\lambda\tau)^4 - 0,0083333(\lambda\tau)^5$	—

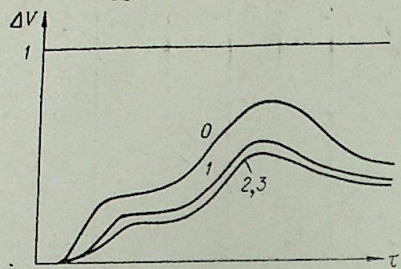


Рис. 5. Переходный процесс по скорости.

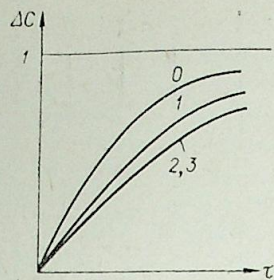


Рис. 6. Переходный процесс по концентрации.

дци второе приближение почти совпадает с третьим. Следовательно, для технических задач вполне достаточно второго или третьего аналитического приближения.

Электрические процессы в переходных режимах в плазматроне протекают быстрее тепловых, газодинамических (движение плазмы) и химических. Поэтому на кривых различного приближения переходного процесса по току имеются некоторые «размытые импульсные выбросы», превосходящие величину ступенчатого возмущения. При этом, как видно, из рис. 3, различные приближения переходных значений по току в канале плазматрона способствует уточнению функций переходного процесса (9).

Тепловые процессы (как и все остальные) в канале плазматрона в переходных режимах описываются одним и тем же общим уравнением (9). Однако в физическом смысле тепловые процессы как бы следуют за электрическими по мере преобразования электрической энергии в тепловую в канале плазматрона. Увеличение давления способствует улучшению теплообмена электрической дуги с обдуваемым газом, и временной разрыв такого «отслеживания» сокращается (см. рис. 4).

Переходный процесс по скорости (см. рис. 5) является как бы следствием двух предшествующих переходных процессов: электрического тока дуги и теплового процесса, которые в физическом смысле следуют друг за другом, хотя это следование имеет «условный» или «размытый» характер во времени. Изменения скорости просматриваются по максимальным значениям тока и температуры.

Переходный процесс (см. рис. 6) можно объяснить на основе теплового механизма термической неразветвленной цепи реакции окисления азота. Переходный процесс по концентрации как бы следует за тепловым процессом.

Все переходные режимы (см. рис. 3—6) в значительной степени зависят и от предыстории процесса, т. е. от исходного стационарного состояния. Параметры статического режима для расчета переходных процессов двух ступеней опытно-промышленного плазматрона ГНП-10 приняты близкими к реальным условиям. По экспериментальным данным ток дуги  $I = 450$  А, напряжение дуги  $U = 2200$  В, расход воздуха на первую ступень  $G_1 = 40$  г/с, расход воздуха на вторую ступень  $G_{11} = 50$  г/с, среднее давление в начале канала плазматрона  $P = 4 \cdot 10^5$  Па. Расход газа по длине плазматрона был распределенным. Возмущения принимались такими, что исследуемый объект находился в зоне линейности, т. е. возмущения не превышали 10% от величины статички. Инерционность первого порядка  $S_1^1$  соответствует постоянной времени объекта — наиболее важной его характеристике как объекта регулирования. По этому можно ограничиться рассмотрением  $S_0^1$  и  $S_1^2$  по формулам (16), (26), где отражена зависимость от начальных условий и прежнего стационарного

состояния плазматрона. Значения  $S_0^1$  и  $S_1^2$  могут быть подвергнуты анализу на экстремум на ЭВМ при меняющихся технологических и конструктивных параметрах процесса.

Для иллюстрации расчета на оптимум протекающих в мощных плазматронах химических реакций выберем азотокислородную смесь близкую к воздуху. При образовании атомов азота и кислорода в плазме происходит образование окислов азота. Равновесная концентрация окиси азота в зависимости от температуры имеет максимум при давлении до  $10 \cdot 10^5$  Па в интервале  $3300 \div 3700$  К. Недостаточный нагрев или перегрев реагирующей системы относительно оптимальной температуры приводит к уменьшению содержания окиси азота. С увеличением давления оптимальная температура процесса окисления азота сдвигается в сторону более высоких температур.

При предположении равномерного температурного распределения по сечению плазматрона на выходе может наблюдаться несколько видов характерных технологических ситуаций:

1. Газ нагревается до определенной температуры и соответственно протекает химическая реакция с химическим превращением на некоторой длине плазматрона, а остальная часть плазматрона будет «балластной», на ней не происходит увеличение химически целевого продукта, а тепловые потери в стенки возрастают.

2. Газ на выходе из плазматрона будет нагрет до температуры, при которой получается максимальное количество химически целевого продукта.

3. Газ на выходе из плазматрона будет недогрет и соответственно будет иметь низкую концентрацию химически целевого продукта, следовательно слишком велик расход газа или низка вкладываемая мощность электрической дуги.

Общеизвестно, что вкладываемая мощность в газовый поток электрической дуги в плазматроне может быть изменена двумя путями: 1) увеличением тока дуги; 2) увеличением напряжения на дуге.

Например, в плазматронах с МЭВ напряжение на дуге может быть увеличено за счет изменения аэродинамики потока [13].

Увеличение тока дуги свыше 500А способствует росту тепловых потерь от излучения дуги в стенки канала плазматрона. При токах 1000А плазма на выходе плазматрона загрязняется продуктами эрозии электродов, кроме того, создаются дополнительные трудности в решении вопроса о ресурсной работе плазматрона.

Высокие требования к точности соблюдения норм технологического режима приводят к необходимости заранее выявить, хотя бы приближенно, динамические свойства плазматронов. При решении вопроса об оптимальных технологических параметрах плазматрона необходимо решить две задачи. Первая — это расчет на стационарный режим, который теоретически должен обеспечить наиболее выгодную работу плазматрона. Очень часто эта задача неправильно считается решением всего вопроса в целом. На практике неизбежно возникает задача о стабильности работы плазматрона в оптимальном технологическом режиме. Этот режим может нарушаться из-за возмущений, возникающих каким-либо образом, или при переводе плазматрона из одного режима к другому. Вторая задача — задача о стабильности работы плазматрона является необходимым дополнением к первой.

Для плазматрона как технологического объекта одновременное рассмотрение стационарных и нестационарных режимов является необходимым при разработке наиболее эффективных (оптимальных) плазматронов химических систем.

В плазматронах с МЭВ экспериментально установлено минимальное значение тока, при котором происходит «погасание» дуги при неизмен-

ных расходах газа. Для модели плазматрона ПР-03 это минимальное значение составляло около 100А, а для моделей ПР-05 и ГНП-10 — 100 ÷ ÷ 150 А. При изменении расхода газа на обдув дуги возникают такие режимы, когда происходит гашение дуги плазматрона ( $G_{\max}$ ) или ее шунтирование по секциям МЭВ ( $G_{\min}$ ), что связано с дальнейшей потерей работоспособности плазматрона в целом.

Таким образом, ограничения потоку и расходу могут быть записаны в следующем виде:

$$I_{\min} \leq I \leq I_{\max}, \quad G_{\min} \leq G \leq G_{\max}. \quad (10)$$

Рассмотрим вопросы технологической оптимизации плазматрона. Известно, что статической оптимизации химических реакторов посвящена обширная литература, например [14—19]. Однако мало работ по статической оптимизации плазматрона как нагревателя газа [20, 21].

Классификация общих задач оптимизации (статической и динамической) в зависимости от частоты и характера возмущений, действующих на объектах, дана в работах [14, 15]. Здесь эти методы могут быть применены благодаря возможностям определять переходный процесс по инерционностям различных порядков.

Для рассмотрения динамических свойств плазматрона с целью их оценки при проектировании с системой управления или без нее можно использовать понятие полосы пропускания, определяемой также по инерционностям различных порядков. Обычно различают рабочие возмущения, которые вносятся в плазматрон каким-либо образом при эксплуатации, и пробные возмущения, служащие для исследования поведения системы. По характеру и величине пробных возмущений можно исследовать многосвязную систему — плазматрон с целью учета ее динамики при проектировании.

Если рассматривается задача проектирования плазматрона как технологического объекта без систем управления, то предметом оценки его динамики будет способность фильтровать возмущения и пропускать управляющее воздействие.

Для оценки этих характеристик удобно применять полосу пропускания линейного звена [22].

$$\Pi_f = \int_0^{\infty} [\mathcal{H}_f(\tau)]^2 d\tau, \quad \Pi_u = \int_0^{\infty} \mathcal{H}_u(\tau)]^2 d\tau, \quad (11)$$

где  $\Pi_f$ ,  $\Pi_u$  — полосы пропускания,  $\mathcal{H}_f(\tau)$ ,  $\mathcal{H}_u(\tau)$  — импульсная переходная функция объекта по каналам возмущения  $f$  и управления  $u$  соответственно

Этот функционал

$$\mathcal{J}_1 = a_1 \Pi_u + a_2 \frac{1}{\Pi_f} \approx a_1 \sum_{\mathcal{K}=0}^n (C_{\mathcal{K}}^u)^2 + a_2 \left/ \sum_{\mathcal{K}=0}^n (C_{\mathcal{K}}^f)^2 \right., \quad (12)$$

$$a_1, a_2 \geq 0, \quad a_1 + a_2 = 1$$

характеризует динамику объекта и поэтому должен принимать максимальное значение при изменении варьируемых конструктивных параметров. В равенстве (12) величины  $C_{\mathcal{K}}^u$ ,  $C_{\mathcal{K}}^f$  являются коэффициентами разложения в ряд Фурье — Лаггера импульсной переходной функции  $k_u$ ,  $k_f$  соответственно, которые могут быть выражены через моменты или инерционности.

Другим важным случаем является проектирование плазматрона вместе с системой его управления.

Тогда если задавать а) наиболее вероятное для системы управления возмущение  $f$ , б) допустимую ошибку регулирования  $\epsilon$ , в) структуру сис-

тем управления, то можно определить затраты «энергии» на управление.

$$\mathcal{J}_2 = \|u(\tau)\|^2 = \int_0^{\infty} [u(\tau)]^2 d\tau \quad (13)$$

при условии допустимого качества системы

$$F(f, u, \mathcal{H}_f(\tau), \mathcal{H}_u(\tau)) = \epsilon. \quad (14)$$

Поскольку задачи проектирования плазматрона с химическими реакциями характеризуются многоцелевыми функционалами, то  $\mathcal{J}_1$  или  $\mathcal{J}_2$  могут входить составными частями в более общий критерий.

Использование возмущающих функций распределенного и сосредоточенного характера обеспечивает возможность широкого изменения технологического режима в плазматроне. При этом предусматривается возможность реализации дополнительных каналов воздействия для изменения технологического режима и производимости плазматрона. Для динамики плазматрона с возмущающими функциями функционал полосы пропускания линейного звена может быть в первом приближении выражен через инерционности:

$$\mathcal{J}_1 \approx b_1 S_1^1 + b_2 \frac{1}{S_1^2}, \quad (15)$$

где  $b_1$ ,  $b_2$  — некоторые заданные весовые коэффициенты;  $S_1^1$ ,  $S_1^2$  — первые инерционности по каналу регулируемой и регулирующей сред.

Обнаруженное нами свойство экстремальности инерционностей первого порядка можно использовать при проектировании плазматрона с целью выбора таких параметров, которые обеспечили бы наилучшую их регулируемость.

Для решения этих задач предлагается следующая методика поэтапного исследования:

1. Используя уравнения (16) — (76), определяем инерционности нулевого и первого порядка в соответствующих областях изменения параметров плазматрона в зависимости от координаты  $z_i$  точки приложения возмущающих функций.

2. Требования, налагаемые на конструктивные и режимные параметры плазматрона, ограничивают область изменения обобщенных параметров и выбор координаты  $z_i$  точки приложения возмущающих функций (внешних воздействий).

3. В допустимой области изменения параметров выбирают такие параметры, чтобы они обеспечивали наилучшую регулируемость в некоторой точке плазматрона.

В случае большого количества обобщенных параметров плазматрона и связывающих их математических соотношений задачу выбора оптимальных параметров целесообразно решать методами нелинейного программирования. Целевую функцию в такой задаче следует выбрать с учетом технико-экономических показателей процесса.

При выборе критериев оптимальности определяющими показателями могут быть конструктивные, технологические или эксплуатационные характеристики. К конструктивным показателям относятся ограничения по типу плазматрона — с поперечно обдуваемой дугой, с продольно обдуваемой дугой, сильноточные и секционированные с МЭВ; ограничения по применяемым материалам для катода, анода и остальных элементов плазматрона в зависимости от агрессивности сред и т. д. Технологическими показателями являются максимальные и минимальные значения тока и напряжения дуги, расхода газа, теплофизические свойства плазмы и закономерности их изменения от температуры и давления. К эксплуатационным характеристикам можно отнести ресурс непрерывной работы плазматрона и интенсивность эрозии катода.

Рассмотрим общую задачу проектирования технологического плазмотрона, который характеризуется  $n$  обобщенными параметрами  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ). Предположим, что представляется возможность подачи внешнего воздействия в  $m$  точек, определенных по длине плазмотрона. Координаты  $z_i$  точек приложения внешнего воздействия удовлетворяют следующим соотношениям:

$$a_{i-1} \leq z_i \leq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (16)$$

где  $a_i$  — заданные числа, причем  $a_0 = 0$ ,  $a_m = 1$ . Пусть требуется определить оптимальные параметры плазмотрона  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  и координаты точек приложения внешнего воздействия  $z_1, z_2, \dots, z_m$ , которые обеспечили бы требуемые динамические свойства технологического плазмотрона, например, инерционность не выше заданной величины  $a$

$$S_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, z_1, z_2, \dots, z_m) \leq a. \quad (17)$$

Ограничения на параметры  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , вызванные конструктивно-технологическими условиями, заданы в виде следующих неравенств:

$$b_i \leq \alpha_i \leq c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (18)$$

где  $b_i, c_i$  — заданные числа.

При этом связь между параметрами  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  задается требованием высокого целевого плазмохимического превращения при максимальном преобразовании электрической энергии в тепловую в стационарном режиме, т. е.

$$C_j(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = d, \quad (19)$$

где  $d$  — заданная величина, определяемая по равновесным кривым  $C_j = C_j(T, P)$ , например [23].

Общеизвестно, что капитальные затраты при изготовлении промышленных плазмотронов составляют незначительную часть по сравнению с энерготехнологическими.

Поэтому в качестве критерия оптимальности выбираем стоимость целевого плазмохимического продукта, которая зависит от режимных параметров плазмотрона  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , а также и от координат точек приложения внешнего управляющего воздействия  $z_1, z_2, \dots, z_m$ , обеспечивающих стабильность режима. Обозначим эту зависимость через  $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, z_1, \dots, z_m)$ , которая в общем случае нелинейная.

Теперь поставленная задача математически формулируется следующим образом. Найти такие неотрицательные числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, z_1, z_2, \dots, z_m$ , которые удовлетворяют ограничениям (16)–(19) и минимизируют функцию стоимости  $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, z_1, z_2, \dots, z_m)$ .

Аналогично ставится задача выбора координат  $z_i, i = 1, 2, \dots, m$  — точек подачи управляющих воздействий, координат  $z_{aj}$  — точек контроля ( $\alpha$  — параметр в  $j$  — контуре управления) и соответствующих коэффициентов усиления для контролируемых параметров  $C_{ajr}$ , дающих экстремум некоторому функционалу качества управления  $\Omega$ . При этом  $r = 1, 2, \dots, n$  — число точек контроля в  $j$ -м контуре управления. Эта задача нелинейного программирования и алгоритм ее решения для линейных и квадратичных ограничений при квадратичной целевой функции основывается на методе возможных направлений [24, 25].

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренный метод динамической оптимизации плазмотрона с химическими реакциями при наложении внешних воздействий может быть применен для анализа плазмохимических агрегатов. При этом внешнее воз-

действие распределенного и сосредоточенного характера в плазмотроне может сказываться по-разному на реакционный канал (плазмохимическое устройство). Это воздействие может быть направлением и усилением оптимальных режимов с одновременным протеканием и усилением экстремальных значений инерционностей. Соответственно входными параметрами плазмотрона и реакционного канала будут параметры реакционного канала и закалочного устройства.

Данная методика анализа динамических характеристик аппаратов плазмохимической технологии решает задачу их динамической оптимизации. При этом учитывается важное свойство пространственной распределенности процессов, оказывающее сильное влияние на характер динамики. Основные значения данных методов в том, что в таких постановках задач оптимизации критерии динамики легко определяются как функции параметров аппарата и режима его работы. При этом параметры объединяются в безразмерные комплексы, число которых может быть сведено к минимуму, что упрощает аналитические и графические исследования.

Таким образом, решаются две практические задачи:

1. Определение оптимальных параметров плазмохимического аппарата и режима его работы с учетом показателей стабильности режима без автоматического управления.

2. Определение оптимальных параметров аппарата, как основного звена системы автоматического управления.

Кроме того, данные результаты могут служить основой рационального решения задачи синтеза системы управления типовыми распределенными процессами химической технологии в плазменных аппаратах.

Новомосковский филиал Государственного  
научно-исследовательского  
и проектного института  
азотной промышленности и продуктов  
органического синтеза

Поступила в редакцию  
12/II 1981

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Устойчивость горения электрической дуги/Под ред. М. Ф. Жукова. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1973.
2. Теория электрической дуги в условиях вынужденного теплообмена/Отв. ред. чл.-корр. АН СССР М. Ф. Жуков. Новосибирск: Наука, 1977.
3. Ильенко О. С. Исследование методов расчета устойчивости электрической дуги. Автореф. канд. дис. Киев; КПИ, 1966.
4. Генераторы низкотемпературной плазмы. М.: Энергия, 1969.
5. Финкельбург Б., Меккер Г. Электрические дуги и термическая плазма. М.: Энергия, 1961.
6. Борискин С. П., Девятков Б. Н., Левченко В. Ф. Научно-инженерный подход к проблемам моделирования и анализа динамики плазмотрона как технологического объекта. I. — Изв. СО АН СССР, 1980, № 3. Сер. техн. наук, вып. 1.
7. Амбразевичюс А. Б., Вирбайтис Р. И. Теплообмен при турбулентном течении воздуха в канале с электрической дугой. Материалы к VII Всесоюз. конф. по генераторам низкотемпературной плазмы, т. 1. Алма-Ата, 1977.
8. Борискин С. П., Девятков Б. Н., Левченко В. Ф. Научно-инженерный подход к проблеме моделирования и анализ динамических характеристик процесса в технологическом объекте. II. Метод определения статических характеристик процесса в плазмотроне. — Изв. СО АН СССР, 1980, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.
9. Теория оптимальных аэродинамических форм/Под ред. А. Миеле. М.: Мир, 1969.
10. Крайко А. Н. Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1977.
11. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977.
12. Бендат Дж., Пирсон А. Измерения и анализ случайных величин. М.: Мир, 1974.
13. Жуков М. Ф. Электрические и тепловые характеристики высокоэнтальпийных плазмотронов. — В кн.: Экспериментальные исследования плазмотронов. Новосибирск: Наука, 1977.
14. Островский Г. М. Вопросы оптимизации химико-технологических процессов. — В кн.: Кибернетика на службу коммунизму. Т. 4/Под ред. акад. А. И. Берга. М.: Энергия, 1967.
15. Островский Г. М.; Волин Ю. М. Методы оптимизации химических реакторов. М.: Химия, 1967.

16. Понтрягин Л. С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.
17. Анисимов И. В. и др. Математическое моделирование и оптимизация ректификационных установок. М.: Химия, 1975.
18. Нагиев М. Ф. Этюды о химических системах с обратной связью. М.: Наука, 1971.
19. Бояринов А. И., Кафаров В. В. Методы оптимизации в химической технологии. М.: Химия, 1969.
20. Гонопольский А. М., Слободкина Ф. А. Оптимизация плазмотрона постоянного тока с продольного обдуваемой дугой.— Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1976, № 6.
21. Сурис А. Л. Оптимальный профиль температур и скоростей в химическом реакторе.— Изв. СО АН СССР, 1977, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.
22. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования/Под ред. В. В. Солодовникова. М.: Машиностроение, 1967.
23. Предводителев А. С. и др. Таблицы термодинамических функций воздуха (для температур от 200 до 6000 К и давлений 0,0001 до 100 атм.) М.: Изд-во АН СССР, 1962.
24. Демиденко Н. Д., Шевченко Р. С. Оптимизация квадратичной функции многих переменных.— В кн.: Материалы конференции «Опыт применения математических методов и вычислительной техники в народном хозяйстве Красноярского края». Красноярск: Краснояр. кн. изд-во, 1966.
25. Зойтендейк Г. Методы возможных направлений. М.: ИЛ, 1963.

УДК 537.523.5

В. М. ЕГОРОВ, В. В. МОТОВИЛОВ, В. Ф. ПУТЬКО

## ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ДУГИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ МАГНИТНОМ ПОЛЕ И ВОПРОСЫ УСТОЙЧИВОСТИ ЕЕ ГОРЕНИЯ

При разработке и исследовании электродуговых устройств видное место занимает анализ устойчивости их работы. Проблемы устойчивости горения электрической дуги в дуговых установках является технико-экономической [1], и любое уточнение в ее решении позволяет повышать экономичность и надежность устройства. Едва ли не самым важным этапом анализа устойчивости горения дуги является построение модели динамики дугового устройства, т. е. задача идентификации.

Вращающееся магнитное поле (ВМП) нашло применение для пространственной стабилизации дугового разряда в дугоконтактной сварке на стыке труб [2, 3] и в плазмотронах постоянного тока [4, 5]. Предпринимались попытки применить вращающееся магнитное поле и при гашении дуги в отключающих аппаратах [6]. Указанные исследования проводились для статических режимов электродуговых установок. Однако знание лишь статических характеристик не позволяет судить об устойчивости возможных режимов, поэтому возникает необходимость исследования динамических свойств электрической дуги в условиях вращающегося магнитного поля.

Цель настоящей работы — построение динамической модели электрической дуги в условиях воздействия на нее поперечного ВМП и получение аналитических критериев устойчивости режимов для ряда частных, но имеющих принципиальное значение случаев.

Горение электрической дуги во вращающемся магнитном поле имеет ряд специфических особенностей, достаточно подробно описанных в [7]. К важнейшим из них относятся в статическом режиме синхронное вращение ствола дуги вокруг оси двухполюсного ВМП по окружности некоторого радиуса  $\rho$  и вращение вокруг собственной оси. Напряжение на дуге при этом в сильной степени зависит от индукции ВМП и угловой скорости его вращения. Эти особенности указывают на то, что для исследования устойчивости режимов электродуговой установки с ВМП необходимо привлекать уравнение движения дуги под действием поля совместно с уравнениями цепи электропитания и собственно динамической модели электрической дуги.

### 1. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ДУГА ВО ВМП

Движение электрической дуги под действием вращающегося магнитного поля удобнее всего описывать в полярной системе координат, вращающейся вместе с полем, начальная ось которой совпадает с вектором индукции ВМП. Для вывода уравнений движения изобразим электрическую дугу на плоскости, начало координат которой совпадает с осью вра-

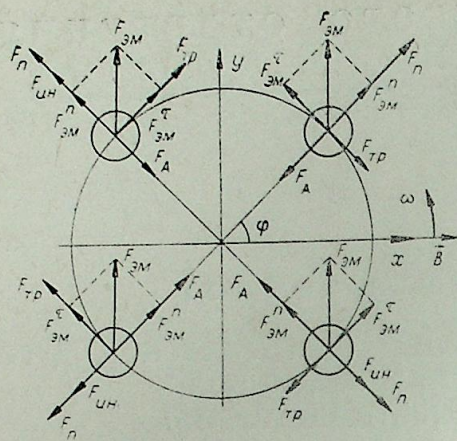


Рис. 1. Схема действия сил на столб дуги во ВМП.

печения магнитного поля, и нанесем все действующие на ствол дуги силы, выбрав соответствующие положительные направления (рис. 1). Для облегчения составления уравнений дуга изображается в положении, при котором координаты ее осей  $\rho$  и  $\varphi$  принимают положительные значения (1-й квадрант) [8]. Ясно, что стационарный режим движения возможен лишь

при  $-90^\circ < \varphi < 90^\circ$ , т. е. в 1-м и 4-м квадранте. При  $90^\circ < \varphi < -90^\circ$  (2-й и 3-й квадрант) электромагнитная сила направлена так, что дуга движется против направления вращения поля, что приводит к ее попаданию опять же в 1-й или 4-й квадрант.

Уравнение движения дуги, распределяющейся во ВМП, имеет вид

$$M \frac{d\vec{V}}{dt} = \Sigma \vec{F}_i, \quad (1.1)$$

где  $M$  — масса единицы длины дуги с учетом присоединенной массы; на рис. 1  $\vec{F}_{\text{ин}} = M \frac{d\vec{V}}{dt}$ ,  $\vec{V}$  — скорость движения дуги;  $\vec{F}$  — внешние силы, действующие на единицу длины дуги.

Рассмотрим случай, когда газ за время прохождения разрядной камеры не успевает закручиваться вращающимся разрядом. Тогда угловая скорость вращения среды  $\omega_c = 0$  и сила Архимеда  $\vec{F}_A = -M\omega_c^2 \vec{\rho} = 0$ .

В соответствии с [9] при анализе учтем скольжение дуги и следующие силы: а) электромагнитную силу  $\vec{F}_{3M} = [\vec{I}\vec{B}]$ ,  $F = |IB|$ , где  $I$  — ток дуги,  $B$  — индукция ВМП; б) силу аэродинамического сопротивления,  $F_{TP} = c_x \gamma d^2 V^2 / 2 = kV^2$ , где  $c_x$  — коэффициент сопротивления,  $\gamma$  — плотность набегающего газа,  $d$  — диаметр канала дуги; в) подъемную силу  $F_n = M\omega V$ .

Скорость скольжения дугового разряда относительно среды по [12] равна  $V_c = \frac{cE(1-0,9\rho_c)\mu_d^2}{\rho_e R_k} \cdot \frac{\lambda}{c_p \gamma}$ . Для  $\rho_c = \rho/R_k \leq 0,9$  это выражение хорошо аппроксимируется зависимостью  $V_c = \frac{A}{R_k^3} \rho^2 = \beta \rho^2$ , где  $A$ ,  $\beta$  — некоторые коэффициенты, зависящие от величины тока дуги и рода газа,  $R_k$  — радиус разрядной камеры.

Используя комплексную плотность, мнимая ось которой перпендикулярна вектору индукции ВМП, преобразуем уравнение (1.1) с учетом скольжения:

$$M \frac{d\vec{V}}{dt} = F \exp j(\omega t + \varphi) - kV\vec{V} - jM\omega\vec{V}, \quad (1.2)$$

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{V} + \vec{V}_c = \vec{V} - \beta\rho\vec{\rho}.$$

Решение этой системы находим в виде

$$\vec{\rho} = \rho \exp j(\omega t + \varphi). \quad (1.3)$$

Чтобы учесть динамику процесса движения, распишем производные  $d\vec{\rho}/dt$  и  $d\vec{V}/dt$  с учетом того, что в нестационарном режиме  $\rho$  и  $\varphi$  являются переменными. Тогда из (1.3) получим

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \left[ \frac{d\rho}{dt} + j\left(\omega + \frac{d\varphi}{dt}\right)\rho \right] \exp j(\omega t + \varphi). \quad (1.4)$$

Из второго уравнения системы (1.2) с учетом (1.4) имеем

$$\vec{V} = \left[ \frac{d\rho}{dt} + \beta\rho^3 + j\left(\omega + \frac{d\varphi}{dt}\right)\rho \right] \exp j(\omega t + \varphi), \quad (1.5)$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \left\{ \frac{d^2\rho}{dt^2} + 2\beta\rho \frac{d\rho}{dt} - \rho\left(\omega + \frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + j\left[\rho \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left(\omega + \frac{d\varphi}{dt}\right)\left(2\frac{d\rho}{dt} + \beta\rho^2\right)\right] \right\} \times \exp j(\omega t + \varphi). \quad (1.6)$$

С помощью (1.5), (1.6) выражение для сил, входящих в систему (1.2), примут вид:

а) электромагнитная сила  $F \exp j(\omega t + 90^\circ) = F(\sin \varphi + j \cos \varphi) \exp j \times (\omega t + \varphi)$ ;

б) подъемная сила  $\vec{F}_n = -jM\omega\vec{V} = \left[ M\omega\rho\left(\omega + \frac{d\varphi}{dt}\right) - jM\omega\left(\beta\rho^2 + \frac{d\rho}{dt}\right) \right] \times \exp j(\omega t + \varphi)$ ;

в) сила аэродинамического сопротивления  $\vec{F}_{TP} = -kV\vec{V} = -\left[ kV \times \left(\beta\rho^3 + \frac{d\rho}{dt}\right) + jkV\rho\left(\omega + \frac{d\varphi}{dt}\right) \right] \exp j(\omega t + \varphi)$ .

Мнимые части приведенных выражений представляют собой тангенциальные составляющие  $\tau$  соответствующих векторов. Действительные части же являются нормальными составляющими  $n$ . Подставив полученные выражения в исходную систему и приравняв действительную и мнимую части найденных уравнений, получим систему уравнений в проекциях на оси:

$$\tau) \quad M\rho \frac{d^2\rho}{dt^2} + M\left(\omega + \frac{d\varphi}{dt}\right)\left(2\frac{d\rho}{dt} + \beta\rho^2\right) - F \cos \varphi + \left(\omega + \frac{d\varphi}{dt}\right)\rho kV + M\omega\left(\beta\rho^2 + \frac{d\rho}{dt}\right) = 0,$$

$$n) \quad M \frac{d^2\rho}{dt^2} + 2M\beta\rho \frac{d\rho}{dt} - M\rho\left(\omega + \frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - F \sin \varphi - M\omega\rho\left(\omega + \frac{d\varphi}{dt}\right) + kV\left(\beta\rho^2 + \frac{d\rho}{dt}\right) = 0.$$

Пренебрегая закруткой газа, возникающей вследствие вращения ствола дуги, можно считать столб разряда поперечно-обдуваемым и принять формулу зависимости напряжения на дуге от скорости ее обдува [10]:

$$U_S(I, V) = 24 + \frac{9,2 \cdot 10^2 (V + 10)}{\sqrt{I}}. \quad (1.7)$$

Формула (1.7) задает статическую ВАХ электрической дуги, движущейся в магнитном поле. Поскольку пока не существует более или менее точных решений задач математического исследования поперечно-обдуваемых дуг, воспользуемся для построения динамической ВАХ движущейся электрической дуги эмпирически обобщенной моделью Майра

$$\Phi \frac{dG}{dt} + G = \frac{I}{F(I)}, \quad (1.8)$$

где  $F(I)$  — статическая ВАХ дуги;  $G$  — проводимость единицы длины дуги,  $\theta$  — «постоянная времени» дуги.

Подставив в (1.8) вместо  $F(I)$  статическую ВАХ движущейся дуги  $U_s(I, V)$  (1.7), получим уравнение, с помощью которого возможен учет тепловой инерционности столба дуги, движущейся в магнитном поле.

Полная система уравнений электрической дуги, горящей в активно-индуктивной цепи постоянного тока при наличии ВМП в канале, имеет вид

$$M\rho \frac{d^2\varphi}{dt^2} + M\left(\omega + \frac{d\varphi}{dt}\right)\left(2\frac{d\rho}{dt} + \beta\rho^2\right) - F \cos \varphi + \left(\omega + \frac{d\varphi}{dt}\right)\rho kV + M\omega\left(\beta\rho^2 + \frac{d\rho}{dt}\right) = 0; \quad (1.9)$$

$$M\frac{d^2\rho}{dt^2} + 2M\beta\rho \frac{d\rho}{dt} - M\rho\left(\omega + \frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - F \sin \varphi - M\omega\rho\left(\omega + \frac{d\varphi}{dt}\right) + kV\left(B\rho^2 + \frac{d\rho}{dt}\right) = 0; \quad (1.10)$$

$$V = \sqrt{\left(\omega + \frac{d\varphi}{dt}\right)^2\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2}; \quad (1.11)$$

$$\theta \frac{d}{dt}\left(\frac{I}{U}\right) + \frac{I}{U} = \frac{I}{U_s(I, V)}; \quad (1.12)$$

$$L\frac{dI}{dt} + R_0I + U = E. \quad (1.13)$$

Полученная система (1.9)–(1.13) весьма сложна как для количественного решения, так и для качественного исследования. Поэтому естественным является переход к линеаризованным вблизи стационарного движения уравнениям. Однако и для линеаризованной системы аналитический критерий устойчивости «в малом» получить трудно, вследствие ее высокого (седьмого) порядка. В связи с этим особый интерес представляет исследование некоторых частных, но реализуемых и практически важных случаев.

Рассмотрение начнем с исследования устойчивости движений дуги, система электропитания которой обеспечивает устойчивость ее горения при широком диапазоне заданных параметров движения, что соответствует питанию дуги от источника тока. При этом два последних уравнения системы (1.12) и (1.13) становятся эквивалентными выражению  $I = \text{const}$ , и на устойчивость исследуются решения уравнений движения (1.9) и (1.10).

## 2. УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ДУГИ ВО ВМП

Линеаризуем уравнения движения (1.9) и (1.10). Для этого представим параметры задачи в виде стационарного значения и малого отклонения

$$\rho = \rho_s + x_1, \quad \rho_1 = \rho_{1s} + x_2, \quad \varphi = \varphi_s + x_3, \quad \varphi_1 = \varphi_{1s} + x_4, \quad (2.1)$$

где для приведения уравнений к системе в нормальной форме Коши введены обозначения:  $d\rho/dt = \rho_1$ ,  $d\varphi/dt = \varphi_1$ .

Подставляя (2.1) в исходные уравнения, получим

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = (\rho_s + x_1)(\omega + x_4)^2 + \omega(\rho_s + x_1)(\omega + x_4) + \frac{F}{M} \sin(\varphi_s + x_3) - \frac{kV}{M} [\beta(\rho_s + x_1)^2 + x_2] - 2\beta(\rho_s + x_1)x_2,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_4,$$

$$\frac{dx_4}{dt} = \frac{F \cos(\varphi_s + x_3)}{M(\rho_s + x_1)} - (\omega + x_4)\left(\frac{2x_2}{\rho_s + x_1} + \beta\rho_s + \beta x_1\right) - (\omega + x_4)\frac{kV}{M} - \omega\left(\beta\rho_s + \beta x_1 + \frac{x_2}{\rho_s + x_1}\right).$$

Учитывая стационарное уравнение и отбрасывая члены выше первого порядка малости, получим систему уравнений первого приближения.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4, \\ \dot{x}_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4, \\ \dot{x}_4 &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $a_1 = a_{13} = a_{14} = a_{31} = a_{32} = a_{33} = 0$ ,  $a_{12} = a_{34} = 1$ ,

$$a_{21} = 2\omega^2 - \frac{2kV\beta}{M}\rho_s, \quad a_{22} = -\left(\frac{kV}{M} + 2\beta\rho_s\right), \quad a_{23} = \frac{F}{M} \cos \varphi_s,$$

$$a_{24} = 3\omega\rho_s, \quad a_{41} = -\left(\frac{F \cos \varphi_s}{M\rho_s^2} + 2\beta\omega\right), \quad a_{42} = -3\frac{\omega}{\rho_s},$$

$$a_{43} = \frac{F \sin \varphi_s}{M\rho_s}, \quad a_{44} = -\left(\beta\rho_s + \frac{kV}{M}\right).$$

Раскрывая характеристический определитель системы (2.3) и приравнявая его нулю, получим характеристическое уравнение

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0, \quad (2.4)$$

где

$$a_0 = 1, \quad a_1 = a_{22} + a_{44}, \quad a_3 = a_{21}a_{44} - a_{24} \cdot a_{41} - a_{23}a_{42} + a_{43}a_{23}, \quad a_4 = a_{21}a_{43} - a_{23}a_{41}.$$

Построим из коэффициентов уравнения (2.4) определитель Гурвица

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & 0 \end{vmatrix}$$

Критерий Гурвица имеет вид

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0,$$

$$\Delta_3 = a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 > 0,$$

где  $a_1 = 2kV/M + 3\beta\rho_s$ ,

$$a_2 = 7\omega^2 + \frac{5kV\beta}{M}\rho_s + 2\beta^2\rho_s^2 + \left(\frac{kV}{M}\right)^2 + \frac{F \sin \varphi_s}{M\rho_s},$$

$$a_3 = 4\beta\omega^2\rho_s + \frac{6\omega F}{M\rho_s} \cos \varphi_s + \frac{2kV\beta}{M}\rho_s\left(\beta\rho_s + \frac{kV}{M}\right) + \left(\frac{kV}{M\rho_s} + 2\beta\right)\frac{F}{M} \times \\ \times \sin \varphi_s - 2\omega^2\frac{kV}{M},$$

$$a_4 = \frac{2kV\beta F}{M^2} \sin \varphi_s - \frac{2\omega^2 F}{M\rho_s} \sin \varphi_s - \frac{F^2}{M^2\rho_s^2} \cos^2 \varphi_s + \frac{2\beta\omega F}{M} \cos \varphi_s.$$

Численная оценка этих критериев для тока дуги  $I = 14$  А, индукции магнитного поля  $B = 0,015$  Т в диапазоне скоростей вращения от 50 до 1000 об/с, (экспериментальный материал для этих параметров представлен в [5, 11]) проведена с помощью аналитического решения

$$\rho_s = \sqrt{\frac{1}{\beta} \left[ -\frac{\omega^2}{2\beta} + \sqrt{\frac{\omega^4}{4\beta^2} - \frac{2M^2\omega^2}{k}} + \sqrt{\frac{4M^4\omega^4}{k^4} + \frac{F^2}{k^2}} \right]},$$

$$\varphi_s = \arctg \frac{k\beta\rho_s^2 \sqrt{\omega^2 + \beta^2\rho_s^2} - 2M\omega^2}{k\omega\rho_s \sqrt{\omega^2 + \beta^2\rho_s^2} + 2M\beta\omega}$$

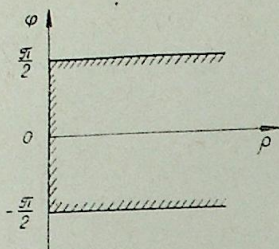


Рис. 2. Область устойчивого движения столба дуги.

которое было получено для установившегося движения. Результаты численной оценки сведены в таблицу. Из таблицы видно, что в рассматриваемом диапазоне частот скоростей вращения поля решение стационарной задачи асимптотически устойчиво (так как  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ ,  $a_3 > 0$ ,  $a_4 > 0$ ,  $\Delta_3 > 0$ ). Анализ выражений для  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $a_4$  показывает, что при  $\cos \varphi < 0$   $a_3 < 0$ , следовательно, в левой полуплоскости стационарный режим неустойчив. Таким образом, в пространстве параметров стационарного режима  $\rho_s$  и  $\varphi_s$  определена область асимптотической устойчивости стационарного движения разряда во вращающемся магнитном поле с учетом перемещения поля температур дуги относительно среды. Вид этой области представлен на рис. 2.

### 3. УСТОЙЧИВОСТЬ ДУГИ, ДИНАМИЧЕСКИ СТАБИЛИЗИРОВАННОЙ ВМП

Рассмотрим теперь вопрос об энергетической устойчивости стабильно движущейся во ВМП электрической дуги, т. е. устойчивость пространственно стабилизированной дуги. Причем под пространственной понимается также и динамическая стабилизация, при которой столб дуги движется по строго определенной траектории. Применительно к условиям горения дуги во ВМП это означает, что дуга движется по окружности некоторого постоянного радиуса  $\rho_0$ . Постоянство радиуса вращения дуги может быть обусловлено незначительным диаметром разрядного канала, намного меньшим диаметра вращения дуги в открытом пространстве (стабилизация стенкой) или кольцеобразной формой электродов, как, например, в установке для дугоконтактной сварки труб [2, 3].

При постоянном радиусе вращения столба дуги  $\rho = \rho_0 = \text{const}$  уравнение (1.10) выполняется автоматически, вследствие наличия реакции (стенки или электродов), а из (1.9) выпадают члены, учитывающие скольжение дуги, так как тангенциальная составляющая скорости скольжения пренебрежимо мала по сравнению с ее радиальной составляющей. Замыкается полученная система уравнениями цепи электропитания и динамической модели электрической дуги (1.12), (1.13). Для активно-индуктивной цепи электропитания система уравнений запишется

$$M\rho_0 \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left(\omega + \frac{d\varphi}{dt}\right)\rho_0 kV = IB \cos \varphi_s, \quad (3.1)$$

Результаты численной оценки критерия Гурвица

$n$ , об/с	50	175	1000
$\omega$ , 1/с	314	1100	6283
$\rho$ , М	$9,35 \cdot 10^{-3}$	$6,6 \cdot 10^{-3}$	$0,41 \cdot 10^{-3}$
$\varphi$ , град	62	0	-83
$\sin \varphi$	0,88	0	-0,99
$\cos \varphi$	0,47	1	0,122
$V$ , м/с	2,936	7,26	2,57
$a_1$	$5,6 \cdot 10^3$	$9,4 \cdot 10^3$	$2,8 \cdot 10^3$
$a_2$	$14,7 \cdot 10^6$	$36,1 \cdot 10^6$	$184,4 \cdot 10^6$
$a_3$	$2,18 \cdot 10^{10}$	$5,26 \cdot 10^{10}$	$19,9 \cdot 10^{10}$
$a_4$	$13,6 \cdot 10^{12}$	$41,8 \cdot 10^{12}$	$7465 \cdot 10^{12}$
$\Delta_3$	$0,89 \cdot 10^{21}$	$10,9 \cdot 10^{21}$	$4,6 \cdot 10^{21}$

$$\vartheta \frac{d}{dt} \left( \frac{I}{U} \right) + \frac{I}{U} = \frac{I}{U_s(I, V)}, \quad (3.2)$$

$$RI + L \frac{dI}{dt} + U = E. \quad (3.3)$$

Исследование данной задачи разобьем на два этапа. Сначала исследуем пространственную устойчивость энергетически стабильной дуги, а затем обобщим полученный результат на более общий случай. Как и ранее, ток дуги будем считать результат на более общий случай. Как и задача анализа устойчивости заданным и постоянным. Таким образом, значений координаты  $\varphi$  и анализу устойчивости рассчитанных положений равновесия  $\varphi_s$ .

Решение стационарной формы уравнения (3.1) дает два равновесных значения угла  $\varphi$

$$\varphi_{s1,2} = \pm \arccos \frac{kV_s^2}{I_s B_s}. \quad (3.4)$$

Линеаризуя уравнение (3.1) вблизи этих состояний равновесия, получим

$$\frac{M\rho_0}{I_s B_s} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{2\omega\rho_0^2 k}{I_s B_s} \frac{d\varphi}{dt} + (\sin \varphi_s) \varphi = 0. \quad (3.5)$$

Элементарный критерий устойчивости показывает, что дуга устойчиво движется при

$$\frac{M\rho_0}{I_s B_s} > 0; \quad \frac{2\omega\rho_0^2 k}{I_s B_s} > 0; \quad \sin \varphi_s > 0, \quad (3.6)$$

что соответствует  $\varphi_s > 0$ , т. е. положению следа дуги в 1-м квадранте. Движение дуги в нижней полуплоскости (4-й квадрант) оказывается неустойчивым, так как в этом случае  $\varphi_s < 0$  и третий из критериев (3.6) не выполняется.

Этот результат распространяется на более общий случай с помощью анализа устойчивости решения системы (3.1)–(3.3), линеаризуя которую, мы имеем

$$\begin{aligned} \vartheta R_s \frac{di}{dt} + R_d i + K_v \rho_0 \frac{d\varphi}{dt} &= \vartheta \frac{du}{dt} + u, \\ \frac{M\rho_0}{I_s B_s} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{2\omega\rho_0^2 k}{I_s B_s} \frac{d\varphi}{dt} + (\sin \varphi_s) \varphi &= 0, \\ R_0 i + L \frac{di}{dt} + u &= 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где  $R_s$  — статическое сопротивление электрической дуги,  $R_d$  — дифференциальное сопротивление электрической дуги,  $K_v = \partial U / \partial V$ ,  $R_0$  — активное сопротивление цепи электропитания.

Приведя систему (3.7) к одному уравнению, получим

$$\begin{aligned} A\alpha_2 \frac{d^4 i}{dt^4} + (A\alpha_1 + B\alpha_2) \frac{d^3 i}{dt^3} + (AK_y + B\alpha_1 + \alpha_2 m) \frac{d^2 i}{dt^2} + \\ + (BK_y + \alpha_1 m) \frac{di}{dt} + K_y m i = 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\text{где } A = \frac{M\rho_0}{I_s B_s}; \quad B = \frac{2\omega\rho_0^2 k}{I_s B_s}; \quad \alpha_1 = L + \vartheta(R_s + R_0); \\ \alpha_2 = \vartheta L, \quad K_y = R_d + R_0, \quad m = \sin \varphi_s.$$

Из (3.8) может быть легко получено характеристическое уравнение системы (3.7)

$$A\alpha_2 p^4 + (A\alpha_1 + B\alpha_2)p^3 + (AK_y + B\alpha_1 + \alpha_2 m)p^2 + (BK_y + \alpha_1 m)p + K_y m = 0. \quad (3.9)$$

Критерий Гурвица отрицательности действительных частей корней уравнения (3.9) имеет вид

$$\begin{aligned} A\alpha_2 > 0; \quad A\alpha_1 + B\alpha_2 > 0; \quad AK_y + B\alpha_1 + \alpha_2 m > 0; \quad BK_y + \alpha_1 m > 0, \\ K_y m > 0; \quad A^2 B \alpha_1 K_y^2 + B \alpha_2^2 \alpha_1 m^2 - 2AB\alpha_1 \alpha_2 K_y m + (AB^2 \alpha_1^2 + B^3 \alpha_1 \alpha_2) K_y + \\ + (AB\alpha_1^3 + B^2 \alpha_1^2 \alpha_2) m > 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Анализ этого критерия показывает, что для любых реально достижимых параметров цепи электронитания, ВМП и динамической модели дуги: а) первая группа неравенств (3.10) (с первого по пятый) имеет решение

$$K_y > 0, \quad m > 0; \quad (3.11)$$

б) при выполнении условий (3.11) шестое неравенство (3.10) является тождественным.

Для расчета брались следующие диапазоны изменения параметров:  $L = 0,01 \div 0,1$  Гн,  $R_s = 0,1 \div 20$  Ом,  $R_0 = 0,1 \div 20$  Ом,  $\theta = 10^{-3} \div 10^{-6}$ ,  $I_s = 10 \div 100$  А,  $B_s = 0,002 \div 0,02$  Т,  $\rho_0 = (1 \div 12) \cdot 10^{-3}$  м.

Из сказанного вытекает, что для указанных диапазонов изменения параметров электродуговой установки, стационарное решение системы (3.1)–(3.3) устойчиво, притом асимптотически, если  $R_d + R_0 > 0$ ,  $\sin \varphi > 0$ .

Таким образом, для анализа устойчивости горения электрической дуги динамически стабилизированной ВМП пригоден критерий Кауфмана, определяемый по статической характеристике движущейся дуги  $U_s(I, V)$ . В рассмотренном случае радиус-вектор центра масс столба дуги опережает вектор индукции ВМП на острый угол.

## ВЫВОДЫ

1. Получена замкнутая система уравнений динамики электрической дуги во вращающемся магнитном поле.

2. Проведено исследование на устойчивость движения электрической дуги во ВМП с учетом скольжения электродугового разряда относительно потока массы.

3. Найдена область асимптотической устойчивости установившегося движения разряда во вращающемся магнитном поле, которая в координатах  $\rho$  и  $\varphi$  (см. рис. 2) определяется правой полуплоскостью.

4. Показано, что дуга, движущаяся во ВМП по круговой траектории, горит устойчиво при выполнении критерия Кауфмана, определенного по статической вольтамперной характеристике движущейся дуги.

5. При фиксированной (стенкой или электродами) круговой траектории движения столба дуги во ВМП радиус-вектор центра масс канала дуги опережает вектор индукции магнитного поля на острый угол.

Куйбышевский политехнический институт

Поступила в редакцию  
28/VII 1980

## ЛИТЕРАТУРА

- Новиков О. Я. Общие методы анализа устойчивости.— В кн.: Теория электрической дуги в условиях вынужденного теплообмена. Новосибирск, 1977.
- Таран В. Ф., Гаген Ю. Г., Суворов А. Ф. Дугоконтактная сварка труб с использованием вращающегося магнитного поля.— Разработка нефтяных и газовых месторождений, 1966, № 2.
- Гаген Ю. Г., Таран В. Ф. Сварка магнитоуправляемой дугой.— М.: Машиностроение, 1970.

- Гурьянов В. К., Курбатов Е. П., Новиков О. Я. Исследование стабилизирующего воздействия на электрическую дугу вращающимся магнитным полем.— В кн.: Генераторы низкотемпературной плазмы. М., 1969.
- Путько В. Ф. Статические характеристики электрической дуги во вращающемся магнитном поле.— В кн.: Материалы VII Всесоюз. конф. по генераторам низкотемпературной плазмы. Т. 1. Алма-Ата, 1977.
- Каплянский А. Е., Полотовский Л. С., Соколов Н. Ф., Петров П. И. Гашение электрической дуги постоянного тока во вращающемся магнитном поле.— Электричество, 1956, № 12.
- Путько В. Ф., Танаев В. В. Анализ движения электрической дуги во вращающемся магнитном поле.— В кн.: Теплофизические исследования. Новосибирск, 1977.
- Бутенин А. А., Лунд Э. С., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики. Т. 2. М.: Наука, 1971.
- Новиков О. Я. Устойчивость электрической дуги. Л.: Энергия, 1978.
- Словецкий Д. И. Исследование температуры и формы поперечного сечения, столба электрической дуги, движущейся в магнитном поле по параллельным электродам.— Теплофизика высоких температур, 1967, т. 5, 13 с.
- Егоров В. М., Новиков О. Я., Путько В. Ф. Движение электрической дуги во вращающемся магнитном поле.— В кн.: Материалы VII Всесоюз. конф. по генераторам низкотемпературной плазмы, т. 1. Алма-Ата, 1977.
- Новиков О. Я., Танаев В. В. Скорость теплового прорастания дуги в цилиндрическом канале.— В кн.: Материалы VII Всесоюз. конф..., т. 2. Алма-Ата, 1977.

А. П. БЕГЕЛЬФОР, В. С. КИСЕЛЬ, В. С. КУШНИР

ФОРМА ДУГИ  
В ПОПЕРЕЧНОМ ВРАЩАЮЩЕМСЯ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Форма столба электрической дуги наиболее подробно исследована для коаксиального плазмотрона [1—3]. В настоящей работе рассматривается задача о нахождении пространственной кривой, описывающей форму столба дуги в плазмотроне с осевым потоком газа при наложении на электродуговую камеру поперечного вращающегося магнитного поля.

Пусть внешнее магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$  постоянно по величине и вращается с постоянной угловой скоростью  $\vec{\omega}$ , причем  $\vec{\omega} \perp \vec{B}$ .  $X_0Y_0Z$  — лабораторная система координат (рис. 1). Ось  $OZ$  направлена по потоку газа и  $OZ \parallel \vec{\omega}$ . Будем считать, что катодный конец дуги неподвижен и совпадает с началом координат. Скорость потока газа  $\vec{u}$  и его плотность  $\rho$  полагаем постоянными.

Параметрическое уравнение кривой, описывающей форму дуги,

$$\vec{R} = \vec{R}(s, t), \quad (1)$$

где  $\vec{R}$  — радиус вектора,  $s$  — длина кривой от начала координат до текущей точки;  $t$  — время.

Скорость элемента дуги

$$\vec{q} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial s} \cdot \frac{ds}{dt} + \frac{\partial \vec{R}}{\partial t}, \quad (2)$$

скорость элемента дуги относительно газа

$$\vec{v} = \vec{q} - \vec{u}. \quad (3)$$

Полагаем, что на дугу действуют только электромагнитная сила и сила газодинамического сопротивления, причем собственным магнитным полем дуги можно пренебречь. Тогда уравнение движения элемента дуги имеет вид

$$\vec{F}_o + \vec{F}_c = m \frac{d\vec{q}}{dt}, \quad (4)$$

где  $\vec{F}_o$ ,  $\vec{F}_c$ ,  $m$  — электромагнитная сила, сила газодинамического сопротивления, масса, отнесенные к единице длины дуги.

Для электромагнитной силы имеем

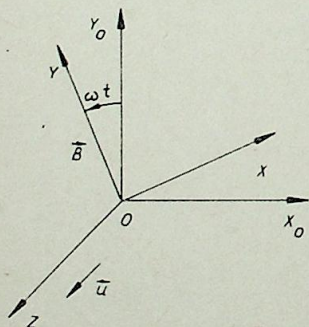


Рис. 1. Лабораторная  $X_0Y_0Z$  и вращающаяся  $XYZ$  системы координат.

$$\vec{F}_o = -I \frac{\partial \vec{R}}{\partial s} \times \vec{B}, \quad (5)$$

где  $I$  — ток дуги.

Далее примем, что сила газодинамического сопротивления имеет вид

$$\vec{F}_c = -c |\vec{v}_n| \vec{v}_n, \quad (6)$$

где  $c$  — коэффициент сопротивления;  $\vec{v}_n$  — нормальная к дуге компонента относительной скорости.

При этом

$$\vec{v}_n = \frac{\partial \vec{R}}{\partial s} \times \left( \vec{v} \times \frac{\partial \vec{R}}{\partial s} \right). \quad (7)$$

Подставляя (5) и (6) в (4) и учитывая (7), получим

$$-I \frac{d\vec{R}}{ds} \times \vec{B} - c \left| \frac{\partial \vec{R}}{\partial s} \times \left( \vec{v} \times \frac{\partial \vec{R}}{\partial s} \right) \right| \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial s} \times \left( \vec{v} \times \frac{\partial \vec{R}}{\partial s} \right) = m \frac{d\vec{q}}{dt}. \quad (8)$$

Уравнение (8) для описания движения дуги предлагалось в работе [4]. Непосредственно найти  $\vec{R}(s, t)$  из уравнений (2), (3), (8) невозможно, так как неизвестна функция  $\frac{ds}{dt}$ . Поэтому необходимо привлечь дополнительные данные.

Введем систему координат  $XYZ$ , которая имеет общее начало с системой  $X_0Y_0Z$  и вращается относительно нее с угловой скоростью  $\vec{\omega}$  так, что  $OY \parallel \vec{B}$  (см. рис. 1). Естественно предположить, что столб дуги неподвижен в системе  $XYZ$ , так как физические условия в этой системе координат не зависят от времени. Это по существу означает, что элементы дуги, образующиеся у катода, описывают одну и ту же траекторию во вращающейся системе координат  $XYZ$ . Вращение дуги, как целого, с частотой магнитного поля наблюдалось в экспериментах [5, 6].

Введем безразмерные переменные и параметры

$$\vec{r} = \frac{\vec{R}}{u/\omega}, \quad x = \frac{X}{u/\omega}, \quad y = \frac{Y}{u/\omega}, \quad z = \frac{Z}{u/\omega}, \quad \tau = \omega t, \quad \alpha = \frac{v_0}{u}, \quad \beta = \frac{IB}{m\omega}. \quad (9)$$

где  $v_0$  — характерная скорость, определяемая соотношением  $v_0^2 = IB/c$ . Из последнего равенства следует, что скорость  $v_0$  равна установившейся скорости прямолинейного дугового столба в поперечном магнитном поле и может быть определена экспериментально (например, по измерениям на рельсотроне). Уравнение движения элемента дуги (8) во вращающейся системе отсчета с ортами  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ , учитывая (2), (3), (9), имеет вид

$$\frac{\vec{j} \times \frac{d\vec{r}}{d\tau}}{\left| \frac{d\vec{r}}{d\tau} \right|} - \frac{1}{\alpha^2} |\vec{A}| \vec{A} = \frac{1}{\beta} \left[ \frac{d^2\vec{r}}{d\tau^2} + 2\vec{k} \times \frac{d\vec{r}}{d\tau} + \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{r}) \right], \quad (10)$$

где

$$\vec{A} = \frac{\frac{d\vec{r}}{d\tau}}{\left| \frac{d\vec{r}}{d\tau} \right|} \times \left[ \left( \frac{d\vec{r}}{d\tau} + \vec{k} \times \vec{r} - \vec{k} \right) \times \frac{d\vec{r}}{d\tau} \right].$$

В уравнении (10)  $\frac{d\vec{r}}{d\tau}$  — безразмерная скорость элемента дуги во вращающейся системе отсчета. Правая часть уравнения (10) обусловлена

инерцией дугового столба, причем, чем больше  $\beta$ , тем инерция проявляется меньше. Сделаем естественное предположение, что скорость элемента дуги в начале координат равна скорости потока газа  $u$ . Тогда функция  $\vec{r}(\tau)$ , определяющая положение элемента дуги, удовлетворяет начальным условиям

$$\vec{r}(0) = 0; \quad \left(\frac{d\vec{r}}{d\tau}\right)_{\tau=0} = \vec{k}. \quad (11)$$

При  $\alpha = 0$ ,  $\beta \neq \infty$  уравнение второго порядка (10) имеет естественное решение, удовлетворяющее условиям (11), которое определяет во вращающейся системе отсчета конфигурацию столба дуги в параметрической форме.

Если положить  $\frac{1}{\beta} = 0$  (пренебречь инерцией дугового столба), то уравнение (10) приводится к системе нелинейных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{d\tau} - y = \frac{\alpha}{D} \frac{dz}{d\tau}, \quad \frac{dy}{d\tau} + x = 0, \quad \frac{dz}{d\tau} - 1 = \frac{-\alpha}{D} \frac{dx}{d\tau}, \quad (12)$$

где

$$D = \left[ \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 \right]^{\frac{1}{4}} \cdot \left[ \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 \right]^{\frac{1}{4}}.$$

В этом случае необходимо задать начальные условия лишь для самой функции  $\vec{r}(\tau)$ :  $x(0) = y(0) = z(0) = 0$ . Система (12) в отличие от уравнения (10) имеет решение, удовлетворяющее условию  $\vec{r}(0) = 0$ , лишь при  $\alpha < 1$ . При этом приближенное с точностью до членов порядка  $\alpha^3$  решение системы (12) имеет вид

$$\begin{aligned} x &= \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3}\right) \sin \tau - \alpha^3 \sin 2\tau, \\ y &= \left(-\alpha + \frac{3}{8}\alpha^3\right) + \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3}\right) \cos \tau - \frac{\alpha^3}{24} \cos 2\tau, \\ z &= \tau - \alpha^2 \sin \tau. \end{aligned} \quad (13)$$

Из (13) следует, что при  $\alpha \ll 1$  дуга имеет форму винтовой линии, навитой на круговой цилиндр радиуса  $\alpha$  с осью  $\{x=0; y=-\alpha\}$ . Заметим, что из последнего уравнения системы (12) следует

$$\left| \frac{dz}{d\tau} - 1 \right| < \alpha.$$

Отсюда при  $\alpha < 1$

$$\frac{dz}{d\tau} > 0, \quad (14)$$

что означает монотонное возрастание координаты  $z$  по длине дуги.

Если учитывать инерцию дугового столба, то его форму необходимо определять из векторного уравнения второго порядка (10), в которое входят параметры  $\alpha$  и  $\beta$ . Уравнение (10) с начальными условиями (11) решалось численно методом Рунге — Кутты с автоматическим выбором шага. Параметры  $\alpha$  и  $\beta$ , входящие в уравнение (10), определяются значениями  $I$ ,  $u$ ,  $\omega$ ,  $B$ ,  $v_0$ ,  $m$ . Расчеты проводили для дуги в воздухе при атмосферном давлении,  $I = 300$  А,  $u = 20$  м/с,  $\omega = 10^4$  с<sup>-1</sup>. Значения скорости  $v_0$  при трех значениях индукции магнитного поля брали из работы [7]. Масса единицы длины дуги оценивалась по формуле  $m \approx \rho \frac{\pi d^2}{4}$ , где  $\rho \approx 5 \cdot 10^{-2}$  кг/м<sup>3</sup> — плотность дуги при температуре 6000 К и атмосферном давлении;  $d \approx 5 \cdot 10^{-3}$  м — диаметр дугового столба при токе 300 А.

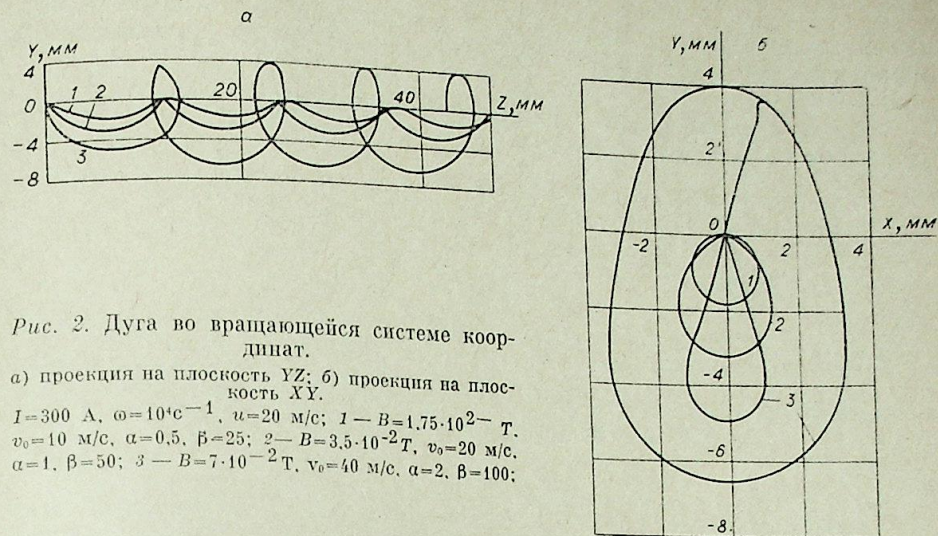


Рис. 2. Дуга во вращающейся системе координат.

а) проекция на плоскость  $YZ$ ; б) проекция на плоскость  $XY$ .  
 $I = 300$  А,  $\omega = 10^4$  с<sup>-1</sup>,  $u = 20$  м/с; 1 —  $B = 1,75 \cdot 10^{-2}$  Т,  $v_0 = 10$  м/с,  $\alpha = 0,5$ ,  $\beta = 25$ ; 2 —  $B = 3,5 \cdot 10^{-2}$  Т,  $v_0 = 20$  м/с,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 50$ ; 3 —  $B = 7 \cdot 10^{-2}$  Т,  $v_0 = 40$  м/с,  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 100$ ;

Отсюда получаем  $m \approx 10^{-6}$  кг/м.

Результаты расчетов приведены на рис. 2. При  $\alpha = 0,5$ ,  $\beta = 25$  (кривая 1) дуга имеет форму винтовой линии и результаты численного расчета хорошо совпадают с приближенным аналитическим решением (13) системы уравнений (12). Таким образом, при этих значениях параметров  $\alpha$  и  $\beta$  инерцией дугового столба можно пренебречь. На рис. 2, б для ясности показан только первый виток медленно скручивающейся кривой 2, соответствующей  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 50$ . Дуга при этих значениях параметров навита на почти цилиндрическую поверхность с образующей параллельной оси  $OZ$ . В обоих случаях ( $\alpha = 0,5$ ,  $\beta = 25$  и  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 50$ ) дуга во вращающейся системе координат находится в полупространстве  $Y < 0$ . При  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 100$  (кривая 3) после начального участка дуга переходит в полупространство  $Y > 0$  и далее навивается на цилиндрическую поверхность, расположенную по обе стороны от плоскости  $Y = 0$ . Для этого случая характерно также наличие видимых самопересечений дуги (см. рис. 2, а).

Необходимо отметить, что из-за большой неопределенности  $m$  значение  $\beta$  из формулы  $\beta = \frac{IB}{m\omega}$  получается весьма приближенным. Однако численные расчеты показали, что при  $\beta \gg 1$  изменение  $\rho$  в несколько раз не приводит к изменению поведения кривых, описывающих форму дуги.

Приведенные результаты дают общую характеристику формы дуги с неподвижным катодным концом при  $\beta \gg 1$  и  $\alpha \leq 1$ ,  $\alpha > 1$ . Дуговой шнур навивает на цилиндрическую или почти цилиндрическую поверхность и вращается как целое вокруг оси  $OZ$  с частотой магнитного поля. Переход дуги в полупространство  $Y > 0$  вращающейся системы отсчета и нарушение монотонности возрастания координаты  $z$  по длине дуги происходит при  $\alpha > 1$ . Это согласуется с соотношением (14), полученным из системы (12).

В заключение отметим, что уравнения (10), (12) справедливы не только при неподвижном катодном конце дуги, но и при равномерном вращении катодного конца по окружности с частотой магнитного поля, так как при выводе уравнений (10) и (12) существовало лишь предположение о неподвижности дуги как целого во вращающейся системе координат  $XYZ$ . Из системы уравнений (12) видно, что при любом  $\alpha > 0$  существует решение  $\{x=0, y=-\alpha, z=\tau\}$ , соответствующее прямому дуговому столбу, который описывает цилиндрическую

поверхность радиуса  $\alpha$ . Численный расчет показал, что это решение мало изменяется, если учитывать инерцию дугового столба по уравнению (10) при  $\beta \gg 1$ .

Таким образом, форма дуги существенно зависит от условий, накладываемых на катодный коец.

Сибирский филиал производственного  
объединения Тезнергохимпром,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
10/IV 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Adams V. W. The influence of gas stream and magnetic fields on magnetic fields on electrical discharges.—Aeronautical Research, 1964. Current Paper 793.
2. Урюков Н. А. Теория идеальной электрической дуги в коаксиальном плазматроне.—ПМТФ, 1969, № 1.
3. Lawton J. Arc motion in magnetic fields in presence of gas flow.—J. Phys. D. Appl. Phys., 1971, v. 4.
4. Djakov B. E., Nedelkov I. A simple equation describing the arc movement due to gas streams and magnetic fields.—J. Phys. D. Appl. Phys., 1974, v. 7.
5. Гурьянов В. К., Курбатов Е. П., Новиков О. Я. Исследование стабилизирующего воздействия на электрическую дугу вращающимся магнитным полем.—В кн.: III Всесоюз. науч.-техн. конф. по генераторам низкотемпературной плазмы. М.: Энергия, 1969.
6. Егоров В. М., Новиков О. Я., Путько В. Ф. Движение электрической дуги во вращающемся магнитном поле.—В кн.: Матер. к VII Всесоюз. конф. по генераторам низкотемпературной плазмы. Т. 1. Алма-Ата, 1977.
7. Guile A. E. a. o. High-current arcs in transverse magnetic fields in air at atmospheric pressure.—PROC. IEE, 1969, v. 116, N 4.

УДК 681.511.4.0.15

В. Д. ОМЕЛЬЧЕНКО

### «ВОССТАНОВЛЕНИЕ» ИМПУЛЬСНОЙ ПЕРЕХОДНОЙ ФУНКЦИИ ПО ЕЕ ОЦЕНКЕ МЕТОДОМ СКОльзяЩЕГО РЯДА

Математическая модель большого класса линеаризованных стационарных динамических систем и объектов может быть представлена: 1) в виде разностной схемы с постоянными параметрами (при этом обычно для задач прогнозирования выбираются прямые разности, а для задач управления обратные разности [1])

$$\sum_{j=0}^m d_j \nabla^j y_i = \sum_{k=0}^n c_k \nabla^k x_i, \quad (1)$$

где  $y_i$  и  $x_i$  — соответственно выходная и входная координаты исследуемого объекта, рассматриваемые на интервале наблюдения:  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $m$  и  $n$  — порядок разностей левой и правой частей разностной схемы;  $n$  — наблюдаемое число точек входной и выходной координат; 2) в виде разностной схемы с запаздывающими аргументами

$$y_i = \sum_{j=1}^m a_j y_{i-j} + \sum_{k=0}^n b_k x_{i-k}, \quad (2)$$

(в работе [2] такая форма записи носит название обобщенной модели и является, по мнению автора, наиболее общей формой записи стационарных линейных динамических систем; 3) в виде дискретного аналога интегрального уравнения свертки

$$y_i = \sum_{j=0}^l W_j x_{i-j}, \quad (3)$$

где  $W_j$  — дискретный аналог импульсной переходной функции (ИПФ),  $l$  — длина учитываемой предыстории входной координаты.

Определение  $W_j$  осуществляют обычно решением системы нормальных алгебраических уравнений, составленных исходя из минимизации функционала  $\sum_{i=l}^N (y_i - \sum_{j=0}^l W_j x_{i-j})^2 \rightarrow \min$ , или по уравнению Винера — Хопфа  $\sum_{i=l}^M \left( R_{yxi} - \sum_{j=0}^l W_j R_{xx(i-j)} \right)^2 \rightarrow \min$ , где  $R_{xxi}$  и  $R_{yxi}$  — соответственно авто- и взаимокорреляционные функции входной и выходной координат;  $M$  — число экспериментально определенных точек корреляционных функций.

Однако такой подход к определению  $W_j$  приводит к большим вариациям решений из-за плохой обусловленности приведенных выше математических описаний.

Обычно вместо истинных значений корреляционных функций используются их оценки. Поэтому решения имеют большие погрешности.

Хотя полученные таким образом ИПФ имеют, как правило, среднюю квадратическую погрешность, близкую к минимальной, ценность их велика, поскольку эти функции не соответствуют физическому смыслу процессов, протекающих в объекте. Физический смысл имеют только гладкие решения [3].

Указанное обстоятельство устраняется в настоящее время либо применением специальных методов регуляризации, основанных на «сглаживании» или «загрублении» решения [4], либо на аппроксимации полученных оценок  $W_j$  различными ортогональными (например, полиномами Чебышева) или ортонормированными (например, смещенными функциями Лагерра [5]) аппроксимирующими функциями.

Определяя «гладкость» решения, эти методы не дают представления ни о структуре самого объекта, ни о длительности его памяти. Цель данной работы — разработка такого алгоритма, который с определенной степенью точности отвечал бы на поставленные вопросы; или иначе — «восстановление» значений ИПФ  $W_j^B$  по ее оценке в классе эквивалентных разностных схем (ЭРС) типа (2).

Рассмотрим структуру построения дискретного аналога ИПФ. Уравнение (2) при порядке левой части  $m=1$  и при порядке правой части  $n=0$  запишется в виде уравнения с одним запаздывающим аргументом

$$y_i = a_1 y_{i-1} + b_0 x_i; \quad (4)$$

предыстория выходной координаты  $y_i$  согласно этому выражению определяется из соотношения

$$y_{i-1} = a_1 y_{i-2} + b_0 x_{i-1}.$$

Подставив последнее выражение в (4) и произведя преобразования, получим

$$y_i = a_1^2 y_{i-2} + b_0 x_i + b_0 a_1 x_{i-1}.$$

Проделав данную операцию  $l$  раз, получаем выражение

$$y_i = a_1^l y_{i-l} + \sum_{j=0}^{l-1} b_0 a_1^j x_{i-j}. \quad (5)$$

Если обозначить

$$O_0^{(1)} = 1$$

и ввести соотношение

$$O_j^{(1)} = a_1^j = a_1 O_{j-1}^{(1)},$$

где индекс  $(1)$  обозначает порядок левой части ЭРС (2), уравнение (5) можно записать в виде

$$y_i = O_i^{(1)} y_{i-l} + \sum_{j=0}^{l-1} b_0 O_j^{(1)} x_{i-j}; \quad i = l, l+1, \dots, N. \quad (6)$$

Очевидно, что для любого устойчивого решения ЭРС (2) должно выполняться условие

$$\lim_{j \rightarrow \infty} O_j^{(m)} = 0. \quad (7)$$

Практически условие (7) имеет место на рассматриваемом отрезке  $i = (1, \dots, N)$ , как только  $j$  выходит за пределы памяти исследуемого объекта. Если допустить, что учитываемая реализация входной и выходной координат выполняет условие (7), уравнение (6) переписывается в виде

$$y_i = \sum_{j=0}^{l-1} b_0 O_j^{(1)} x_{i-j}, \quad i = l, l+1, \dots, N. \quad (8)$$

Можно заключить, что если математическая модель (4) описывает замкнутые характеристики объекта, то описание (8) — его разомкнутые характеристики.

При  $m=2$  и  $n=0$  математическое описание (2) для разомкнутых характеристик примет вид

$$y_i = \sum_{j=0}^{l-1} b_0 O_j^{(2)} x_{i-j}, \quad i = l, l+1, \dots, N.$$

Здесь введено обозначение  $O_0^{(2)} = 1$ ;  $O_1^{(2)} = a_1 O_0^{(2)}$ . Последующие элементы ряда  $O_j^{(2)}$  можно получить из соотношения  $O_j^{(2)} = a_1 O_{j-1}^{(2)} + a_2 O_{j-2}^{(2)}$ ,  $j = 2, \dots, l-1$ .

Для произвольного значения  $m$  и  $n$ , введя обозначения, получим

$$O_0^{(m)} = 1; \quad O_1^{(m)} = a_1 O_0^{(m)}; \quad O_2^{(m)} = a_1 O_1^{(m)} + a_2 O_0^{(m)};$$

$$O_3^{(m)} = a_1 O_2^{(m)} + a_2 O_1^{(m)} + a_3 O_0^{(m)}; \dots; \quad O_m^{(m)} = \sum_{p=1}^m a_p O_{m-p}^{(m)}.$$

Остальные элементы этого ряда, начиная с  $(m+1)$ -го, можно определить из соотношения

$$O_j^{(m)} = \sum_{h=1}^m a_h O_{j-h}^{(m)}, \quad j = (m+1), (m+2), \dots, l. \quad (9)$$

Ряд, в котором последующий элемент получается посредством суммирования его предыдущих элементов, перемноженных на параметры ЭРС (2), назовем скользящим. По своей сути он выражает весовые значения предыстории входной координаты на выходную, т. е. несет ту же информацию, что и знаменатель передаточной функции, принятой в теории автоматического регулирования.

Таким образом, математическое описание для разомкнутых характеристик объекта в общем виде запишется

$$y_i = \sum_{j=n}^l (b_0 O_j^{(m)} + b_1 O_{j-1}^{(m)} + \dots + b_n O_{j-n}^{(m)}) x_{i-j} \quad (10)$$

или

$$y_i = \sum_{j=n}^l \left[ \sum_{v=0}^n (b_v O_{j-v}^{(m)}) x_{i-v} \right], \quad i = l+1, l+2, \dots, N.$$

Как можно заключить из приведенных выше описаний, структура построения разностного аналога импульсной переходной функции определяется из соотношения

$$W_j = \sum_{v=0}^n b_v O_{j-v}^{(m)}; \quad j = n, n+1, \dots, l. \quad (11)$$

Полагая, что  $O_r^{(m)} \equiv 0$  при  $r < 0$  то, согласно (11), структура построения разностного аналога ИПФ в классе ЭРС определяется из соотношения

$$W_j = \sum_{v=0}^n b_v O_{j-v}^{(m)}, \quad j = 0, 1, \dots, l. \quad (12)$$

При этом необходимо учитывать, что начальное значение ИПФ  $W_0$  в (12) соответствует  $(m-1)$  значению, построенному по разностной схеме (1), так как ЭРС (12) не дает представления о поведении выходной координаты до  $(m-1)$ -й точки интерполяции.

Если предположить, что произведенная оценка  $\bar{W}_j$  при выбранных значениях  $m$  и  $n$  определяется по соотношению (12), тогда алгоритм «восстановления» ИПФ заключается в нахождении таких значений  $b_v$  и  $O_j^{(m)}$ , чтобы функционал

$$\sum_{j=0}^l (\bar{W}_j - W_j^B)^2 \rightarrow \min$$

имел минимальное значение. Здесь обозначено  $W_j^B$  — «восстановление» значения ИПФ.

Однако такая процедура на практике бывает иногда трудно осуществимой, так как приходится одновременно определять и значения ряда  $O_j^{(m)}$ , а для этого необходимо знать параметры левой части ЭРС (2), и параметры правой части этой же схемы. Процедуру можно разбить на два этапа.

1. **Определение параметров левой части.** При постановке соотношения (12) в уравнение (10), и исключая  $b_v$ , получаем выражение

$$W_j = \sum_{h=1}^m a_h W_{j-h}, \quad j = m + n + 1, \dots, l.$$

Так как оценка  $\tilde{W}_j$  предполагается известной, искомые параметры левой части ЭРС (2)  $a_h$  определяются исходя из минимизации функционала

$$\sum_{j=m+n+1}^l \left( \tilde{W}_j - \sum_{h=1}^m a_h \tilde{W}_{j-h} \right)^2 \rightarrow \min.$$

2. **Определение параметров правой части.** По определенным параметрам левой части  $a_h$  по соотношению (10) строятся элементы скользящего ряда  $O_j^{(m)}$ , а затем, исходя из минимизации выражения

$$\sum_{j=n}^l \left( \tilde{W}_j - \sum_{v=0}^n b_v O_{j-v}^{(m)} \right)^2 \rightarrow \min,$$

определяются параметры правой части ЭРС (2).

ПРИМЕР.

Математическую модель электрической дуги, горящей в плазмотроне постоянного тока, можно представить в виде безынерционной нелинейности и линейной динамической части [6]. В качестве входной координаты взят ток дугового промежутка  $I_i$ , а в качестве выходной в первом случае — проводимость  $\rho_i$ , во втором случае — напряжение на плазмотроне  $U_i$ .

$$\rho_i = f(I_i) + \sum_{j=1}^l W_j I_{i-j},$$

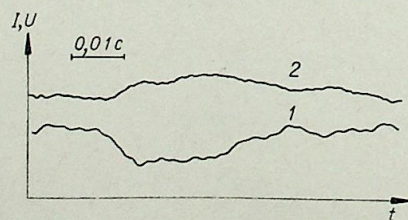
где  $f(I_i)$  — безынерционная нелинейность, представленная степенным рядом

$$f(I_i) = \sum_{v=0}^h c_v I_i^v.$$

Линейная динамическая часть представлена дискретным аналогом ИПФ  $W_j$ .

На рис. 1 приведена осциллограмма изменения тока и напряжения на плазмотроне постоянного тока ЭДП-104А при питании его от управляемого тиристорного преобразователя (рабочий газ — воздух). Мгновенное значение проводимости определялось как  $\rho_i = I_i/U_i$ .

По алгоритму



$$\sum_{i=l}^N \left[ \rho_i - \left( \sum_{v=1}^h c_v I_i^v + \sum_{j=1}^l W_j I_{i-j} \right) \right]^2 \rightarrow \min$$

была произведена оценка векторов  $c_v$

Рис. 1.

1 — ток дуги, 2 — напряжение на дуговом промежутке.

Рис. 2.

1 — порядок нелинейной части  $k=1$ , 2 —  $k=2$ , 3 —  $k=3$ , 4 — «восстановленное» значение ИПФ.

и  $W_j$  для минимального значения остаточной дисперсии, определяемой по формуле

$$\sigma = \frac{\sum_{j=0}^N (\delta_j - \rho_j^M)^2}{\sum_{j=0}^l (\rho_j)^2}.$$

На рис. 2 показаны  $\tilde{W}_j$  для различных порядков нелинейной части. Как видно из рисунка, кривые 2 и 3 практически не отличаются. Это означает, что увеличение степени аппроксимирующего полинома нелинейной части не приводит более к существенному уточнению оценок  $\tilde{W}_j$ .

По приведенному выше алгоритму «восстановления» ИПФ по ее оценке для ЦВМ была составлена программа, осуществляющая перебор  $m$  и  $n$  при определении параметров ЭРС. Наилучшие значения «восстановленного» ИПФ при  $m=1$  и  $n=0$  — оценка параметров  $a_1=0,67$  и  $b_0=0,148 \cdot 10^{-2}$ . На рис. 2 (кривая 4) показано «восстановленное» значение ИПФ  $W_j^B$ .

На рис. 3 показано значение оценки  $\tilde{W}_j$  для математической модели,

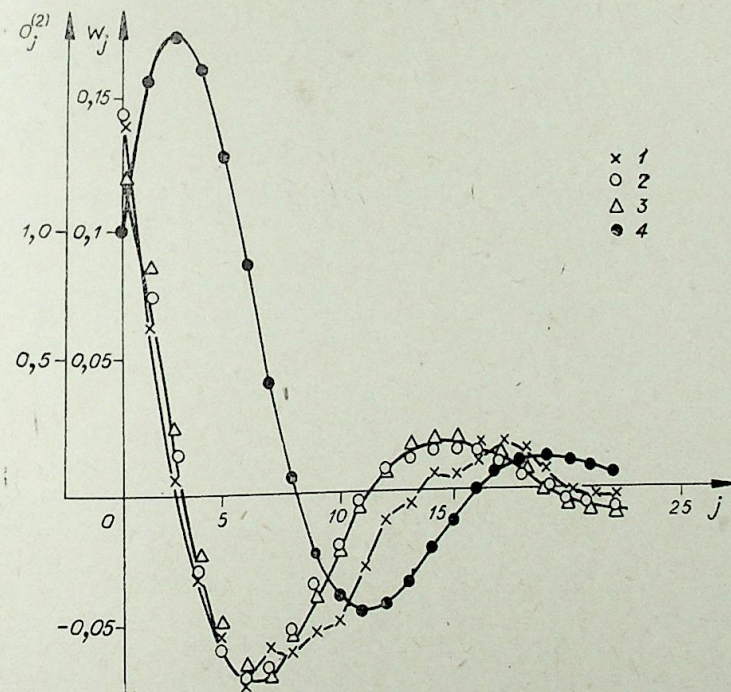


Рис. 3.

1 — оценка  $\tilde{W}_j$ ; 2 — значение  $W_j^B$  при  $m=2, n=1$ ; 3 —  $W_j^B$  при  $m=2, n=2$ ; 4 — значение скользящего ряда  $O_j^{(2)}$ .

где в качестве выходной координаты выбрано напряжение на дуге в промежутке. Максимальная степень полинома, аппроксимирующего нелинейность, выбиралась аналогично предыдущему примеру. Кривая 2 показывает «восстановленное» значение  $W_j^B$  при  $m=2$  и  $n=1$  для наилучшего значения остаточной дисперсии  $\sigma=0,227$ . Однако, согласно [7] порядок левой и правой частей ЭРС должен совпадать для адекватности математической модели и поведения динамики дуги. Поэтому выбрана модель при  $m=2$  и  $n=2$  для  $\sigma=0,238$  с оценками  $a_1=1,57$ ;  $a_2=-0,72$ ;  $b_0=0,117$ ;  $b_1=-0,4$ ;  $b_2=-0,03$ , (кривая 4), показано значение скользкого ряда  $O_j^{(2)}$ .

Зная эти характеристики поведения динамики дугевого промежутка, можно воспользоваться методом вспомогательных переменных [8] для дальнейшего уточнения параметров нелинейной части и линейной динамической для других конкретных случаев дугообразования.

Таким образом, структура построения ИПФ позволяет с большой точностью определить ИПФ по параметрам ЭРС для моделей линеаризованных стационарных динамических объектов любого порядка как с правой частью, так и без правой части. Данный алгоритм «восстановления» ИПФ можно применять и для синтеза линейных динамических систем автоматического регулирования по заданным значениям ИПФ. Рассмотренные в примере математические модели поведения динамики дуги позволяют производить анализ и синтез систем «источник питания — электрическая дуга».

Таджикский политехнический институт,  
Душанбе

Поступила в редакцию  
18/VII 1980

#### ЛИТЕРАТУРА

- Ивахненко А. Г. Системы эвристической самоорганизации в технической кибернетике. Киев: Техника, 1972.
- Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975.
- Дейч А. М. Методы идентификации динамических объектов. М.: Энергия, 1979.
- Тихонов А. Н. Решение некорректно поставленных задач и метод регуляризации. — Докл. АН СССР, 1963, 151.
- Корнюшко В. Ф., Ли И. Т. Алгоритм идентификации динамических характеристик объектов с запаздыванием с помощью смещенных функций Лагерра. — В кн.: Планирование эксперимента. М., 1970.
- Омельченко В. Д., Чекалин В. Г., Шамсиев М. В. Идентификация динамических характеристик плазмотронов. — В кн.: Тезисы докл. III Всесоюз. симпозиума по плазмохимии, т. 2. М.: Наука, 1979.
- Грановский В. Л. Электрический ток в газе, ч. 1. М.: Гостехтеориздат, 1952.
- Омельченко В. Д., Шамсиев М. В. Метод оценивания параметров электрических цепей с дугами в режиме нормального функционирования. — В кн.: Тезисы докладов VIII Всесоюз. конф. по генераторам низкотемпературной плазмы, ч. 3. Новосибирск, 1980.

А. М. АВДЕЕВ, Н. Д. ДЕМИДЕНКО

### ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ РЕКТИФИКАЦИИ

В сложных химико-технологических установках, состоящих из ряда соединенных аппаратов и имеющих систему потоков взаимодействующих сред, параметры которых чувствительны к возмущениям, важным становится построение высокоэффективных систем контроля и управления. Прежде чем создавать систему управления, принимая управляемый объект основным ее звеном, необходимо улучшить статические и динамические характеристики этого объекта. Известно, что имеется резерв улучшения работы технологического аппарата, который вскрывается в результате математического моделирования ректификационных установок\*. Если вопросы математического моделирования стационарных и переходных режимов для бинарных смесей в настоящее время в основном решены, то для разделения многокомпонентных смесей в многотарельчатых колоннах решение этой проблемы еще далеко от завершения. Это объясняется прежде всего громоздкостью и длительностью вычислительной работы даже на современных вычислительных машинах. Кроме того, имеются трудности в получении теплофизических коэффициентов для соответствующих краевых задач.

Настоящее исследование посвящено решению задач по созданию методов анализа статических и динамических режимов многокомпонентной ректификации. В работе приводится математическая модель, на основе которой формулируется краевая задача. Для решения этой задачи разработан численный алгоритм, который применен для исследования ряда промышленных установок. В качестве примера приведены результаты расчета колонны К-101.

#### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

При выводе уравнений нестационарных режимов процесса теплообмена сделаны следующие допущения: 1) движение потоков одномерное; 2) перемешивание в направлении движения отсутствует; 3) жидкость находится при температуре кипения, пар — при температуре конденсации; 4) распределение давления по высоте колонны линейное.

Считая процесс массообмена непрерывным по длине колонны, математическую модель можно представить в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных\*\*. Запишем эти уравнения для парового и жидкого потоков относительно единичной площади поперечного сечения аппарата:

\* Демиденко Н. Д., Ушатинская Н. П. Моделирование, распределенный контроль и управление процессами ректификации. М.: Наука, 1978.

\*\* Там же.

$$\frac{\partial (H_x x_i)}{\partial t} - \frac{\partial (L x_i)}{\partial z} = K_y (y_i - k_i x_i) + \rho_{1fi}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial (H_y y_i)}{\partial t} + \frac{\partial (V y_i)}{\partial z} = K_y (k_i x_i - y_i) + \rho_{2fi}, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Первое слагаемое правых частей системы (1) характеризует фазовый переход вещества, второе определяет ввод или вывод вещества из колонны. В этих уравнениях  $x_i$  и  $y_i$  — концентрации  $i$ -го компонента в жидкости и паре. Функции  $H_x$ ,  $H_y$ ,  $L$ ,  $V$  обычно считают заданными, т. е. не учитывается переходный процесс по потокам. Такая модель справедлива для переходных процессов при возмущении по концентрации или при малых изменениях потоков во времени.

В математической модели необходимо учитывать динамику потоков, так как входные и выходные значения потоков являются одними из основных управляющих параметров. Считая функции  $H_x$ ,  $H_y$ ,  $L$ ,  $V$  неизвестными, дополним систему (1) еще четырьмя уравнениями

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1, \quad \sum_{i=1}^N y_i = 1, \quad (2)$$

$$\frac{L}{H_x} = c_1, \quad \frac{V}{H_y} = c_2. \quad (3)$$

Известно, что в ректификационной колонне с увеличением потоков  $L$ ,  $V$  увеличиваются удерживающие способности  $H_x$ ,  $H_y$ , и наоборот. Будем считать эту зависимость прямо пропорциональной. Сделаем преобразования системы уравнений (1)–(3). В уравнениях (1) произведем следующую замену:

$$H_x x_i = \rho_{1i}, \quad H_y y_i = \rho_{2i}, \quad (4)$$

$$L x_i = \frac{L}{H_x} \rho_{1i}, \quad V y_i = \frac{V}{H_y} \rho_{2i}. \quad (5)$$

С учетом (3)–(5) уравнения (1) преобразуются к следующему виду

$$\frac{\partial \rho_{1i}}{\partial t} - c_1 \frac{\partial \rho_{1i}}{\partial z} = K_y (y_i - k_i x_i) + \rho_{1fi}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \rho_{2i}}{\partial t} + c_2 \frac{\partial \rho_{2i}}{\partial z} = K_y (k_i x_i - y_i) + \rho_{2fi}, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Входящие в них значения функций  $x_i$  и  $y_i$  определяются из выражений (2), (4).

$$x_i = \frac{\rho_{1i}}{\sum_{j=1}^N \rho_{1j}}, \quad y_i = \frac{\rho_{2i}}{\sum_{j=1}^N \rho_{2j}}. \quad (7)$$

Таким образом, систему уравнений (1)–(3) преобразовали в систему (6)–(7), где

$$K_y = f(\rho_2), \quad k_i = f_1(x, \alpha), \quad \alpha = f_2(T),$$

$$T = f_3(p, x), \quad \rho_{1fi} = f_4(z) c_i F x_{fi},$$

$$\rho_{2fi} = f_4(z) (1 - c_i) F y_{fi}.$$

#### ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Для того чтобы из системы (6)–(7) выделить одно решение, дополним ее начальными и граничными условиями.

Начальные условия:

$$\rho_{1i}(0, z) = \varphi_{1i}(z), \quad \rho_{2i}(0, z) = \varphi_{2i}(z). \quad (8)$$

Граничные условия определяются из уравнений (5)

$$\rho_{1i}(t, l) = L_d(t) \cdot x_i(t, l) / c_1, \quad (9)$$

где значение  $L_d(t)$  задано, а функции  $\rho_{2i}(t, 0) = V_0(t) \cdot y_i(t, 0) / c_2$ ,  $V_0(t)$ ,  $x_i(t, l)$ ,  $y_i(t, 0)$  неизвестны и определяются из уравнений баланса для емкостей, расположенных на концах колонны. Количество жидкости в кубе будем считать постоянным:  $H_k(t) = c_3$ .

Для парциального кипятильника справедливо выражение

$$y_i(t, 0) = k_i x_{ik}(t),$$

где  $x_{ik}(t)$  — концентрация  $i$ -го компонента в кубе.  $x_{ik}(t)$  и  $x_i(t, l)$  определяются из уравнений покомпонентного баланса для куба и дефлегматора

$$H_k \frac{dx_{ik}(t)}{dt} = c_1 \rho_{1i}(t, 0) - V_0(t) \cdot k_i x_{ik}(t) - W(t) \cdot x_{ik}(t),$$

$$x_{ik}(0) = \frac{\varphi_{1i}(0)}{\sum_{j=1}^N \varphi_{1j}(0)}, \quad (10)$$

$$\frac{d[H_d(t) x_i(t, l)]}{dt} = c_2 \rho_{2i}(t, l) - [L_d(t) - D(t)] x_i(t, l),$$

$$x_i(0, l) = \frac{\varphi_{1i}(l)}{\sum_{j=1}^N \varphi_{1j}(l)}.$$

$H_d(t)$  и  $V_0(t)$  находим из уравнений баланса потоков для дефлегматора и куба

$$\frac{dH_d(t)}{dt} = c_2 \sum_{j=1}^N \rho_{2j}(t, l) - L_d(t) - D(t), \quad (11)$$

$$H_d(0) = c_5.$$

С учетом, что  $H_k(t) = \text{const}$ , определяем

$$V_0(t) = c_1 \sum_{j=1}^N \rho_{1j}(t, 0) - W(t). \quad (12)$$

Функции  $W(t)$ ,  $F(t)$ ,  $D(t)$  задаются так, чтобы на любом интервале  $[t_1, t_2]$  выполнялось неравенство

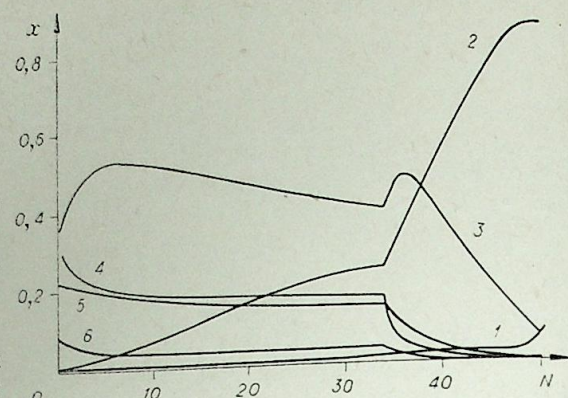
$$c_6 \leq \int_{t_1}^{t_2} [F(t) - W(t) - D(t)] dt \leq c_7.$$

Величины  $c_6$  и  $c_7$  должны быть такими, чтобы не происходил залив колонны или ее полное исчерпывание. Поставленная задача решена численным методом и алгоритм решения оформлен в виде программы для ЭВМ М-4030.

#### АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Сформулированную задачу можно решить методом конечных разностей. Для этого решение покроем равномерной сеткой с шагом  $\Delta t$  по

Рис. 1. Распределение концентраций по длине колонны в статическом режиме. Цифрами указаны номера компонентов.



временной координате и с шагом  $\Delta z$  по пространственной. При этом  $t_n = n \cdot \Delta t$ ,  $t_0 = 0$ ,  $z_m = m \cdot \Delta z$ ,  $z_0 = 0$ .

Обозначим через  $\rho_{1i}^{n,m}$  и  $\rho_{2i}^{n,m}$  приближенные значения функций  $\rho_{1i}$  и  $\rho_{2i}$  в момент времени  $t_n$  и в точке с координатой  $z_m$ . Для решения уравнений выберем на сетке трехточечный шаблон.

$\rho_{1i}^{n+1,m-1}$ ,  $\rho_{1i}^{n+1,m}$ ,  $\rho_{1i}^{n+1,m+1}$  для уравнений, граничные условия которых задаются в точке  $z = l$ .

$\rho_{2i}^{n+1,m}$ ,  $\rho_{2i}^{n+1,m+1}$  для уравнений, граничные условия которых задаются в точке  $z = 0$ .

Заменим в системе уравнений (6) производные по времени  $t$  и координате  $z$  соответствующими конечно-разностными соотношениями.

$$\frac{\rho_{1i}^{n+1,m-1} - \rho_{1i}^{n,m-1}}{\Delta t} - c_1 \frac{\rho_{1i}^{n+1,m} - \rho_{1i}^{n+1,m+1}}{\Delta z} = K_y^{n,m-1} (y_i^{n,m-1} - K_i^{n,m-1} x_i^{n,m-1}) + \rho_{1i}^{n+1,m}$$

$$\frac{\rho_{2i}^{n+1,m+1} - \rho_{2i}^{n,m+1}}{\Delta t} + c_2 \frac{\rho_{2i}^{n+1,m+1} - \rho_{2i}^{n+1,m}}{\Delta z} = K_y^{n,m+1} (K_i^{n,m+1} x_i^{n,m+1} - y_i^{n,m+1}) + \rho_{2i}^{n+1,m}$$

Из первого уравнения определяем  $\rho_{1i}^{n+1,m-1}$ , а из второго  $\rho_{2i}^{n+1,m+1}$ . Расчет плотностей производится следующим образом: в момент времени  $t_{n+1}$  рассчитываются все значения плотностей по координате  $z$ , затем переходим к расчету в момент времени  $t_{n+2}$  и так далее.

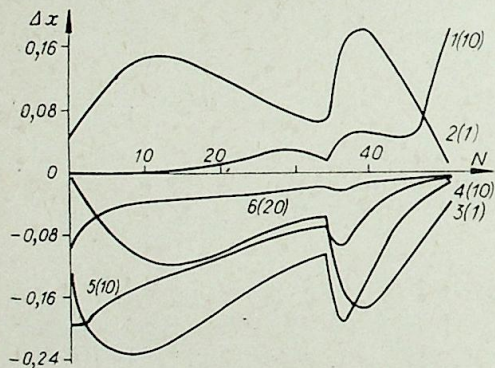


Рис. 2. Отклонение концентраций по длине колонны от исходного статического режима при уменьшении отбора дистиллята на 20%.

Числа в скобках — значения коэффициента увеличения масштаба по  $\Delta x$ .

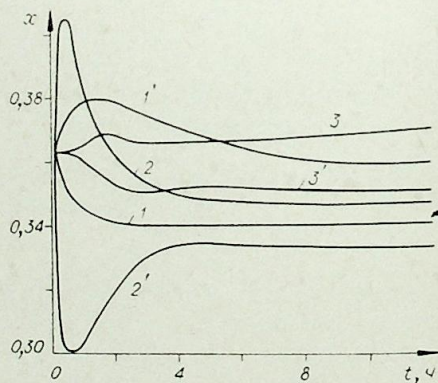


Рис. 3. Кривые переходных процессов по концентрации третьего компонента в кубе при ступенчатом возмущении по следующим параметрам:  $D$  (1);  $F$  (2);  $L_d$  (3).

Кривые 1-3 — соответствуют увеличению потоков на 20%, а 1'-3' — уменьшению потоков на 20%.

На основе этого алгоритма создана программа и сделаны расчеты статических и динамических характеристик для промышленной многотарельчатой колонны К-101. В колонну подается на разделение сырьевых режимов в колонне К-101 по концентрации, при подаче ступенчатого возмущения  $\pm 20\%$  по следующим параметрам:  $F$ ,  $D$ ,  $L_d$ . Все переходные процессы начинаются от одного и того же статического режима при  $L_d = 1015,49$  кмоль/ч;  $D = 247,037$  кмоль/ч;  $F = 973,351$  кмоль/ч;  $z_{f1} = 0,019233$ ;  $z_{f2} = 0,222481$ ;  $z_{f3} = 0,299617$ ;  $z_{f4} = 0,165821$ ;  $z_{f5} = 0,233551$ ;  $z_{f6} = 0,059297$ .

## ВЫВОДЫ

1. Рассмотрена модель процесса ректификации с переменными потоками взаимодействующих сред.
2. Разработан численный алгоритм и программа расчета нестационарных режимов многокомпонентной ректификации.
3. Разработанная методика применена для промышленных ректификационных колонн К-402, К-101.

Вычислительный центр СО АН СССР,  
Красноярск

Поступила в редакцию  
4/VIII 1980

В. М. ГРАДОВ, А. М. ЗИМИН, В. А. ПРЕОБРАЖЕНСКИЙ,  
Ю. И. ТЕРЕНТЬЕВ, А. А. ЩЕРБАКОВ

РАСЧЕТ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЭНЕРГИЙ  
ИМПУЛЬСНЫХ ГАЗОРАЗРЯДНЫХ ЛАМП

Исследование предельных энергетических нагрузок импульсных газоразрядных ламп отражено в большом количестве публикаций (подробная библиография дана в [1, 2]). В [1] на основе анализа экспериментов с лампами, конструктивные параметры и начальное давление наполнения  $p_0$  которых менялись в широких пределах, дана классификация предельных режимов работы ламп. В основе ее лежат два механизма разрушения баллона: давлением продуктов эрозии оболочки и давлением наполняющего газа. Первый механизм действует в нормальных и аномально «мягких» режимах, второй — в «жестких» режимах. При этом в области нормальных режимов экспериментальные данные группируются вблизи зависимости предельной энергии от длительности импульса, определяемой формулой [3]:

$$W_{пр}^0 = 3250 \sqrt{\tau}, \quad (1)$$

где  $\tau$  дается в с,  $W_{пр}^0$  — в Дж/см<sup>2</sup>.

Аномально «мягкие» режимы характеризуются повышенными значениями предельной энергии  $W_{пр}$  по сравнению с (1) (эти режимы соответствуют малым  $\tau$ ), а «жесткие» режимы — изменением вида связи  $W_{пр}$  с  $\tau$ : предельная энергия оказывается пропорциональной  $\tau$ , причем наибольшие значения  $W_{пр}$  лежат в области величин энергий, определяемых формулой (1).

В обзоре [2] обобщены экспериментальные данные по зависимости предельных энергий от  $p_0$ , толщины стенок  $\delta$ , рода наполняющего газа, соотношения балластного и рабочего объемов, условий работы источников излучения и ряда других параметров.

В целом результаты экспериментов дают достаточно сложную картину, которая отражает многообразие факторов, определяющих характер связи предельной энергии с основными параметрами ламп. Объяснение этих связей настоятельно требует разработки теории, позволяющей непротиворечиво интерпретировать весь комплекс опытных данных.

В литературе нашли отражение некоторые теоретические построения [1, 3—5]. Критический анализ работ [4, 5] дан в [1]. Отметим, что как формулы [4, 5], так и формулы [1] для предельной энергии базируются на относительно произвольном оперировании с рядом параметров, вариация которых позволяет обеспечить удовлетворительное совпадение данных расчета и эксперимента. Среди этих параметров такие, как момент начала испарения, глубина проникновения паров в разряд, температура и давление паров.

В настоящей работе на основе ранее выполненных исследований [6—11] разработан последовательно расчетный метод, позволяющий по заданным конструктивным и электрофизическим параметрам относительно просто прогнозировать предельные энергии ламп.

Рассматривается импульс (прямоугольной формы и длительностью  $\tau$ ) вводимой в лампу мощности. В развитии процессов в разряде и оболочке выделяются два этапа, первый из которых длится от начала разряда до момента начала испарения, а второй продолжается от  $t_1$  до конца импульса. На первом этапе температура внутренней поверхности изменяется от начальной  $T_0$  до  $T_1$ , при которой внутренней поверхности материала стенок сравнивается с рабочим давлением насыщенных паров нейшем  $T_1$  меняется мало. В конце импульса давлением в разряде  $p_1$ . В дальнейшем становится равным разрывному  $p_p$ , при котором давление в разрядной трубке достигают критических значений  $\sigma_p$ .

Процесс испарения материала стенок на протяжении второго этапа рассматривается в предположении, что пары не смешиваются с ксенонаходящаяся в газодинамическом равновесии со столбом ксеноновой плазмы и оттесняющая газ к центру трубки по мере своего развития. Обоснование этих предположений дают расчеты, выполненные в соответствии с [6].

Температурное состояние плазмы на обоих этапах характеризуется единой по всему сечению разряда температурой.

Переходя к математической формулировке этой физической модели, определим вначале тепловой поток  $F_\tau$ , отводимый в стенку за счет теплопроводности на этапе испарения. Для этого надо решить задачу:

$$a^2 \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial T(y,t)}{\partial t},$$

$$I. 0 \leq t \leq t_1: T(x, 0) = T_0, 0 \leq x \leq \infty,$$

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = -\frac{F_{ст1}}{\lambda}, T(\infty, t) = T_0.$$

$$II. t_1 \leq t \leq \tau: T(x, 0) = T(x, t_1), 0 \leq x \leq \infty,$$

$$T(0, t - t_1) = T(0, t_1) = T_1, T(\infty, t - t_1) = T_0.$$

Здесь  $a^2$ ,  $\lambda$  — коэффициенты температуро- и теплопроводности оболочки,  $x$  — координата, отсчитываемая от внутренней поверхности стенки,  $F_{ст1}$  — плотность теплового потока на стенку, который обусловлен теплопроводностью плазмы и ее излучением в коротковолновых областях спектра за границей пропускания излучения материалом трубки. В результате решения

$$F_\tau = \frac{2F_{ст1}}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{t_1}{t - t_1}}, \quad (2)$$

где

$$F_{ст1} = \frac{\lambda \sqrt{\pi}}{2 \sqrt{a^2 t_1}} (T_1 - T_0). \quad (3)$$

Температура  $T_1$  рассчитывается при давлении  $p_1$  по соотношению [13]:

$$p_1 = A e^{B - C/T_1}, \quad (4)$$

где  $A = 0,1$ ,  $B = 18,48$ ,  $C = 57800$ ,  $p_1$  дается в МПа.

Запишем баланс энергии на стенке на этапе испарения в виде

$$F_{ст2}(\tau - t_1) = W_\tau + W_n, \quad (5)$$

$$\text{где } W_\tau = \int_{t_1}^{\tau} F_\tau dt = \frac{2F_{ст1}\tau}{\pi} \left[ \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} + \sqrt{\xi(1-\xi)} - \frac{\pi\xi}{2} \right], \quad (6)$$

$W_n$  — энергия, затрачиваемая на испарение в течение отрезка времени

$[t_1, \tau]$ , отнесенная к единице площади внутренней поверхности оболочки,  $\xi = t_1/\tau$ ,

$$F_{ст1} = \frac{W_{пр}\eta_1}{\tau}, \quad (7)$$

$$F_{ст2} = \frac{W_{пр}\eta_2}{\tau}, \quad (8)$$

$\eta_1, \eta_2$  — доли потерь энергии на стенке на доиспарительной стадии и на этапе испарения соответственно.

Из (3) с учетом (7) следует формула для предельной энергии

$$W_{пр} = \frac{\sqrt{j}}{2} \cdot \frac{(T_1 - T_0)}{\eta_1} \cdot \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{\xi}}. \quad (9)$$

Здесь  $j = \lambda c \rho$ ,  $c, \rho$  — теплоемкость и плотность материала оболочки лампы.

Из (5), (8) нетрудно показать, что значения параметра  $\xi$  в (9) определяются долей затрат энергии на испарение. Вопрос в том, как определить затраты энергии на испарение для каждого конкретного случая.

В свете изложенной выше физической модели процессов метод расчета предельных энергий базируется на использовании следующих группы уравнений.

1. Уравнения, связывающие характеристики ксенонового разряда:

$$R_{ст} = 2,09 \cdot 10^{-2} p_e^{0,284} j^{-0,474} R^{-2,12}, \quad (10)$$

$$p = 16,7 \cdot p_e^{0,82} j^{0,4} R^{0,11}, \quad (11)$$

$$T_{пл} = 0,762 \cdot 10^4 p_e^{-0,074} j^{0,193} R^{0,044}. \quad (12)$$

Здесь  $R_{ст}$  — сопротивление плазменного столба единичной длины в Ом/см;  $j$  — плотность тока в кА/см<sup>2</sup>;  $p_e$  — эффективное начальное давление в МПа, равное  $p_i = nkT_n \cdot 10^{-6}$ , где  $n$  — концентрация в разрядном промежутке тяжелых частиц, остающихся после ухода части газа в балластные объемы;  $k$  — постоянная Больцмана;  $T_n = 293$  К,  $T_{пл}$  — средняя по сечению температура плазмы в К;  $p$  — давление ксенона в разряде в МПа;  $R$  — внутренний радиус разрядной трубки в см.

Уравнения (10)–(12) получены путем обработки методом [14] результатов работ [7–11]. Учитывая, что удельная электрическая мощность, вкладываемая в разряд  $\langle W \rangle = j^2 R_{ст} \cdot \pi R^2$ , найдем ее с помощью (10)–(12) (при этом  $\langle W \rangle$  в Вт/см<sup>3</sup>)

$$\langle W \rangle = H_1 T_{пл}^{7,9}, \quad (13)$$

$$p = S_1 T_{пл}^{2,07}, \quad (14)$$

где

$$H_1 = 1,41 \cdot 10^{-26} \frac{p_e^{0,87}}{R^{0,47}}, \quad S_1 = 1,54 \cdot 10^{-7} p_e^{0,97}. \quad (15)$$

Помимо (13) для дальнейших расчетов понадобится соотношение, в котором  $\langle W \rangle$  выражено через  $p$  и  $T_{пл}$ :

$$\langle W \rangle = 1,47 \cdot 10^{-20} \frac{p^{0,888} T_{пл}^{6,07}}{R^{0,49}}. \quad (16)$$

Сравнение результатов расчета по формуле (16) с данными экспериментов [15, 16] приведено на рис. 1.

2. Уравнения, связывающие параметры процессов в стенке и характеристики разряда на этапе до испарения:

$$t_1 = f \left( \frac{1}{R\eta_1} \right)^2 \frac{1}{\langle W \rangle^2} \left( \frac{c}{B - \ln \frac{S_1}{A} - 2,07 \ln T_{пл1}} - T_0 \right)^2, \quad (17)$$

где  $T_{пл1}$  — температура чистой ксеноновой плазмы на доиспарительном этапе. Выражение (17) получено из (3), (4), (14) с учетом соотношения  $F_{ст1} = \langle W \rangle \eta_1 \frac{R}{2}$ .

3. Уравнения, описывающие процессы в плазме на этапе испарения в момент окончания импульса ( $t = \tau$ ):

$$\frac{\langle W \rangle_{п}}{\langle W \rangle_{Xe}} = \frac{\sigma_{п}}{\sigma_{Xe}} = m, \quad (18)$$

$$\langle W \rangle_{Xe} R_r^2 + \langle W \rangle_{п} R^2 \left( 1 - \frac{R_r^2}{R^2} \right) = \langle W \rangle R^2, \quad (19)$$

$$p_p = p_e (1 + x_j) \frac{R_r^2}{R^2} \cdot \frac{T_{пл2}}{T_n}, \quad (20)$$

$$p_p = \frac{N_n \cdot k T_{пл2}}{\pi R^2 \left( 1 - \frac{R_r^2}{R^2} \right)}. \quad (21)$$

Здесь  $\langle W \rangle_{Xe}$  и  $\langle W \rangle_{п}$  — удельные электрические мощности, вкладываемые в центральную зону чистого ксенона и периферийную область разряда, паровую оболочку соответственно,  $\sigma_{Xe}$  и  $\sigma_{п}$  — коэффициенты электропроводности ксеноновой плазмы и плазмы продуктов эрозии при температуре  $T_{пл2}$  и давлении  $p_p$ ,  $R_r$  — внутренний радиус паровой оболочки (расстояние от оси до границы раздела зон разряда),  $N_n$  — полное число частиц в паровой оболочке единичной длины,  $x_i$  — степень ионизации ксеноновой плазмы при температуре  $T_{пл2}$  и давлении  $p_p$ .

Из (16), (18)–(21) следует выражение

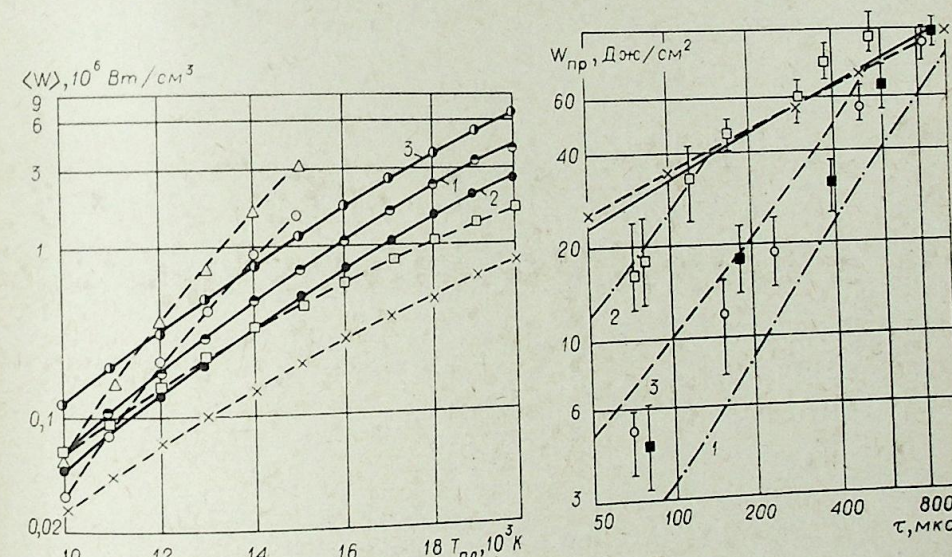


Рис. 1. Зависимость удельной электрической мощности, вводимой в разряд, от рабочего давления в лампе, температуры плазмы и радиуса трубки.

1–3 — расчетные данные;  $\circ, \Delta, \square, \times$  — эксперимент.  $\circ, \Delta$  — [15],  $\square, \times$  — [16];  $p = 1,5$  ( $\circ$ ),  $3,0$  МПа ( $\Delta$ );  $R = 0,35$  ( $\square$ ),  $0,8$  см ( $\times$ ).  
1 —  $p = 1,5$  МПа;  $R = 0,35$  см; 2 —  $p = 1,5$ ;  $R = 0,8$ ; 3 —  $p = 3,0$  МПа;  $R = 0,35$  см.

Рис. 2. Зависимость предельной энергии лампы, отнесенной к 1 см<sup>2</sup> внутренней поверхности, от длительности разряда.

$R = 0,78$  см. Сплошная линия — график зависимости (1).  $\times, 1, 2, 3$  — расчетные данные,  $\square, \circ, \Delta$  — экспериментальные результаты, 1, 2, 3 — экспериментальные результаты, 1, 2, 3 — экспериментальные результаты.  $p_0 = 0,08$  МПа,  $\delta = 0,15$  см,  $p_p = 2,6$  МПа; 2,  $p_0 = 0,04$ ,  $\delta = 0,15$  см,  $p_p = 2,6$ ; 3,  $p_0 = 0,04$ ,  $\delta = 0,16$  см,  $p_p = 2,6$ ;  $x, p_0 = 0,007$ ,  $\delta = 0,15$  см,  $p_p = 3,4$ .

$$\frac{\langle W \rangle}{m + (1-m) \frac{p_e}{p_p} (1+x_i) \frac{T_{пл_2}}{T_{пл_1}}} = 1,47 \cdot 10^{-20} \frac{p_p^{0,888} \cdot T_{пл_2}^{6,07}}{R^{0,49}} \quad (22)$$

Затраты энергии на испарение, отнесенные к 1 см<sup>2</sup> внутренней поверхности, находятся по формуле

$$W_{II} = \frac{N_{II} g_{II}}{\kappa \cdot 2\pi R} \quad (23)$$

где  $g_{II} = 8,6 \cdot 10^{-19}$  Дж — затраты энергии на испарение одной молекулы SiO<sub>2</sub>, а параметр  $\kappa$  определяет количество частиц, образующихся при температуре плазмы  $T_{пл_2}$  и давлении  $p_p$  из одной молекулы SiO<sub>2</sub>.

Из (20), (21), (23) находим

$$W_{II} = \frac{p_p g_{II}}{2\kappa k T_{пл_2}} R \left[ 1 - \frac{p_e}{p_p} (1+x_i) \frac{T_{пл_2}}{T_{пл_1}} \right] \quad (24)$$

Для записи последнего необходимого соотношения воспользуемся уравнением (5) и формулами (6), (8), (24).

$$\langle W \rangle \eta_2 I_1 = \frac{p_p g_{II}}{\kappa k T_{пл_2}} R \left[ 1 - \frac{p_e}{p_p} (1+x_i) \frac{T_{пл_2}}{T_{пл_1}} \right] \quad (25)$$

$$\text{где } I_1 = \tau - (1-\eta) t_1 - \frac{2}{\pi} \eta \left[ \tau \cdot \text{arctg} \sqrt{\frac{t_1}{\tau-t_1}} + \sqrt{t_1(\tau-t_1)} \right], \quad (26)$$

$$\eta = \eta_1/\eta_2.$$

Система уравнений, на основе которой производятся расчеты предельных нагрузок, включает уравнения (13), (17), (22), (25), (26) и содержит четыре неизвестных величины:  $\langle W \rangle$ ,  $t_1$ ,  $T_{пл_1}$ ,  $T_{пл_2}$ , определив которые можно найти  $p_i$  из (14),  $R_r$  из (20) и предельную энергию по формуле  $W_{пр} = \langle W \rangle \frac{R}{2} \tau$ .

В качестве исходных данных для расчета задаются следующие параметры:  $R$ ,  $p_0$ ,  $\tau$ ,  $j$ ,  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ ,  $p_p$ .

Значения  $\eta_1$  вычисляются по формуле

$$\eta_1 = 0,24 \cdot 10^{-7} p_e^{-0,102} \cdot \langle W \rangle^{0,094} R^{-0,105} \lambda_r^{2,78}$$

где  $\langle W \rangle$  берется в кВт/см<sup>2</sup>,  $\lambda_r$  — коротковолновая граница пропускания излучения кварцем в нм. Значения  $\eta_2$  находятся выборкой из соответствующего массива данных.

Для установления связи разрывного давления с  $\delta$  и  $\sigma_p$  можно воспользоваться соотношением [17]:

$$p_p = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2 + 1} \sigma_p,$$

где  $\gamma = \frac{R + \delta}{R}$ . Полученная система уравнений решается на ЭВМ.

Учитывая, что параметры  $\kappa$  и  $m$  — слабо меняющиеся функции от  $T_{пл_2}$ , а результаты счета мало чувствительны к значениям  $x_i$ , требуется 1–2 итерации по этим параметрам, которые не вносят особых осложнений в расчет.

Остается учесть возможность взрыва баллона под действием давления нагретого наполняющего газа («жесткий» режим). Соответствующую формулу получим, воспользовавшись (13), (14):

$$W_{пр} = 0,75 \frac{p_p^{3,82}}{p_e^{2,84}} R^{0,53} \tau. \quad (27)$$

В тех случаях, когда баллон разрывается давлением нагретого газа, система уравнений (13), (17), (22), (25), (26) не имеет решения.

Получение конкретных результатов на основе описанного метода предполагает знание зависимости параметров  $\kappa$ ,  $x_i$  и  $m$  от температуры и давления плазмы. В настоящей работе необходимые для определения  $\kappa$ ,  $m$  и  $x_i$  данные по составу плазмы ксенона и продуктов эрозии оболочек проводимости плазмы ксенона и паров, через которые определяется параметр  $m$ , находили методом Фроста [19].

Обсудим полученные результаты.

В режимах с испарением (рис. 2) расчетные данные близки к экспериментальной зависимости (1). При этом, как и в экспериментах,  $W_{пр}$  незначительно меняется при изменении разрывного давления (или  $\delta$ ) и начального давления. В области сокращенных длительностей импульса ( $\tau < 100-150$  мкс) расчетные точки плавно отходят от кривой, даваемой соотношением (1), в сторону больших энергий, располагаясь в поле разброса данных экспериментов, соответствующих аномально «мягким» режимам. В случае относительно высоких давлений наполнения газа (см. рис. 2, кривые 1–3) предельные энергии при изменении длительности разряда, начиная с некоторых значений  $\tau$ , описываются формулой (27), т. е. разрывное давление в трубке создается нагретым газом при отсутствии испарения. Расчетные кривые на рис. 2 соответствуют конкретным типам ламп, для которых в [1] указаны размеры балластных объемов и разрывные давления. При этом эффективные давления  $p_i$ , соответствующие заданным начальным давлениям  $p_0$ , для каждого  $\tau$  рассчитывали по формулам (2)–(30) из [1]. Рис. 2 иллюстрирует хорошее, как качественное, так и количественное совпадение теории и эксперимента.

Отметим также, что формула (27) демонстрирует сильную зависимость  $W_{пр}$  от  $p_p$  и  $p_i$ . Следовательно, неизбежные отклонения в прочностных свойствах баллона различных образцов ламп одного типа должны приводить к значительному разбросу в  $W_{пр}$ , что и наблюдается в эксперименте. В соответствии с экспериментально установленным фактом сильного влияния величины заэлектродных объемов на  $W_{пр}$  [2] находится и резкая зависимость  $W_{пр}$  от  $p_i$ .

Таким образом, общий анализ полученных расчетных данных свидетельствует о том, что обсуждаемый метод расчета дает результаты, разумно согласующиеся с выработанными на основе экспериментов современными представлениями о предельных режимах работы источников излучения.

Проведем более детальный анализ предельных энергетических нагрузок.

При фиксированной длительности импульса величина  $W_{пр}$ , как показывает (9), зависит от свойств материала баллона, определяемых коэффициентом  $j$ , условий работы ламп, характеризуемых долей потерь энергии  $\xi$  и температуры  $T_1$ , относительного времени начала испарения  $f$ ,  $\eta_1$  и  $A$  мало влияют на величину  $\xi$ . Поэтому характер зависимости  $W_{пр}$  от  $f$  и  $\eta_1$  расценивается по формуле (9) при  $\xi = \text{const}$ . Для кварца значение  $f$ , усредненное по данным [20, 21] в характерном диапазоне изменения температур внутренней поверхности баллона, принималось во всех дальнейших расчетах равным  $0,35 \text{ Дж}^2/\text{с} \cdot \text{см} \cdot \text{град}^2$ .

Зависимость предельной энергии от  $\eta_1$  показана на рис. 3. На этом и последующих рисунках представлена величина  $W_{пр}/W_{пр}^0$ , характеризующая отклонение рассчитанного по изложенному методу значения  $W_{пр}$  от результата вычислений по (1). Рис. 3 дает представление о влиянии светооптических установок на предельную энергию работающих в их

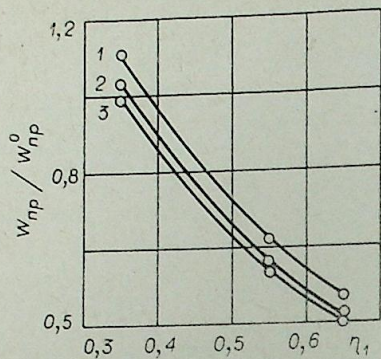


Рис. 3. Зависимость отношения  $W_{пр}/W_{пр}^0$  от условий работы ламп в осветителях при разных длительностях разряда. 1)  $\tau=50$  мкс (2), 300 (2), 1000 мкс (3).

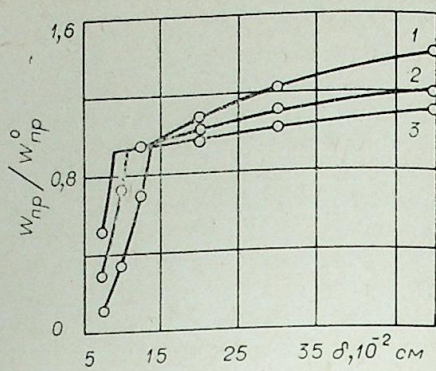


Рис. 4. Зависимость предельных энергий от толщины стенок.  $R=0,8$  см,  $p_e=0,04$  МПа. Обозначения те же, что и на рис. 3.

составе ламп. Работа ламп в этом случае сопровождается воздействием на них собственного отраженного излучения, в результате которого доля энергетических потерь на оболочке увеличивается [11].

Рассмотрим зависимость  $W_{пр}$  от конструктивных параметров ламп ( $R$ ,  $\delta$ ) и начального давления  $p_e$ . В качестве значения разрушающего напряжения принято  $\sigma_p = 2 \cdot 10^7$  н/м<sup>2</sup> [22]. Для ламп с малыми размерами трубки ( $R=0,35$  см) и малыми  $p_e$  предельные режимы в широком диапазоне изменения  $\delta$  реализуются при испарении оболочки. С увеличением  $p_e$  и  $R$  при малых  $\delta$  (малых  $p_p$ ) взрыв баллона происходит под действием давления нагретого газа (рис. 4). При этом для кривых характерен резкий излом, соответствующий переходу от одного механизма разрушения к другому. В области значений  $\delta > 0,15$  см, где реализуется режим с испарением, зависимость  $W_{пр}$  от  $\delta$  слабая. Наоборот, в «жестких» режимах ( $\delta < 0,15$  см), когда значения  $W_{пр}$  определяются формулой (27), зависимость  $W_{пр}$  от  $p_p$  и соответственно  $\delta$  весьма резкая.

Если возрастание  $p_p$  (толщины стенки) ведет, как было разобрано выше, к росту  $W_{пр}$ , то зави-

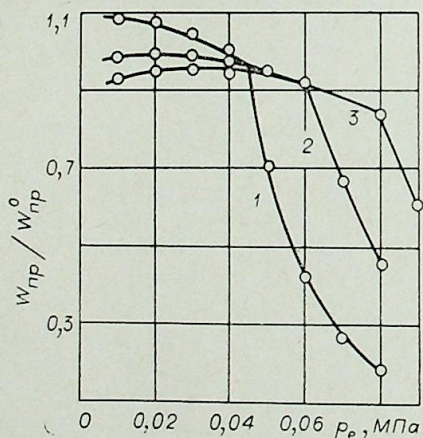


Рис. 5. Зависимость предельных энергий от начального давления.  $R=0,8$  см,  $\delta=0,15$  см. Обозначения те же, что и на рис. 3.

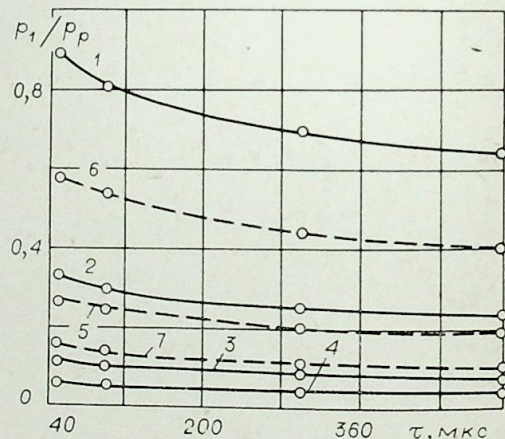


Рис. 6. Влияние различных параметров ламп и длительности разряда на давление в разряде на доиспарительной стадии. 1—3 —  $R=0,35$  см,  $\delta=0,15$  см, ( $p_p=6,85$  МПа); 1 —  $p_e=0,08$  МПа, 2 — 0,02, 3 — 0,005. 4 —  $R=0,35$ ,  $\delta=0,5$  ( $p_p=14,2$  МПа),  $p_e=0,005$  МПа. 5, 6 —  $R=0,8$ ,  $\delta=0,15$  ( $p_p=3,4$ ), 5 —  $p_e=0,007$ , 6 — 0,02 МПа. 7 —  $R=0,8$  см,  $p_e=0,007$  МПа,  $\delta=0,3$  ( $p_p=6,16$  МПа). Сплошные кривые —  $R=0,35$  см, пунктирные —  $R=0,8$  см.

симость  $W_{пр}$  от начального давления  $p_e$  (то же самое будет и в зависимости  $W_{пр}$  от  $p_0$ ) оказывается более сложной (рис. 5). В режимах разрушения давлением газа (большие  $R$  и  $p_0$ ) кривые имеют резкий излом (аналогичный рассмотренному на рис. 4). В экспериментах также наблюдались подобные зависимости  $W_{пр}$  от  $p_0$  (сводка результатов опубликованных данных приводится в [2]).

Экстремальный характер зависимости  $W_{пр}$  от  $p_e$  (или  $p_0$ ) в режимах с испарением объясняется тем, что с увеличением начального давления ксенона при фиксированном  $p_p$  возрастает давление в разряде  $p_1$  на доиспарительной стадии (рис. 6) и соответственно растет  $T_1$ . Одновременно падает доля затрат энергии на испарение, так как сокращается разность давлений ( $p_p - p_1$ ). При этом  $\xi$  должно увеличиваться, что подтверждается и прямыми расчетами. Конкуренция двух этих факторов — рост  $T_1$  и  $\xi$  (см. формулу (9)) и определяет вид получаемых зависимостей.

При обсуждении способов расчета  $W_{пр}$  говорилось о некорректности определения  $W_{пр}$  на основе задания каких-то фиксированных значений температуры плазмы и области распространения паров. Расчеты показывают, что температура разряда меняется как в течение импульса  $T_{пл2}$  может превышать  $T_{пл1}$  более чем в 1,4 раза), так и в зависимости от  $p_e p_p$  и  $R$ . Точно так же существует широкий набор значений размеров паровой оболочки при различных условиях. Все это лишним раз подтверждает целесообразность замкнутого метода расчета  $W_{пр}$ .

В заключение отметим, что изложенный метод расчета предельных энергетических нагрузок ламп справедлив, если импульс вводимой в разряд мощности имеет прямоугольную форму. При формах импульса другого вида (колоколообразном, экспоненциальном) некоторые детали процессов будут иными, в частности иными будут значения времени начала испарения  $t_1$ . Тем не менее проведенное в настоящей работе сопоставление результатов расчета с выводами, к которым приводит анализ опытных данных, позволяет утверждать, что, по-видимому, основные черты реальных физических процессов, сопровождающих работу ламп в предельных режимах, рассмотренная в статье теория отражает верно. Эта теория непротиворечиво описывает обширный комплекс экспериментальных данных и обладает достаточно широкими возможностями, чтобы служить важным средством исследования зависимостей предельных энергетических нагрузок источников излучения от их конструктивных и электрофизических параметров, а также условий работы.

Московское высшее техническое училище  
им. Н. Э. Баумана

Поступила в редакцию  
8/VII 1980

#### ЛИТЕРАТУРА

- Импульсные источники света/Под ред. И. С. Маршака. М.: Энергия, 1978.
- Розанов А. Г. Предельные энергетические нагрузки импульсных газоразрядных источников оптического излучения для накачки лазеров. Обзоры по электронной технике. Сер. IV. М.: ЦНИИ Электроника, 1979, вып. 3 (636).
- Кирсанов В. П., Маркелова С. И., Трошкин С. В. Пределы нагрузок импульсных ламп. — Квантовая электроника, 1973, № 6 (18).
- Белоусова Л. Е., Кирсанов В. П., Маршак И. С. К вопросу о предельных термических нагрузках импульсных трубчатых ламп при испарении стенок в режиме короткой вспышки. — Светотехника, 1973, № 2.
- Градов В. М., Терентьев Ю. И., Щербак А. А. Численное моделирование нестационарных разрядов в режиме испарения стабилизирующей оболочки. — В кн.: V Всесоюз. конф. по физике низкотемпературной плазмы. Тез. докл., ч. 1. Киев, Ин-т ядерных исследований АН УССР, 1979.
- Градов В. М., Щербак А. А. Расчет нестационарного дугового ксенонового разряда совместно с ограничивающей его стенкой. — ЖТФ, 1979, 49, № 6.

8. Градов В. М., Щербаков А. А. Расчет излучательных характеристик дуговых криптоновых и ксеноновых разрядов.— Оптика и спектроскопия, 1949, 47, вып. 4.
9. Градов В. М., Щербаков А. А. Расчет электрофизических характеристик дуговых разрядов в криптоне и ксеноне.— ТВТ, 1979, 17, № 6.
10. Градов В. М., Петрикевич Б. Б., Щербаков А. А. Теоретическое и экспериментальное исследование источников высокоинтенсивного излучения, применяемых для моделирования теплового нагружения.— ИФЖ, 1980, 38, № 3.
11. Градов В. М., Дорогов В. Г., Константинов Б. А. и др. Методы расчета систем накачки твердотельных лазеров.— Обзоры по электронной технике. Сер. IV. М., 1978, вып. 10 (539).
12. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
13. Schick H. L. A Thermodynamic Analysis of the High — Temperature Vaporization Properties of Silica.— Chem. Rev., 1960, 60.
14. Статистические методы обработки эмпирических данных. Рекомендации. М.: Изд-во стандартов, 1978.
15. Ровинский Р. Е. Расчет характеристик квазистационарной стадии импульсного разряда.— ТВТ, 1977, 15, № 2.
16. Андреев С. И. К расчету ограниченных стенками импульсных разрядов в ксеноне.— ЖТФ, 1975, 45, № 5.
17. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979.
18. Метод универсальный алгоритм и программа термодинамического расчета многокомпонентных гетерогенных систем/Под ред. Г. Б. Синярева. М., 1978.
19. Митчнер М., Кругер Ч. Частично ионизованные газы. М.: Мир, 1976.
20. Мень А. А., Чечельницкий А. З. О теплопроводности плавленого кварца.— ТВТ, 1973, 11, № 6.
21. Мень А. А., Сергеев О. А. Теплофизические свойства плавленого кварца и лучистая составляющая теплопереноса.— ДАН СССР, 1972, 203, № 6.
22. Андреев Ю. П., Браиловская Р. В., Воскресенская Н. А. Физико-технические свойства кварцевых стекол для оболочек источников высокоинтенсивного света.— Обзоры по электронной технике. Сер. «Электровакuumные и газоразрядные приборы», вып. 8 (407). М., 1976.

В. С. ЗАХАРИН, З. Г. КАГАНОВ, Л. С. МЕДВЕДЕВА

## ПРИМЕНЕНИЕ Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ПОЛИНОМОВ ЧЕБЫШЕВА К АНАЛИЗУ РЕГУЛЯРНО-НЕОДНОРОДНЫХ ЦЕПНЫХ СХЕМ

Цепные схемы широко применяются как физические и математические модели электротехнических устройств с распределенными параметрами. Однородные цепные схемы (ОЦС) были исследованы с помощью полиномов Чебышева и «собственных чисел» в [1, 2].

В данной работе эти же методы обобщаются на регулярно-неоднородные цепные схемы (РНЦС), для которых ОЦС — частный случай. В известных работах по анализу РНЦС [3—10] обычно используются те или иные методы непосредственного решения соответствующих дифференциальных уравнений, требующие определения корней весьма сложных трансцендентных уравнений. Предлагаемый метод свободен от этих фундаментальных затруднений.

В качестве исходной модели нами принята цепь, продольное сопротивление  $Z(x)$  и поперечная проводимость  $Y(x)$  которой меняются по координате  $x$  по закону (рис. 1):

$$Z(x) = Ze^{\kappa x}; \quad (1a)$$

$$Y(x) = Ye^{-\kappa x}; \quad (1b)$$

где  $x \in [0, l]$ ,  $\kappa \leq 0$  — вещественное число,  $l$  — длина цепи,  $Z, Y$  — некие постоянные, заданные в вещественной, комплексной или операторной формах.

Данная модель принята потому, что она широко распространена и, кроме того, к ней сводятся некоторые другие виды регулярных неоднородностей [4].

Непрерывная длинная линия может быть замещена цепной схемой (ЦС) из звеньев  $n = l/x_1$ , где  $x_1$  — шаг дискретизации. Продольное сопротивление  $k$ -го звена такой ЦС равно

$$Z_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} Ze^{\kappa x} dx = \frac{Z}{\kappa} (e^{\kappa h x_1} - e^{\kappa(k-1)x_1}). \quad (2)$$

Аналогично можно записать продольное сопротивление  $(k+1)$ -го звена. Отсюда следует, что для РНЦС последовательность  $Z_k$  представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем  $h$ , где

$$h = \frac{Z_{k+1}}{Z_k} = e^{\kappa x_1}. \quad (3a)$$

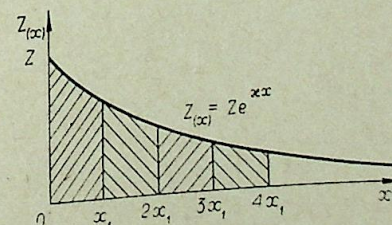


Рис. 1. Неоднородность экспоненциального типа при  $\kappa < 0$ .

По аналогии получим

$$\frac{1}{h} = \frac{Y_{k+1}}{Y_k} = e^{-\alpha x_1} \quad (36)$$

Назовем далее  $h$  коэффициентом неоднородности ЦС, причем  $h > 0$  при  $\alpha \geq 0$ . При  $h = 1$  РНЦС вырождается в ОЦС. Как известно, ЦС описываются конечно-разностными уравнениями второго порядка. Будем искать решения в полиномах Чебышева, подобно [1, 2]. При этом предварительно введем дискретное преобразование Лорана [11, 12].

Для дальнейшего анализа рассмотрим РНЦС с  $\Gamma$ -образными звеньями (рис. 2) в качестве достаточно общего примера. Для этой ЦС можно записать следующие разностные уравнения:

$$i[k+2]h - i[k+1](1+h+hZV) + i[k] = 0, \quad (4)$$

$$u[k+2] - u[k+1](1+h+hZY) + u[k] = 0, \quad (5)$$

где  $u[k]$  и  $i[k]$  — напряжение и токи на входе  $(k+1)$ -го звена.

Выражения (4)–(5) справедливы как для мгновенных значений этих величин, так и для их комплексных или операторных изображений. Применяя дискретное преобразование Лорана к решению (4)–(5) и учитывая теорему запаздывания [12], получим изображения тока и напряжения на выходе любого звена:

$$I(r) = r \frac{i[0](rh-1) - hYu[0]}{hr^2 - r(1+h+hZY) + 1}, \quad (6)$$

$$U(r) = \frac{u[0][r^2 - r(1+h+hZY) + r] - i[0]rZ}{r^2 - r(1+h+hZY) + h}, \quad (7)$$

где  $i[0]$ ;  $u[0]$  — ток и напряжение в начале РНЦС (при  $k=0$ ).

Для восстановления оригиналов  $i[k]$  и  $u[k]$  по (6) и (7) используем теорему вычетов [13]. Согласно теореме Коши, оригинал функции равен сумме вычетов по всем полюсам изображения

$$i[k] = \sum_{s=1}^{s=2} \frac{r_s^k \{i[0](r_s h - 1) - hYu[0]\}}{2r_s^k h - (1+h+hZV)}, \quad (8)$$

$$u[k] = \sum_{s=1}^{s=2} \frac{r_s^{k-1} \{u[0][r_s^2 - r_s(1+h+hZV) + r_s] - i[0]r_s Z\}}{2r_s^k h - (1+h+hZV)}, \quad (9)$$

где  $r_s = \frac{1}{\sqrt{h}}(\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 1})$  — полюсы изображения по (6);  $r_s = \sqrt{h} \times$

$\times (\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 1})$  — тоже по (7);  $\rho = \frac{1+h}{2\sqrt{h}} + \frac{\sqrt{h}}{2}ZV$  — аргумент. (10)

Определим далее входные сопротивления РНЦС из  $n$  звеньев в режимах холостого хода (XX) и короткого замыкания (КЗ).

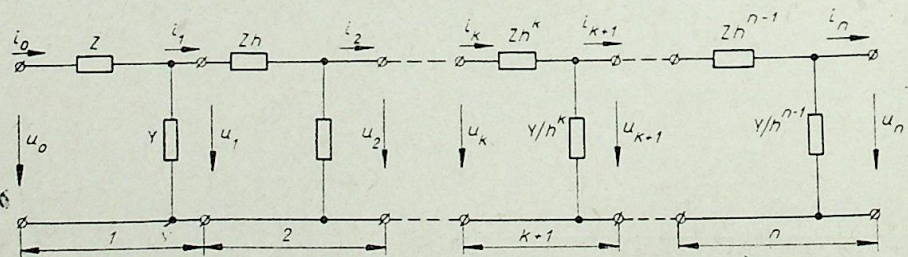


Рис. 2. Регулярно-неоднородная ЦС.

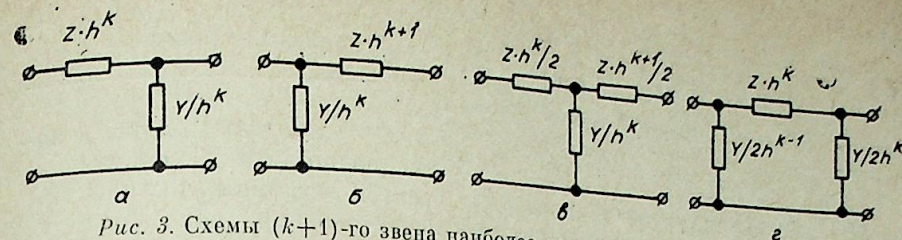


Рис. 3. Схемы  $(k+1)$ -го звена наиболее распространенных типов РНЦС.

Полагая  $i_{xx}[n] = 0$  и  $u_{кз}[n] = 0$ , получим при  $k=0$

$$Z_{XX} = \frac{hU_n(\rho) - \sqrt{h}U_{n-1}(\rho)}{h\sqrt{h}YU_{n-1}(\rho)}, \quad (11)$$

$$Z_{KZ} = \frac{ZU_{n-1}(\rho)}{U_{n-1}(\rho) - \sqrt{h}U_{n-2}(\rho)}, \quad (12)$$

где

$$U_n(\rho) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \sin[(n+1)\arccos \rho] \quad \text{при } |\rho| < 1, \quad (13a)$$

$$U_n(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\rho^2-1}} \operatorname{sh}[(n+1)\operatorname{arch} \rho] \quad \text{при } |\rho| > 1, \quad (13б)$$

полином Чебышева 2-го рода степени  $n$  для аргумента  $\rho$  по (10) [13].

Для звеньев других типов (рис. 3) входные сопротивления РНЦС могут быть получены аналогично (табл. 1). При  $h=1$  эти сопротивления, как указывалось, вырождаются и соответствуют [1]. Очевидно, что данные табл. 1 позволяют вычислить лишь входной ток  $i[0]$  по заданному воздействию  $u[0]$ , или наоборот. Для вычисления токов и напряжений в произвольных звеньях РНЦС —  $i[k]$ ;  $u[k]$  — необходимо предварительное определение передаточных функций по напряжению и току —  $W_u^{(k)}$  и  $W_i^{(k)}$ .

Таблица 1

Входные сопротивления регулярно неоднородных цепных схем

$(k+1)$ -е звено	$Z_{XX}$	$Z_{KZ}$
Рис. 3, а	$\frac{hU_n(\rho) - \sqrt{h}U_{n-1}(\rho)}{h\sqrt{h}YU_{n-1}(\rho)}$	$\frac{ZU_{n-1}(\rho)}{U_{n-1}(\rho) - \sqrt{h}U_{n-2}(\rho)}$
Рис. 3, б	$\frac{\sqrt{h}U_{n-1}(\rho) - U_{n-2}(\rho)}{Y\sqrt{h}U_{n-1}(\rho)}$	$\frac{ZU_{n-1}(\rho)}{hU_n(\rho) - hU_{n-1}(\rho)}$
Рис. 3, в	$\frac{T_n(\rho) + \frac{h-1}{2\sqrt{h}}U_{n-1}(\rho)}{\sqrt{h}YU_{n-1}(\rho)}$	$\frac{Z\left(\rho + \frac{h+1}{2\sqrt{h}}\right)U_{n-1}(\rho)}{2\left[T_n(\rho) - \frac{h-1}{2\sqrt{h}}U_{n-1}(\rho)\right]}$
Рис. 3, г	$\frac{2\left[T_n(\rho) + \frac{h-1}{2\sqrt{h}}U_{n-1}(\rho)\right]}{hY\left(\rho + \frac{h+1}{2\sqrt{h}}\right)U_{n-1}(\rho)}$	$\frac{ZU_{n-1}(\rho)}{\sqrt{h}\left[T_n(\rho) - \frac{h-1}{2\sqrt{h}}U_{n-1}(\rho)\right]}$

Примечание:  $T_n(\rho) = \cos(n \arccos \rho)$  при  $|\rho| < 1$ ,  
 $T_n(\rho) = \operatorname{ch}(n \operatorname{arch} \rho)$  при  $|\rho| > 1$  —  
 полином Чебышева 1-го ряда степени  $n$

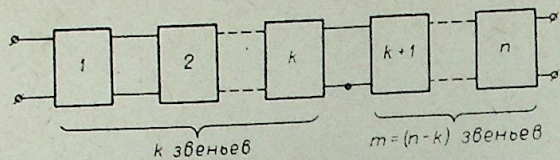


Рис. 4. К выводу входного сопротивления неполной РИЦ.

Введем понятие неполной РИЦ, считая таковой ЦС, составленную из  $m$  последних звеньев заданной (полной) ЦС (рис. 4). При этом сформулируем следующую теорему, доказываемую сравнительно просто, если воспользоваться рис. 5.

Если входное сопротивление РИЦ из  $n$  звеньев в режимах ХХ или КЗ равно  $Z_{вх}^{(n)}$ , то входное сопротивление ее последних звеньев  $m = (n - k)$  равно

$$Z_{вх}(m) = Z_{вх}^{(m)} \cdot h^k, \quad (14)$$

где  $Z_{вх}^{(m)}$  — входное сопротивление (в режимах ХХ или КЗ) полной РИЦ, состоящей из  $m = n - k$  звеньев того же типа.

Если на вход полной РИЦ из  $n$  звеньев в режиме ХХ подано напряжение  $u[0]$ , то ее входной ток равен

$$i[0] = \frac{u[0]}{Z_{вх}^{(n)}}, \quad (15)$$

где  $Z_{вх}^{(n)}$  находится по табл. 1.

Напряжение и ток на выходе 1-го звена  $u[1]$  и  $i[1]$  равны соответственно

$$u[1] = u[0] - i[0] Z; \quad (16a) \quad i[1] = \frac{u[1]}{Z_{вх}^{(n-1)} \cdot h}, \quad (16b)$$

где, согласно табл. 1,

$$Z_{вх}^{n-1} = \frac{hU_{n-1}(\rho) - \sqrt{h}U_{n-2}(\rho)}{h\sqrt{h}YU_{n-2}(\rho)}. \quad (17)$$

$U_{n-1}(\rho)$  и  $U_{n-2}(\rho)$  — соответствующие полиномы Чебышева 2-го рода, степеней  $n - 1$  и  $n - 2$ .

Определяя напряжение на выходе 2-го звена  $u[2] = u[1] - i[1]hZ$  и продолжая аналогичные выкладки, получим формулу для напряжения  $u[k]$  на выходе  $k$ -го звена. Отсюда передаточная функция по напряжению для  $k$ -го промежуточного звена рассматриваемой РИЦ в режиме ХХ равна

$$W_u[k] = \frac{u[k]}{u[0]} = (\sqrt{h})^k \frac{\sqrt{h}U_{n-k}(\rho) - U_{n-k-1}(\rho)}{\sqrt{h}U_n(\rho) - U_{n-1}(\rho)}. \quad (18)$$

Ток на выходе  $k$ -го звена, в режиме ХХ, равен

$$i[k] = \frac{u[k]}{Z_{n-k}h^k} = \frac{u[0]W_u[k]}{Z_{n-k}h^k}. \quad (19)$$

Подставляя в (19) выражения (14), (15) и (18), получим передаточную функцию по току для  $k$ -го звена РИЦ

$$W_I[k] = \frac{i[k]}{i[0]} = \frac{1}{(\sqrt{h})^k} \cdot \frac{U_{n-k-1}(\rho)}{U_{n-1}(\rho)}. \quad (20)$$

Остальные передаточные функции, определяемые аналогично для

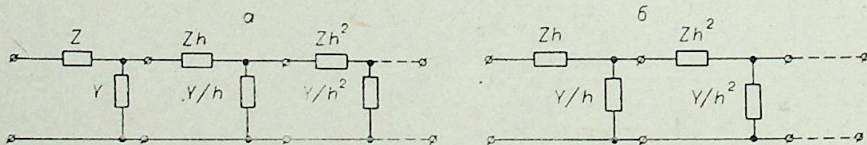


Рис. 5. Полная (а) и неполная (б) РИЦ.

режимов ХХ и КЗ, сведены в табл. 2. Как указывалось,  $u[k]$  и  $i[k]$  могут выражать напряжение и ток, заданные либо мгновенными значениями, либо их комплексными или операторными изображениями. Если  $u[k]$  и  $i[k]$  — комплексы, то формулы табл. 1 и 2 соответствуют гармоническому режиму РИЦ. Если же они представлены изображениями по Лапласу, то  $Z(p)$ ,  $Y(p)$  и  $\rho(p)$  — соответствующие операторные функции.

В [1, 14] было показано, что применение полиномов Чебышева для описания ОЦС дает возможность вычисления «собственных чисел», образующих совокупность некратных и ненулевых корней системы уравнений

$$Z_{ХХ} = 0; \quad Z_{КЗ} = 0. \quad (21)$$

Эти «собственные числа» представляют собой отрицательные, действительные величины, зависящие только от  $n$  — числа звеньев в ОЦС и

Таблица 2  
Передаточные функции регулярно неоднородных цепных схем по напряжению и току для промежуточного звена

Тип звена	$W_U^{(k)}$	
	ХХ	КЗ
Рис. 3, а	$(h)^k \cdot \frac{\sqrt{h}U_{n-k}(\rho) - U_{n-k-1}(\rho)}{\sqrt{h}U_n(\rho) - U_{n-1}(\rho)}$	$(\sqrt{h})^k \frac{U_{n-k-1}(\rho)}{U_{n-1}(\rho)}$
Рис. 3, б	$(\sqrt{h})^k \cdot \frac{\sqrt{h}U_{n-k-1}(\rho) - U_{n-k-2}(\rho)}{\sqrt{h}U_{n-1}(\rho) - U_{n-2}(\rho)}$	$(\sqrt{h})^k \frac{U_{n-k-1}(\rho)}{U_{n-1}(\rho)}$
Рис. 3, в	$(\sqrt{h})^k \cdot \frac{2\sqrt{h}T_{n-k}(\rho) + (h-1)U_{n-k-1}(\rho)}{2\sqrt{h}T_n(\rho) + (h-1)U_{n-1}(\rho)}$	$(\sqrt{h})^k \cdot \frac{U_{n-k-1}(\rho)}{U_{n-1}(\rho)}$
Рис. 3, г	$(\sqrt{h})^k \cdot \frac{2\sqrt{h}T_{n-k}(\rho) + (h-1)U_{n-k-1}(\rho)}{2\sqrt{h}T_n(\rho) + (h-1)U_{n-1}(\rho)}$	$(\sqrt{h})^k \frac{U_{n-k-1}(\rho)}{U_{n-1}(\rho)}$
Рис. 3, а	$\frac{1}{(\sqrt{h})^k} \cdot \frac{U_{n-k-1}(\rho)}{U_{n-1}(\rho)}$	$\frac{1}{(\sqrt{h})^k} \frac{U_{n-k-1}(\rho)\sqrt{h}U_{n-k-2}(\rho)}{U_{n-1}(\rho) - \sqrt{h}U_{n-2}(\rho)}$
Рис. 3, б	$\frac{1}{(\sqrt{h})^k} \cdot \frac{U_{n-k-1}(\rho)}{U_{n-1}(\rho)}$	$\frac{1}{(\sqrt{h})^k} \frac{\sqrt{h}U_{n-k}(\rho) - hU_{n-k-1}(\rho)}{\sqrt{h}U_n(\rho) - hU_{n-2}(\rho)}$
Рис. 3, в	$\frac{1}{(\sqrt{h})^k} \frac{U_{n-k-1}(\rho)}{U_{n-1}(\rho)}$	$\frac{1}{(\sqrt{h})^k} \frac{2\sqrt{h}T_{n-k}(\rho) - (h-1)U_{n-k-1}(\rho)}{2\sqrt{h}T_n(\rho) - (h-1)U_{n-1}(\rho)}$
Рис. 3, г	$\frac{1}{(\sqrt{h})^k} \frac{U_{n-k-1}(\rho)}{U_{n-1}(\rho)}$	$\frac{1}{(\sqrt{h})^k} \frac{2\sqrt{h}T_{n-k}(\rho) - (h-1)U_{n-k-1}(\rho)}{2\sqrt{h}T_n(\rho) - (h-1)U_{n-1}(\rho)}$

инвариантные к реальным структурам двухполюсников  $Z$  и  $Y$  [14].

Для РНЦС также возможно введение аналогичных величин, получаемых из системы (21), куда подставляются выражения  $Z_{XX}$  и  $Z_{K3}$  из табл. 1.

Из анализа формул табл. 1 следует, что аналитические решения системы (21) существуют при XX только для полюсов и, при КЗ, только для нулей. Все эти величины, называемые далее «аналитическими собственными числами» РНЦС, получаются как совокупность некротных и ненулевых корней характеристического уравнения

$$U_{n-1}(\rho_i) = 0. \quad (22)$$

Кроме того, по определению, сами собственные числа задаются выражением [1, 14]:

$$\lambda_i = [ZY]_i. \quad (23)$$

На основании выражения (10) получим из (23) «собственные числа» РНЦС

$$\lambda_i = [ZY]_i = -\frac{h+1}{h} + \frac{2}{\sqrt{h}} \rho_i. \quad (24)$$

Отсюда следует, учитывая (22),

$$\rho_i = \cos \frac{i}{n} \pi = \frac{1+h}{2h} + \frac{\sqrt{h}}{2} \lambda_i, \quad (25)$$

где  $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ .

Следовательно, аналитические собственные числа РНЦС можно записать так:

$$\lambda_{iXX}^n = \lambda_{iK3}^0 = \frac{v_i}{\sqrt{h}} - \left( \frac{1-\sqrt{h}}{\sqrt{h}} \right)^2, \quad (26)$$

где  $v_i$  — собственное число ОЦС [1, 14], соответствующее тому же  $n$  и той же структуре звеньев, верхние индексы означают полюс и нуль. При  $h = 1$ ,  $\lambda_i = v_i$ . Из (25) следует, что

$$-\left( \frac{1+\sqrt{h}}{\sqrt{h}} \right)^2 < \lambda_i < \left( \frac{1-\sqrt{h}}{\sqrt{h}} \right)^2, \quad (27)$$

т. е. аналитическое собственное число — всегда вещественная отрицательная величина, зависящая от числа звеньев  $n$  в РНЦС и ее коэффициента неоднородности  $h$ . К структуре звена  $\lambda_i$  инвариантно.

Для определения нулей  $Z_{XX}$  и полюсов  $Z_{K3}$  приходится решать трансцендентные уравнения, корни которых дают значения аргумента  $\rho_i$ . Так, например, для звеньев по рис. 3, а в соответствии с табл. 1 и (13а) получаем уравнение вида

$$h \sin [(n+1) \arccos \rho_i] - \sqrt{h} \sin [n \arccos \rho_i] = 0, \quad (28)$$

корни которого связаны с  $\lambda_{iXX}^0$  выражением (25).

Значения неаналитических собственных чисел  $\lambda_i$  находятся по корням  $\rho_i$  уравнений типа (28) итерационным способом. В качестве начального приближения берется значение  $\rho_i$ , соответствующее аналогичной ОЦС и всегда известное заранее. Интервал изоляции искомой величины определяется (27) и очевидным соотношением

$$\lambda_{(i-1)XX}^n > \lambda_{iXX}^0 > \lambda_{(i+1)XX}^n. \quad (29)$$

Найденные выше аналитические и неаналитические собственные числа позволяют успешно решать ряд сложных задач анализа РНЦС. В гармонических режимах они дают значения резонансных частот РНЦС, что при наличии в них диссипативных элементов другими способами найти

исключительно трудно. Кроме того, исходя из очевидного неравенства

$$|\rho_i| = \left| \frac{1+h}{2\sqrt{h}} + \sqrt{h} \frac{(ZV)_i}{2} \right| < 1, \quad (30)$$

легко получается условие прекращения резонансов, в соответствии с (24) и (13а).

В переходных режимах собственные числа позволяют весьма просто становления оригинала по теореме разложения. При этом следует отметить, что предлагаемая методика позволяет, вычислив один раз таблицы собственных чисел РНЦС, пользоваться ими при широкой вариации начальных параметров.

Сказанное иллюстрируется двумя примерами для РЦНС, состоящей из  $n$  звеньев по рис. 3, а, с параметрами  $Z(p) = R + pL$ ,  $Y(p) = pC$ , где  $R$ ,  $L$ ,  $C$  — постоянные значения сопротивления, индуктивности и емкости звена. Кроме того, задана величина  $h$ .

**Пример 1.** Найти спектр резонансных частот в режиме XX, полагая, что  $p$  — комплексная частота, равная  $p = -\delta \pm j\omega$ .

Используя методику [1, 14], получим, что показатель затухания  $\delta_i$  и резонансная частота  $\omega_i$  равны соответственно

$$\delta_i = \delta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_i = \sqrt{\omega_{0i}^2 - \delta^2}, \quad (1.1)$$

где  $\omega_{0i}^2 = \frac{|\lambda_i|}{CL}$  — характеристический параметр.

По (25) легко составляется таблица собственных чисел  $\lambda_i$ , причем критическое значение, соответствующее прекращению резонансов, задается неравенством, вытекающим из условия  $\omega_{0i}^2 > \delta^2$ :

$$|\lambda_{iKP}| \geq \frac{R^2 C}{4L}.$$

Простота решения этой задачи очевидна.

**Пример 2.** Для той же РНЦС вычислить переходную характеристику  $h(t)$  при включении ее в режиме КЗ к постоянному напряжению  $U = \text{const}$ . Известно, что

$$h(t) = \frac{i_{\text{вх}}(t)}{U},$$

где  $i_{\text{вх}}(t)$  — переходный входной ток.

По табл. 1 входное сопротивление, в операторной форме, равно

$$Z_{K3}(p) = \frac{Z(p) U_{n-1}[\rho(p)]}{U_{n-1}[\rho(p)] - \sqrt{h} U_{n-2}[\rho(p)]},$$

где  $\rho(p) = \frac{1+h}{2\sqrt{h}} + \frac{\sqrt{h}}{2} Z(p) Y(p)$  — операторный аргумент полиномов Чебышева по (23), (25). Тогда изображение входного тока равно

$$I_{\text{вх}}(p) = \frac{U(p)}{Z_{K3}(p)} = \frac{U}{p Z_{K3}(p)}. \quad (2.1)$$

Для восстановления оригинала  $i_{\text{вх}}(t)$  найдем полюсы изображения (2.1). Очевидно, что полюсам  $p = 0$  и  $Z(p) = 0$  соответствуют корни  $p_0 = 0$

$p_0 = 0$  и  $p_1' = -\frac{R}{L}$ . Уравнение  $U_{n-1}[\rho(p)]_{p=p_k} = 0$  сводится к более простому  $[Z(p)Y(p)]_i = \lambda_i$  и его корни имеют вид, аналогичный (1.1)

$$p_k = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_{0i}^2}.$$

Далее, используя методику [2] и полагая  $U = 1$ , получим

$$i_{\text{вх}}(t) = h(t) = \frac{U_{n-1}[\rho(0)] - \sqrt{h}U_{n-2}[\rho(0)]}{Z(0)U_{n-1}[\rho(0)]} + \\ + \frac{U_{n-1}[\rho(p'_1)] - \sqrt{h}U_{n-2}[\rho(p'_1)]}{p_1 Z'(p'_1)U_{n-1}[\rho(p'_1)]} e^{p'_1 t} + \\ + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{U_{n-1}[\rho(p_k)] - \sqrt{h}U_{n-2}[\rho(p_k)]}{p_k Z(p_k)U_{n-1}[\rho(p_k)]} \rho'(p_k) \cdot e^{p_k t}.$$

Анализ нагруженных ОЦС и РИЦС предполагается изложить в дальнейших публикациях.

Уфимский авиационный институт  
им. С. Орджоникидзе

Поступила в редакцию  
5/V 1980

#### ЛИТЕРАТУРА

- Захарин В. С., Каганов З. Г., Медведева Л. С. Применение полиномов Чебышева к «собственным числам» к анализу однородных цепных схем.— *Электричество*, 1977, № 12.
- Захарин В. С., Каганов З. Г., Медведева Л. С. Применение полиномов Чебышева к расчету переходных процессов в однородных цепных схемах.— *Изв. СО АН СССР*, 1977, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.
- Wagner K. W. Die theorie ungleichförmiger leitungen.— *Arch für Electrotech.*, 1942, N 2, вып. 36.
- Ломоносов В. Ю. Длинные линии с изменяющимися по длине параметрами.— *Электричество*, 1961, № 3.
- Хаяси С. Волны в линиях электропередачи. М.— Л.: ГЭИ, 1960.
- Литвиненко О. Н., Сошников В. И. Теория неоднородных линий и их применение в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1964.
- Литвиненко О. Н., Сошников В. И. Колебательные системы из отрезков неоднородных линий. М.: Сов. радио, 1972.
- Никитин Ю. П. Анализ неоднородных линий.— В кн.: Новые методы исследования в теоретической электронике и электрических измерениях. Иваново, 1968.
- Никитин Ю. П. Переходные процессы в неоднородных цепочечных соединениях.— Там же.
- Cholewicki T. Uklady drabinkowe zbiezne a równania różnicowe.— *Arch. elektrotech. (PRL)*, 1973, N 4. (РЖ электротехника, 1974).
- Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1974.
- Толстов Ю. Г., Теврюков А. А. Теория электрических цепей. М.: Высшая школа, 1971.
- Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука, 1964.
- Каганов З. Г. Цепные дроби в электротехнике, ч. 1. Новосибирск: Наука, 1966.
- Захарин В. С. Исследование динамики преобразователей на цепных схемах для управления и вычислительной техники. Автореф. канд. дис. Уфа, 1979.

УДК 621.315.616

В. А. АКСЕНОВ, Л. Ф. ХРАМОВ, Ю. Н. ШУМИЛОВ

#### ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОВЕРХНОСТНОГО СЛОЯ ИЗОЛЯТОРА

В настоящее время широко обсуждается вопрос о возможности применения косвенных методов определения изолирующей способности изоляторов воздушных линий и подстанций в районах с природными и промышленными загрязнениями [1, 2]. Сущность косвенных методов заключается в использовании экспериментально установленной связи между напряжением перекрытия и характеристиками загрязнения изоляции (плотность загрязнения, удельная поверхностная проводимость и т. д.). Это позволяет по результатам измерения характеристик загрязнения в полевых условиях оценивать изолирующую способность конструкции по предварительно найденным зависимостям. Например,  $U_{\text{в.р}} = f(\kappa)$ , где  $\kappa$  — удельная поверхностная проводимость загрязненного изолятора.

Экспериментальное определение подобных зависимостей связано со значительными трудностями. Во-первых, поверхностная проводимость в полевых условиях измеряется при отключенном напряжении, т. е. в условиях не соответствующих состоянию поверхности непосредственно перед перекрытием (без учета нагрева и подсушки поверхности протекающим током утечки). Последнее затрудняет определение таких характеристик слоя загрязнения, которые наилучшим образом отражают физические процессы в поверхностном слое и оказываются в функциональной связи с разрядными напряжениями. Во-вторых, определение необходимых зависимостей требует большого объема полевых и лабораторных исследований, так как в эксплуатации находится большое количество изоляторов различных геометрических форм и характер их загрязнения может быть самым различным. Указанные трудности можно в значительной мере преодолеть, используя математический аппарат, позволяющий заменить большую экспериментальную работу анализом результатов расчетов на ЭВМ.

С этой целью была разработана математическая модель загрязненной изоляции, которая на основе рассмотрения физических процессов в слое загрязнения позволяет для различных моментов времени (начиная с момента включения напряжения до момента образования сухой зоны) определить значение следующих величин: 1) тока утечки, 2) температуры на различных участках поверхности, 3) удельной поверхностной проводимости и удельной поверхностной проводимости различных участков изолятора, 4) распределения потенциалов и напряженности электрического поля вдоль пути тока утечки.

Таким образом, математическая модель загрязненной изоляции дает возможность определить распределение потенциалов и удельной поверхностной проводимости изоляторов в момент, предшествующий перекрытию, вне зависимости от характера начальной неравномерности загрязнения, что весьма важно для правильного определения разрядного напряжения.

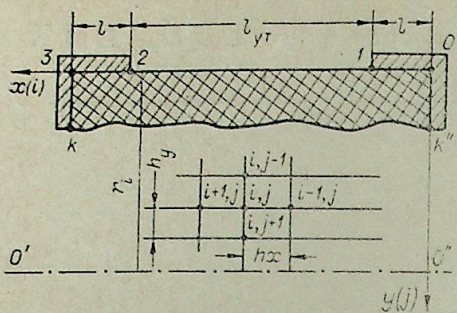


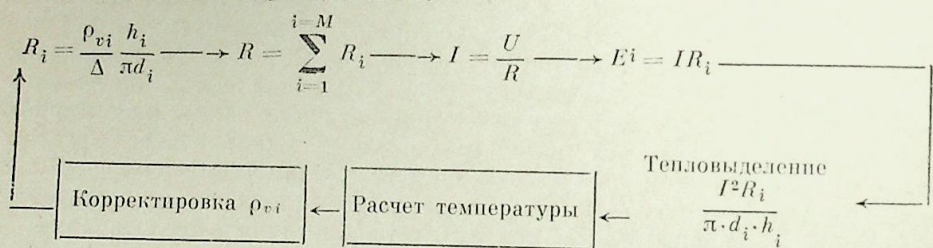
Рис. 1. Участок гладкостержневого изолятора с напесенной прямоугольной сеткой.

При разработке математической модели выбран режим работы, соответствующий включению напряжения толчком на изолятор с предварительно увлажненным до насыщения слоем загрязнения.

В этом случае составление математической модели упрощается, а физическая картина процессов в увлажненном слое не искажается (так как в поверхностном слое происходят последовательно все стадии нагрева и подсушки). Разрядные напряжения в данном режиме должны соответствовать минимальным значениям, наблюдаемым при непрерывном увлажнении [1].

Кроме того, выбирая для модели такой режим, получаем соответствие с одним из режимов испытания, рекомендованном в ГОСТе 10390-71 [3]. В предлагаемой математической модели рассматриваются различные виды неравномерного загрязнения вдоль пути тока утечки. По окружности изолятора распределение загрязнения принято равномерным.

Исходными данными к расчету являются геометрические размеры и материал изолятора, величина приложенного напряжения, величина и характер исходной (начальной) неравномерности слоя загрязнения. Для учета вида исходной неравномерности загрязнения и геометрических размеров путь утечки изолятора  $l_{гр}$  разбивается на элементарные участки  $h_i$ , для каждого из которых задаются величины начального удельного сопротивления и значения диаметра тарелки (рис. 1). В дальнейшем расчет производится по следующей схеме:



По исходному распределению удельных сопротивлений  $\rho_{vi}$  определяются сопротивления участков  $R_i$ , сумма которых дает величину  $R$  полного сопротивления поверхностного слоя  $R = \sum_{i=1}^{i=M} R_i$ . По заданному значению приложенного напряжения  $U$  и общему сопротивлению  $R$  определяется величина тока утечки  $I = U/R$  и находится распределение напряженностей участков  $E_i$  по пути утечки. По известным значениям тока утечки и сопротивлениям элементарных участков оценивается тепловыделение на каждом участке поверхности и температура  $T$ . Изменение температуры поверхности вызывает изменение начального распределения  $\rho_{vi}$ , поскольку последнее зависит от температуры. Производя корректировку значений удельного сопротивления  $\rho_{vi}$  с учетом изменившейся температуры, получаем новое распределение удельного сопротивления, по которому определяем новые значения электрических величин  $R_i$ ,  $R$ ,  $I$ ,  $E_i$  и т. д. Подобным образом расчет повторяется необходимое количество раз. Окончание расчета осуществляется по условию образования сухой зоны  $R_i = \infty$  либо по условию возникновения на одном из участков поверхности изолятора напряженности электрического поля, достаточной для перекрытия этого участка  $E_i = E_{пер}$ .

Температура поверхности находится из совместного решения уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{dT}{dt} \quad (1)$$

и уравнения теплового баланса в слое загрязнения

$$-\lambda \frac{dT}{dy} = \frac{I^2 R_i}{2\pi r_i h_i} - \alpha T_{i,j} - W(\tau, T_{i,j})r - c\gamma \Delta \frac{dT}{dt}, \quad (2)$$

где  $a$  — коэффициент температуропроводности,  $m^2/c$ , составляющие уравнения (2) имеют следующий физический смысл:  $\frac{I^2 R_i}{2\pi r_i h_i}$ ,  $Вт/м^2$  — удельное тепловыделение в пленке, возникающее при протекании тока утечки;  $\lambda \frac{dT}{dy}$ ,  $Вт/м^2$  — плотность теплового потока, направленного в глубь диэлектрика и связанного с его теплопроводностью;  $\alpha T_{i,j}$ ,  $Вт/м^2$  — теплоотвод в окружающую среду за счет теплоотдачи;  $rW(\tau, T_{i,j})$ ,  $Вт/м^2$  — тепловой поток, обусловленный испарением водяной пленки;  $c\gamma \Delta \frac{dT}{dt}$ ,  $Вт, м^2$  — тепловой поток, связанный с нагревом водяной пленки с теплоемкостью  $C$ .

Ориентировочные расчеты показали, что составляющая  $c\gamma \Delta \frac{dT}{dt}$  в виду малости толщины пленки  $\Delta$  в начальный момент времени не превышает 10% от тепловыделений  $\frac{I^2 R_i}{2\pi r_i h_i}$  и по мере высыхания поверхностного слоя уменьшается. Поэтому в расчетах пренебрегаем этой составляющей и окончательное уравнение теплового баланса имеет вид

$$-\lambda \frac{dT}{dy} = \frac{I^2 R_i}{2\pi r_i h_i} - \alpha T_{i,j} - W(\tau, T_{i,j})r. \quad (3)$$

При рассмотрении теплового баланса важно правильно определить вид функции, характеризующей интенсивность испарения влаги  $W(\tau, T_{i,j})$ . Как известно, для тонких слоев определяющим является испарение со свободной поверхности. Поскольку испарение является активационным процессом, его интенсивность будет сильно зависеть от температуры. Процесс испарения влаги из тонкого слоя цемента, каолина или другого твердого загрязнения подобен процессу сушки тонкого бумажного слоя, для которого кривая интенсивности испарения может быть описана уравнением экспоненциального типа [4]:

$$W(\tau, T_{i,j}) = A \cdot \exp(-B/T_{i,j}). \quad (4)$$

Значения коэффициентов уравнения (4), принятые первоначально равными  $A = 5 \cdot 10^7$   $кг/м^2 \cdot с$  и  $B = 8 \cdot 10^3$   $К$ , в ходе расчетов при сопоставлении экспериментальных и расчетных зависимостей были уточнены ( $A = 2 \cdot 10^8$   $кг/м^2 \cdot с$ ;  $B = 8 \cdot 10^3$   $К$ ).

Из совместного решения уравнений (1) и (3) определяют температуру поверхности диэлектрика и все зависящие от нее величины. В аналитическом виде нельзя найти решение уравнения (1) при заданных условиях (3), (6), (7), поскольку тепловыделение на поверхности изолятора в различных точках является неравномерным. Кроме того, поверхностное сопротивление отдельных участков изолятора и теплоотвод с поверхности являются сложными функциями температуры. В связи с этим температура поверхности изолятора и тепловое поле в объеме диэлектрика определялись методом сеток с использованием быстродействующей ЭВМ БЭСМ-6.

Записывая уравнения (1) и (2) в форме конечных разностей и решая

их совместно, получаем выражение (5) для определения температуры поверхности диэлектрика:

$$T_{i,j}^{m+1} = p \left[ 2T_{i,j+1}^m + \frac{h_y^2}{h_x^2} T_{i+1,j}^m + \left( \frac{1}{p} - 2 \frac{h_y^2}{h_x^2} - 2 \right) T_{i,j}^m + \frac{I^2 R_i}{2\pi r_i \lambda} \cdot \frac{h_x^2}{h_y^2} - 2h_y \frac{\alpha}{\lambda} T_{i,j}^m - 2 \frac{h_y r}{\lambda} W \right]. \quad (5)$$

Здесь  $T_{i,j}^m, T_{i,j}^{m+1}$  — значения температуры соответственно для момента времени  $m$  и непосредственно следующего за ним момента  $m+1$ ;  $p$  — критерий Фурье,  $p = a \frac{\Delta \tau}{h_y}$ .

При установлении других граничных условий исходим из следующего: для точек, расположенных под металлической арматурой, температура  $T_{i,j}^m$  для всех моментов времени может быть принята равной  $T_{\text{окр}}$  — температуре окружающей среды, так как массивная металлическая арматура обладает большой теплоемкостью и практически не изменяет температуру за время формирования сухих зон (экспериментально это подтверждается). Таким образом, для данных участков

$$T_{i,j}^{m+1} = T_{\text{окр}}. \quad (6)$$

Расчет температур в глубь диэлектрика можно производить до оси изолятора  $0' - 0''$  (см. рис. 1), где граничным условием является  $dT/dy = 0$ . При этом расчетное уравнение конечных разностей для оси  $0' - 0''$  имеет вид

$$T_{i,j}^{m+1} = p \left[ 2T_{i,j-1}^m + T_{i+1,j}^m \frac{h_y^2}{h_x^2} + T_{i-1,j}^m \frac{h_y^2}{h_x^2} + \left( \frac{1}{p} - 2 \frac{h_y^2}{h_x^2} - 2 \right) T_{i,j}^m \right]. \quad (7)$$

Уравнение теплопроводности (1) в виде конечных разностей используется для определения температуры в глубине диэлектрика:

$$T_{i,j}^{m+1} = p \left[ T_{i,j+1}^m + T_{i,j-1}^m + \frac{h_y^2}{h_x^2} T_{i+1,j}^m + \frac{h_y^2}{h_x^2} T_{i-1,j}^m + \left( \frac{1}{p} - 2 \frac{h_y^2}{h_x^2} - 2 \right) T_{i,j}^m \right]. \quad (8)$$

При выборе шага сетки и интервала времени  $\Delta \tau$  нужно учитывать, что выбор  $p$  ограничен условием  $p \leq 1/4$ . Выполнение последнего условия необходимо для обеспечения устойчивого решения уравнения (1). В наших расчетах значение  $p$  было принято равным  $1/6$ .

Соотношения (4)–(8) легко программируются и решаются методом итераций на ЭВМ БЭСМ-6.

По полученным значениям температуры производится корректировка удельного поверхностного сопротивления. При нагревании поверхностного слоя от протекающего тока утечки существуют две тенденции изменения удельной поверхностной проводимости. С одной стороны, проводимость увеличивается из-за увеличения температуры содержащегося в слое электролита (электролит имеет положительный температурный коэффициент) [5]. Выражение (9) позволяет оценить изменение удельного объемного сопротивления от температуры, обусловленное ростом проводимости электролита:

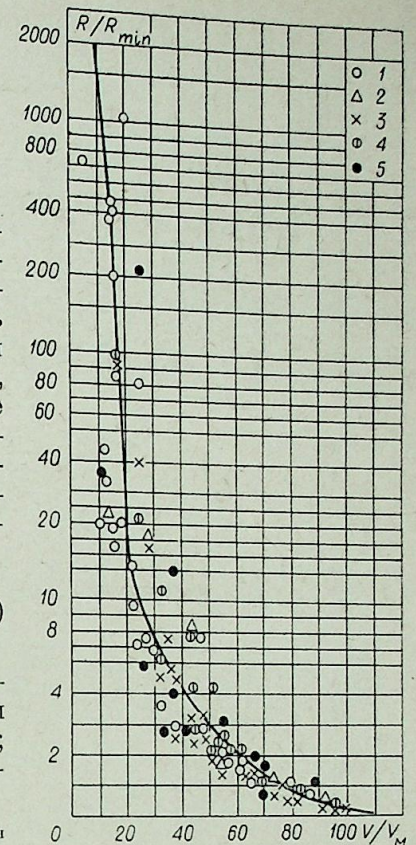
$$\rho_{vi} = \frac{\rho_{v0}}{1 + \beta T_{i,j}}, \quad (9)$$

где  $\rho_{v0}$  — значение удельного сопротивления при  $T = T_{\text{окр}}$ ;  $\beta$  — температурный коэффициент проводимости для солей  $0,022 - 0,025$  1/град.

С другой стороны, капиллярно-пористые материалы, к которым от-

Рис. 2. Зависимость сопротивления слоя загрязнения от влагосодержания для гирлянд из трех изоляторов П-4,5.

Цементное загрязнение интенсивностью  $1 \text{ мг/см}^2$  (1);  $3$  (2);  $10 \text{ мг/см}^2$  (3); естественное солончаковое загрязнение,  $5 \text{ мг/см}^2$  (4); загрязнение поваренной солью  $5 \text{ мг/см}^2$  (5).



носят естественные загрязнения изоляции, имеют электропроводность, существенно зависящую от их влагосодержания. Экспериментально эта зависимость была получена А. С. Майкопаром и К. П. Морозовым [6]. Из рис. 2 видно, что отношение  $R/R_{\text{min}}$  в диапазоне влагосодержания  $10 - 100\%$  и интенсивностей загрязнения  $1 - 10 \text{ мг/см}^2$  образует единую зависимость. Вид этой зависимости можно получить при математической обработке кривой на рис. 2:

$$\frac{\rho_s}{\rho_{s0}} = \left[ 1,06 \cdot 10^8 \left( \frac{G}{G_n} \right)^{-4,95} + 0,985 \right], \quad (10)$$

где  $\rho_{s0}$  — значение удельного поверхностного сопротивления изолятора при насыщенном влагой слое загрязнения;  $G_n$  — значение начального влагосодержания.

Изменение влагосодержания  $G/G_n$  по мере испарения влаги из слоя загрязнения определяется с учетом функции, характеризующей интенсивность испарения:

$$\frac{G}{G_n}(\tau, T_{i,j}) = \frac{G_n - \sum_0^{\tau} W(T_{i,j}) \Delta \tau}{G_n} \cdot 100\% = 100 - \frac{\sum_0^{\tau} W(T_{i,j}, \tau) \cdot \Delta \tau}{G_n} \cdot 100. \quad (11)$$

Таким образом, расчетная формула для оценки удельного сопротивления, учитывающая обе тенденции изменения  $\rho_s$  при увеличении температуры, имеет вид

$$\rho_s = \rho_{s0} \frac{1,06 \cdot 10^8 \left[ 100 - \frac{\sum_0^{\tau} A \cdot \exp\left( \frac{-B}{T_{i,j} + 293} \right) \Delta \tau \cdot 100}{G_n} \right]^{-m} + D}{1 + \beta T_{i,j}}, \quad (12)$$

где значения коэффициентов уравнения следующие:  $A = 5 \cdot 10^7 \text{ кг/м}^2 \cdot \text{с}$ ;  $B = 8 \cdot 10^3 \text{ К}$ ;  $\beta = 0,025$  1/град;  $m = 4,95$ ;  $D = 0,985$ .

С использованием всех приведенных выше соотношений составлена программа расчета применительно к ЭВМ БЭСМ-6. Проведенное сопоставление экспериментальных и расчетных зависимостей (рис. 3, 4) показывает их хорошее количественное и качественное совпадение.

Дальнейшие расчеты и их анализ, выполненные с использованием программы, разработанной применительно к ЭВМ БЭСМ-6 для цилиндрических и тарельчатых изоляторов при равномерном и неравномерном загрязнении, показали следующее:

1. Под действием напряжения к моменту образования сухой зоны существенно изменяется вид исходного распределения сопротивлений участ-



Маликов Ю. К., Лисенко В. Г., Волков В. В. Численное решение сопряженной задачи радиационно-конвективного и кондуктивного теплообмена при моделировании нестационарных температурных процессов в нагревательных печах.— Изв. СО АН СССР, 1981, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

В зональном приближении рассмотрена задача о радиационно-конвективном теплообмене в объеме  $V$  при учете кондуктивного теплообмена в телах, окружающих этот объем. Решение общей задачи сводится к последовательному решению на каждом шаге по времени  $\Delta t$  системы нелинейных уравнений, аппроксимирующих теплообмен в объеме  $V$ , и уравнений теплопроводности. Для решения системы нелинейных уравнений предложен итерационный метод, который быстро сходится, если в объеме  $V$  преобладает перенос тепла за счет излучения. Приведены результаты моделирования тепловых режимов кольцевой печи. Рис. 2, библиогр. 5.

УДК 541.11

Гордиенко П. С., Ефименко А. В., Горин Л. Ф., Коварский Н. Я., Инберг А. С., Машковская Р. А. Исследование термоэлектрических свойств гальванических датчиков тепловых потоков.— Изв. СО АН СССР, 1981, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

Приведены результаты исследования термоэлектрических свойств хромель-никелевых, нихром-никелевых, платинородий-платиновых, никель-платиновых, нихром-платиновых термопар. Приведены составы электролитов и режимы для осаждения никеля и платины. На основе экспериментальных данных зависимостей удельных электросопротивлений от температуры указанных выше материалов выполнены расчеты зависимостей эффективных значений термоэлектродвижущих сил выбранных пар от отношения сечений основного и гальванически нанесенного материала до температур 1000 К.

Исследована стабильность показаний ТЭДС выбранных пар при длительных режимах работы в области температур 1000 К. Для стабилизации ТЭДС датчиков при высоких температурах подобраны покрытия с высокими электроизоляционными и антикоррозионными свойствами. Проведены металлографические исследования, подтверждающие, что электролитически осажденный металл на основной термоэлектрод с защитным покрытием обладает прочной адгезией, не наблюдается его окисления и отслаивания при длительных термокачках. Выполнены расчеты основных характеристик унифицированных датчиков тепловых потоков. На основе исследований разработаны датчики для высокотемпературной калориметрии и термоанализа, которые могут быть рекомендованы для широкого внедрения. Рис. 5, библиогр. 6.

УДК 517.947.42

Дейнеко В. В. Численное моделирование двумерной задачи кристаллизации.— Изв. СО АН СССР, 1981, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

Рассмотрен двумерный, нестационарный процесс кристаллизации в прямоугольном канале с фазовым переходом 1-го рода с температурой фазового перехода  $T_0$  со вторым краевым условием на фиксированных границах. Обе фазы занимают односвязные области. Задача состоит в нахождении распределения температур и расположения линии раздела фаз в произвольный момент времени.

Преобразованием координат каждая из областей (занятая одной фазой) приводится к единичным квадратам. Преобразованные уравнения теплопроводности для каждой из фаз и уравнение движения линии раздела фаз далее численно решаются по конечно-разностной схеме итерационной процедурой до определенной степени сходимости. Поставлена задача нахождения значения протяженности одной фазы в области другой, не определяемой сеточной функцией — решением вдоль границ на которых задано второе краевое условие.

Значение толщин кромок вдоль границ (много меньших шагов разностной сетки) позволило пренебречь их влиянием на геометрию областей и на границах со вторым краевым условием появление кромок другой фазы идентифицировать с изменением краевого условия. Численные эксперименты показали устойчивость такой замены. Рис. 3, библиогр. 3.

УДК 533.601.312+533.601.314

Бычков Н. М., Коваленко В. М. Аэродинамические силы на вращающемся шероховатом цилиндре в поперечном потоке.— Изв. СО АН СССР, 1981, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

Экспериментально исследованы аэродинамические силы на вращающемся шероховатом цилиндре в поперечном потоке при двух значениях степени турбулентности. Опыты проведены в малотурбулентной дозвуковой аэродинамической трубе ИТГМ Т-324 в диапазоне чисел Рейнольдса  $10^5 \leq Re \leq 6 \cdot 10^5$  и параметризовать мгновенные значения сил с помощью специальной установки, позволившей регистрировать значения сил с относительно высокой точностью. Шероховатость  $h/d = 6,7 \cdot 10^{-4}$  создавалась наклейкой наждачной бумаги на всю поверхность цилиндра.

Величина и характер изменения аэродинамических сил вращающегося шероховатого цилиндра существенно отличаются от случая гладкого цилиндра, что связано с особенностями течения в пристенной области и с положением не оказывает заметного влияния на аэродинамические силы шероховатого цилиндра в закритической области чисел Рейнольдса. Рис. 9, библиогр. 5.

УДК 532.57

Лебедев В. П., Никитин П. В. Коэффициент расхода осесимметричных сверхзвуковых сопел Лаваля и влияние на него входных условий.— Изв. СО АН СССР, 1981, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

Экспериментально определен коэффициент расхода сверхзвуковых осесимметричных сопел при воздействии на него различных возмущающих факторов: целевого вдува воздуха, толщины начального пограничного слоя, степени сужения сопла, давления торможения. Полууглы конусности сопел составляли в дозвуковой части 30 и 60°, а в сверхзвуковой — 6 и 15°. Полное давление изменялось в пределах  $3 \cdot 10^5 - 9 \cdot 10^5$  Па. Отношение массовой скорости вдува через щель к массовой скорости основного потока составляло 0—0,5. Опыты показали, что увеличение начальной толщины пограничного слоя приводит к уменьшению коэффициента расхода, влияния же угла сужения сопла и целевого вдува практически не обнаружено. Рис. 4, библиогр. 7.

УДК 532.516

Козлов В. В., Рамазанов М. П. Экспериментальное исследование устойчивости течения Пуазейля.— Изв. СО АН СССР, 1981, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

На базе малотурбулентной аэродинамической трубы создана установка, позволяющая получить ламинарное течение в плоском канале с отношением сторон 1 : 26,5 до чисел Рейнольдса порядка 7000, а также описана методика введения двумерных возмущений в данное течение.

Результаты по развитию возмущений малой амплитуды сравниваются с известными экспериментальными результатами и линейной теорией гидродинамической устойчивости. Рис. 7, библиогр. 10.

УДК 532.5

Шепеленко В. Н. К расчету осесимметричных течений со свободной границей в продольном поле тяжести.— Изв. СО АН СССР, 1981, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

Изложен алгоритм расчета осесимметричных течений со свободной границей в поле тяжести, направленном параллельно оси симметрии обтекаемого тела. Алгоритм построен на разностном методе интегрирования уравнений эллиптического типа в областях с неизвестной границей. Приведены результаты расчетов для пяти вариантов геометрии задачи. Рис. 3, библиогр. 4.

УДК 532.516

Фердигалов Л. Ю. Движение вязкой жидкости вдоль бегущей волны при больших докритических числах Рейнольдса.— Изв. СО АН СССР, 1981, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

Рассмотрено периодическое однородно-вихревое течение вязкой несжимаемой жидкости вдоль границы, сокращающей колебания в виде бегущей волны. Показана необходимость в активных продольно-поперечных колебаниях границы для поддержания однородно-вихревого течения в пристеночном слое. В результате сравнения течения вязкой жидкости вдоль плоской пластинки с однородно-вихревым течением вдоль бегущей волны показано, что в течение вдоль бегущей волны при больших числах Рейнольдса потери энергии значительно меньше, чем в течении вдоль плоской пластинки. Рис. 3, библиогр. 3.

Джаугашвили К. Е., Солдаткин А. В. Распространение осесимметричной струи при воздействии архимедовых сил.— Изв. СО АН СССР, 1981, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

Статья посвящена исследованию основного участка нагретой осесимметричной струи, распространяющейся вертикально вверх. Задача решается в приближении пограничного слоя.

Использована замена переменных, благодаря которой автоматически обеспечено сохранение избыточного теплосодержания. Сооставление численных результатов с автомодельным решением при числе Прандтля, равном 2, говорит в пользу методики расчета. Рис. 3, библиогр. 9.

Джакупов К. Б. О конвективном движении жидкости в цилиндрической прослойке при наложении магнитного поля.— Изв. СО АН СССР, 1981, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

Приводятся результаты численных расчетов на основе полных уравнений Буссинеска ламинарной тепловой конвекции в горизонтальных цилиндрических прослойках при наложении магнитного поля. Получено, что при умеренных числах Гартмана и Релея влияние магнитной индукции на перенос тепла незначительно. Табл. 3, рис. 2, библиогр. 10.

Пинаков В. И. Автоколебания стержня в газовом потоке.— Изв. СО АН СССР, 1981, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

Рассмотрена механическая система, состоящая из массивного стержня, подвешенного на безынерционной нити. Стержень помещен в канал конечной длины и под действием проходящего по каналу газа при определенных условиях совершает устойчивое периодическое движение, сопровождающееся ударами о стенки канала. Проведен количественный анализ движения стержня при дозвуковом течении газа. Получены безразмерные зависимости для периода колебаний, скоростей соударения, ударной мощности. Теоретическая кривая для периода колебаний хорошо согласуется с результатами эксперимента. Рис. 5, библиогр. 2.

Гришин Ю. М., Козлов Н. П., Мосин А. А., Хвесюк В. И. Сильноточный плоский прикаты разряд в оптически непрозрачной плазме. Сообщение 1.— Изв. СО АН СССР, 1981, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

Теоретически исследуется работа сильноточных прикатых разрядов, развивающихся в парах диэлектриков и металлов. Учтены взаимосвязанные процессы, происходящие в разряде, на поверхности диэлектрика и в питающем электротехническом контуре. Решение этой системы уравнений позволяет определить временные зависимости таких параметров, как ток дуги, температура и концентрация плазмы в разряде, а также поперечный размер разряда. Приведены некоторые численные результаты расчета таких разрядов для случая, когда погонное число частиц в разряде считается заданным. Рис. 3, библиогр. 10.

Гришин Ю. М., Козлов Н. П., Мосин А. А., Хвесюк В. И. Сильноточный плоский прикаты разряд в оптически непрозрачной плазме. Сообщение 2.— Изв. СО АН СССР, 1981, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

На основе ранее развитых авторами методов проведено исследование сильноточных прикатых разрядов. Изучен проточный вариант разряда, когда учитывается уход из него частиц в вакуум. В этом случае погонное число частиц в разряде определяется из решения исходной системы уравнений. Приведены результаты расчета такого типа разрядов. Рис. 2, библиогр. 2.

Борискин С. П., Девятов Б. П. Научно-инженерный подход к проблеме моделирования и анализа динамики плазмотрона как технологического объекта. III. Анализ динамики при распределенных внешних воздействиях и метод динамической оптимизации плазмотронов.— Изв. СО АН СССР, 1981, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

Предложена математическая модель динамики промышленного плазмотрона с химическими реакциями, которая учитывает излучение электрической дуги и функцию  $F(z, \tau)$  переменного сечения плазмотрона. Эта модель содержит также возмущающие функции распределенного и сосредоточенного характера. Дается метод нахождения инерционных различий различного порядка в общем виде для промышленного плазмотрона и их численный расчет, анализ функций переходного процесса для индивидуальных характеристик различных приближений.

Для оценки динамических свойств плазмотрона при его проектировании с системой управления или без нее рекомендуется использовать величину полосы пропускания, которая находится по инерционностям различных порядков. Следовательно, возможное усиление экстремальных значений инерционностей внешнего воздействия в плазмотроне может быть направлено на стабилизацию оптимальных режимов аппарата. На этой основе развита методика динамической оптимизации плазмотрона с химическими реакциями. Табл. 1, рис. 6, библиогр. 25.

Егоров В. М., Мотовилов В. В., Путько В. Ф. Динамические характеристики электрической дуги во вращающемся магнитном поле и вопросы устойчивости ее горения.— Изв. СО АН СССР, 1981, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

Разработана модель нестационарной электрической дуги в условиях воздействия на нее вращающегося магнитного поля. На основании этой модели проведен анализ устойчивости движения столба энергетически стабильной электрической дуги и получен аналитический критерий энергетической устойчивости дуги, динамически стабилизированной вращающимся магнитным полем. Табл. 1, рис. 2, библиогр. 12.

Бегельфор А. И., Кисель В. С., Кушпир В. С. Форма дуги в поперечном вращающемся магнитном поле.— Изв. СО АН СССР, 1981, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

Для простой модели сил, действующих на электрическую дугу, рассмотрена задача о нахождении пространственной кривой, определяющей форму столба электрической дуги в камере плазмотрона с осевым потоком газа и поперечным вращающимся магнитным полем. Рис. 2, библиогр. 7.

Омельченко В. Д. «Восстановление» импульсной переходной функции по ее оценке методом скользящего ряда.— Изв. СО АН СССР, 1981, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

Показан метод построения импульсной переходной функции непосредственно по параметрам эквивалентной разностной схемы (обобщенной математической модели). Приведены также формулы для обратного перехода, т. е. перехода от непараметрического математического описания к параметрическим моделям, которые могут быть применены в задачах идентификации. В работе показано применение такого перехода при «восстановлении» импульсной переходной функции динамической модели электрической дуги, горящей в плазмотроне постоянного тока. Метод можно применять для задач анализа и синтеза систем управления некоторых динамических объектов. Рис. 3, библиогр. 8.