

ИЗВЕСТИЯ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

Главный редактор журнала чл.-кор. АН СССР *М. Ф. Жуков*

Заместитель главного редактора чл.-кор. АН СССР *В. Г. Дулов*

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ СЕРИИ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК:

Ответственный редактор серии чл.-кор. АН СССР *М. Ф. Жуков*

Чл.-кор. АН СССР *О. Ф. Васильев*, д-р техн. наук *Б. Н. Десятов*, чл.-кор. АН СССР *В. Г. Дулов*, чл.-кор. АН СССР *И. А. Желтухин* (зам. ответственного редактора), д-р техн. наук *В. Е. Накоряков*, д-р техн. наук *И. А. Рубцов* (ответственный секретарь серии), д-р техн. наук *Б. А. Урюков*, д-р техн. наук *В. К. Щербаков*

Адрес редакции: 630099, Новосибирск, 99, Советская, 48, ком. 331.
Тел. 22-00-44

Редактор *И. Н. Стригун*
Художественный редактор *Э. С. Филонычева*
Технический редактор *Г. И. Шмакова*, *А. В. Семкова*
Корректоры *И. А. Литвинова*, *А. В. Пименов*

Сдано в набор 26.03.80. Подписано к печати 19.06.80. МН-05257. Формат 70×108^{1/4}. Высокая печать. Усл. печ. л. 14,7. Уч.-изд. л. 14,9. Тираж 1998 экз. Заказ № 95.

Издательство «Наука», Сибирское отделение. 630099, Новосибирск, 99, Советская, 48.
4-я типография изд-ва «Наука». 630077, Новосибирск, 77, Стациславского, 25.

ИЗВЕСТИЯ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

СЕРИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

Год основания журнала 1957	Периодичность журнала 15 номеров в год	№ 8 (323) вып. 2	Июнь 1980
Год основания серии 1963	Периодичность серии 3 номера в год		

СОДЕРЖАНИЕ

НИЗКОТЕМПЕРАТУРНАЯ ПЛАЗМА

- И. А. Тихомиров.** Высокочастотные факельные плазмотропы и их практическое применение 3
- В. В. Кудинов.** Проблемы и перспективы развития плазменного нанесения покрытий 14
- Б. Н. Десятов, В. И. Назарук.** Локально-множественный подход к моделированию течения в канале плазмотрона методом Монте-Карло 22
- В. И. Назарук.** Статистическое моделирование процесса взаимодействия дуги с турбулентным потоком 30
- В. В. Бербасов.** Электрическая дуга в поперечном магнитном поле 33
- О. Н. Солоненко, И. Я. Яцкарь.** Распространение струи частиц в потоке газа, патекающем на пластину 44
- Б. Н. Десятов, В. И. Назарук.** Спектральный анализ статистической модели пульсаций турбулентной дуги 49
- А. Л. Баранников, Ю. А. Галкин, Д. С. Лычников, А. В. Чернетский.** Исследование высокочастотных колебаний в водородной плазме сильноточного разряда низкого давления 56
- И. В. Пашацкий, Е. А. Молчанов.** Эрозия графитовых электродов плазмотрона переменного тока 62
- В. А. Лебеаев, А. В. Подмазов, Б. В. Пономарев.** Исследование запальной свечи для плазменного зажигания электродуговых подогревателей воздуха 66
- С. И. Борискин, Б. Н. Десятов, В. Ф. Левченко.** Научно-инженерный подход к проблеме моделирования и анализа динамики плазмотрона как технологического объекта. II. Метод определения статических характеристик процесса в плазмотроне 69
- Б. Н. Десятов, В. С. Перегудов.** Общий метод аналитического представления решений многомерных линейных задач динамики плазмы 74

ТЕРМОДИНАМИКА И ТЕПЛОБМЕН

- Ю. А. Суринов, В. В. Рубцов.** Определение температурного поля ослабляющей среды в излучающей системе, состоящей из двух коаксиальных цилиндров различной длины 81
- Ю. С. Борчевкин, Б. П. Корольков.** Динамика теплообменника с независимым обогревом при неравномерном распределении плотности теплового потока по координате 90
- И. И. Гогонин, А. Р. Дорохов.** К обобщению опытных данных по критическим тепловым потокам в стекающих пленках жидкости 100
- Ю. С. Даниэлян, П. А. Яницкий.** О формировании ледяных прослоев при промерзании влажных грунтов 103

ПРИКЛАДНАЯ ГАЗО- И РЕОДИНАМИКА

- В. Н. Шепеленко.** Потенциальное обтекание тела вращения потоком идеальной несжимаемой жидкости 108



Н. М. Бычков, В. М. Коваленко. Аэродинамические характеристики кругового цилиндра в поперечном потоке	114
Н. М. Бычков, В. М. Коваленко. Аэродинамические силы на вращающемся гладком цилиндре в поперечном потоке	125
И. В. Стурова, В. А. Сухарев. Генерация внутренних гравитационных волн в термоклинне	136
Г. М. Шумский. О вихревых структурах за профилем, движущимся вблизи волнистой стенки	143

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В. М. Геллер. Системная энергооптимизация мощных многокаскадных усилительных устройств	147
В. А. Пльин. Табличное отображение топологической матрицы в задаче цифрового моделирования группы трансформаторов тока	154
С. Н. Рычков. Исследование резистивного кольца, замкнутого джозефсоновским контактом	158

И. А. ТИХОМИРОВ

ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ ФАКЕЛЬНЫЕ ПЛАЗМОТРОНЫ
И ИХ ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Известно, что плазма высокочастотных (ВЧ) разрядов является в настоящее время предметом не только научных исследований, но и практического использования. Легкость возбуждения ВЧ разрядов, их большая объемность и устойчивость, сравнительная простота в управлении и регулировании, широкий диапазон по скоростям движения реагентов и времени их пребывания в зоне разряда, создают им определенные преимущества по сравнению с другими типами электрических разрядов.

Генераторы плазмы, в основе которых лежит использование ВЧ разрядов различного типа, называются теперь ВЧ плазмотронами. В соответствии с установившейся классификацией различаются ВЧ индукционные (ВЧИ), ВЧ емкостные (ВЧЕ), ВЧ дуговые (ВЧД) и ВЧ факельные (ВЧФ) плазмотроны (см. рис. 1).

В ВЧИ плазмотронах используется так называемый ВЧ безэлектродный *H*-разряд, впервые описанный еще в 1884 г. [1]; в ВЧЕ плазмотронах — высокочастотный емкостной *E*-разряд с внешними электродами, а в ВЧД плазмотронах используется высокочастотный дуговой *E*-разряд, который возбуждается между двумя электродами.

Толчком к созданию ВЧ плазмотронов современного типа послужили, нам кажется, исследования И. Бабата [2] и Т. Рида [3]. Описание различного типа и назначения ВЧИ, ВЧЕ и ВЧД плазмотронов, используемых в настоящее время в технологии, технике и научных исследованиях, можно найти в работах [4—9], в которых собраны основные сведения о ВЧ плазмотронах со ссылками на литературные источники. Доказано [4, 6], что ВЧ плазмотроны могут устойчиво работать с КПД, равным 0,7 и выше, в широком диапазоне скоростей генерируемых потоков плазмы, что выгодно отличает их от обычных дуговых плазмотронов. В условиях ВЧ плазмы значительно выше КПД нагрева сыпучих мелкодисперсных материалов. Это также связано со спецификой ВЧ плазмы, что делает ее практически незаменимой в целом ряде технологических процессов, особенно там, где требуются особая чистота получаемой продукции и широкое маневрирование по технологическим условиям и режимам.

ВЧИ, ВЧЕ и ВЧД плазмотроны с достаточной полнотой рассмотрены и описаны в литературе [4—9]. Но следует подробнее остановиться на ВЧФ плазмотронах, в которых для генерации плазмы используется высокочастотный факельный (ВЧФ) разряд, открытый С. И. Зилитинкивичем в 1928 г. [10]. По его наблюдениям этот разряд возникал на катушке анодного контура ВЧ генератора в виде светящегося пламени, напоминающего горение факела. Исследования по анализу условий и причин, вызывавших появление факела, проводились тогда в основном с целью эффективной борьбы с разрядами этого типа, возникавшими в мощных ВЧ передатчиках.

ВЧФ разряд по своей природе является одноэлектродным *E*-разрядом, который горит с учетом емкостной связи факел — земля [11]. Для

обеспечения устойчивого горения разряда к нему необходимо подводить от ВЧ генератора соответствующую мощность, величина которой определяется балансом энергии в системе генератор — фидер — плазмотрон. При этом режим работы ВЧ генератора через фидер тесно связан с характеристиками факела, являющегося плазменной нагрузкой генератора с учетом того, что разряд и поток плазмы формируются внутри плазмотрона. Уравнение энергобаланса для ВЧ факельного разряда (ВЧФР) малой мощности с некоторыми допущениями первоначально рассмотрено в работе [12]. Дальнейшим шагом в теории разряда и расчета его характеристик послужила так называемая электродинамическая модель разряда, предложенная А. В. Кагановым и Е. С. Греховым [13]. Канал разряда принят здесь за проводник с распространяющейся по нему электромагнитной волной. По такой модели выделяемая в разряде мощность носит лишь омический характер, а ее рассеяние определяется только радиальной теплопроводностью, что не вполне корректно. Реальная картина явлений здесь, конечно, сложнее.

При более высокой мощности разряда, когда его геометрические размеры становятся соизмеримыми с длиной двухпроводной линии анодного контура ВЧ генератора, будет логичнее (при расчете параметров плазмотрона) сам разряд представлять в виде линии с распределенными параметрами [14, 15]. В этом случае ВЧФ плазмотрон с металлической разрядной камерой, экранирующей разряд, принципиально подобен коаксиальной линии с потерями. Для описания такой коаксиальной линии [14, 15], по которой распространяется ТЕМ-волна, можно использовать следующую систему уравнений Максвелла:

$$d\dot{U}/dZ = -Z_1 \cdot I; \quad dI/dZ = -G_1 \cdot \dot{U}; \quad d^2\dot{U}/dZ^2 = -\gamma^2 \cdot \dot{U} = 0. \quad (1)$$

Здесь $Z_c = \sqrt{Z_1/G_1}$ — волновое сопротивление линии, а коэффициент распространения волны $\gamma = \sqrt{Z_1 \cdot G_1} = \sqrt{(R_1 + i\omega L)(G_1 + i\omega C_1)} = \alpha + i\beta$; R_1, C_1, L_1 и G_1 — соответственно погонные сопротивление, емкость, индуктивность и поперечная проводимость линии.

Решение системы уравнений позволяет рассчитать импеданс линии $Z = Z_c \cdot \text{ctg} \gamma \cdot l_0$ (где l_0 — длина канала разряда), напряжение на электроде и мощность, выделяемую на электроде.

В дополнение к этим исследованиям есть представления о ВЧФ плазмотроне с металлической разрядной камерой как о коаксиальной линии с потерями, у которой внутренним несовершенным проводником является генерируемый в камере плазменный поток [16, 17], в том плане, что при соизмеримости геометрических размеров факела с длиной двухпроводной линии анодного контура генератора может обеспечиваться достижение самосогласующего режима между контуром ВЧ генератора и плазменной нагрузкой, т. е. сам разряд выполняет эту функцию. В этом случае нет нужды иметь $L-C$ контур в схеме генератора. Его функцию можно поручить обобщенному $L-C$ контуру системы фидер — плазмотрон — плазма. Расчеты и экспериментальные испытания на мощностях в 30—40 кВт при частоте 13, 56 МГц подтвердили справедливость предлагаемой модели для описания системы генератор — фидер — плазмотрон — плазма в целом. Отсутствие стандартного $L-C$ контура в генераторе повышает КПД плазмотрона примерно на 5%. Согласование контура ВЧ генератора с нагрузкой здесь легко обеспечивается небольшими изменениями в характеристиках плазменного потока.

Вид, форма, режимы горения факельного разряда, его электрофизические и теплофизические характеристики изучены к настоящему времени достаточно хорошо [12, 13, 18—32]. Разряд легко возбуждается в любой (включая и водород) газовой среде при давлениях 10^1 — $5 \cdot 10^5$ Па. Исследования показали, что плазма ВЧ факельного разряда обладает явной неравномерностью. В зависимости от условий электронная темпера-

тура в такой плазме изменяется от 15 000 до 35 000 К и выше, а газовая — от 1500 до 5000—9000 К. В каждом конкретном случае электронная температура в несколько раз выше (иногда на порядок), чем газовая. Степень ионизации плазмы может изменяться с учетом электронной плотности 10^{15} — 10^{22} м⁻³, в широком диапазоне значений от 10^{-8} до 10^{-2} .

При решении многих вопросов научного и практического характера для такой системы, как плазма, необходимо знать функцию распределения электронов по энергиям (ФРЭЭ), особенно при оценке транспортных характеристик плазмы.

Плазма является единой системой взаимодействующих в ней компонент (атомов, молекул, ионов, радикалов, электронов и т. д.). Причем отклонения от равновесного состояния для одной из компонент влечет, естественно, определенные отклонения от равновесного состояния для всех остальных. Полного равновесия в такой сложной системе, как плазма, и не может быть, особенно с учетом протекающих в ней различных процессов. В соответствии с этим математическое описание неравновесной плазмы должно сводиться к системе уравнений, определяющих функцию распределения всех компонент по энергиям в такой системе. Такая система уравнений для извлечения из нее реальных данных практически неразрешима. Но для такой компоненты плазмы, как электроны, с некоторыми допущениями можно оценить ФРЭЭ теоретически и экспериментально. В отличие от Моргенау [19], решение кинетического уравнения Больцмана применительно к рассматриваемой системе проводилось нами путем введения столкновительной функции, учитывающей как упругие, так и неупругие столкновения и особенно тот факт, что электрон в плазме, как правило, теряет при столкновениях с «нейтралами» лишь малую долю своей энергии $\delta(V)$.

Пренебрегая влиянием пространственного заряда и считая, что распределение для всех остальных частиц в плазме максвелловское, для симметричной части ФРЭЭ с учетом ω и частоты электронных столкновений ν было получено [33, 34] следующее выражение:

$$f_0 = C \cdot \exp \left(- \int_0^v \frac{mV \cdot dV}{kT + 2e^2 E^2 / 3m\delta(\omega^2 + \nu^2)} \right), \quad (2)$$

где постоянная C находится из условия нормировки $n_e = \int_0^\infty f(\epsilon) d\epsilon$. Основные положения теории нашли экспериментальное подтверждение в работах [34, 35], но полного согласия теории с экспериментом не наблюдается.

Сделана попытка [36] оценки вида функции распределения электронов по скоростям (ФРЭС) для плазмы ВЧФ разряда в аргоне при атмосферном давлении с целью определения (через ФРЭС) транспортных характеристик плазмы, таких как коэффициенты электропроводности, теплопроводности и термодиффузии. Теоретические исследования основаны на преобразовании кинетического уравнения Больцмана в систему уравнений сохранения массы, импульса и энергии и их совместного решения с учетом вида ФРЭС.

Представляет определенный научный и практический интерес уделить внимание свойствам и особенностям амплитудно-модулированной плазмы (АМ-плазмы) ВЧ факельного разряда в связи с тем, что такая плазма может излучать довольно мощные звуковые и ультразвуковые колебания и становиться еще более неравновесной [37—41].

АМ-плазма получается при амплитудной модуляции возбуждающего разряд ВЧ поля. При гармонических колебаниях электрическое поле в АМ-плазме изменяется следующим образом:

$$E = E_0(1 + m \cdot \cos \omega_m t) \cdot \cos \omega t, \quad (3)$$

где m — глубина модуляции, ω_m — частота модуляции и ω — несущая частота ВЧ поля. Установлено, что в зависимости от частоты модуляции АМ-плазма становится источником акустических колебаний звукового или ультразвукового диапазона. Акустическое поле такой плазмы может быть описано системой уравнений гидродинамики [42, 43] для движения упругой среды с учетом внешних источников энергии, преобразованной нами к условиям плазмы:

$$\frac{\partial P}{\partial t} - c^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} = (\gamma - 1) \cdot Q; \quad (4a)$$

$$\rho_0 \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla P = 0; \quad (4б)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} V = 0. \quad (4в)$$

Выражение (4а) составлено из уравнения состояния для газа и из уравнения сохранения энергии в форме второго начала термодинамики, (4б) — уравнение неразрывности и (4в) — уравнение Эйлера, описывающее движение частиц в среде под действием упругих сил. Совместное решение системы (4) позволяет получить волновое уравнение для оценки акустического поля АМ-плазмы

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \nabla^2 P = \frac{\gamma - 1}{c^2} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t}. \quad (5)$$

В уравнениях (4) и (5) использованы обозначения: P — давление; ρ — плотность; ρ_0 — плотность при $m = 0$; $\gamma = c_p/c_v$, а c_v и c_p — удельные теплоемкости при постоянных объеме и давлении; $c = \gamma P/\rho$ — скорость звука в среде, Q — энергия внешних источников в рассматриваемой системе.

Величину Q в уравнении (5) с оправданным приближением можно представить как суммарную энергию, передаваемую от электронов [44] частицам плазмы:

$$Q = \frac{3}{2} k \cdot (T_f - T) \nu_e \cdot \delta_e \cdot N_e, \quad (6)$$

где N_e — концентрация электронов в плазме, T_f — так называемая эффективная температура электронов, T — газовая температура плазмы; ν_e — частота столкновений, δ_e — средняя доля энергии, передаваемая от электронов частицам плазмы при столкновениях.

С учетом выражения (6) уравнение (5) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = c^2 \cdot \nabla^2 P + \frac{3}{2} (\gamma - 1) \cdot k \cdot T \cdot N_e \cdot \nu_e \delta_e \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{T_f}{T} - 1 \right). \quad (7)$$

Для рассматриваемых условий [44] справедливо соотношение

$$\frac{T_f}{T} - 1 = \frac{2e^2 \cdot E_a^2}{3m_e \cdot \delta_e \cdot \nu_e^2 \cdot k \cdot T}, \quad (8)$$

где $E_a = E_0(1 + \cos \omega_m t)$.

Используя соотношение (8), приводим уравнение (7) к виду

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = c^2 \cdot \nabla^2 P + 2(\gamma - 1) \cdot N_e \cdot m \cdot \omega_m \frac{e^2 E_0^2}{m_e \nu_e} \sin \omega t (1 + \cos \omega_m t). \quad (9)$$

Из уравнения (9) находим выражение для $P(t)$:

$$P(t) = \frac{2(\gamma - 1) c^2 \cdot m \cdot N_e E_0^2}{m_e \nu_e} \left[t \left(1 + \frac{m}{4} \right) - \frac{1}{\omega_m} \left(\sin \omega_m t + \frac{m}{4} \sin 2\omega_m t \right) \right]. \quad (10)$$

Изменение давления по уравнению (10) определяется суперпозицией агармонического (по закону $B \cdot t$) и гармонического с частотами ω_m и $2\omega_m$ колебательных процессов. Амплитуда акустического давления в АМ-плазме зависит от времени установления стационарного состояния, определяемого характеристиками разрядной камеры, особенно ее акустической добротностью.

Рассчитав по уравнению (10) амплитуду акустического давления P_a , можно оценить затем интенсивность [45] акустического излучения $I = P_a c/2$. Оказалось, что для воздушной плазмы при $f_m = \omega_m/2\pi = 10 \div 20$ кГц и $m = 0,4 \div 0,6$ амплитуда акустического давления в плазме может достигать $25 \div 100$ Н/м², а интенсивность $400 - 20000$ Вт/м². Исследования [46—48] показали удовлетворительную сходимость между расчетными и экспериментальными данными. Была сделана оценка КПД для такой АМ-плазмы $\eta_a = W_a/W$, где W_a — мощность акустического излучения из плазмы, а W — мощность самого разряда. Установлено, что не менее 20%, а в резонансных условиях до 5—10% мощности разряда может быть трансформировано в акустическое поле АМ-плазмы [47, 48]. Это имеет большое практическое значение. Например, при мощности разряда в 100 кВт АМ-плазма будет излучать ультразвук мощностью до 10 кВт. Такая АМ-плазма, излучающая ультразвуковые и звуковые колебания, с успехом может быть использована в технологических и технических целях.

Большое внимание в плазмохимической технологии уделяется в настоящее время переработке диспергированных водных и неводных растворов с целью получения мелкодисперсных окислов металлов, а также и других веществ.

Теоретические исследования в этом направлении [49—51] проводились не только с целью моделирования поведения капель раствора в условиях двухфазной плазменной струи, хотя и это во многих отношениях дело важное. Такое моделирование, опирающееся на экспериментальные данные, позволяет проводить расчеты плазмохимических реакторов, используемых для переработки диспергированных растворов с целью получения мелкодисперсных веществ.

При моделировании весь путь капли раствора в реакторе, от ее введения в плазму и до получения конечного мелкодисперсного продукта [49, 50], можно разбить на четыре стадии: 1) стадия перемешивания капельной жидкости с потоком плазмы; 2) нагрев и испарение капель практически до «сухого» остатка (жидкость при этом частично еще сорбирована в «сухом» остатке); 3) нагрев «сухого» остатка до температуры его разложения; 4) термическое разложение «сухого» остатка, которое происходит практически со «взрывом» (из-за «взрывного» парообразования сорбированной в сухом остатке жидкости при температурах свыше 1500 К).

Лимитирующей стадией (по времени) является здесь, по нашему мнению, вторая стадия. Все остальные стадии завершаются гораздо быстрее. Это при всех прочих условиях определяет геометрические размеры (особенно длину) реактора, на последней стадии в котором должен получаться продукт требуемой кондиции. С точки зрения лимитирующей стадии для описания рассматриваемого процесса предлагается на основе теории одномерного двухфазного течения [52] соответствующая система уравнений [49, 50].

Уравнение испарения капли [53] с учетом подвода тепла:

$$\frac{dm_k}{dt} = -\pi \cdot \text{Nu}_r \frac{\lambda_{см} (T_r - T_p)}{\Delta H^*} \cdot a_k, \quad (11)$$

где $\text{Nu}_r = 2 \cdot \varphi(\text{Re}) \cdot H_1(B)$; $\varphi(\text{Re}) = 1 + 0,3\text{Re}^{1/2} \cdot \text{Pr}^{1/3}$;

$$H_1(B) = \ln(1 + B)/B; \quad B = c_{рсм}(T_r - T_p)/\Delta H^*;$$

$$\Delta H^* = \Delta H + c_{рж}(T_p - T_0); \quad \text{Re} = a_k \rho_{см} |W_r - V_k|/\eta_{см}; \quad \text{Pr} = \frac{c_{рсм} \cdot \eta_{см}}{\lambda_{см}}.$$

Уравнение движения капли [52]:

$$m_k \frac{dV_k}{d\tau} = \frac{\pi}{8} C_D^* \rho_r a_k |W_r - V_k| (W_r - V_k). \quad (12)$$

Здесь

$$C_D^* = C_D(\text{Re}) \cdot \psi(\text{We}) \cdot H_2(B, \text{Re}); \quad C_D(\text{Re}) = 0,32 + 4,4 \text{Re}^{-1/2} + 24 \text{Re}^{-1},$$

при $10^{-3} \leq \text{Re} \leq 6 \cdot 10^3; \quad \psi(\text{We}) = \exp(0,03 \text{We}^{3/2});$

$$\text{We} = a_r \rho_r (W_r - V_k)^2 / \sigma_{жк}; \quad B^* = \ln(1 + B) / \text{Pr}_{см};$$

$$H_2(\text{Re}, B) = 1 - [0,25 B^* / (1 + 0,01 \text{Re} + 0,2 B^* \text{Re}^{-1})];$$

$$\text{Pr}_{см} = c_{рсм} \cdot \eta_{см} / \lambda_{см}.$$

Уравнения движения и испаряемости капли:

$$dx/d\tau = V_k; \quad (13) \quad Z_n = 1 - (a_k/a_{kl})^3. \quad (14)$$

Уравнения сохранения расхода (15), импульса (16) и энергии (17):

$$\frac{d}{d\tau} (\rho W F + m_{жк}) = 0; \quad (15)$$

$$\frac{d}{d\tau} [(m_r + m_n) W_r + m_{жк} V_k + P F] = P \frac{dF}{d\tau}; \quad (16)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left[m_r \left(i_r + \frac{W_r^2}{2} \right) + m_{жк} \left(i_{жк} + \frac{V_k^2}{2} \right) + m_n \cdot \Delta H^* \right] = 0. \quad (17)$$

Уравнение состояния парогазовой смеси:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{R_0 T}{\mu(T)}, \quad (18)$$

где

$$\frac{1}{\mu(T)} = \frac{r_r}{\mu_r(T)} + \frac{r_n}{\mu_n(T)}.$$

Условные обозначения: τ — время; x — координата капли; W_r , V_k — скорость газа и капли; P — давление; ρ — плотность; F — площадь поперечного сечения канала; T — температура; i — энтальпия; μ — молекулярный вес; r — массовая доля; λ — коэффициент теплопроводности; η — коэффициент динамической вязкости; T_p — температура равновесного испарения капли; T_0 — начальная температура капли; индексы: ж — жидкость, п — пар, г — газ, к — капля, см — смесь пара и газа.

После нормировки и соответствующих преобразований система уравнений решалась на ЭВМ. Между расчетными и экспериментальными данными получено вполне удовлетворительное согласие.

Теоретические и экспериментальные исследования по физике и диагностике плазмы, на которых мы останавливались, лежат в основе конструирования ВЧФ плазмотронов и их дальнейшего совершенствования. Рассмотрим и кратко опишем принципиальные и конструктивные особенности ВЧФ плазмотронов в металлическом исполнении (см. рис. 1, 2, 3—5).

На рис. 1, 2 дана принципиальная схема ВЧФ плазмотрона [28, 54—62] с присоединенным к нему плазмохимическим реактором 8, в котором предусмотрена подача реагентов через систему 6. При этом сам плазмотрон может выполнять функцию не только генератора плазмы, но и реактора, когда теплоноситель и реагенты в газовом виде подаются в плазмотрон через систему подачи 3. Сочетание осевого движения с «вихревым» обеспечивает разнообразие технологических режимов и приемов при ведении процессов. В рассматриваемом плазмотроне водоохлаждаемый электрод 4 вакуумно плотно пропущен через изолятор (тефлон) 2, а через систему 3 обеспечивается подача газа и реагентов. Формирование

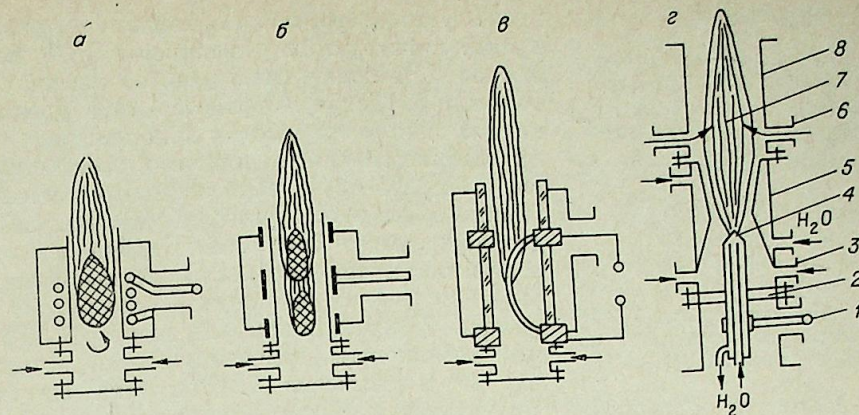


Рис. 1. Типы ВЧ плазмотронов.

а — индукционный, б — емкостной, в — дуговой, г — факельный.

потока плазмы 7 осуществляется через водоохлаждаемое сопло 5. Плазмотроны такого типа 7 осуществлены в основном для работы с реагентами и теплоносителями в газовой фазе. Возможна подача жидких реагентов в мелкодисперсном виде [50]. В этом случае имеем дело с двухфазным парогазовым потоком плазмы, с которым конечный продукт в виде мелкодисперсного порошка выносится из плазмотрона и реактора. Плазмотроны этого типа с ресурсами работы в несколько сот часов испытаны до мощности 60 кВт. Принципиальных затруднений по увеличению мощности, нам кажется, здесь нет.

Для проведения исследований по физике и диагностике плазмы, а также изучения процессов взаимодействия плазмы с веществом используются ВЧФ плазмотроны [28, 63, 64], схема которых приведена на рис. 2. В таком плазмотроне «сопло — вставка» или пластины из испытуемого материала взаимодействуют с потоками плазмы. Параметры и характеристики плазмы, загрязненной продуктами разрушения материалов и протекающих при этом процессов, исследуются диагностическими средствами. Через окна-линзы 5 (из диэлектрических материалов) плазма исследуется микроволновыми методами, через штуцеры 8 с окнами из LiF — оптическими и спектральными методами, в том числе и лазерными. Через штуцер 9 в плазму вводятся смещенные электрические зонды. При необходимости делаются измерения масс-спектрометрические измерения состава плазмы с обеспечением отбора проб методами молекулярного натекания [28, 30].

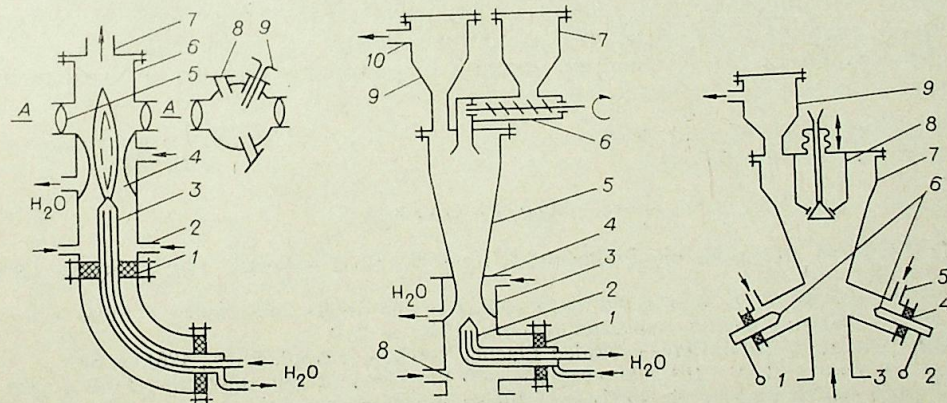


Рис. 2. ВЧФ плазмотрон для проведения исследований.

Рис. 3. ВЧФ плазмотрон взвешенного слоя.

Рис. 4. Двухэлектродный плазмотрон.

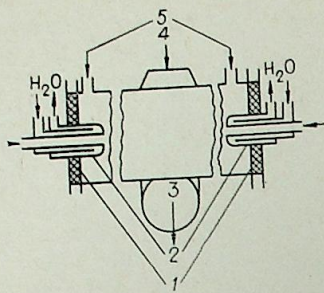


Рис. 5. Двухэлектродный ВЧФ плазматрон со встречными потоками.

материалов из устройства производится таким же путем, как и в обычных аппаратах взвешенного слоя.

На рис. 4 изображен аппарат, в котором реактор взвешенного слоя объединен с двухэлектродным ВЧФ плазматроном [68]. Этим он и отличается от устройства на рис. 3. С каждого из электродов 6 через полу- период возбуждается ВЧ факельный разряд. Это достигается тем, что на контакты 1 и 2 подается противофазное напряжение с ВЧ генератора.

В центре разрядной камеры факелы, не успевая за полупериод исчезнуть, сливаются друг с другом, образуя поток плазмы и нагретых газов, под действием которых в корпусе 7 формируется взвешенный слой. В двухэлектродном плазматроне [68] эффективнее, чем в одноэлектродном, решаются вопросы согласования между контуром ВЧ генератора и плазменной нагрузкой, что повышает КПД плазменной установки в целом.

Представляет интерес для технологии, в том числе для технологии порошковых материалов, конструкция двухэлектродного ВЧ факельного плазматрона (рис. 5) со встречными потоками плазмы, закрученными в одну и ту же сторону [68]. На электроды 2 этого плазматрона, как и предыдущего (см. рис. 4), с ВЧ генератора подается противофазное напряжение (симметричное питание). Получаемая продукция выводится из плазматрона-реактора через патрубков 3. Подача реагентов и порошков с теплоносителем предусмотрена (в зависимости от поставленной цели) как через электроды, так и через штуцеры 5.

Можно с уверенностью сказать, что имеющиеся конструкции ВЧФ плазматронов и вновь разрабатываемые (о них не говорилось в этом сообщении) вполне подготовлены к переходу на мощности 200—1000 кВт, т. е. к использованию их в многотоннажном производстве.

ВЧФ плазматроны с обеспечением соответствующего электропитания могут генерировать АМ-плазму с акустическим излучением различной интенсивности и частоты, что расширяет сферу их применения, а также эффективность использования низкотемпературной плазмы в технологии и технике.

Томский политехнический институт

Поступила в редакцию 15/II 1980

ЛИТЕРАТУРА

- Hittorf W. Über die Elektrizitätsleitung der Gase.— Annal. Phys. Chem., 1884, v. 21.
- Бабат И. Г. Безэлектродные разряды и некоторые связанные с ними вопросы.— Вестник электропромышленности, 1942, № 2, 3.
- Reed T. V. Induktion — coupled Plasma Torch.— J. Appl. Phys., 1961, v. 32.
- Сорокин Л. М. ВЧ плазматроны.— В кн.: Теория электрической дуги в условиях вынужденного теплообмена. Новосибирск, Наука, 1977.
- Рыкалин Н. Н. и др. Высокочастотный плазматрон с внешними электродами и продольным продувом газа.— ЖТФ, 1976, т. 46, вып. 4.

- Физика и техника низкотемпературной плазмы/Под ред. С. В. Дресвина. М., Атомиздат, 1972.
- Кулагин И. Д. и др. ВЧ индукционный генератор плазмы мощностью 500—1000 кВт.— В кн.: Материалы VII Всесоюз. конф. по генераторам низкотемпературной плазмы, т. 3. Алма-Ата, Кинтап, 1977.
- Кулагин И. Д., Сорокин Л. М., Драчев Е. Ф. ВЧ емкостной генератор плазмы мощностью 100 кВт.— Там же.
- Рыкалин Н. Н. и др. Исследование энергетических параметров ВЧ емкостного плазматрона.— Физ. и хим. обработки материалов, 1975, № 4.
- Зилитинкевич С. И. Электрическое факельное истечение.— Телеграфия и телефония без проводов, 1928, № 9.
- Нейман М. С. Изв. электропромышленности слабого тока, 1935, № 7.
- Григорович Р., Критеску Д. К теории высокочастотного факельного разряда.— Оптика и спектроскопия, 1959, т. 6, вып. 2.
- Каганов А. В., Грехов Е. С., Фетисов Е. П. Электродинамическое описание ВЧ факельного разряда.— В кн.: Физика газоразрядной плазмы, вып. 1. М., Атомиздат, 1968.
- Тихомиров И. А., Тихомиров В. В. Факельный разряд как линия с распределенными параметрами.— Изв. ТПИ, т. 276. Томск, 1976.
- Тихомиров И. А. и др. Исследования по определению электродинамических параметров ВЧ факельных плазматронов.— В кн.: Материалы VII Всесоюз. конф. по генераторам низкотемпературной плазмы, т. 3. Алма-Ата, Кинтап, 1977.
- Тихомиров И. А., Тоболкин А. С., Гендрин А. Г. Теория и расчет характеристик плазмы ВЧ факельного разряда.— В кн.: Тез. докл. V Всесоюз. конф. по физике низкотемпературной плазмы, т. II. Киев, Изд. ФОЛ АН УССР, 1979, с. 509.
- Тихомиров И. А., Тоболкин А. С., Гендрин А. Г. Расчет ВЧ факельного плазматрона.— Физ. и хим. обработка материалов, 1979, № 6.
- Капцов Н. А. Электроника. М., ГИИТЛ, 1954.
- Margenau H. Konduktion and dispersion of ionized gases at high frequencies.— Phys. Rev., 1946, v. 69, N 9/10.
- Матвеев Я. Н. Развитие электрического факела с изменением давления.— ЖТФ 1941, т. II.
- Бамберг А. С., Дресвин С. В. О температуре факельного разряда, стабилизированного воздушным потоком.— ЖТФ, 1962, т. 32.
- Trupček V. Unipolar highfrequency discharges.— Folia Fac. Sci. Nat. Universit. Brno, 1971, т. 12.
- Марусин В. В., Тихомиров И. А., Тихонов В. В. Измерение параметров плазмы ВЧ разрядов и их использование при анализе происходящих в плазме процессов.— В кн.: Тез. докл. Всесоюз. семинара «Применение низкотемпературной плазмы в технологии». Киев, ОНТИ АН УССР, 1968.
- Тихомиров И. А., Лисицин В. М., Тихомиров Г. С. Исследование спектров излучения плазмы факельного ВЧ разряда.— В кн.: Тр. IV Всесоюз. конф. по физике и генераторам низкотемпературной плазмы. Алма-Ата, КазПИ, 1970.
- Тихомиров И. А., Тихомиров В. В., Федянин В. Я. Измерение электрических параметров ВЧ факельного разряда.— Там же.
- Тихомиров И. А., Тихомиров В. В., Федянин В. Я. Определение некоторых параметров ВЧ факельного разряда.— Изв. ТПИ, т. 225, Томск, 1972.
- Тихомиров И. А. и др. Пространственное распределение параметров плазмы ВЧФ разряда.— В кн.: Тез. докл. VI Всесоюз. конф. по генераторам низкотемпературной плазмы. Фрунзе, Илим, 1974.
- Тихомиров И. А. и др. Свойства и особенности плазмы ВЧ разрядов и их практическое применение.— В кн.: Аппаратура и методы исследования плазмы ВЧ разрядов. Томск, ТГУ, 1976.
- Тихомиров И. А. и др. Некоторые электрофизические характеристики ВЧ факельного разряда.— Изв. ТПИ, т. 276. Томск, 1976.
- Тихомиров И. А. и др. Масс-спектрометрическое исследование плазмы ВЧ разрядов.— В кн.: Тез. докл. V Всесоюз. конф. по физике низкотемпературной плазмы, т. II. Киев, ФОЛ АН УССР, 1979.
- Тихомиров И. А., Кудинов А. П. Исследование коэффициентов ослабления оптического излучения ВЧ плазмы.— Там же.
- Тихомиров И. А., Крохин С. Н. Измерение концентрации электронов в ВЧ факельном разряде микроволновыми методами.— В кн.: Тез. докл. Всесоюз. науч.-техн. совещ. «Метрологическое обеспечение измерений параметров плазмы». Харьков, 1979.
- Тихомиров И. А., Марусин В. В. К распределению электронов по энергиям в факельном разряде.— ЖТФ 1967, т. 38, вып. 1.
- Тихомиров И. А. и др. О функции распределения электронов по энергиям в ВЧ электродном разряде при пониженных давлениях.— Изв. вузов. Физика, 1974, № 4.

35. Тихомиров И. А. и др. Экспериментальное определение функции распределения электронов по энергиям в плазме ВЧ факельного разряда.— В кн.: Тез. докл. II Всесоюз. совещ. «Плазменные процессы в металлургии и технологии». М., ИМЕТ АН СССР, 1976.
36. Тихомиров И. А., Гендрин А. Г. О математическом моделировании транспортных свойств плазмы ВЧФ разряда в аргоне при атмосферном давлении.— В кн.: Тез. докл. III Всесоюз. симпозиума по плазмохимии, т. 2. М., Наука, 1979.
37. Тихомиров И. А., Марусин В. В. Исследование акустического эффекта факельного разряда.— Изв. ТПИ, т. 162, Томск, 1967.
38. Тихомиров И. А., Марусин В. В. Свойства и особенности ВЧ плазмы с амплитудной модуляцией питающего разряд поля.— В кн.: Тез. докл. Всесоюз. семинара «Низкотемпературная плазма». Киев, 1968.
39. Марусин В. В., Тихомиров И. А. Получение амплитудно-модулированной плазмы.— В кн.: Генераторы низкотемпературной плазмы. М., Энергия, 1969.
40. Марусин В. В., Тихомиров И. А., Юрьев Ю. Г. Влияние амплитудной модуляции на свойства ВЧФ разряда.— В кн.: Генераторы низкотемпературной плазмы. М., Энергия, 1969.
41. Тихомиров И. А. и др. АМ-факельный ВЧ разряд как источник звуковых и ультразвуковых полей.— В кн.: Тез. докл. VII акуст. конф. Л., 1973.
42. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., ГИФМЛ, 1963.
43. Исакович М. А. Общая акустика. М., Наука, 1973.
44. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М., Наука, 1967.
45. Матушек И. Ультразвуковая техника. М., Металлургиздат, 1962.
46. Тихомиров И. А., Тихомиров В. В., Сергеев В. Н. О возможности использования АМ-плазмы в плазмохимической технологии.— В кн.: Тез. докл. II Всесоюз. симпоз. по плазмохимии, т. 2, Рига, Зинатне, 1975.
47. Тихомиров И. А., Сергеев В. Н., Крохин С. Н. Исследование параметров акустического поля АМ-факельного разряда.— В кн.: Материалы III Всесоюз. конф. по вопросам ультразвуковой спектроскопии. Вильнюс — Каунас, КПИ, 1976.
48. Тихомиров И. А. и др. Генерирование потоков АМ-плазмы ВЧ разрядов и характеристика ее свойств. Деп. в ВИНТИ № 545-78 от 16.02.78.— Изв. вузов. Физика, 1978, № 5.
49. Тихомиров И. А., Теплоухов В. Л., Каренгин А. Г. Математическое моделирование кинетики испарения диспергированных водных растворов в условиях низкотемпературной плазмы.— В кн.: Тез. докл. XIII Всесоюз. конф. по вопросам испарения, горения и газовой динамики дисперсных систем. Одесса, Обл. полиграфиздат, 1979, с. 75—76.
50. Тихомиров И. А., Теплоухов В. Л., Каренгин А. Г. Математическое моделирование процесса плазмохимической переработки диспергированных водных растворов.— В кн.: Тез. докл. III Всесоюз. симпоз. по плазмохимии. М., Наука, 1979.
51. Бутылкин Ю. П. и др. Модель взаимодействия капель раствора с плазменным теплоносителем при наличии химических реакций.— В кн.: Плазмохимические процессы. М., Наука, 1979.
52. Прудников А. Г. Процессы смесеобразования и горения в воздушно-реактивных двигателях. М., Машиностроение, 1972.
53. Ламден Д. И., Мостинский И. Л. Выпаривание растворителя из капель раствора, движущихся в горячем газе.— ТВТ, 1976, т. 14.
54. Колпаков Г. Н., Теплоухов В. Л., Тихомиров И. А. Генерирование плазмы в металлическом реакторе с помощью факельного ВЧ разряда.— В кн.: Генераторы низкотемпературной плазмы. М., Энергия, 1969.
55. Тихомиров И. А. и др. ВЧ плазмотроны факельного типа и их использование для переработки фторидов.— В кн.: Тр. II Всесоюз. симпоз. по химии неорганических фторидов. М., Изд-во АН СССР, 1970.
56. Тихомиров И. А. и др. ВЧ плазмотроны факельного типа и возможность их использования для синтеза и переработки неорганических соединений.— В кн.: Тез. докл. Всесоюз. совещ. по синтезу и переработке веществ. Рига, Зинатне, 1970.
57. Тихомиров И. А. ВЧ плазмотрон факельного типа.— В кн.: Тр. IV Всесоюз. конф. по физике и генераторам низкотемпературной плазмы. Алма-Ата, 1970.
58. Тихомиров И. А. и др. ВЧ факельные плазмотроны для проведения плазмохимических процессов.— В кн.: Тез. докл. на VI Всесоюз. конф. по генераторам низкотемпературной плазмы. Фрунзе, Илим, 1974.
59. Тихомиров И. А. и др. Генерирование плазменных потоков в ВЧ факельных плазмотронах.— В кн.: Тез. докл. науч.-практ. конф. молодых ученых Томской облсти. Томск, 1975.
60. Тихомиров И. А. и др. ВЧФ плазмотрон и его использование в плазменной технологии.— В кн.: Тез. докл. II Всесоюз. совещ. «Плазменные процессы в металлургии и технологии». М., ИМЕТ АН СССР, 1976.
61. Тихомиров И. А. и др. О ресурсе работы ВЧ факельных плазмотронов.— Изв. ТПИ, т. 293, Томск, 1977.

62. Тихомиров И. А. и др. Вопросы конструирования и разработки ВЧФ плазмотронов.— В кн.: Материалы VII Всесоюз. конф. по генераторам низкотемпературной плазмы, т. 3. Алма-Ата, 1977.
63. Тихомиров И. А. и др. ВЧ факельный плазмотрон для исследований по физике и химии плазмы.— ПТЭ, 1974, № 3.
64. Тихомиров И. А. и др. Некоторые особенности практического применения плазмы ВЧФ разрядов.— Изв. ТПИ, т. 293. Томск, 1977.
65. Воробьев А. А. и др. Реактор для проведения химических процессов во взвешенном слое. Авт. свид. № 252300 с приоритетом от 10.06.68.— Бюл. изобретений, 1969, № 29.
66. Тихомиров И. А. и др. ВЧ плазмотрон взвешенного слоя.— В кн.: Тр. IV Всесоюз. конф. по физике и генераторам низкотемпературной плазмы. Алма-Ата, 1970.
67. Тихомиров И. А., Теплоухов В. Л., Колпаков Г. Н. ВЧ плазмохимические реакторы взвешенного слоя.— В кн.: Гидродинамика, тепло- и массообмен в псевдооживленном слое. Иваново, 1971.
68. Тихомиров И. А., Сергеев В. И., Крохин С. Н. ВЧ плазмотроны для генерирования потоков АМ-плазмы.— В кн.: Материалы VII Всесоюз. конф. по генераторам низкотемпературной плазмы, т. 3. Алма-Ата, 1977.

В. В. КУДИНОВ

ПРОБЛЕМЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ ПЛАЗМЕННОГО НАНЕСЕНИЯ ПОКРЫТИЙ

Нанесение покрытий плазменным распылением — современный технологический процесс повышения качества, надежности и долговечности машин, оборудования и механизмов, метод их ремонта и восстановления, а также один из эффективных способов создания новых материалов, в частности композиционных упрочненных волокнами и частицами. За двадцатилетний период своего развития он завоевал прочные позиции в ракетной технике, машиностроении, энергетике (в том числе атомной), авиационной, космической технике, химической промышленности и электронике. Большие перспективы применения плазменных покрытий открываются в сельскохозяйственной технике, автотракторной промышленности, металлургическом производстве, нефтяной, угольной и горнодобывающей промышленности, водном транспорте, текстильной промышленности, при создании терморационных и других видов покрытий. Постоянно расширяются области производственного применения плазменного напыления, совершенствуется сам процесс и его технология. Однако в настоящее время благодаря расширению как областей применения, так и круга напыляемых материалов универсальное стандартное оборудование для дугового плазменного распыления все в меньшей степени отвечает разнообразным задачам технологии покрытий.

С другой стороны, развитие теории нанесения покрытий позволяет сформулировать ряд задач дальнейшего развития и совершенствования плазменного оборудования для напыления. К таким задачам в первую очередь необходимо отнести: 1) увеличение скорости напыляемых частиц; 2) повышение температур частиц; 3) повышение производительности напыления; 4) регулирование коэффициента сосредоточенности потока напыляемых частиц; 5) возможность нанесения покрытия из мелкодисперсных порошков с размером частиц до 10 мкм; 6) регулирование фазового состава, фазовых превращений в частицах и покрытиях, а также синтезирование сложных соединений в процессе напыления путем использования химически активных струй плазмы; 7) повышение стабильности и ресурса работы плазмотронов для напыления; 8) создание плазмотронов с разделенными потоками напыляемых частиц и плазмы; 9) повышение энергетического КПД плазмотронов для напыления; 10) создание специализированных плазмотронов для нанесения покрытий из проволоки, стержней, гибких шнуров, отличающихся повышенной стабильностью распыления и узким гранулометрическим состоянием напыляемых частиц.

Следует отметить некоторую искусственность такого деления, которое предпринято главным образом для того, чтобы в наиболее выпуклом виде представить каждую задачу. На самом деле большинство задач между собой тесно связаны и находятся во взаимной зависимости, поскольку выражают всего лишь различные стороны единого процесса. Рассмотрим последовательно перечисленные задачи, обращая внимание на уровень, к которому необходимо стремиться при их решении.

Напыляемые частицы, проходя через плазму, нагреваются и разгоняются до определенной скорости. Благодаря тепловой и кинетической энергии частицы приобретают способность к образованию слоя покрытия и его прочному сцеплению с подложкой. Увеличение обоих видов энергии в частицах положительно сказывается на свойствах покрытия — его прочности, плотности и структуре.

Несмотря на высокую скорость истечения плазменных струй, составляющую 1000 м/с и более, максимальная скорость частиц при напылении стандартной аппаратурой колеблется от 100 до 250 м/с в зависимости от напыляемого материала и типа плазмообразующего газа. Только отдельные типы зарубежных установок позволяют наносить покрытия частицами, имеющими более высокую скорость. Например, скорость частиц при напылении установками Швейцарской фирмы Plasmatechnik AG достигает 300—350 м/с.

Теория и эксперименты [1] показывают, что увеличение скорости частиц при плазменном напылении до 400—600 м/с дает большой выигрыш в качестве покрытий и упрощает технологию. Снизятся требования к подготовке напыляемой поверхности, появится возможность наносить покрытия с высокой прочностью сцепления без подогрева подложки. Такой процесс сможет успешно конкурировать с известным детонационно-газовым способом нанесения покрытий [2]. Большие преимущества процесс будет иметь при нанесении покрытий из соединений, склонных к разложению и диссоциации при нагреве. Высокая скорость частиц даст возможность без ущерба для качества покрытий снизить нагрев напыляемых частиц в плазме, что позволит сохранить состав и свойства покрытий из карбидов, боридов, нитридов и других сложных соединений.

Известно, что прочность плазменных покрытий определяется температурой, устанавливающейся в контакте между напыляемыми расплавленными частицами и подложкой, а также временем кристаллизации частиц. Увеличивать температуру контакта T_k и время кристаллизации t_0 можно как повышением температуры подложки, так и перегревом частиц выше температуры плавления. Когда подогрев изделия с целью повышения качества покрытия недопустим, то активизировать процесс образования покрытия можно перегревом частиц [1, 3].

Теоретическое выражение относительной прочности сцепления частиц в зависимости от T_k и t_0 имеет вид

$$\frac{\sigma(T_k, t_0)}{\sigma_{\max}} = 1 - \exp \left[- \frac{\nu t_0}{\exp(E_a/kT_k)} \right], \quad (1)$$

где σ_{\max} — максимальная прочность, достигаемая при напылении данной пары материалов; ν — частота собственных колебаний атомов; E_a — кажущаяся энергия активации процесса; k — постоянная Больцмана.

Данное выражение обычно достаточно точно описывает реальный процесс роста прочности сцепления покрытий при повышении температуры напыляемых частиц (рис. 1). При напылении перегретыми частицами требования к их скорости могут быть снижены до 50—100 м/с.

Современные стандартные дуговые плазмотроны для нанесения покрытий, несмотря на высокую среднемассовую температуру плазмы и на еще более высокую локальную температуру в ядре струи, не позволяют перегревать частицы большинства порошковых материалов существенно выше температуры их плавления. Попытки путей увеличения температуры, а следовательно, и энтальпии напыляемых частиц привели к паллиативным решениям задачи. Для напыления стали применяются плакированные порошки, например $Al-Ni$, $Ti-Ni$. В результате экзотермической реакции между компонентами в частицах этих порошков выделяется тепло и их энтальпия растет. Например, при напылении порошка $Al-Ni$ энтальпия частиц становится такой же, как у расплавленного молибдена, и приближается к энтальпии расплавленного вольфрама [4].

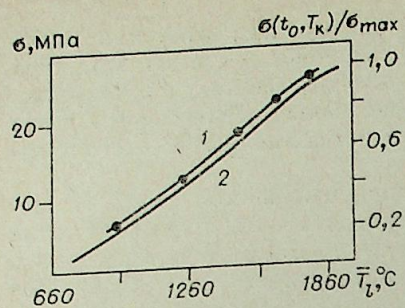


Рис. 1. Изменение прочности сцепления алюминиевого покрытия с алюминиевой подложкой, определенной по клеевой методике (кривая 1) и расчетной относительной прочности сцепления (кривая 2) в зависимости от средней температуры \bar{T}_t напыляемых частиц [3].

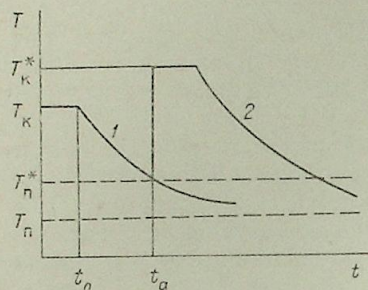


Рис. 2. Схема, поясняющая влияние термически активной частицы 1 на термический цикл в контакте под частицей 2, образующей покрытие [12].

покрытий. Одна из таких работ [10] основана на применении в качестве плазмообразующего газа воздуха, а в качестве газа, транспортирующего порошок, — природного газа. Природный газ, попадая в плазму вместе с порошком, сгорает и увеличивает теплообмен между частицами порошка и плазменной струей. Поэтому при небольшом увеличении мощности существенно возрастает производительность напыления. Расчеты показали, что при мощности дуги 80—100 кВт возможно повышение производительности напыления покрытия из смеси окиси алюминия с алюминием до 15—20 кг/ч.

Другой способ увеличения мощности и переносных свойств плазмы заключается в использовании в качестве плазмообразующей среды смеси топливного газа (природного, пропан-бутана) с окислителем — воздухом или кислородом [11]. Возможность регулировать окислительно-восстановительный потенциал плазмы и ее энергетические характеристики, а также экономичность получения создают благоприятные предпосылки для нанесения покрытий различного состава. По оценкам авторов работы [11], при электрической мощности 150 кВт и общей мощности 200 кВт производительность распыления установки составляет по окислам $20 \div 25$ кг/ч и по никель-хром-бор-кремниевым сплавам — до 50 кг/ч.

Необходимо отметить, что увеличение производительности напыления существенно изменяет механизм формирования покрытия, поскольку появляется возможность взаимного термического влияния частиц в пе-

Последние годы исследованиям плазмотронов для напыления уделяется все большее внимание [5—9]. Однако эти работы ведутся главным образом в традиционном русле снятия энергофизических характеристик, а не направлены на решение основных задач совершенствования процесса плазменного нанесения покрытий.

Применение покрытий для крупногабаритного оборудования металлургической, химической, бумажной и ряда других отраслей промышленности в значительной мере сдерживается отсутствием высокопроводительных установок для напыления. Наибольшей производительностью в настоящее время обладают чешские установки «Аквацентр», выпускаемые серийно. Плазмообразующей и стабилизирующей дугу средой в установке «Аквацентр» является вода. При потребляемой мощности 160 кВт (350 В, 450 А) стабильная производительность распыления порошка окиси алюминия составляет 30 кг/ч. Установка сложна в наладке и эксплуатации, поскольку имеет расходимый графитовый катод и вращающийся медный анод, требует точной регулировки соблюдения режима распыления и подачи воды и, кроме того, пригодна главным образом для нанесения покрытий из окислов.

У нас в стране также ведутся работы по созданию высокопроизводительного оборудования для нанесения

риод образования покрытия на подложке. В работе [12] показано, что повысить качество и в первую очередь прочность покрытий можно, если напыление вести таким образом, чтобы наносимые частицы ложились на еще не остывшие частицы предыдущего слоя. Будем называть такие частицы термически активными, а период их остывания на подложке до определенной температуры T_n^* (более высокой, чем температуры подложки T_n) временем термической (или тепловой) активности частицы t_a (рис. 2). Из рисунка видно, что поскольку $T_n^* > T_n$, то и температура в контакте между напыляемой и термически активной частицей ($T_k^* > T_k$) будет более высокой. Следовательно, согласно выражению (1) возрастает прочность покрытия.

При нанесении покрытий распылением вероятность теплового взаимодействия напыляемых частиц с ранее напыленными термически активными частицами может быть оценена из выражения [12]

$$P \leq s G t_a / (\rho^2 d), \quad (2)$$

где

$$s = \frac{3\beta}{\gamma_1} \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{R}{h} \right)^{2/3}; \quad (3)$$

G — производительность распыления; ρ — радиус рассеивания, который связан с коэффициентом сосредоточенности k удельного распределения напыляемого материала на подложке зависимостью $\rho = k^{-1/2}$; d — диаметр напыляемых частиц β — коэффициент напыления, или коэффициент использования материала; γ_1 — плотность напыляемого материала; R — радиус частицы, растекшейся на подложке; h — высота затвердевшей частицы.

Оценим вероятность взаимного теплового влияния частиц при плазменном распылении с производительностью $G = 3$ г/с; $\rho = 1$ см; $d = 100$ мкм. Время кристаллизации t_0 частиц при напылении на компактную теплопроводную подложку обычно составляет до 10 мкс. Длительность полного остывания частиц до температуры подложки $\sim 100 t_0$ [1], что для принятых условий составит до 1 мс. Следовательно, время термической активности частиц находится в пределах долей миллисекунды. Предположим, что $t_a = 500$ мкс. Учитывая то, что коэффициент использования материала и степень деформации частиц относительно мало зависят от режима напыления, можно полагать $s = \text{const}$. Если для условий напыления принять $\beta = 0,75$; $\gamma_1 = 10$ г/см³ и $R/h = 20$, то $s = 0,5$ см³/г. Тогда при напылении первых слоев на компактный материал

$$P \leq 0,5 \frac{3 \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{10^{-2}} \approx 7,5 \cdot 10^{-2}.$$

Таким образом, вероятность взаимного теплового влияния частиц на подложке в современном стандартном процессе плазменного напыления мала. Однако с ростом производительности эта вероятность увеличивается и при производительности, превышающей 100 кг/ч, стремится к единице.

Из выражения (2) видно, что одним из мощных средств повышения качества покрытий является коэффициент сосредоточенности k потока напыляемых частиц $k = \frac{1}{\rho^2}$. Эксперименты и расчеты показывают, что, повышая коэффициенты k , можно получать покрытия, поверхность которых отличается очень высокой плотностью, твердостью и прочностью и, кроме того, имеет определенный фазовый состав и структуру. Одна из первых установок для плазменного напыления с высоким коэффициентом сосредоточенности, названная «Монолит», описана в работах [13—15]. Она позволила получить из керамики износостойкие покрытия высокого качества.

Сопоставим некоторые характеристики плазменного узла напыления установки «Монолит» и стандартного распыления ГН-5Р установки УПУ-ЗМ [15].

Тип плазмотрона	$k, \text{см}^{-2}$	$G, \text{кг/ч}$	Мощность, кВт	Напыляемый материал	Фазовый состав поверхности покрытия	P
ГН-5Р	0,5	3	25	Al_2O_3	$\gamma\text{-Al}_2\text{O}_3$	0,14
Монолит	4,5	2	10	Al_2O_3	$\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$	0,89

Вероятность P рассчитана для следующих параметров процесса: $\beta = 0,75$; $\gamma_1 = 3,6 \text{ г/см}^3$; $R/h = 20$; $d = 40 \text{ мкм}$; $t_a = 10^{-3} \text{ с}$.

Свойства покрытия из окиси алюминия, полученного на установке «Монолит», вследствие высокой вероятности p взаимного термического влияния частиц на подложке существенно отличаются от покрытий, напыленных на стандартной установке. Их плотность, особенно в поверхностном слое, приближается к теоретической, а сам слой состоит из высокотемпературной α -фазы окиси алюминия и характеризуется высокой прочностью, твердостью и износостойкостью. Покрытие, напыленное на стандартной установке, состоит из $\gamma\text{-Al}_2\text{O}_3$ и имеет пористость около 10%.

Следует подчеркнуть, что высокий коэффициент сосредоточенности k дает возможность повысить качество покрытия именно при невысокой производительности и потребляемой плазмотроном мощности (сравните 25 кВт у ГН-5Р и 10 кВт у «Монолита»). Оба эти фактора имеют решающее значение для технологии нанесения покрытий на небольшие детали, фольги и волокна, которые не допускают перегрева, а также при получении армированных покрытий и композиционных материалов.

Расширение номенклатуры напыляемых материалов и повышение требований к качеству покрытий выдвигают в число первоочередных задачу исследования и поисков эффективных путей управления термической и химической активности плазмы, генерируемой плазмотронами для нанесения покрытий. Практически во всех случаях напыления металлов, сплавов и различных соединений плазму нельзя рассматривать только как нейтральную среду, служащую источником тепла, хотя для ряда металлов и сплавов ее влияние на свойства покрытий незначительно и сводится к небольшому окислению и газонасыщению.

Вопрос о влиянии активности плазмы возникает даже при напылении окислов — соединений, термодинамически достаточно устойчивых [16—20]. Поэтому при напылении сложных веществ необходимо учитывать термические и химические свойства плазмы, которые могут ограничивать допустимый нагрев частиц в плазме [17], определять химические и фазовые превращения в напыляемом материале [18—20], начинающиеся в частицах сразу же в момент их введения в плазму и заканчивающиеся на подложке, и, в конечном счете полностью определять структуру, фазовый состав и служебные свойства покрытия.

Пример сложного и многообразного воздействия плазмы на напыляемый материал рассмотрен в работе [20]. В ней показано, что при нанесении покрытий из ферроокислов высшие окислы железа Fe_2O_3 и Fe_3O_4 претерпевают кристаллохимические превращения, в основе которых лежат явления диссоциации, восстановления, окисления, диспропорционирования и т. п., приводящие к формированию покрытия с многофазной гетерогенной структурой и широким спектром служебных свойств. Если окислительно-восстановительные диффузионные процессы формируют кристаллические ферроокисные структуры типа Fe_2O_3 , Fe_3O_4 , FeO и Fe и, возможно, промежуточные субокислы и твердые растворы, то бездиффузионные процессы диспропорционирования Fe_3O_4 и FeO в условиях чрезвычайно быстрой кристаллизации частиц приводят к появлению рыхлых рентгеноаморфных фаз.

Сложное влияние на напыляемый материал оказывает энтальпия плазмы. Аморфные фазы из высших окислов (Fe_3O_4) образуются в основном при напылении в низкоэнтальпийной плазме. Так, при напылении плазмой аргона количество высокоокисидных аморфных фаз может достигать 60—70% по объему, при напылении на азоте — не выше 24%. Существуют аморфные фазы из микроскопических (менее 1 мкм) частиц. Как правило, внутри аморфных фаз обнаруживаются ядра из металлоподобных фаз. Рентгеноструктурное исследование аморфных фаз не дало результатов, рентгеноспектральный анализ показал практически одинаковое количество железа в аморфных и соответствующих им кристаллических магнетитовых и вюститных фазах.

Вследствие того, что в низкоэнтальпийной плазме Fe_2O_3 восстанавливается главным образом до Fe_3O_4 , в покрытии формируется много крупных магнетитовых аморфных фаз. С ростом энтальпии плазмы, когда магнетит интенсивнее диссоциирует до вюститоподобных фаз, количество аморфной фазы Fe_3O_4 также уменьшается. При дальнейшем возрастании энтальпии FeO начинает окисляться до Fe_3O_4 и количество аморфной фазы увеличивается. При очень высокой энтальпии аморфные фазы практически не образуются.

Еще более сложное и тонкое воздействие на напыляемый материал может оказывать состав плазмы и ее химическая активность. В работах [18, 19] показано, что основные трудности в плазменной технологии получения толстопокрытых ферритовых покрытий для элементов СВЧ-микросхем связаны с сохранением кристаллической структуры и стехиометрии исходного состава по кислороду. Ферритовые материалы являются фазами переменного состава и поэтому в зависимости от температуры, химического состава и давления окружающей среды могут претерпевать различные физико-химические превращения, связанные с изменением валентного состояния и распределения катионов, появлением или исчезновением точечных дефектов, образованием или разрушением однофазной кристаллической структуры. Авторы работы [18] доказывают, что применение кислородной плазмы позволяет избежать изменения содержания кислорода в напыленном феррите и сохранить его исходный состав. Дальнейшие исследования должны быть направлены на уменьшение в покрытии некристаллических фаз и вывод ионов железа из парамагнитного состояния.

Большое внимание в настоящее время уделяется проблемам и перспективам повышения стабильности свойств покрытий. В работах [21—23] показано, что стабильность свойств покрытий целиком определяется стабильностью работы оборудования и плазмотронов, т. е. неизменностью их параметров в процессе напыления. Очень близка к этим задачам — задача повышения ресурса работы плазмотронов в установках для напыления. Известно, что в производственных условиях ресурс работы сопел стандартных плазмотронов мал и обычно ограничивается одной производственной сменой, после чего стабильность распыления и качества покрытия падают.

Авторы работ [21, 22] обращают внимание, что на стабильность энтальпии, скорости и температуры плазменной струи влияют низкочастотные и высокочастотные колебания электрических параметров плазмотрона для распыления, изменения длины дуги, связанные с шунтированием и изменением положения анодного пятна в том числе и вследствие износа сопла.

В настоящее время часть плазменных покрытий получают распылением проволоки, стержней или гибких шнуров, наполненных порошком материала будущего покрытия. Особенно большое распространение получил этот метод при напылении металлов и получении матриц композиционных материалов, упрочненных волокнами. Недостатком существующей аппаратуры для этого процесса является то, что распыляемая проволока

вводится в плазму сбоку струи. Несимметричный процесс распыления приводит к образованию за проволокой теневой застойной газодинамической области, которая периодически нарушает устойчивость распыления. Кроме того, этот способ распыления дает большие отклонения гранулометрического состава частиц напыляемого материала. Поэтому одна из задач в области создания аппаратуры и процессов плазменного нанесения покрытий заключается в разработке способа симметричного распыления стержневых материалов.

В заключение еще раз следует подчеркнуть, что расширение областей и объектов применения плазменного напыления затягивается слабой обеспеченностью промышленности надежной и долгорботающей аппаратурой, а также низким уровнем механизации и автоматизации самих технологических процессов нанесения покрытий. Очень часто выпускаемая стандартная аппаратура не полностью отвечает условиям эксплуатации на промышленных предприятиях и требует существенной доработки. Решение задач, поставленных в данной статье, будет способствовать техническому перевооружению ряда отраслей промышленности.

*Институт металлургии
им. А. А. Байкова АН СССР,
Москва*

*Поступила в редакцию
15/II 1980*

ЛИТЕРАТУРА

1. Кудинов В. В. Плазменные покрытия. М., Наука, 1977.
2. Шоршоров М. Х., Харламов Ю. А. Физико-химические основы детонационно-газового напыления покрытий. М., Наука, 1978.
3. Вахалин В. А. и др. Исследование зависимости температуры напыляемых частиц и свойств покрытий от режимов электродуговой металлзации.— Физ. и хим. обраб. материалов, 1979, № 6.
4. Кудинов В. В., Китаев Ф. И., Цидулко А. Г. Прочностные характеристики плазменного покрытия из смесей никель-алюминиевого порошка.— Порошковая металлургия, 1975, № 8.
5. Клубничкин В. С., Пухов Э. Г. Классификация дуговых плазмотронов для напыления.— В кн.: Теория и практика газотермического нанесения покрытий. Материалы IV семинара 17—18 октября 1974 г. г. Дмитров. М., Ротапринт ВНИИГнМ, 1976.
6. Пухов Э. Г. Плазмотроны с МЭВ для напыления.— В кн.: Теория и практика газотермического нанесения покрытий. Тез. докл. VII совещания. Дмитров, Ротапринт ВНИИГнМ, 1978.
7. Донской А. В., Клубничкин В. С., Рогинский В. Э. Исследование плазмотронов для напыления с фиксированной и самоустанавливающейся длиной дуги.— Там же.
8. Бурьяненко В. Д., Донской А. В., Клубничкин В. С. Об использовании плазмотронов с вынесенной дугой для напыления.— Там же.
9. Боршков Б. Н. и др. Энергетические характеристики плазмотрона М8-27.— Там же.
10. Конокотин В. В. и др. Исследование влияния технологических параметров напыления и состава покрытия на эксплуатационные свойства электродов с покрытием.— Там же.
11. Карп И. Н. и др. Исследование плазменного напыления высокоэнтальпийной газовой смесью.— Там же.
12. Кудинов В. В., Белащенко В. Е. Влияние параметров процесса на условия формирования покрытия и распределение его толщины при напылении.— Физ. и хим. обраб. материалов, 1977, № 6.
13. Коваленко Г. Д., Душевский И. В., Петров Ю. Н. Фазовые пере-

ходы в покрытиях при плазменном напылении окиси алюминия.— Электронная обработка материалов, 1975, № 1 (55).

14. Рогожин В. М., Кудинов В. В., Коваленко Г. Д. О возможности взаимодействия частиц в жидкой фазе при плазменном напылении.— Физ. и хим. обраб. материалов, 1977, № 6.
15. Коваленко Г. Д., Рогожин В. М. Получение компактной металлзационной струи при плазменном напылении.— В кн.: Теория и практика газотермического нанесения покрытий. Материалы IV семинара... М., 1976.
16. Боропечков В. Н., Гершензон С. М. Термодинамический расчет изменения состава покрытий при окислении.— В кн.: Теория и практика газотермического нанесения покрытий. Тез. докл. VII совещ. Дмитров, 1978.
17. Смирнов Ю. В. Плазменное напыление окислов редкоземельных металлов.— Там же.
18. Нижельский Н. Л. и др. Плазменное напыление ферритов.— Там же.
19. Вамберский М. В. и др. О физико-химических превращениях при плазменном напылении ферритов.— Физ. и хим. обраб. материалов, 1978, № 4.
20. Кудинов В. В., Кулик А. Я., Мезерницкий Л. Ю. Плазменное напыление ферроокислов.— Физ. и хим. обраб. материалов, 1980, № 1.
21. Пузряков А. Ф. Проблемы и перспективы создания высокостабильного оборудования для плазменного напыления.— В кн.: Теория и практика газотермического нанесения покрытий. Тез. докл. VII совещ. Дмитров, 1978.
22. Новоселов А. В., Пузряков А. Ф. Влияние положения анодного пятна дуги на технологические характеристики процессов напыления.— Там же.
23. Пузряков А. Ф. и др. Влияние пульсации электрических величин на технологические параметры процесса напыления.— Там же.

Б. Н. ДЕВЯТОВ, В. И. НАЗРУК

ЛОКАЛЬНО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛЕ ПЛАЗМОТРОНА МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

В большинстве плазматронов дуга горит в условиях турбулентного течения газа. Это связано с тем, что турбулентные течения обладают большой способностью к передаче тепла, к распространению химических реакций, к переносу взвешенных частиц, что весьма существенно для многих задач плазменной техники. С другой стороны, проектирование плазматронов осложняется отсутствием достаточной информации о внутренней структуре электродуговых течений.

С теоретической точки зрения турбулентная плазма является примером нелинейных механических систем с большим числом степеней свободы. По этой причине детерминированное описание изменения во времени полей скорости, давления, температуры и других характеристик турбулентной дуги практически невозможно из-за нерегулярного характера их поведения. Поэтому представляется естественным статистическое описание, опирающееся на изучение специфических закономерностей, присущих большой совокупности однотипных объектов.

Если обратиться к картине течения в канале плазматрона [1], то турбулентный поток можно считать суперпозицией вихрей с различными размерами и завихренностью. Согласно теореме Гельмгольца, вихревые образования замкнуты сами на себя и, по данным измерений, обладают свойствами квазитвердого вращения. Поэтому любое взаимодействие между ними сопряжено с появлением гидродинамических сил, не являющихся ни консервативными, ни диссипативными. Следовательно, взаимодействие между вихрями в отличие от актов обмена молекулярной природы влияет только на импульс и энергию турбулентности.

Успехи статистического описания хаотического движения дискретных объектов с консервативными свойствами и законами взаимодействия (молекул в кинетической теории газов) стимулировали статистический подход в теории турбулентных течений. Однако трудности теории при переходе от дискретных объектов, с которыми оперирует кинетическая теория газов, к различным неоднородным вихревым образованиям с изменяющимися во времени и пространстве свойствами и законами взаимодействия, осуществляющими в турбулентных течениях процессы переноса, оказались столь велики, что реальные успехи в этом направлении ограничиваются в основном предсказанием свойств локально-изотропной турбулентности [2].

В современной гидромеханике [3] всегда подразумевается, что гидродинамические поля турбулентного течения представляют собой случайные поля в смысле, принятом в теории вероятностей. Каждая конкретная реализация такого поля рассматривается как некий представитель статистического ансамбля всевозможных полей, характеризуемых определенной вероятностной мерой на множестве функций от пространственных координат и времени, удовлетворяющих необходимым кинема-

тическим и динамическим условиям, вытекающим из законов гидродинамики.

В этом случае проблема турбулентности сводится к нахождению распределения вероятностей на фазовом пространстве турбулентного потока, точками которого являются всевозможные векторные поля скорости, удовлетворяющие уравнениям гидродинамики и надлежащим граничным условиям. Зависимость распределения вероятностей от времени отражает эволюцию поля скоростей. Полное определение распределения вероятностей является задачей исключительной трудности и в настоящее время далекой от решения.

Однако в большинстве практических задач достаточно определить лишь некоторые простейшие характеристики распределения вероятностей для значений параметров турбулентного потока, такие как средняя скорость, давление, коэффициенты корреляции. Поэтому большинство работ посвящается попыткам хотя бы приближенного определения этих характеристик [4]. Здесь необходимо выделить два направления, одно из них посвящено описанию крупномасштабных компонент турбулентности [5], другое — мелкомасштабных [6]. Основное отличие в поведении этих двух типов описания состоит в том, что крупномасштабные характеристики зависят от геометрических границ потока и оказываются различными для различных типов течений, тогда как мелкомасштабные имеют в значительной мере универсальный характер. С другой стороны, крупномасштабные компоненты вносят основной вклад в передачу через турбулентную среду импульса и тепла, и вследствие этого их описание необходимо для таких технических проблем, как расчеты сопротивления и теплообмена. Поэтому, естественно, что разработке методов описания крупномасштабных компонент турбулентности при течениях в каналах уделяется первоочередное внимание как в теоретическом, так и в экспериментальном плане.

На базе практических исследований были построены полуэмпирические теории, которые базируются в основном на аналогии между турбулентным и молекулярным хаосом [7]. В них основную роль играют такие понятия, как моль жидкости (аналог молекул), длина пути смешения (аналог длины свободного пробега), интенсивность турбулентности (аналог средней скорости молекул), коэффициент турбулентной вязкости, теплопроводности, диффузии.

В работах Л. Прандля [5] выдвинуто предположение, что каждый моль жидкости, участвующий в турбулентном движении, может рассматриваться как некоторая индивидуальность, и что субстанция такого моля сохраняется в течение определенного промежутка времени (на определенном расстоянии), а также (для плоского течения) каждый моль, кроме поперечной компоненты скорости, имеет еще и компоненту в осевом направлении, и они одинаковы по порядку величины. Цель исследования состояла в том, чтобы выразить коэффициент турбулентной вязкости и диффузии через фундаментальную характеристику потока. Благодаря этому оказалось возможным получить полезные и практически важные полуэмпирические соотношения для турбулентных напряжений.

Последние исследования показали [8], что физическая картина, основанная на понятии «пути смешения», не может быть верной в деталях (особенно это касается трехмерных течений). Современные исследования пока не дали более правильных теорий, которые с практической точки зрения могли бы более успешно заменить теорию «пути смешения».

Основанный Л. Прандлем дискретный подход к описанию сплошных сред приобретает в настоящее время большое значение в связи с развитием средств вычислительной техники, а следовательно, и возможностей методов прямого статистического моделирования турбулентных течений.

Идея такого моделирования состоит в том, что сначала формируется некоторый случайный процесс, основное уравнение которого в известном

смысле совпадает [9] с тем уравнением, которое нужно решать на данном этапе вычислений. Затем вместо непосредственного решения искомого уравнения многократно моделируется на ЭВМ найденный случайный процесс, и по полученной таким образом статистике находятся все необходимые величины. Естественно, что моделируемый процесс не обязан быть точной копией моделируемого явления. Однако определенное смысловое совпадение необходимо, особенно в столь сложных для анализа уравнениях динамики турбулентных течений.

Перспективными в этом смысле представляются попытки исследования турбулентности, основанные на статистических методах прямого моделирования течений. Принцип одного из них — расщепление по физическим процессам — описан в [10]. Моделируемую среду заменяют системой из N частиц (для сплошной среды «жидких частиц»), которые группами распределены в начальный момент времени по ячейкам эйлеровской сетки в координатном пространстве в соответствии с начальными данными. Эволюция такой системы разделяется на два этапа: изменение внутреннего состояния подсистем, находящихся в ячейках, в предположении их неподвижности («эйлеров» этап сплошной среды) и последующее смещение всех частиц пропорционально их скорости без изменения их внутреннего состояния («лагранжев» этап). Стационарное состояние распределения всех параметров среды вычисляется после установления процесса во времени. Эффективность подходов такого рода подтверждается значительными результатами исследований [11, 12].

Однако, как замечают авторы работ [11—14], главные ограничения предложенных методов обусловлены тем, что в пространственно-неоднородном случае остается неопределенным вид соответствующего обобщенного уравнения реального процесса, если не пренебречь статистической зависимостью частиц. Причем обобщенное уравнение должно быть линейным, так как соответствующий случайный процесс имеет строго марковский характер. Поэтому невозможно заранее предсказать величину статистической зависимости частиц, и, следовательно, степень аппроксимации исходного моделируемого уравнения (например, уравнения Больцмана). Влияние этой величины можно выяснить лишь в каждой конкретной задаче прямой реализацией алгоритма или сравнением результатов с другими численными методами.

В частности, на «микродискретном» уровне для условий разреженного газа, как отмечается в работе [9], необходимый отход от условий «хаоса» не влечет существенных искажений и в то же время способствует моделированию «неравномерно распределенного поля» (что фактически связано с переходом к нелинейному вероятностному пространству). Это обусловлено малыми нарушениями условий «хаоса», т. е. введением небольших нелинейностей в пространство состояний.

В интересующих нас условиях турбулентной дуги, так же как и вообще во многих случаях развития турбулентных потоков, приходится иметь дело со сравнительно небольшим множеством дискретных образований (молей), которые определяют глобальное развитие процесса. Отсюда большие изменения условий в сторону существенной нелинейности, как это фактически имеет место и в математическом понятии пространства множеств. Рассматривая множественные случайные процессы, мы получаем возможность перейти к более слабому условию независимости событий — независимости множественной [15], что объясняется более удобными для моделирования свойствами операций над множествами по сравнению с операциями над числами. Исходные данные, необходимые для построения вероятностной множественной модели пространственного взаимодействия, представляют собой вероятностно-множественные правила локального развития, т. е. распределения случайных множеств, описывающих пространственные случайные взаимодействия турбулентных молей потока.

В результате анализа постановок задач [16—18] можно сделать вывод, что в развитии основных идей рассмотренного в них моделирования уже содержатся предпосылки предлагаемого в нашей статье нового вероятностного множественного подхода.

Однако принципиальная новизна этого подхода связана с определенным событием на целинейном пространстве множеств и рассмотрением, кроме числовых характеристик, также множественных характеристик случайных множеств. При этом, с одной стороны, задаются локальные случайные множества, описывающие локально-множественные правила взаимодействия турбулентных молей потока, с другой — задаются связи между локальными множествами, определяющие развитие всего течения в целом. Таким образом, открываются принципиально новые возможности моделирования развития процесса без обращения на этом этапе к каким-либо уравнениям гидро- или газодинамики.

В математическом аппарате вероятностного моделирования понятие математического ожидания здесь не используется, а заменяется соответствующим аналогом, не связанным с условием линейности и опирающимся лишь на условие наличия метрики. Это отличает данный подход от других, применяемых в различных приложениях теории случайных полей, когда случайные множества заменяются своим индикатором и поэтому оставляют задачу на уровне анализа лишь числовых, а не множественных характеристик процессов. Можно надеяться, что снятие указанных ограничений позволит достигнуть большей реалистичности в вероятностном моделировании сложных процессов турбулентной плазмы и вообще процессов взаимодействия и распространения в турбулентных потоках.

Очень важно, что рассматриваемые с помощью предлагаемого множественного подхода процессы легко могут быть сведены к марковским. Дело в том, что практически для любого случайного процесса можно подобрать такое пространство состояний, относительно которого этот процесс будет марковским. Однако все упирается в сложность таких построений.

Это обстоятельство хорошо поясняется на следующем примере. Учет инерции частиц в теории молекулярной диффузии [19] осуществляется на основе предположения, что марковский процесс представляется шестимерной функцией $\{\vec{X}(\vec{x}, t), \vec{V}(\vec{x}, t)\}$, потому что мгновенной скорости в изложенной ее трехмерной модели не существует. Если считать, что $\vec{X}(\vec{x}, t)$ — случайная функция, описывающая движение «жидкой частицы» почти всюду дифференцируемая по t , и ее производная (скорость) ограничена, то $\vec{X}(\vec{x}, t)$ уже нельзя считать марковской функцией от t . Более того, если скорость не будет бесконечной, то эта функция, вообще говоря, не будет случайной. Таким образом, условие ограниченности скорости жидкой частицы несовместимо с предположением, что ее координата $\vec{X}(\vec{x}, t)$ является марковской случайной функцией от t . По этой причине главные трудности моделирования обычно связаны со степенью сложности выбранного пространства состояний. Это справедливо и для множественных случайных процессов. И здесь следует заметить, что марковский множественный случайный процесс, обладающий простым пространством состояний, можно рассматривать как модель явления, для описания которого иным образом потребуется во много раз более сложное пространство состояний.

Проиллюстрируем возможности развития данного подхода, рассмотрев задачу о турбулентном течении в канале плазмотрона. Здесь мы не стремились получить точную модель процесса развития турбулентного потока или конкретного процесса в нем. Основная цель рассмотрения этой задачи заключается в том, чтобы показать плодотворность локально-множественного подхода к описанию простейшей модели механизма

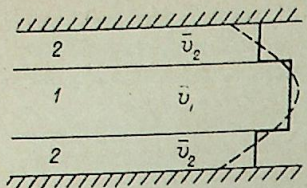


Рис. 1. Двухслойная аппроксимация потока.

турбулентного переноса в плоском потоке. Простейшей она названа потому, что в ней используются ряд упрощающих ограничений. Однако уже в этом виде с помощью вероятностно-множественного моделирования удается подобрать такие локальные вероятностные законы взаимодействий молей, которые позволяют качественно описывать профиль скорости в канале.

Эта модель служит первым, пробным вариантом. Принятые в ней предположения не содержат принципиальных ограничений. Напротив, уже сейчас видно, что они могут быть последовательно сняты при совершенствовании модели. Представляется, что данный статистический подход позволит в дальнейшем получать конкретные результаты в описании электродуговых течений по мере того, как будут выясняться свойства турбулентных молей, законы их развития во времени и пространстве, а также механизм их взаимодействия со столбом электрической дуги*.

Пусть в начальный момент времени через канал протекает ламинарный поток. Предположим, что с течением времени в каждой точке потока может возникнуть турбулентный моль, который мгновенно перескакивает в другое место и исчезает. Разность скоростей осредненного движения на расстоянии длины пробега моля по абсолютной величине обычно меньше модуля вектора пульсационной скорости моля. Поэтому спектр направлений движения молей, образующихся в окрестности произвольной точки потока, удаленной от стенок канала, будем считать приближенно изотропным. Не усложняя детальным рассмотрением взаимодействия моля с окружающей средой общий подход к развитию модели турбулентного обмена, предположим, что в точке исчезновения моля изменится лишь мгновенная скорость потока. Выделенный участок канала, в котором моделируется эволюция течения, разобьем на квадратные ячейки с размерами порядка длины пробега моля. Параболический профиль скорости аппроксимируем ступенчатой функцией (рис. 1). Пусть совокупность узлов решетки, лежащих в центральном слое, образуют множество K_0^1 , остальные узлы принадлежат множеству K_0^2 . Причем K_1^1 и K_1^2 — непересекающиеся множества — есть множественная модель состояния жидкости в момент времени $t = \{0, 1, \dots, T\}$.

В рамках высказанных предположений динамику развития течения в канале можно описать распределенным в пространстве процессом случайного взаимодействия [21]. Тогда в момент времени $t+1$ состояние потока будет определяться следующим рекуррентным соотношением:

$$K_{t+1}^1 = K_t^1 - A_t + B_t, \quad K_{t+1}^2 = K_t^2 - B_t + A_t, \quad (1)$$

где $A_t(B_t)$ — множества молей из $K_t^1(K_t^2)$, исчезающих к моменту времени $t+1$.

Блок-схема программы моделирования этого механизма турбулентности, реализованной на ФОРТРАНе, представлена на рис. 2. На этой схеме можно выделить следующие блоки:

1. Блок задания начальных условий.
2. Блок рождения молей. Моделируется множество M_t узлов решетки, в которых в момент времени t рождаются моли. Вероятность покрытия узла r ($\pi_{M_t}(r) = P_r$) множеством M_t выбирается в соответствии с вероятностью возникновения молей по сечению канала.

* Этим исследованиям посвящена работа [20], в которой рассмотрены возможности множественного моделирования пульсаций дуги в турбулентном потоке.

3. Блок классификации молей в момент времени t . Множество M_t разбивается на два N_t^1 и N_t^2 , представляющих соответственно множества молей, порожденных узлами множеств K_t^1 и K_t^2 .

4. Блок определения множества исчезающих молей в момент $t+1$. Здесь W_r^i множество локального перемещения молей i ($i=1, 2$) состояния, заданное вероятностью покрытия узлов в единичной окрестности $r \in D_r^1$, т. е. для $\forall r \in R_2$ и $\forall x \in D_r^1$, заданы $\pi_{W_r^i}(x) = P_r^i$, причем $\sum_{x \in D_r^1} \pi_{W_r^i}(x) = 1$.

5. Моделирование состояния потока в момент времени $t+1$ с помощью рекуррентных соотношений (1), здесь

$$A_t = \bigcup_{r \in N_t^1 \cap K_t^1} S_r^{1,1} + \bigcup_{r \in N_t^2 \cap K_t^1} S_r^{1,2}, \quad B_t = \bigcup_{r \in N_t^1 \cap K_t^2} S_r^{2,1} + \bigcup_{r \in N_t^2 \cap K_t^2} S_r^{2,2},$$

а $S_r^{i,j}$ — случайное множество локального взаимодействия. Вероятность покрытия узла r ($\pi_{S_r^{i,j}}(x) = P_r^{i,j}$) множеством $S_r^{i,j}$ — выбирается исходя из физических предпосылок.

В результате работы программы по предложенному алгоритму смоделированный профиль скорости в канале приобретает следующий вид (рис. 3), характерный для турбулентного течения. Видно, что вследствие обмена импульсом в поперечном направлении распределение скорости в сечении становится значительно равномернее.

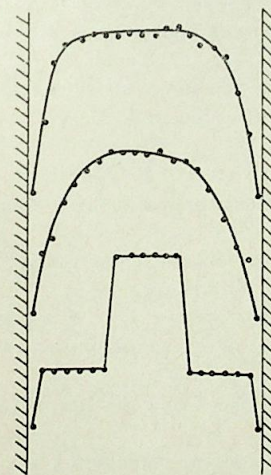


Рис. 3. Развитие во времени профиля скорости в канале. (расчет по модели)

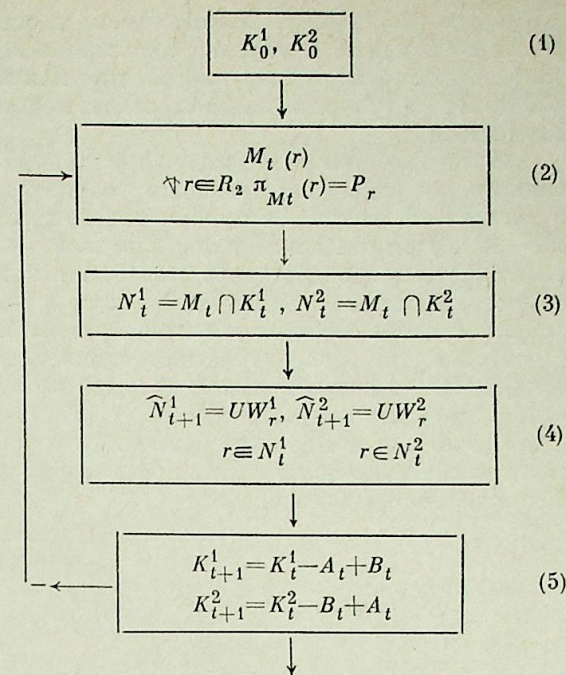


Рис. 2. Блок-схема статистического моделирования множественного случайного процесса.

Таким образом, можно сказать, что эта вероятностно-множественная модель, несмотря на свое грубое приближение, позволяет качественно моделировать динамику изменения распространения скорости потока по сечению канала при переходе от ламинарного течения к турбулентному.

Существенно, что представленная выше методика моделирования предусматривает возможности ее дальнейшего развития и, прежде всего, развитие в двух направлениях:

1. Увеличение размерности множественного случайного процесса, что не приводит к изменениям рекуррентного соотношения (1), а позволит включить в рассмотрение столб электрической дуги, подверженный воздействию турбулентных молей стабилизирующего потока. Это значительно приблизит модель к реальности, хотя и позволит лишь качественно описывать электродуговые течения.

2. Для получения количественных оценок изменения профиля скорости необходимо в задании локальных вероятностных множеств включить зависимости между скоростями молей, аналогичные полученным в работе [18], которые на этом этапе моделирования были представлены схематично.

В заключение отметим, что в данной методике локально-множественного подхода естественным образом учитываются представления о дискретной структуре турбулентного течения, исследованной в работах [22—24]. При этом локальное множество случайного перемещения отражает хаотическое движение молей в потоке, локальное множество случайного взаимодействия учитывает природу их взаимодействия, а в совокупности описывается динамика развития потока в целом.

Кроме того, вероятностная множественная модель представляется рекуррентным соотношением, которое, по существу, является готовым алгоритмом ее реализации на ЭВМ.

Все это дает большие возможности для использования математического эксперимента на ЭВМ, при котором проигрываются различные условия течений в канале.

*Институт теплофизики
СО АН СССР,
Новосибирск*

*Поступила в редакцию
12/VIII 1979*

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуков М. Ф., Коротеев А. С., Урюков Б. А. Прикладная динамика термической плазмы. Новосибирск, Наука, 1975.
2. Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса.— ДАН СССР, 1941, т. 30, № 4.
3. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, т. 1. М., Наука, 1965.
4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., Наука, 1974.
5. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. М., ИЛ, 1949.
6. Бэтчелор Дж. Теория однородной турбулентности. М., ИЛ, 1955.
7. Тейлор Дж. Диффузия завихренности и тепла в турбулентном потоке.— В кн.: Проблемы турбулентности. М.—Л., ОНТИ, 1936.
8. Хинце И. О. Турбулентность. М., ГИФМЛ, 1963.
9. Белоцерковский О. М., Яницкий В. Е. Одна статистическая модель течения идеального газа.— Тр. IV Всесоюз. конф. по динамике разреженного газа и молекулярной газовой динамике. М., Изд. отдел ЦАГИ, 1977.
10. Белоцерковский О. М., Яницкий В. Е. Статистическое моделирование течения идеального одноатомного газа.— В кн.: Турбулентные течения. М., Наука, 1977.
11. Белоцерковский О. М., Гущин В. А., Щепников В. В. Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости.— ЖВМ и МФ, 1975, т. 15, № 1.
12. Харлоу Ф. Х. Численный метод «частиц в ячейках» для задач гидродинамики.— В кн.: Вычислительные методы в гидродинамике. М., Мир, 1967.
13. Белоцерковский О. М., Яницкий В. Е. Численные методы в динамике разреженного газа.— Тр. IV Всесоюз. конф. по динамике разреженного газа и молекулярной газовой динамике. М., 1977.
14. Bird G. A. Direct simulation and the Boltzmann equation.— Phys. Fluids, 1970, 13, № 11.
15. Воробьев О. Ю., Девятов Б. И. О развитии методов моделирования процессов случайного распространения.— Изв. СО АН СССР, 1976, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.
16. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. М., Мир, 1965.

17. Численное исследование современных задач газовой динамики. Под ред. О. М. Белоцерковского. М., Наука, 1974.
18. Булеев П. И. Теоретическая модель механизма турбулентного обмена в потоках жидкости.— В кн.: Теплопередача. М., Изд-во АН СССР, 1962.
19. Чандрекар С. Стохастические проблемы в физике и астрономии. М., ИЛ, 1947.
20. Б. И. Девятов, М. Ф. Жуков, В. И. Назарчук. Множественное моделирование пульсаций дуги методом Монте-Карло.— Изв. СО АН СССР, 1980, № 3. Сер. техн. наук, вып. 1.
21. Воробьев О. Ю. О множественных характеристиках состояний распределенных вероятностных процессов.— Изв. СО АН СССР, 1977, № 3. Сер. техн. наук, вып. 1.
22. Корипо Е., Бродкин Р. Визуальное исследование пристепочной области в турбулентном течении.— В кн.: Механика. М., Мир, 1971.
23. Струминский В. В., Филиппов В. М. Экспериментальное исследование явления рассеяния света в ламинарных и турбулентных потоках жидкости.— Изв. АН СССР. ОТИ, Механика и машиностроение, 1962, № 6.
24. Струминский В. В. О возможности применения динамических методов для описания турбулентных течений.— В кн.: Турбулентные течения. М., Наука, 1974.

В. И. НАЗРУК

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДУГИ С ТУРБУЛЕНТНЫМ ПОТОКОМ

В настоящее время становится ясно, что достигаемые на практике значения напряженности электрического поля и объемная концентрация энергии в дуге не в полной мере удовлетворяют технологическим требованиям. С этой проблемой связана необходимость направленного поиска методов существенного увеличения напряженности. Одним из них может быть какой-либо способ возбуждения и поддержания неустойчивости дугового столба, что приводит к интенсификации теплообмена с окружающим потоком и, как следствие, к увеличению удельной мощности, выделяемой дугой [1].

В связи с этим существенный интерес представляют теоретические и экспериментальные исследования пульсаций турбулентной дуги [2, 3]. Так, например, в работе [2] разработана и подтверждена экспериментально качественная модель поведения дуги в плазматроне осевой схемы (рис. 1), согласно которой на начальном участке цилиндрического канала дуга локализована на оси потока и ее форма близка к прямолинейной. На некотором расстоянии от катода нарастающий вдоль стенки канала турбулентный пограничный слой достигает границы дуги и оказывает на нее механическое и тепловое воздействие. Под границей дуги здесь и далее подразумевается некоторая поверхность раздела, где происходит резкое понижение температуры и вязкости плазменного шнура. В работе [3] экспериментально проведена идентификация координаты начала обнаруженного возрастания напряженности электрического поля вдоль дуги с местом воздействия на нее пограничного слоя и отмечено, что случайный характер колебаний столба дуги является следствием воздействия на него турбулентных молей потока.

Задачу об эволюции формы дуги можно решать классическими численными методами. Однако можно предполагать, что единственным методом, позволяющим учесть все многообразие факторов, влияющих на геометрию дуги, является метод статистического моделирования, о перспективах которого говорилось в работе [4].

Изучение механизмов взаимодействия дуги с турбулентным потоком с позиций вероятностно-множественного моделирования дает принципиально новую возможность в исследовании дугового разряда, а именно его множественных характеристик, с помощью которых легко описывается механизм изменения геометрии дуги, неподдающийся простому описанию численными характеристиками. Это объясняется тем, что в своем внешнем проявлении электродуговой поток действительно представляет собой множественный процесс [5], которому свойственна случайная изменчивость. Для описания такого

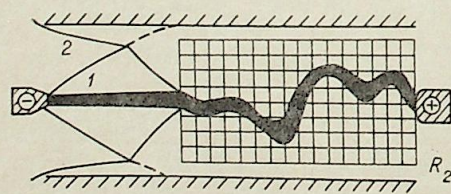


Рис. 1. Дуга в осевом потоке газа.

процесса употребление множественных характеристик как детерминированных, так и вероятностных представляется наиболее реалистичным. Поэтому этот подход не только целесообразен, но и в известной мере необходим. В этом отношении метод статистического моделирования имеет более широкие возможности по сравнению с существующими в теории дифференциальных уравнений. С помощью последних строятся модели [5], которые описывают лишь числовые характеристики процесса.

Статистическое моделирование турбулентной дуги позволяет, учитывая ее локальные законы множественного взаимодействия, описать пространственное состояние столба дуги. Благодаря этому ликвидируется неопределенность в структуре всего течения в канале плазматрона, что в конечном итоге приводит к возможности решения на модели различных задач управления геометрической формой плазменного шнура путем локального воздействия на характер протекания процесса. Следует отметить, что вероятностно-множественные модели описываются рекуррентными соотношениями. Это позволяет использовать широкие возможности численного моделирования. В ходе проигрывания на ЭВМ различных физических ситуаций вырисовываются более информативные постановки эксперимента.

Данная работа продолжает исследования, связанные с постановкой задачи вероятностного, множественного моделирования процессов в турбулентном потоке [6]. Ее результаты являются иллюстрацией возможностей предложенных методов статистического моделирования взаимодействия дуги с турбулентным потоком. Они получены в ходе численных экспериментов на ЭВМ при использовании упрощенной модели возникновения и развития изгибных неустойчивостей проводящего канала дуги. Однако уже в таком варианте предположений раскрываются возможности статистического моделирования и удается подобрать такие локальные законы взаимодействия, с помощью которых качественно описывается типичная геометрия проводящего канала дуги.

Остановимся более подробно на методе моделирования. Пусть на узлах решетки R_2 расположено сечение канала плазматрона осевой схемы (см. рис. 1) и выполняются условия квазиодномерной модели дуги [7], согласно которой скорость потока (вне пристепоного пограничного слоя) можно принять постоянной. Тогда множество узлов решетки, занятых столбом дуги, обозначим K_t^1 , а остальные, моделирующие поток газа, K_t^2 . Предположим, что с течением времени ($t = 0, 1, \dots, T$) в каждой точке потока может возникнуть турбулентный моль, который мгновенно перескакивает в соседний узел и исчезает. Совокупность направлений перемещения молей будем приближенно считать изотропной. Кроме того, зададим условия взаимодействия дуги с турбулентными молями потока, которые приводят к некоторому перераспределению областей, занятых потоком и дугой [6]:

$$K_{t+1}^1 = K_t^1 - A_t + B_t, \quad K_{t+1}^2 = K_t^2 - B_t + A_t,$$

где $A_t(B_t)$ — в данном случае множество узлов R_2 , которые к моменту времени $t + 1$ занимают турбулентный поток (проводящий канал). Данный подход согласуется с идеологией вероятностно-множественного моделирования и высказанных предположений достаточно для моделирования процесса случайного взаимодействия методом Монте-Карло. По приведенному алгоритму составлена программа статистического моделирования, результаты численных экспериментов показаны на рис. 2, на котором видно, что определенным направленным выбором локальных условий взаимодействия можно моделировать не только изменение границ столба дуги, но и последовательное развитие его как целого.

Таким образом, предложенный метод статистического моделирования развития пространственной конфигурации столба турбулентной

В. В. БЕРБАСОВ

ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ДУГА
В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В работе [1] приведены экспериментальные результаты газодинамических и тепловых характеристик электрической дуги при атмосферном давлении, горящей в поперечном магнитном поле и обдуваемой струей воздуха в направлении, перпендикулярном оси дуги и направлению внешнего магнитного поля. Эксперименты показали, что при возрастании скорости потока и индукции магнитного поля размер электрической дуги, поперечной вектору скорости потока, увеличивается, а продольной — уменьшается. Индукция магнитного поля, необходимая для того чтобы сбалансировать дугу, пропорциональна квадрату скорости набегающего потока, т. е. $B \sim v_{\infty}^2$.

Результаты работы [1] показали некоторую аналогию между картиной обтекания поперечно-обдуваемого цилиндра и электрической дуги. Были предприняты попытки для теоретического описания данного явления при некоторых упрощающих предположениях. Так, в работах [2, 3] течение считается ламинарным, $Re \ll 1$, сечение электрической дуги принимается круговым (канальная модель), электропроводность — постоянной внутри кругового цилиндра и равной нулю вне его. Также разделяются уравнения сохранения импульсов и энергии, на границе электрической дуги предполагается скачок плотности и вязкости среды. В работе [3] при тех же предположениях учтено только изменение электропроводности внутри кругового цилиндра. В этих работах показано, что внутри электрической дуги существуют два симметричных вихря, получено распределение температуры внутри электрической дуги. К недостаткам работ [2, 3] следует отнести то, что их авторы вводят четко определенную границу дугового столба, не определяя внешние магнитные поля и числа Рейнольдса набегающего потока, при которых электрическая дуга сбалансирована.

Рассмотрим задачу, которая, на наш взгляд, может объяснить некоторые физические процессы, происходящие при взаимодействии поперечного потока, обдувающего электрическую дугу, и внешнего магнитного поля, наложенного так, чтобы сила Лоренца $\vec{F} = \text{rot } \vec{H} \times \vec{B}$ была направлена против потока. На рис. 1 представлен плоский полубесконечный длинный канал, в котором горит электрическая дуга. С торца канала подается некоторое количество газа, торец канала может представлять собой проницаемую стенку. Считаем, что течение ламинарное во всей области течения, кривизна электрической дуги пренебрежимо мала, т. е. рассматривается модель бесконечно длинной дуги.

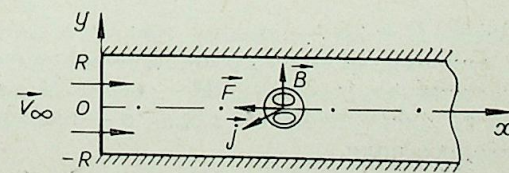


Рис. 1. Модель обдува дуги в плоском канале.

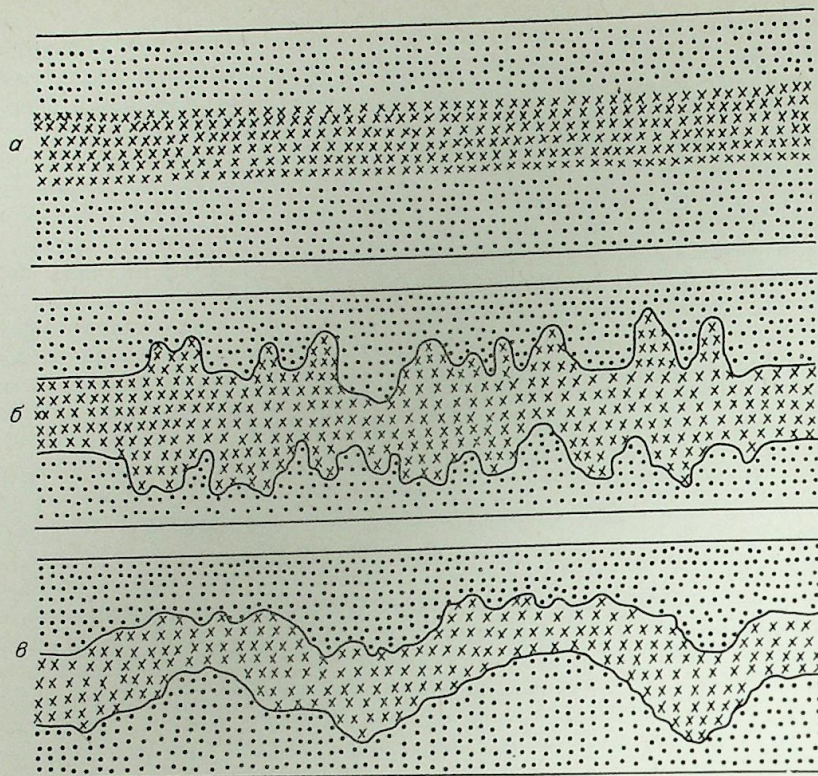


Рис. 2. Последовательное развитие геометрии столба турбулентной дуги.

дуги, учитывая вероятностные локально-множественные правила взаимодействия, описывает общее развитие процесса. Благодаря его использованию ликвидируется неопределенность в строении развивающейся пространственной структуры, что в конечном счете приводит к корректной постановке задач управления дугой путем локального воздействия на правила ее развития, которые в определенных случаях могут привести к условиям резонансного возмущения.

Институт теплофизики
СО АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
29/II 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Лебедев А. Д., Лягушкин В. П. Влияние сильного локального возмущения на свойства дуги в осевом потоке газа.— ТВТ, 1977, т. 15, № 5.
2. Урюков Б. А. Исследование турбулентных электрических дуг.— Изв. СО АН СССР, 1975, № 3. Сер. техн. наук, вып. 1.
3. Засыпкин И. Н., Попок Н. И. Оптические исследования электрических дуг в турбулентном потоке воздуха.— Изв. СО АН СССР, 1979, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.
4. Девятов Б. Н., Жуков М. Ф., Назарук В. И. Множественное моделирование пульсаций дуги методом Монте-Карло.— Изв. СО АН СССР, 1980, № 3. Сер. техн. наук, вып. 1.
5. Урюков Б. А. Вероятностная модель электрической дуги в турбулентном потоке.— Изв. СО АН СССР, 1978, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.
6. Девятов Б. Н., Назарук В. И. Локально-множественный подход к моделированию течения в канале плазмотрона методом Монте-Карло.— Изв. СО АН СССР, настоящий номер журнала.
7. Урюков Б. А. Продольно обдуваемая дуга в цилиндрическом канале.— Изв. СО АН СССР, 1968, № 3. Сер. техн. наук, вып. 1.

В работе [4] показано, что при расчете электродуговой плазмы при относительно малых токах, небольших скоростях потока и атмосферном давлении в уравнении энергии можно пренебречь вязкой диссипацией и излучением. В выражении для закона Ома можно не учитывать индуцированное электрическое поле. Уравнение состояния для воздуха возмущенное электрическое поле. Уравнение сохранения энергии в виде $p = \rho h(\kappa - 1)/\kappa$, тогда уравнение сохранения энергии можно записать $p \operatorname{div} \vec{V} / (\kappa - 1) = -\vec{V} \nabla p / (\kappa - 1) + \operatorname{div} \left(\frac{\lambda}{c_p} \nabla h \right) + \vec{j}^2 / \sigma$,

где член $\vec{V} \nabla p$ является работой сил давления. При небольших скоростях потока ($M_\infty \ll 1$) членом, учитывающим работу сил давления, можно пренебречь, по отношению к остальным членам в уравнении энергии. Также можно легче проверить, что давление во всей области можно считать постоянным, т. е. $p = p_\infty$. Положим, что в уравнении сохранения импульса вклад членов, учитывающих магнитное давление за счет собственного магнитного поля электрической дуги, мал. Система уравнений, описывающих данное течение в декартовой системе координат, записанных в безразмерном виде, примет вид

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = -a \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4}{3 \operatorname{Re}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{\operatorname{Re}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{\operatorname{Re}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{2}{3 \operatorname{Re}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - A \beta \sigma; \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} = -a \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{4}{3 \operatorname{Re}} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{\operatorname{Re}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{\operatorname{Re}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{2}{3 \operatorname{Re}} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right); \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\operatorname{Re}} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{1}{\operatorname{Re}} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\sigma \beta^2}{\operatorname{Re}}; \quad (4)$$

$$\rho h = 1, \quad (5)$$

где в уравнение сохранения энергии введен тепловой потенциал $dS = \frac{\lambda}{c_p} dh$; так, как для воздуха $\lambda/c_p = h^{0.562}$, тогда $S = (h^{1.562} - 1)/1.562$.

Принимая во внимание, что рассматриваемая задача симметрична относительно прямой ($y = 0$), условие сохранения полного тока запишется в виде

$$\alpha = \beta \int_0^L \int_0^1 \sigma dy dx, \quad (6)$$

где

$$y = y/R; \quad x = x/R; \quad \operatorname{Re} = \rho_\infty V_\infty R / \mu_\infty; \quad \operatorname{Pr} = \mu_\infty c_{p\infty} / \lambda_\infty;$$

$$\operatorname{Re} = \operatorname{Re} \operatorname{Pr}; \quad a = M_\infty^2 / (\kappa - 1); \quad E_\infty = (\lambda_\infty h_\infty / \sigma_* c_{p\infty})^{0.5} / R;$$

$$\beta = E / E_\infty; \quad \alpha = I (c_{p\infty} / (\lambda_\infty h_\infty \sigma_*))^{0.5} / D;$$

$$A = \sigma_* E_\infty B R / (\rho_\infty V_\infty^2).$$

Здесь $D = 2R$ — ширина плоского канала, ρ — плотность, h — удельная энтальпия, μ — вязкость, λ — теплопроводность, c_p — теплоемкость при постоянном давлении, M — число Маха, I — полный ток, E — напряженность электрического поля, σ — электропроводность, B — индукция магнитного поля.

Индекс ∞ соответствует условиям при атмосферном давлении и $T = 300$ К. Индекс * характеризует некоторое базисное значение электро-

проводности, в нашем случае $\sigma_* = 430 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$; зависимости для вязкости и электропроводности выбирались такие же, как и в работе [4].

Граничные условия:

$$\begin{aligned} x = 0; \quad 0 \leq y \leq 1; \quad v = 0; \quad u = 1 - y^2; \quad S = 0; \\ x \geq 0; \quad y = 0; \quad v = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial y} = 0; \\ y = 1; \quad v = u = S = 0; \end{aligned} \quad (7)$$

$$x = L; \quad 0 \leq y \leq 1; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = 0.$$

Здесь L — некоторое расстояние, на котором можно считать, что течения в плоском канале описываются уравнениями типа пограничного слоя.

Исследование системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (1)–(6) эллиптического типа представляет собой очень сложную проблему. Точные решения краевых задач для эллиптических уравнений удается получить в редких случаях, поэтому для решения большинства задач, связанных с нелинейными эффектами, применяется метод конечных разностей. Решение разностной системы уравнений сопряжено с известными трудностями: выбор сетки, определение разностной схемы, которая должна удовлетворять условию аппроксимации дифференциального уравнения и т. д. Существуют также задачи, когда применение разностных методов становится затруднительным (ограниченный объем памяти ЭВМ, время решения и т. п.).

В данной работе предлагается метод решения системы дифференциальных уравнений эллиптического типа с нелинейными коэффициентами, в котором решение ищется в виде суммы ряда произведений некоторых функций. Необходимо отметить, что впервые решение в виде степенного ряда для уравнений ламинарного пограничного слоя было применено в работе [5] (это так называемый обобщенный метод интегральных соотношений). Предлагаемый нами метод является в некотором смысле его развитием. Пусть Π — квадрат со сторонами, равными единице. Γ — его граница: $\Omega = \Pi \cap \Gamma$. Необходимо найти непрерывное решение в области задачи

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(c \frac{\partial u}{\partial y} \right) + F \left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y \right) = 0 \quad (8)$$

и удовлетворяющее одному из граничных условий

$$u = \gamma_1(x, y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \gamma_2(x, y), \quad x, y \in \Gamma \quad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \gamma(x, y)(u - \gamma_3(x, y)),$$

где $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, a, c$ — заданные функции; $\partial u / \partial n$ — производная по внешней нормали к Γ . Предположим, что существует единственное решение задачи (8)–(9), считаем, что все рассматриваемые в области Ω функции имеют любое количество непрерывных производных, которые нам необходимы в процессе дальнейшего изложения.

Представим формально решение в виде

$$u(x, y) \simeq \sum_{n=1}^M \Psi_n(x) \varphi_n(y), \quad (10)$$

где $\varphi_n(y)$ — система некоторых линейно независимых функций, ограниченных в Ω . Выберем также систему линейно независимых ограниченных в Ω $f_h(y)$ функций. Обозначим

$$A_{n,h}(x) = \int_0^1 a(x, y) f_h(y) \varphi_n(y) dy,$$

$$B_{n,k}(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} \left(c(x, y) \frac{d\varphi_n(y)}{dy} \right) f_k(y) dy, \quad k = 1 \div M,$$

$$F_k \left(x, \Psi_n, \frac{d\Psi_n}{dx} \right) = \int_0^1 F \left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y \right) f_k(y) dy.$$

Подставляя в уравнение (8) выражение (10), умножая на $f_k(y)$ и интегрируя по y от 0 до 1, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\sum_{n=1}^M \frac{d}{dx} \left[A_{n,k}(x) \frac{d\Psi_n(x)}{dx} \right] + \sum_{n=1}^M B_{n,k}(x) \Psi_n(x) + F_k \left(x, \Psi_n, \frac{d\Psi_n}{dx} \right) = 0.$$

Разрешая эту систему любым известным методом относительно $\frac{d}{dx} \left[A_{n,k} \frac{d\Psi_n}{dx} \right]$ при соответствующих граничных условиях, найдем решение задачи (8)–(9). Понятно, что вид приближенного решения (10) зависит от вида граничных условий.

Данный метод был апробирован для решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^u \quad (11)$$

в области $0 \leq x \leq 2$; $0 \leq y \leq 1$ со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0; \quad u(x, 1) = 0; \\ x = 2; \quad \frac{\partial u}{\partial x} &= 0; \quad y \in [0, 1]; \\ y = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial y} &= 0; \quad x \in [0, 2]. \end{aligned} \quad (12)$$

Решение искалось в виде

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^M b_n(x) \varphi_n(y); \quad \varphi_n(y) = 1 - y^{2n}.$$

Тогда граничные условия (12) можно записать так:

$$x = 0: b_n(0) = 0; \quad x = 2: \frac{db_n}{dx} = 0.$$

Весовые функции выбирались в виде

$$f_k(y) = e^{-\alpha_k y^2}; \quad f_k(y) = 1 - y^{\alpha_k}; \quad \alpha_k = 0, 1, 2 \dots$$

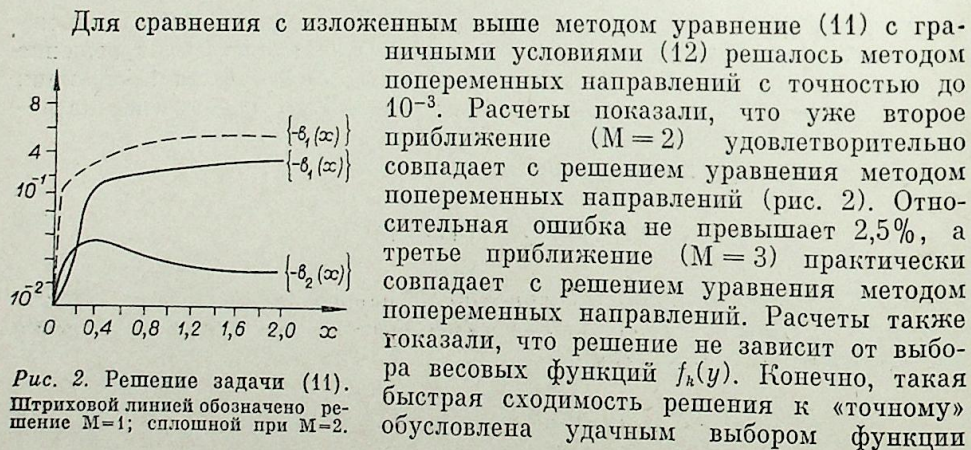


Рис. 2. Решение задачи (11). Штриховой линией обозначено решение $M=1$; сплошной при $M=2$.

Для сравнения с изложенным выше методом уравнение (11) с граничными условиями (12) решалось методом попеременных направлений с точностью до 10^{-3} . Расчеты показали, что уже второе приближение ($M=2$) удовлетворительно совпадает с решением уравнения методом попеременных направлений (рис. 2). Относительная ошибка не превышает 2,5%, а третье приближение ($M=3$) практически совпадает с решением уравнения методом попеременных направлений. Расчеты также показали, что решение не зависит от выбора весовых функций $f_k(y)$. Конечно, такая быстрая сходимость решения к «точному» обусловлена удачным выбором функции

$\varphi_n(y)$; при решении конкретных физических задач функции $\varphi_m(y)$ необходимо задавать, исходя из физических соображений и из ожидаемого вида решения. Предложенный метод легко обобщается на случай системы дифференциальных эллиптических уравнений в N -мерном пространстве в произвольной конечной области. Данный метод может быть также применен и для исследования нестационарных процессов.

Используем изложенный выше численный метод для решения системы (1)–(6) с граничными условиями (7). Представим аксиальную скорость и давление в виде

$$u(x, y) = I_1(x)(1 - y^2) + \sum_{i=2}^{N_1} I_i(x) \varphi_i(y), \quad (13)$$

$$p(x, y) = \mathcal{P}_1(x) + \sum_{h=2}^{N_2} \mathcal{P}_h(x) \gamma_h(y). \quad (14)$$

Функции $\varphi_i(y)$ и $\gamma_h(y)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$y = 0: \frac{d\varphi_i}{dy} = \frac{d\gamma_h}{dy} = 0; \quad y = 1: \varphi_i(1) = \gamma_h(1) = 0; \quad i = 2 \div N_1; \quad h = 2 \div N_2.$$

Выберем систему линейно независимых функций $\kappa_m(y)$, ограниченных в интервале $[0, 1]$, $m = 1 \div \max(N_1, N_2)$. Умножая уравнение (2) и (3) на $\kappa_m(y)$, интегрируя по y от 0 до 1 с учетом граничных условий на оси симметрии и на стенке, получим

$$\begin{aligned} & \frac{4}{3 \operatorname{Re}} \cdot \frac{d}{dx} \left[\int_0^1 \mu(1 - y^2) \kappa_m dy \frac{dI_1}{dx} \right] + \frac{4}{3 \operatorname{Re}} \sum_{i=2}^{N_1} \frac{d}{dx} \left[\int_0^1 \mu \varphi_i \kappa_m dy \frac{dI_i}{dx} \right] = \\ & = \frac{d}{dx} \int_0^1 \rho u^2 \kappa_m dy - \int_0^1 \rho u v \kappa'_m dy + a \frac{d}{dx} \int_0^1 p \kappa_m dy - \frac{1}{\operatorname{Re}} \left(\kappa_m \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{y=1} + \\ & + \frac{1}{\operatorname{Re}} \int_0^1 \mu \kappa'_m \frac{du}{dy} dy - \frac{1}{\operatorname{Re}} \int_0^1 \mu \kappa'_m \frac{\partial v}{\partial x} dy + \frac{2}{3 \operatorname{Re}} \cdot \frac{d}{dx} \int_0^1 \mu \kappa_m \frac{\partial v}{\partial y} dy + A\beta \int_0^1 \sigma \kappa_m dy; \\ & m = 1 \div N_1, \end{aligned} \quad (15)$$

где, штрихом отмечены производные функции $\kappa_m(y)$ по y .

$$\begin{aligned} & a \sum_{h=2}^{N_2} \left[\int_0^1 \gamma_h \kappa'_m dy \mathcal{P}_h(x) \right] - a \left[\kappa_m(1) \mathcal{P}_1(x) - \kappa_m(0) \left(\mathcal{P}_1(x) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \sum_{h=2}^{N_2} \mathcal{P}_h(x) \cdot \gamma_h(0) \right) \right] = \frac{d}{dx} \int_0^1 \rho u v \kappa_m dy - \int_0^1 \rho v^2 \kappa'_m dy - \frac{1}{\operatorname{Re}} \cdot \frac{d}{dx} \int_0^1 \mu \kappa_m \frac{\partial v}{\partial y} dy + \\ & + \frac{4}{\operatorname{Re}} \left(\kappa_m \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} + \frac{4}{3 \operatorname{Re}} \int_0^1 \mu \kappa'_m \frac{\partial v}{\partial y} dy - \frac{1}{\operatorname{Re}} \int_0^1 \mu \kappa_m \frac{\partial u}{\partial y} dy + \\ & + \frac{2}{3 \operatorname{Re}} \left(\mu \kappa_m \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{y=0} - \frac{2}{3 \operatorname{Re}} \int_0^1 \mu \kappa'_m \frac{\partial u}{\partial x} dy; \quad m = 1 \div N_2. \end{aligned} \quad (16)$$

На выражение (13) необходимо наложить условие сохранения полного расхода, т. е.

$$\int_0^1 \rho u dy = I_1(x) \int_0^1 \rho(1 - y^2) dy + \sum_{i=2}^{N_1} I_i(x) \int_0^1 \rho \varphi_i dy = G. \quad (17)$$

Нормальная составляющая скорости v находится из уравнения неразрывности (1)

$$v = -\frac{1}{\rho} \frac{d}{dx} \int_0^y \rho u dy. \quad (18)$$

При известном распределении температуры из систем уравнений (13)–(18) при соответствующих граничных условиях при $x=0$ и $x=L$ можно найти функции $I_i(x)$ и $\mathcal{P}_k(x)$. Из уравнения (16) видно, что функции $\mathcal{P}_k(x)$ находятся из решения обычной алгебраической системы уравнений

$$\mathcal{P}_k(x) = \Phi \left(\frac{dI_i}{dx}, \frac{d^2I_i}{dx^2}, \frac{d^3I_i}{dx^3}, x \right),$$

и, подставляя это выражение в систему уравнений (15), мы приходим к решению системы $N_1 - 1$ обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка.

Представим функцию теплового потенциала в виде

$$S(x, y) \simeq \sum_{k=1}^{N_3} \Psi_k(x) S_k(y). \quad (19)$$

Умножая уравнение (4) на весовые функции $\kappa_m(y)$, $m = 1 \div N_3$, получим систему нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{1}{\text{Re}} \sum_{k=1}^{N_3} \int_0^1 S_k \kappa_m dy \frac{d^2 \Psi_k}{dx^2} + \frac{1}{\text{Re}} \sum_{k=1}^{N_2} \int_0^1 \kappa_m \frac{d^2 S_k}{dy^2} \Psi_k = \frac{d}{dx} \int_0^1 u \kappa_m dy - \int_0^1 v \kappa'_m dy - \frac{1}{\text{Re}} \beta^2 \int_0^1 \sigma \kappa_m dy. \quad (20)$$

В итоге нам удалось свести систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (1)–(4) к $N_1 - 1$ нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям четвертого порядка и N_3 уравнениям второго порядка. Учитывая соотношения (5), (6), (17), при соответствующих граничных условиях можно разрешить систему из $N_1 + N_3 - 1$ уравнений относительно $I_i(x)$ и $\Psi_k(x)$; $i = 1 \div N_1 - 1$; $k = 1 \div N_3$.

В этом алгоритме решения еще остается открытым вопрос: сколько брать членов для аппроксимации скорости u , давления p и теплового потенциала S . По нашему мнению, для каждой отдельной физической задачи необходимо на конкретных примерах исследовать этот вопрос. К этой схеме решения необходимо добавить в нашем случае еще два дифференциальных уравнения: для аксиальной скорости и для теплового потенциала. Их можно получить, расписывая дифференциальные уравнения (2), (4) при $y=0$ и $y=1$. Понятно, что учет этих условий позволит сократить число уравнений для скорости и теплового потенциала S .

Теперь перейдем к приближенному решению в случае электрической дуги в поперечном магнитном поле. В выражениях (13), (19) для продольной скорости и теплового потенциала ограничимся всего двумя членами разложения. Это позволит нам качественно исследовать поведение электрической дуги в плоском узком канале с наложенным поперечным магнитным полем, а также освободит нас от задания давления в виде (14). При решении задачи будет необходим градиент давления на оси симметрии канала и на стенке. Ищем решения для скорости и теплового потенциала в виде

$$u(x, y) = I_1(x)(1 - y^2) + I_2(x)\varphi_2(y); \quad (21)$$

$$S(x, y) = \Psi_1(x)S_1(y) + \Psi_2(x)S_2(y).$$

Используя уравнение неразрывности (1), получим

$$\int_0^1 \rho u dy = I_1(x) \int_0^1 \rho (1 - y^2) dy + I_2(x) \int_0^1 \rho \varphi_2(y) dy = G, \quad (22)$$

где $G = 2/3$. Положим, для простоты вычисления, что коэффициент вязкости есть функция от продольной координаты x : $\mu = \int_0^1 \tilde{\mu} dy$; где $\tilde{\mu} = h^{0.415}$ [4]. Возьмем функцию $\varphi_2(y)$ в виде $\varphi_2(y) = y^2(1 - y^n)$, где n — параметр задачи, выбор которого требует дополнительного исследования. Этот вопрос будет обсуждаться ниже. Расписывая уравнения сохранения импульса (2) на оси симметрии и учитывая соотношения (22) и уравнение неразрывности на оси симметрии, получим

$$\mu \frac{d^2 I_1}{dx^2} - \left[2\mu - \frac{2}{3} \cdot \frac{d\mu}{dx} \cdot \frac{d \ln \rho_0}{dx} + \frac{1}{3} \mu \frac{d^2 \ln \rho_0}{dx^2} \right] I_1 - \left[\text{Re} \rho_0 I_1 + \frac{1}{3} \mu \frac{d \ln \rho_0}{dx} + 2 \frac{d\mu}{dx} \right] \frac{d I_1}{dx} + 2\mu I_2 - A \text{Re} \frac{d \rho_0}{dx} - A \text{Re} \beta \sigma_0 = 0, \quad (23)$$

где нулевой индекс обозначает условие на оси симметрии. Граничные условия: $x=0$: $I_1(0) = 1$; $x=L$: $\frac{d^2 I_1}{dx^2} = 0$; Для решения задач (22), (23) с соответствующими граничными условиями необходимо определить градиент давления на оси. Рассмотрим уравнение сохранения импульса для нормальной составляющей скорости v . Оценим вклад отдельных членов этого уравнения в изменении давления. Силы инерции имеют порядок $\frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} \sim \frac{\rho uv}{l} \sim \frac{\rho u^2}{l} \cdot \frac{\bar{l}}{l}$.

Из членов уравнения (3), зависящих от трения, наибольшее значение имеют следующие члены:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sim \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \sim \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sim \frac{\mu u}{\bar{l}},$$

где l — продольный размер высокотемпературной зоны, \bar{l} — поперечный размер высокотемпературной зоны, который имеет порядок ширины плоского канала. Относя силы инерции к силам трения, получим $\frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} / \frac{\partial}{\partial y}$

$\left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sim \frac{\rho u \bar{l}}{\mu} \cdot \frac{\bar{l}}{l} = \text{Re}_l \cdot \frac{\bar{l}}{l}$, где Re_l — есть локальное число Рейнольдса. Если $\text{Re}_l \ll 1$, то на изменение давления в области течения основное влияние оказывают только силы трения. Оценим Re_l в высокотемпературной зоне течения. Из условий $\rho \sim 10^{-2}$ кг/м³; $\bar{l} \sim 10^{-2}$ м; $\mu \sim 10^{-4}$ Па·с и $\text{Re}_l \ll 1$ следует, что $u \ll 1$ м/с. Для холодной зоны при $\rho \sim 1$ кг/м³; $\mu \sim 10^{-5}$ Па·с получим $u \ll 10^{-3}$ м/с.

В нашей задаче в отличие от случая обтекания в поперечном направлении круглого цилиндра происходит обтекание электрической дуги, которая не является твердым телом. Внутри дуги происходит движение высокотемпературного газа и поэтому при малых расходах (т. е. при малых скоростях вдува газа через торец канала) условие $\text{Re}_l \ll 1$ может и не выполняться при низких температурах. Наиболее существенные изменения в течении происходят в высокотемпературной зоне, поэтому можно считать, что хотя условие $\text{Re}_l \ll 1$ в низкотемпературной зоне и не выполняется (в этой области течения можно считать, что $p = \mathcal{P}_1(x)$), но на изменение давления в высокотемпературной зоне будут оказывать основное влияние члены, связанные с силами трения.

Рассмотрим, какие скорости вдува газа через торец канала необходимы, чтобы выполнялись условия $\text{Re}_l \ll 1$; $u \ll 1$ м/с в высокотемператур-

ной зоне. Для того чтобы электрическая дуга была сбалансирована поперечным магнитным полем и встречным потоком газа, можно принять равенство газодинамических напоров в холодном течении и в высокотемпературной зоне: $\rho_\infty v_\infty^2 \sim \rho u^2$, так как $\rho_\infty/\rho \sim 10^2$, тогда получим $u \sim 10 \times V_\infty$. Отсюда следует, что при $V_\infty \ll 10^{-1}$ м/с на изменение давления влияют только силы вязкого напряжения. Если $R \sim 10^{-2}$ м, то числа Рейнольдса вдува должны быть не больше 10^3 , т. е. $Re \ll 10^3$. Учитывая изложенное, уравнение для определения давления можно записать в виде

$$a \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{4}{3Re} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{2}{3Re} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Пропиентируем это уравнение по y от 0 до 1 и, используя уравнение неразрывности и дифференцируя по x , получим

$$a Re \frac{dp_0}{dx} = a Re \frac{dP_1}{dx} - \frac{d}{dx} \left(\mu \frac{d\Pi_1}{dx} \right) - \left[\frac{4}{3} \mu \frac{d \ln \rho_0}{dx} - \frac{d\mu}{dx} \right] \cdot \frac{d\Pi_1}{dx} - \left[\frac{4}{3} \mu \frac{d^2 \ln \rho_0}{dx^2} - \frac{d^2 \mu}{dx^2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{d\mu}{dx} \cdot \frac{d \ln \rho_0}{dx} \right] \Pi_1. \quad (24)$$

Градиент давления на стенке определяется из выражения

$$a Re \frac{dp_0}{dx} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=1}. \quad (25)$$

Итак, мы свели систему уравнений (1)–(3) к дифференциальному уравнению второго порядка (23) с дополнительными условиями — сохранением полного расхода (22) и соотношениями (24), (25) для нахождения градиента давления на оси симметрии и на стенке канала. Нормальная составляющая скорости находится из уравнения (18). Перейдем теперь к процедуре нахождения распределения поля температуры в области течения. Выберем функции $S_i(y)$ в выражении (21) для аппроксимации теплового потенциала в виде $S_1(y) = 1 - 1,5y^2 + 0,5y^3$; $S_2(y) = 1 - 2,5y^4 + 1,5y^5$. Нетрудно заметить, что эти функции удовлетворяют условию

$$\frac{d^2 S_i}{dy^2} \Big|_{y=1} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Подставляя выражение (21) в уравнение энергии для теплового потенциала (4), расписывая его на оси симметрии и учитывая уравнение (20), выбирая $\kappa_1(y) = 1$, получим

$$\frac{d^2 \Psi_1}{dx^2} + \frac{d^2 \Psi_2}{dx^2} - 3\Psi_1 + Re \Pi_1 \frac{d \ln \rho_0}{dx} + \sigma_0 \beta^2 = 0, \quad (26)$$

$$0,625 \frac{d^2 \Psi_1}{dx^2} + 0,75 \frac{d^2 \Psi_2}{dx^2} - 1,5\Psi_1 - 2,5\Psi_2 - Re \frac{d}{dx} \int_0^1 u dy + \beta^2 \int_0^1 \sigma dy = 0.$$

Граничные условия: $x = 0: \Psi_1(0) = \Psi_2(0) = 0$;

$$x = L: \frac{d^2 \Psi_1}{dx^2} = \frac{d^2 \Psi_2}{dx^2} = 0.$$

Полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (23), (26) с условием сохранения полного расхода (22) потока газа в плоском канале и выражением (24) для нахождения градиента давления на оси симметрии, с условием сохранения полного тока (6) решалась численно на отрезке $[0, L]$ методом установления. Граничные условия при $x = L$ записывались в разностном виде со вторым порядком точности. При численных расчетах расстояние L изменялось от

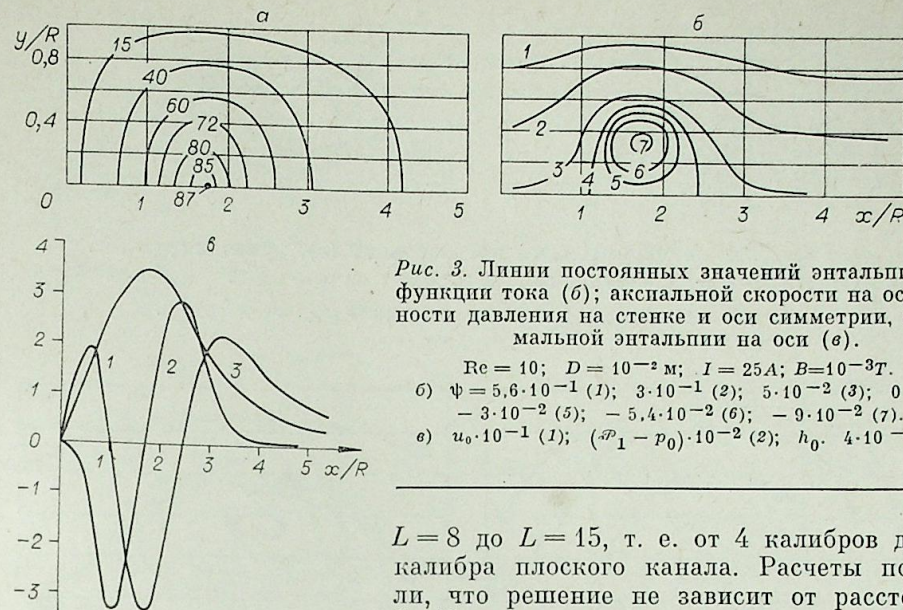


Рис. 3. Линии постоянных значений энтальпии (а), функции тока (б); аксиальной скорости на оси, разности давления на стенке и оси симметрии, максимальной энтальпии на оси (в).

$Re = 10$; $D = 10^{-2}$ м; $I = 25$ А; $B = 10^{-3}$ Т.
 б) $\psi = 5,6 \cdot 10^{-1}$ (1); $3 \cdot 10^{-1}$ (2); $5 \cdot 10^{-2}$ (3); 0 (4);
 $-3 \cdot 10^{-2}$ (5); $-5,4 \cdot 10^{-2}$ (6); $-9 \cdot 10^{-2}$ (7).
 в) $u_0 \cdot 10^{-1}$ (1); $(p_1 - p_0) \cdot 10^{-2}$ (2); $h_0 \cdot 4 \cdot 10^{-2}$ (3).

$L = 8$ до $L = 15$, т. е. от 4 калибров до 7,5 калибра плоского канала. Расчеты показали, что решение не зависит от расстояния L . Процедура расчета обдуваемой потоком газа электрической дуги в поперечном магнитном поле в плоском канале состояла в следующем: при постоянном числе Re и токе дуги I задавалось некоторое значение индукции B внешнего магнитного поля. Если при этом дуга сносилась потоком газа или прижималась к торцу плоского канала, то индукция магнитного поля соответственно увеличивалась или уменьшалась.

Расчеты показали, что при сбалансированной внешним магнитным полем электрической дуге параметр n (показатель степени в соотношении для функции $\varphi_2(y) = y^2(1 - y^n)$) влияет незначительно на внешнее магнитное поле, поле температур и на функции тока в рассчитываемой области течения. Так, например, при изменении n от 2 до 8 индукция магнитного поля, балансирующего дугу, меняется от $4,4 \cdot 10^{-4}$ до $4,9 \cdot 10^{-4}$ Т, при $Re = 10$, $D = 1,5 \cdot 10^{-2}$ м, $I = 25$ А. Поэтому показатель степени n был принят постоянным, независимым от числа Рейнольдса, электрического тока и ширины канала. В нашем случае для довольно небольшой ширины канала численное моделирование при разных показателях степени n , электрических токах и числах Re и при различном выборе функции φ_2 показало, что функции в виде $\varphi_2(y) = y^2(1 - y^n)$ с показателем степени $n = 4$ дают наименьшее отклонение среди решений для разных режимов течения. Отклонение составляет менее 15% по внешнему магнитному полю и не менее 5% по распределению поля температур, функций тока.

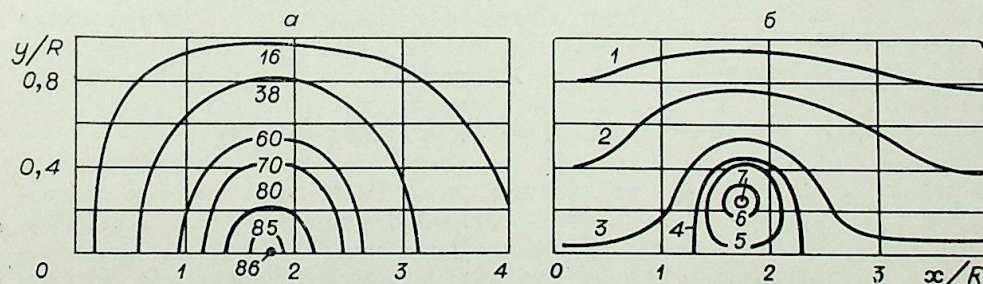


Рис. 4. Линии постоянных значений энтальпии (а), функции тока (б).

$Re = 5$; $D = 10^{-2}$ м; $I = 25$ А; $B = 4,6 \cdot 10^{-4}$ Т.
 б) $5,6 \cdot 10^{-1}$ (1); $3 \cdot 10^{-1}$ (2);
 $4 \cdot 10^{-2}$ (3); $\psi = 0$ (4); $-9 \cdot 10^{-3}$ (5); $-2,2 \cdot 10^{-2}$ (6); $-3 \cdot 10^{-2}$ (7).

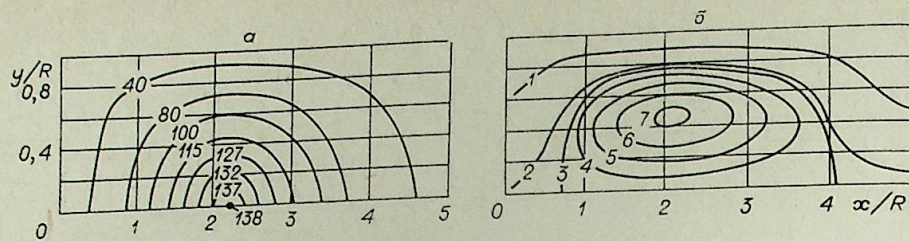


Рис. 5. Линии постоянных значений энтальпии (а), функции тока (б).
 $Re = 10$; $D = 10^{-2}$ м; $I = 100$ А; $B = 1,72 \cdot 10^{-3}$ Т; б) $\psi = 4,2 \cdot 10^{-1}$ (1); $5 \cdot 10^{-2}$ (2); 0 (3); $-1,1 \cdot 10^{-1}$ (4); $-2 \cdot 10^{-1}$ (5); $-2,9 \cdot 10^{-1}$ (6); $-3,42 \cdot 10^{-1}$ (7).

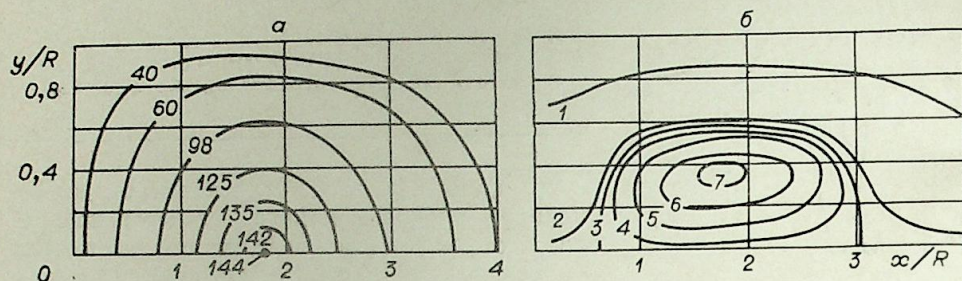


Рис. 6. Линии постоянных значений энтальпии (а), функции тока (б).
 $Re = 5$; $D = 10^{-2}$ м; $I = 100$ А; $B = 5 \cdot 10^{-4}$ Т. б) $4 \cdot 10^{-1}$ (1); $2 \cdot 10^{-2}$ (2); $\psi = 0$ (3); 10^{-2} (4); $-3,6 \cdot 10^{-2}$ (5); $-6,3 \cdot 10^{-2}$ (6); $-8 \cdot 10^{-2}$ (7).

Была проведена серия расчетов для значений тока от 25 до 100 А, ширины канала $1 \cdot 10^{-2}$ и $1,5 \cdot 10^{-2}$ м, значений числа Рейнольдса 5 и 10.

На рис. 3—8 приведены результаты численных расчетов. Из рис. 3 и 4 видно, что при малых токах электрической дуги с увеличением числа Рейнольдса размер дуги увеличивается в поперечном направлении. Расчеты показали, что при увеличении числа Рейнольдса и уменьшении ширины плоского канала индукция магнитного поля, необходимого для того чтобы сбалансировать электрическую дугу, увеличивается. При ширине канала $D = 10^{-2}$ м при больших ($I = 100$ А) токах (рис. 5 и 6) и увеличении числа Re электрическая дуга начинает расширяться в продольном направлении. Этот эффект связан с тем, что на поведении дуги в плоском канале начинает сказываться влияние стенок. При больших токах наступает «запирание» канала электрической дугой, и при взаимодействии силы Лоренца с газодинамическим напором происходит вытягивание электрической дуги по течению потока. Температура в этом случае уменьшается, но электрическая дуга занимает больший объем, чем при малых значениях числа Рейнольдса и меньшей индукции магнитного поля. Как показывают расчеты, напряженность сбалансированной электрической дуги слабо зависит от числа Рейнольдса, по-видимому, это связано с малым его изменением, хотя при увеличении числа Рейнольдса имеется тенденция к увеличению напряженности электрического поля. При токах $I \sim 100$ А и ширине канала $D = 10^{-2}$ м напряженность для $Re = 10$ несколько ниже, чем для $Re = 5$, что связано с довольно большим увеличением продольного размера электрической дуги (рис. 5).

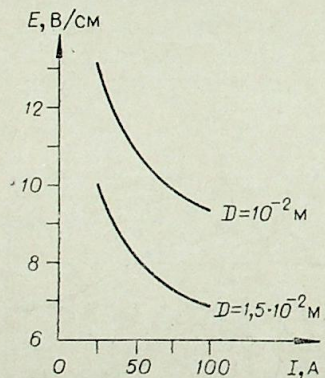


Рис. 7. Напряженность электрического поля сбалансированной электрической дуги в зависимости от силы электрического тока.

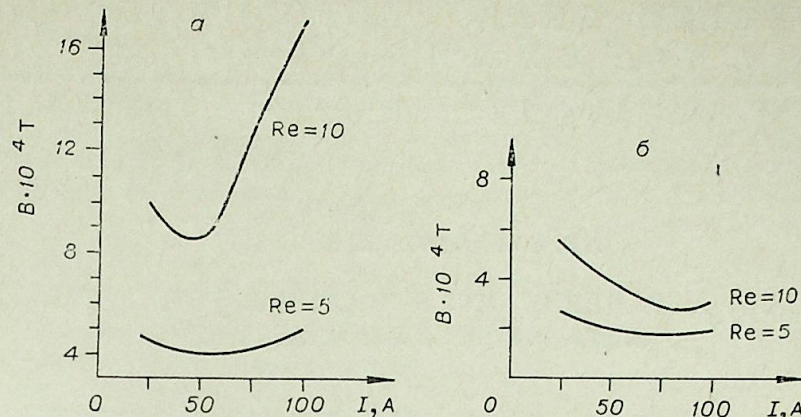


Рис. 8. Значение магнитной индукции сбалансированной электрической дуги в зависимости от силы тока.
 $D = 10^{-2}$ (а); $1,5 \cdot 10^{-2}$ м (б).

На рис. 7 показаны вольт-амперные характеристики сбалансированной дуги. При ширине канала $D = 10^{-2}$ индукция внешнего магнитного поля, которое необходимо наложить, чтобы сбалансировать электрическую дугу с увеличением тока дуги, увеличивается при токах больше 50 А. Если электрическая дуга в безграничном потоке, то, как показывают эксперименты [1], с увеличением тока индукция магнитного поля уменьшается. В нашем случае при увеличении тока индукция вначале снижается, а потом резко увеличивается, с ростом числа Рейнольдса и уменьшением ширины канала. При увеличении ширины канала минимум магнитного поля, необходимого для сбалансирования электрической дуги, смещается в сторону больших токов (рис. 8). В заключение необходимо отметить, что в уравнении (23) большую роль играют вторые производные по x от плотности и вязкости. Численное моделирование показало, что влияние этих членов на решение задачи сказывается вплоть до $Re \sim 10^2$. Время счета одного варианта на ЭВМ составляет от 7 до 20 мин.

Институт теплофизики
 СО АН СССР,
 Новосибирск

Поступила в редакцию
 18/1 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Роумен, Майерес. Экспериментальное исследование электрической дуги, горящей в скрещенных аэродинамических и магнитном полях.— РТЖ, 1967, т. 5, № 11.
2. Lord W. T. An electric arc in a transverse magnetic field: a theory for low power gradient.— J. Fluid Mech., 1969, v. 35, part 4.
3. Hodnett P. F. Stationary electric arc in a cross-flow and transverse Magnetic Field.— The Physics of Fluids, 1969, v. 12, N 7.
4. Жуков М. Ф., Коротеев А. С., Урюков Б. А. Прикладная динамика термической плазмы. Новосибирск, Наука, 1975.
5. Дородницын А. А. Об одном методе решения уравнений ламинарного пограничного слоя.— ПМТФ, 1960, № 3.

О. П. СОЛОНЕНКО, И. Я. ЯЦКАРЬ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СТРУИ ЧАСТИЦ В ПОТОКЕ ГАЗА,
НАТЕКАЮЩЕМ НА ПЛАСТИНУ

Математическое моделирование движения дисперсных частиц в газовом потоке, натекающем на перпендикулярную преграду, используется в исследовании многих практически важных процессов. В частности, такая задача возникает при анализе процессов плазменного напыления, когда высокотемпературная газовая струя с частицами напыляемого материала натекает на подложку.

В качестве упрощенной модели такого явления рассмотрим движение струи монодисперсных сферических частиц в потоке газа, натекающем на пластину. Для описания движения твердой фазы примем континуальное представление [1]; влиянием частиц на газовый поток, ввиду незначительности их объемной концентрации, пренебрегаем.

Вопрос о переносе частиц различных материалов газовым потоком рассматривался ранее применительно к задачам плазменного напыления в работе [2], где в зависимости от рода материала были определены критические размеры частиц, еще достаточно инерционных, чтобы достигнуть препятствия. Полученная авторами оценка полностью определяется величиной критического числа Стокса для частиц. В работе [3] исследование свойств лагранжевых уравнений движения частиц в заданном поле скоростей идеального газа показало существование критического значения числа Стокса, в дальнейшем этот результат был обобщен на случай вязкого обтекания цилиндра и сферы [4].

Представляет интерес континуальное рассмотрение аналогичной задачи в эйлеровых переменных с целью исследования перераспределения профилей скоростей и концентрации частиц при их разгоне газовым потоком и торможении перед пластиной. Одновременно ставится задача определения влияния вязкости на рассматриваемое течение.

Течение газа в случае стационарного идеального обтекания пластины представляет собой гиперболический поток; при вязком обтекании поля скоростей газа задаются в соответствии с известными аналитическими решениями [5].

Система уравнений сохранения массы и импульса частиц в цилиндрических координатах в осесимметричном случае имеет вид

$$\begin{aligned} \partial s_p w_{zp} / \partial z + (1/r) \partial r s_p w_{rp} / \partial r &= 0, \\ \partial s_p w_{zp}^2 / \partial z + (1/r) \partial r s_p w_{zp} w_{rp} / \partial r &= F_z, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\partial s_p w_{rp} w_{zp} / \partial z + (1/r) \partial r s_p w_{rp}^2 / \partial r = F_r.$$

Здесь s_p — объемная концентрация частиц; w_{zp} , w_{rp} — составляющие скорости частиц вдоль осей z и r соответственно (ось r направлена вдоль пластины, z — перпендикулярно к ней, начало системы координат помещено в центре сопла); F_z , F_r — составляющие силы вязкого сопротивле-

ния, действующей на частицу, определяемые в соответствии со стоковым режимом обтекания сферы

$$F_z = s_p (w_{zf} - w_{zp}) / \tau_p, \quad F_r = s_p (w_{rf} - w_{rp}) / \tau_p, \quad (2)$$

где $\tau_p = \rho_p D_p^2 / 18 \mu_f$ — характерное время динамической релаксации частицы; μ_f — вязкость газа; ρ_p и D_p — плотность материала и диаметр частицы. Составляющие w_{zf} и w_{rf} скорости вязкого газа определяются по скоростям идеального газа w_{zf0} , w_{rf0} с учетом поправок φ_z , φ_r [5]:

$$w_{zf0} = w_{zf}^0 - az, \quad w_{rf0} = 0,5 ar, \quad a = w_{zf}^0 / L, \quad (3)$$

$$w_{zf} = w_{zf0} \cdot \varphi_z, \quad w_{rf} = w_{rf0} \cdot \varphi_r, \quad (4)$$

где w_{zf}^0 — скорость газа в начальном сечении, удаленном от пластины на расстояние L и совмещенном со срезом сопла.

Расчеты выполнены для частиц диаметра $D_p = 6, 30, 60$ мкм с плотностью $\rho_p = 4000$ кг/м³; вязкость газа $\mu_f = 5 \cdot 10^{-5}$ н·с/м². Профиль концентрации частиц в начальном сечении ($z = 0$) $s_p^0(r)$, $r \in [-R_c; R_c]$ выбирался параболическим со значением на оси $s_p^0(0) = 10^{-4} (2R_c - \text{диаметр сопла})$. Профиль продольной скорости частиц был равномерным. При этом исследовались как режимы ускорения частиц газовым потоком ($w_{zp}^0(r) = 0,1 w_{zf0}$ при $r \in [-R_c; R_c]$) с последующим торможением перед преградой, так и режимы торможения частиц совместно с газом ($w_{zp}^0(r) = w_{zf0}$ при $r \in [-R_c; R_c]$). Радиальные составляющие скоростей газа w_{rf}^0 и частиц w_{rp}^0 на срезе сопла равнялись нулю. Кроме того, в расчетах принималось $L = 5 \cdot 10^{-2}$ м, $R_c = 3 \cdot 10^{-3}$ м, $w_{zf}^0 = 100$ м/с.

Решение системы уравнений (1) проводилось с помощью неявной консервативной четырехточечной конечно-разностной схемы первого порядка аппроксимации с итерациями по нелинейности.

В качестве критерия для определения локальной ширины $r^*(z)$ струи принималось условие

$$s_p(r^*, z) / s_p(0, z) \leq 10^{-3}. \quad (5)$$

Остановимся на анализе некоторых результатов расчетов. Кривые 1—4 на рис. 1 иллюстрируют нарастание ширины r^* струи частиц при их разгоне и торможении. Из рис. 1 видно, что при $D_p = 60$ мкм радиальная

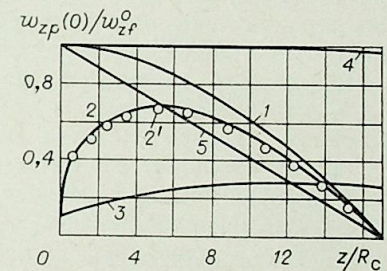
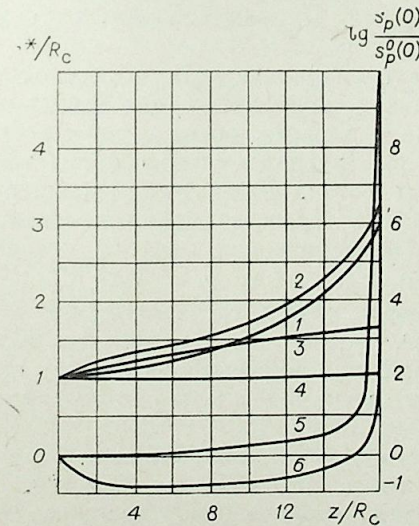


Рис. 2. Распределение вдоль оси скоростей частиц (1—4) и газа (5).
Обозначения те же, что и на рис. 1.

Рис. 1. Нарастание ширины струи частиц (1—4) и распределения концентраций вдоль оси (5, 6).

- 1, 5 — $w_{zp}^0 = 100$ м/с, $D_p = 6$ мкм;
- 2, 6 — $w_{zp}^0 = 10$ м/с, $D_p = 6$ мкм;
- 3 — $w_{zp}^0 = 10$ м/с, $D_p = 30$ мкм;
- 4 — $w_{zp}^0 = 100$ м/с, $D_p = 60$ мкм.

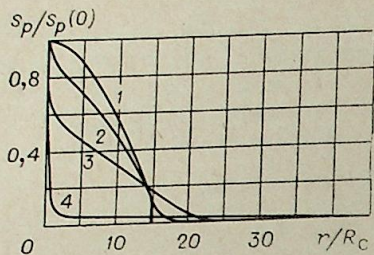


Рис. 3. Распределения концентрации частиц в поперечных сечениях струи ($D_p = 6$ мкм).
 $z = 0$ (1); 10^{-2} м (2); $3 \cdot 10^{-2}$ (3); $5 \cdot 10^{-2}$ м (4).

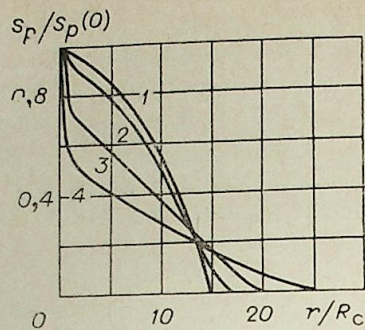


Рис. 4. Распределение концентраций частиц в поперечных сечениях струи ($D_p = 30$ мкм). Обозначения те же, что и на рис. 3.

скорость газа оказывается недостаточной для заметной деформации профиля концентрации частиц и обеспечения нарастания ширины струи.

Кривые 5, 6 на рис. 1 показывают изменение безразмерной объемной концентрации частиц вдоль оси потока для $D_p = 6$ мкм при торможении и разгоне соответственно. Следует отметить, что при разгоне частиц с ростом их осевой скорости осевая концентрация имеет тенденцию к уменьшению до тех пор, пока относительная скорость частиц не уменьшится до нуля.

На рис. 2 приведено изменение осевых значений продольной компоненты скорости частиц для различных условий расчета. Сопоставление кривой 2, полученной без учета поправок [5] на вязкость газа с результатами, отмеченными на рис. 2 кружками и учитывающими эти поправки при прочих равных условиях, позволяет констатировать малость влияния вязкости газа на результаты расчетов.

Представленные на рис. 3 (разгон частиц $D_p = 6$ мкм) и рис. 4 (тот же режим для $D_p = 30$ мкм) профили концентрации характеризуют перераспределение частиц по ширине струи с ростом z . При этом непосредственно перед пластиной осевая концентрация частиц $D_p = 6$ мкм почти на порядок превышает концентрацию в соседних с осью областях. Профили продольных скоростей частиц на различных расстояниях от сопла практически остаются равномерными. Данная особенность обусловлена спецификой газового потока.

Полученные результаты позволяют оценить скорость роста толщины покрытия, нанесенного в процессе плазменного напыления, при предположении, что все частицы, достигшие подложки, осаждаются на ней.

Анализ проведем с учетом дискретного представления области течения, используемого при расчете методом сеток. Для этого рассмотрим контрольные физические объемы (КФО), непосредственно примыкающие к поверхности пластины, координаты геометрических центров которых определяются соотношениями: (r_i, z^*) , $z^* = L - 0,5\Delta z$, $r_i = i \cdot \Delta r$, $i = 0, n$, где Δr , Δz — шаги сетки по координатам r и z соответственно; $n = [r^*(z^*)/\Delta r]$ — общее количество КФО, участвующих в расчете. КФО с номером $i > 0$ представляет собой полый цилиндр высотой Δz , ось симметрии которого совпадает с осью z , а его внешняя и внутренняя поверхности удалены от оси симметрии на расстояния $r_{i+1/2} = r_i + 0,5\Delta r$, $r_{i-1/2} = r_i - 0,5\Delta r$. При $i = 0$ получаем приосевую КФО, являющийся цилиндром, поверхность которого отстоит от оси z на расстоянии $r_{1/2} = 0,5\Delta r$. Таким образом, твердые частицы, транспортируемые несущей средой к подложке через i -й КФО, напыляют на ней кольцевой ($i > 0$) или круговой ($i = 0$) слой, являющийся проекцией рассматриваемого КФО на площадь подложки.

Если предположить, что частицы, заполняющие любой КФО, равномерно распределены внутри него, то при своем осаждении на подложку они будут равномерно заполнять правую торцевую грань КФО.

С учетом изложенного представим скорость нарастания слоя $G(r_i)$, напыляемого на торцевую поверхность i -го КФО, в виде

$$G(r_i) = H(r_i) \cdot f(r_i), \quad (6)$$

где $H(r_i)$ — высота слоя, который получится, если частицы, заполняющие i -й КФО, мгновенно осядут на его торцевую грань (очевидно, данный параметр зависит от способа укладки сферических частиц диаметра D_p в покрытие и определяет его пористость); $f(r_i) = \bar{w}_{zp,i}/\Delta z$ — частота наложения слоев, где $\bar{w}_{zp,i}$ — средняя скорость частиц внутри i -го КФО.

Получим некоторые частные случаи интерпретации (6). Нижняя оценка локальной скорости напыления получается в предположении, что частицы, оседая на подложке, образуют абсолютно беспористое покрытие. В этом случае, учитывая, что

$$s_{p,i} = N_{p,i} V_p / V_i, \quad (7)$$

где $s_{p,i}$ — объемная концентрация частиц в i -м КФО; $N_{p,i}$ — число частиц; $V_p = (1/6)\pi D_p^3$ — объем частицы; $V_i = \pi (r_{i+1/2}^2 - r_{i-1/2}^2) \Delta z$ — объем i -го КФО, получим

$$G(r_i)_{\min} = \frac{N_{p,i} V_p \bar{w}_{zp,i}}{s_{p,i} \Delta z} \approx s_{p,i} w_{zp,i} |_{z=L}, \quad (8)$$

где $s_i = \pi (r_{i+1/2}^2 - r_{i-1/2}^2)$ — площадь торцевой грани i -го КФО ($r_{-1/2} = 0$).

Соответствующие кривые 1 — 4 представлены на рис. 5.

Для получения оценки сверху для функции $G(r_i)$ предположим, что сферические частицы, не деформируясь, упаковываются на пластине слоями по $N_i^0 = S_i/D_p^2$ штук в слой. При этом из (7) получаем, что $N_{p,i} = s_{p,i} V_i / V_p$ частиц, находящихся в i -м КФО, образуют $N_{p,i}/N_i^0$ слоев высотой D_p каждый. Отсюда будем иметь

$$G(r_i)_{\max} \approx \frac{6}{\pi} s_{p,i} w_{zp,i} |_{z=L} \approx 1,86 s_{p,i} w_{zp,i} |_{z=L}. \quad (9)$$

По-видимому, наиболее реальна промежуточная оценка для скорости напыления покрытия

$$G(r_i) \approx \frac{4}{\pi} s_{p,i} w_{zp,i} |_{z=L} \approx 1,24 G(r_i)_{\min}, \quad (10)$$

которая получается, если предположить, что частицы деформируются на подложке в цилиндры, причем высота h цилиндра, эквивалентного по объему сфере, связана с диаметром частицы соотношением $h = \frac{2}{3} D_p$.

Более точные данные, характеризующие распределение скорости напыления покрытия в зависимости от удаления от оси z , можно получить, если будут известны особенности приваривания отдельных сферических частиц различных материалов в зависимости от динамиче-

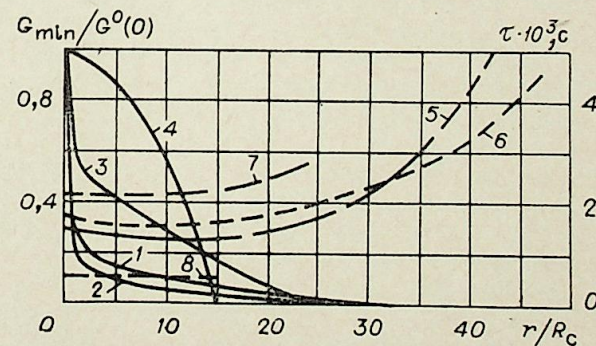


Рис. 5. Скорость нарастания толщины покрытия (1—4) и времена транспортировки частиц (5—7). Обозначения 1—6 те же, что и на рис. 1.
7 — $v = 10$ м/с, $D_p = 30$ мкм; 8 — $w_{zp}^0 = 100$ м/с, $D_p = 60$ мкм.

ских и тепловых свойств частицы, а также состояния подложки.

Для определения времени формирования слоя нужной толщины при плазменном напылении необходимо знать время транспортировки частиц от среза сопла до подложки. Распределения вдоль радиуса пластины времени транспортировки частиц диаметром $D_p = 6,30$ мкм представлены на рис. 5 штриховыми линиями.

Приведенные результаты расчетов, а также оценки скорости нарастания толщины покрытия и времени транспортировки частиц к подложке представляются практически полезными. Более точные результаты могут быть получены лишь путем детального теоретического и экспериментального исследования газодинамических особенностей двухфазной струи, протекающей на плоскую преграду, а также процессов взаимодействия частиц с подложкой.

Институт теплофизики
СО АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
6/ХІ 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф. И. К теории движения взвешенных паносов.— ДАН СССР, 1953, т. 92, № 2.
2. Душевский И. В., Замбрицкий А. П., Пузанов А. А. Критические размеры частиц, наносимых плазменным напылением.— В кн.: Вопросы надежности и долговечности машин./Тр. Краснояр. политехн. ин-та. Красноярск, 1972.
3. Левин Л. М. Об осаждении частиц аэрозоля на препятствия.— ДАН СССР, 1953, т. 91, № 6.
4. Левин Л. М. О критическом осаждении частиц аэрозоля из вязкого потока на препятствия.— Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1959, № 3.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., Наука, 1974.

Б. Н. ДЕВЯТОВ, В. И. ПАЗАРУК

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПУЛЬСАЦИЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ ДУГИ

В работах [1, 2] показана возможность применения спектрального анализа при автоматизированной статистической обработке экспериментальных данных и получены положительные результаты в исследовании структуры пульсаций дуги в турбулентном потоке газа.

При всей значимости данного подхода в комплексном исследовании этого процесса он, однако, не затрагивает самой проблемы изучения механизма взаимодействия дуги с потоком газа. Трудности теоретического исследования явлений, возникающих при деформации электрической дуги, связаны с достаточной сложностью уравнений динамики термической плазмы для криволинейных дуг [3]. Поэтому представляет интерес рассмотреть простые и в то же время общие модели, которые позволяют выяснить влияние различных факторов на динамику плазмы.

На начальном участке течения в канале плазматрона дуга зафиксирована на гидродинамической оси потока и не взаимодействует с крупномасштабными пульсациями оружающего газа. В зоне смыкания пограничного и теплового слоя пульсации потока вызывают хаотические отклонения участков дуги от оси трения [4]. Возникающие изгибы столба дуги усиливаются взаимодействием тока дуги с собственным магнитным полем и могут привести к винтовой неустойчивости [5].

Детальное изучение характера пульсаций дуги затруднительно проводить на реальных конструкциях плазматронов. В связи с этим целесообразно исследовать динамику дуги, горящей на оси затопленной струи. Стабильность горения дуги, ее пространственная устойчивость также определяются характеристиками потока, т. е. амплитудой пульсационных скоростей, частотой пульсаций и масштабом турбулентности.

На рис. 1 схематично показана электродуговая установка, подробно описанная в работе [6], на которой фотоэлектрическим методом [7] проводились исследования пульсационных характеристик дуги на переходном участке.

В отношении экспериментальных работ необходимо отметить естественную трудность извлечения из опыта отдельных функциональных связей в наблюдаемом сложном процессе. Как правило, нельзя в достаточной мере освободиться от сопутствующих явлений, искажающих в эксперименте интересующие нас зависимости. При этом, как правило, невозможно оценить степень таких искажений.

Повышение точности эксперимента на основе прогресса в измерительной технике и введения автоматизации эксперимента с выводом обработки данных на ЭВМ значительно увеличивает его возможности. Однако эти средства сами по себе не смогут преодолеть отмеченные выше трудности в постановке эксперимента и последующем анализе его результатов.

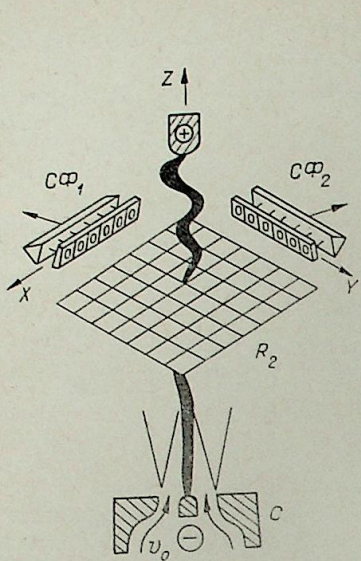


Рис. 1. Электрическая дуга на оси затопленной струи.
Cφ — секционированный фотодиод,
C — сопло.

Радикально решает такую проблему введение параллельных математических экспериментов на ЭВМ с помощью создания математической модели, способной к совершенствованию по мере накопления теоретических и экспериментальных данных. В работе [8] рассмотрена возможность построения такой модели для исследования турбулентной дуги.

В данной статье представлены дальнейшие этапы развития комплексного подхода в методике исследований движений турбулентной дуги, который связан с организацией параллельных физических и математических экспериментов на основе статистического множественного моделирования.

Поскольку основой данной методики является модель, важно, чтобы в структуру ее формирования были заложены достаточно широкие возможности идентификации, использования теоретических и экспериментальных данных для последовательного приближения модели к реальным процессам.

Такая методика по своей идее связана с принципами операционной игры. На основе поэтапно уточняющейся модели, параллельно с постановкой опытов, с помощью математического эксперимента на ЭВМ должен «проигрываться» прогноз для эксперимента. Этот прогноз свободен от неучтенных на данном этапе сопутствующих искажений.

На очередном этапе физического эксперимента после сравнения его результатов с прогнозом на ЭВМ производят коррекцию модели, уточняя возможный дальнейший прогноз функциональных связей в процессе.

Заметим, что при этом модель не является самоцелью, а играет важную вспомогательную роль, так как прежде всего должна служить средством в комплексном теоретико-экспериментальном исследовании. Большие возможности в этом отношении связаны с использованием локально-множественного подхода в моделировании турбулентной дуги.

Идея данного множественного подхода к моделированию пространственных пульсаций состоит в том, что сначала выстраивается некоторый случайный процесс, отражающий физическую природу поведения столба дуги в турбулентном потоке, затем вместо непосредственного решения уравнений движения дуги методом Монте-Карло многократно мо-

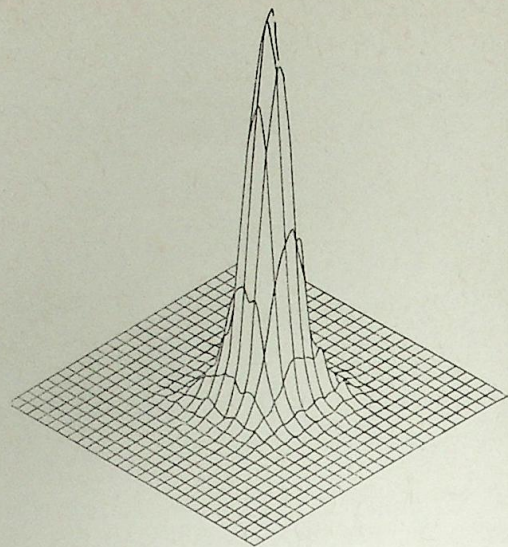


Рис. 2. Модельная функция распределения вероятности пространственной локализации дуги.

делируется на ЭВМ найденный случайный процесс и по полученной таким образом статистике определяются интересные величины.

В соответствии с этим рассмотрим достаточно общие модели, позволяющие выяснить влияние различных факторов на характер пространственных пульсаций столба дуги. В частности, допустим, что выполняется гипотеза полного увеличения [9]. Существенно, что для нас это предположение не является принципиальным. В данной методике моделирования будут применимы и другие, возможно более реалистичные, допущения об условиях взаимодействия молей с плазменным шумом. Более того, как раз это обстоятельство будет предусмотрено в развитии возможностей множественного подхода в моделировании.

Таким образом, в данном варианте предположений мы можем считать, что движение элемента дуги складывается из движения вдоль оси со средней скоростью и хаотических пульсаций в поперечном направлении, а деформированную ось проводящего канала можно рассматривать как пространственно-временную случайную кривую [4].

Введем прямоугольную решетку R_2 в плоскости, перпендикулярной оси потока (рис. 1). Тогда положение дуги и ее перемещения в этом сечении могут быть описаны некоторым множеством K_i узлов R_2 , занятых проводящим каналом дуги, а возникновение и распад окружающих дугу турбулентных молей можно описать некоторым случайным множеством W_r . Интересующие нас поперечные пульсации дуги заключаются в дискретном перемещении (блуждании) элемента столба дуги по узлам решетки, а их вероятностно-множественная модель может быть представлена одномерным процессом случайного перемещения. Выбор случайного множества в качестве основы построения модели продиктован потребностью в простом и достаточно полном описании развития пространственно-распределенного процесса блуждания дуги.

Представление модели рекуррентными соотношениями для случайных множеств удобно при моделировании методом Монте-Карло с использованием вычислительных машин. При этом так же, как и в работе [8], процесс случайного перемещения определяется в следующем виде:

$$K_{t+1} = \bigcup_{r \in K_t} W_r(t), \quad (1)$$

где $W_r(t)$ — случайное множество локальных перемещений в окрестности узла r в момент времени t , характеризующее влияние турбулентных молей на пульсацию дуги.

Алгоритм статистического моделирования процесса (1), предназначенный для реализации на ЭВМ, отвечающий требованиям экономии машинной памяти и времени, состоит из последовательного моделирования случайного множества K_{t+1} , глобальное развитие которого является результатом его локальных изменений по уже известному K_t с учетом W_r . Далее естественным образом возникает задача идентификации локальных множеств применительно к конкретным условиям горения дуги, которая в данном случае может быть решена при соответствующей постановке эксперимента. Заметим, что это обстоятельство является одним из главных преимуществ данного множественного подхода в моделировании. Здесь речь идет о статистической идентификации, т. е. идентификации модели, зависящей от ряда параметров, в число которых входят поле вероятностей перемещения, пространственный масштаб решетки, временной параметр и т. д. При этом цель идентификации будет достигнута одновременным их изменением. Оптимальность идентификации определяется минимизацией среднего суммарного отклонения определенных числовых характеристик модели от соответствующих зависимостей рассматриваемого явления.

В работе [10] показана возможность использования оптоэлектронной регистрации для пространственной локализации столба электрической

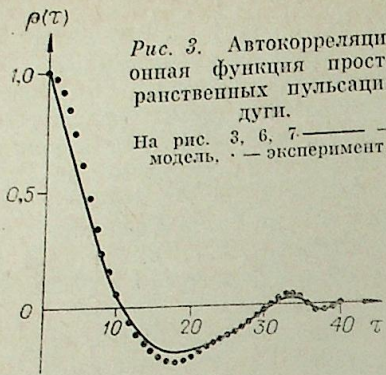


Рис. 3. Автокорреляционная функция пространственных пульсаций дуги.
На рис. 3, 6, 7 — модель, — эксперимент.

реализацию стационарного, случайного процесса $\mathcal{X}(t)$, гармонический анализ которого позволяет выявить структуру колебаний и получить необходимую информацию для идентификации случайных множеств локальной перемещения W . На рис. 2, 3 показаны соответственно двумерная функция распределения вероятности пространственной локализации $\psi(x, y)$ и автокорреляционная функция $\rho(\tau)$, вычисленная на модели по формуле $\rho(\tau) = E\{\mathcal{X}(t)\mathcal{X}(t+\tau)\}/E\{\mathcal{X}^2(t)\}$, где $E\{\cdot\}$ — оператор математического ожидания, причем $\mathcal{X}(t)$ — центрированный процесс — $E\{\mathcal{X}(t)\} = 0$. Приведенные оценки функций характерны для таких режимов горения дуги, когда колебания ее столба определяются лишь крупномасштабными пульсациями стабилизирующего потока.

Следует отметить, что функция $\rho(\tau)$ — положительно определенная, что является необходимым и достаточным условием стационарности исследуемого случайного процесса [11] и значительно упрощает его статистическое описание.

Однако влияние собственного магнитного поля дуги может быть настолько велико, что дуга сворачивается в спираль (рис. 4). Это, в свою очередь, проявляется в наличии провала функции $\psi(\mathcal{X}, y)$ на оси потока (рис. 5) и в появлении периодической структуры у функции $\rho(\tau)$ (рис. 6).

Применение корреляционного анализа для выявления скрытой периодичности в структуре колебаний дуги существенно затрудняется значительной зашумленностью процесса, поэтому более эффективным в этом случае оказывается спектральный анализ [12]. Спектр показывает, какого рода колебания преобладают в данном процессе, т. е. какова его внутренняя структура. Количественные представления об интенсивности присутствующих в сигнале частот дает спектральная плотность $S(\omega)$, оценка которой может быть найдена из соотношения: $S^2(\omega) = F^*\{\mathcal{X}(t)\}F\{\mathcal{X}(t)\}$, где $F\{\cdot\}$ — оператор преобразования Фурье, а $*$ означает комплексное сопряжение, или по формуле Винера: $S(\omega) = F\{\rho(\tau)\}$. Оба способа оценивания дают один и тот же результат, однако сопровождаются различными вычислительными трудностями. При определении $S(\omega)$ численными методами с использованием ЭВМ первый способ, построенный на основе применения быстрого преобразования Фурье, оказывается более рациональным.

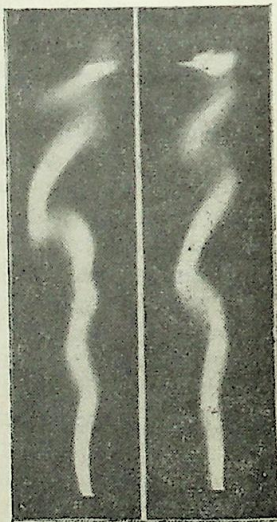


Рис. 4. Скоростные фотографии дуги.

дуги с последовательной записью и обработкой информации на ЭВМ. Набор вычисляемых статистических характеристик также может быть получен и на модели по приведенному алгоритму (1). Это позволяет сравнить результаты численного эксперимента с данными прямых измерений и построить более рациональную модель исследуемого явления. Так, например, последовательность из N эквидистантных отсчетов проекций на ось X или Y центра тяжести множества K_i , моделирующего сечение столба дуги, образует

С целью исключения искажений, появляющихся за счет погрешности вычисления $S(\omega)$ по конечному интервалу наблюдения T , применяются различные методы сглаживания. Однако это, в свою очередь, может привести к потере информации. Поэтому при выявлении гармонических составляющих с помощью спектрального анализа весьма существенна оценка статистической значимости выявленных пиков спектральной плотности. Наличие априорных суждений о существовании периодической структуры в исследуемом процессе, что в данном случае может быть связано со спиральной неустойчивостью дуги, значительно упрощает оценку достоверности экстремума функции $S(\omega)$. В работе [13] рассматривается эффективность применения спектральных окон при обнаружении гармонических сигналов в широкополосном шуме и при наличии интенсивных помех. Окна представляют собой весовые функции, используемые для уменьшения нежелательных эффектов размывания спектральных компонент, обусловленных конечностью интервала наблюдения. Однако не следует преувеличивать роль типа сглаживающего окна, возможности которого зависят от поведения функции $\rho(\tau)$. Учитывая сложность алгоритма вычисления весовой функции, мы остановили выбор на дискретном окне Хэннинга $V(n) = 0,5[1 + \cos(2\pi n/n)]$, с помощью которого были получены хорошие результаты. Использование такого окна представляет собой интерес потому, что для него непрерывными являются не только сама функция $V(t)$, но и ее первая производная V' , а также и то, что отсчет $V(n)$ обычно хранится в оперативной памяти ЭВМ в виде тригонометрических таблиц.

На рис. 7 показана спектральная плотность случайного процесса, имеющая ярко выраженный максимум на частоте $\omega = \omega_0$ циклических колебаний, возникающих при спиральной неустойчивости столба дуги. Это отражает тот факт, что в спектре колебаний дуги преобладающими являются частоты, близкие к ω_0 . Следует отметить, что процесс при этом является случайным, так как $S(\omega)$ остается неотрицательной функцией при всех значениях аргумента. Следовательно, в соответствии с теоремой Хинчина $\rho(\tau)$ — действительно корреляционная функция стационарного случайного процесса $\mathcal{X}(t)$.

Итак, переход к спектральному анализу множественной модели пространственных пульсаций дуги позволяет исследовать условия, связанные с возникновением ее неустойчивостей. Ключевым моментом в предложенном методе моделирования является локальное описание условий развития процесса блуждания элемента столба дуги по неоднородному полю перемещений. Такой подход позволяет учесть как структуру пото-

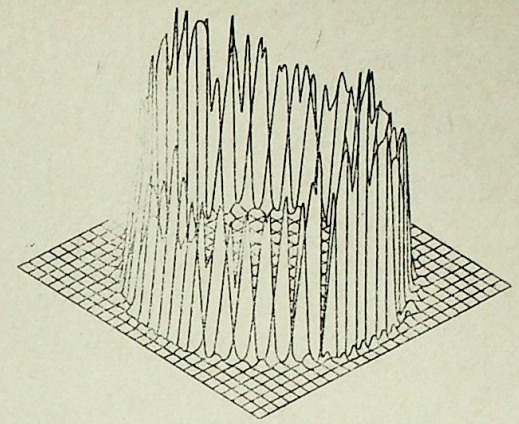


Рис. 5. Вид функции $\psi(x, y)$ для спиральной неустойчивости дуги.

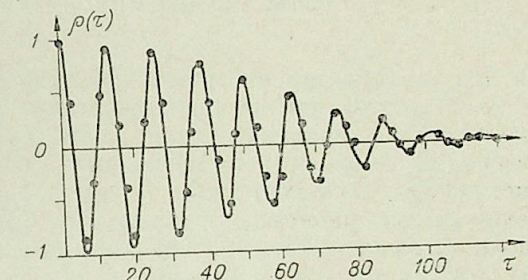


Рис. 6. Взвешенная функция $\rho(\tau)$ для спиральной неустойчивости дуги.

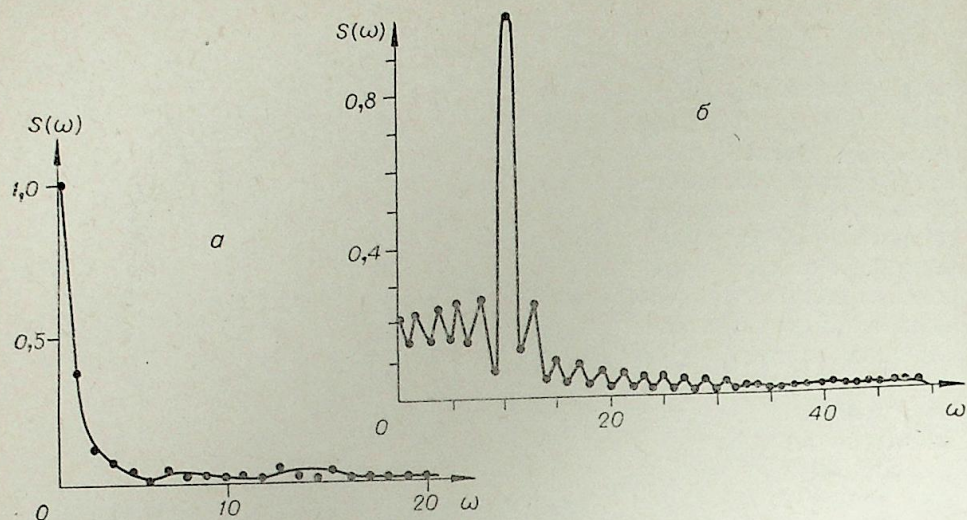


Рис. 7. Сглаженная спектральная плотность пространственных пульсаций дуги.
 а — случайные пульсации дуги, б — спиральная неустойчивость дуги.

ка, так и характер его взаимодействия с дугой, в том числе развитие ее собственной магнитогидродинамической неустойчивости. Далее, поскольку этим явлениям свойственны элементы случайности, то единственная возможность их сравнения и обобщения реализуется через статистические характеристики процесса (распределение вероятности, корреляционные функции, спектральные плотности и т. д.). Все они допускают при удачной постановке эксперимента возможность найти их опытным путем и в конечном счете получить необходимую информацию для идентификации локальных множеств.

Таким образом, замыкается цепь исследований модель — эксперимент — модель. В процессе решения задачи идентификации этой модели вырисовывается физическая картина эволюции формы дуги, обусловленная ее взаимодействием с турбулентным потоком.

Институт теплофизики
 СО АН СССР,
 Новосибирск

Поступила в редакцию
 18/1 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Лебедев А. Д., Назарук В. И., Гапопов В. А. Некоторые аспекты гармонического анализа турбулентной дуги.— Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1978, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.
2. Niemeyer L., Ragaller K. Development of turbulence by the interaction of gas flow with plasmas.— Z. Naturforschung, 1973, Bd 28 a, N 8.
3. Урюков Б. А. Исследование турбулентных электрических дуг.— Изв. СО АН СССР, 1975, № 3. Сер. техн. наук, вып. 1.
4. Засыпкин И. М., Попок Н. И. Оптические исследования электрической дуги в турбулентном потоке воздуха.— Изв. СО АН СССР, 1979, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.
5. Пахомов Е. П. Вилповая форма дуги, область существования и характеристики.— Изв. СО АН СССР, 1979, № 3. Сер. техн. наук, вып. 1.
6. Жуков М. Ф., Коротеев А. С., Урюков Б. А. Прикладная динамика термической плазмы. Новосибирск, Наука, 1975.

7. Лебедев А. Д., Назарук В. И. Исследования пульсаций дуги в турбулентном потоке фотоэлектрическим методом.— Изв. СО АН СССР, 1976, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.
8. Девятков Б. Н., Жуков М. Ф., Назарук В. И. Множественное моделирование пульсаций турбулентной дуги методом Монте-Карло. Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1980, № 3. Сер. техн. наук, вып. 1.
9. Урюков Б. А. Вероятностная модель электрической дуги в турбулентном потоке.— Изв. АН СССР, 1978, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.
10. Назарук В. И. Спектральный анализ пульсаций дуги в турбулентном потоке.— В кн.: Физическая гидродинамика и теплообмен. Новосибирск, 1978.
11. Казакевич Д. И. Основы теории случайных функций. Л., 1977.
12. Дженкинс Г., Ватте Д. Спектральный анализ и его приложения. М., Мир, 1972.
13. Рабинер Л. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М., Мир, 1978.

УДК 537.525.5

А. Л. БАРАННИКОВ, Ю. А. ГАЛКИН,
Д. С. ЛЫЧНИКОВ, А. В. ЧЕРНЕТСКИЙ

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЙ
В ВОДОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ СИЛЬНОТОЧНОГО РАЗРЯДА
НИЗКОГО ДАВЛЕНИЯ

Самогенерация ВЧ-колебаний в системе плазма сильноточного разряда — колебательный контур, подробные исследования которой начаты сравнительно недавно, выявила ряд интересных особенностей СГ-разрядов и их возможностей применения в практических целях [1—6]. Обнаружено, что процесс развития колебаний связан с наличием отрицательной проводимости сильноточной газоразрядной плазмы. При разработке газоразрядных сильноточных приборов, имеющих участок отрицательной проводимости на статической вольт-амперной характеристике (ВАХ), был открыт новый класс приборов с отрицательной проводимостью [7—18]. Эти приборы формально по виду ВАХ можно считать некоторыми аналогами полупроводниковых приборов — туннельных диодов и триодов, хотя физические процессы, происходящие в них, различны по своей природе.

СГ-разряды возникали в сильноточных дуговых плазмотронах со стабилизацией твердыми стенками, в разрядных промежутках типа Пеннинга, в вакуумных разрядниках, в системах с соосно расположенными цилиндрическими электродами и др. Параметры СГ-разряда можно изменять в широких пределах, главное, чтобы выдерживались критические плотности разрядного тока $j_{кр}$, при которых возникает неустойчивость плазмы, связанная с замагниченностью электронов в собственных магнитных полях токов, т. е. при выполнении условия

$$\omega_{e0}^2 \gg \nu_m^2, \quad (1)$$

где ω_{e0} — циклотронная частота электронов, ν_m — эффективная частота соударений электронов и ионов.

Из этого условия можно получить величину критической плотности тока разряда, при достижении которой активная проводимость плазмы разряда становится отрицательной и при включении разряда в цепь колебательного контура в последней возникают и поддерживаются незатухающие колебания, пока выполняется условие (1) [6], т. е.

$$j_{кр} = \frac{m\nu_m}{e \cdot \eta \cdot \mu_0} \cdot 10^{-4}, \quad (2)$$

где r — радиус электронов, m ; e — заряд электронов, Кл; m — масса электронов, кг; j — А · см⁻².

В статье приводятся результаты испытания газоразрядной лампы с водородным наполнением. Такая лампа в нашем случае является дуговым генерирующим элементом (ДГЭ), в котором создается СГ-разряд. Конструктивно ДГЭ представляет собой лампу, в вакуумный баллон ко-

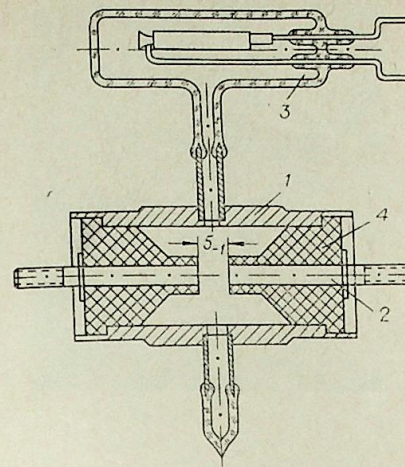


Рис. 1. Конструкция дугового генерирующего узла с водородным наполнением.

1 — корпус с ДГЭ, 2 — электроды, 3 — водородный генератор, 4 — изолятор.

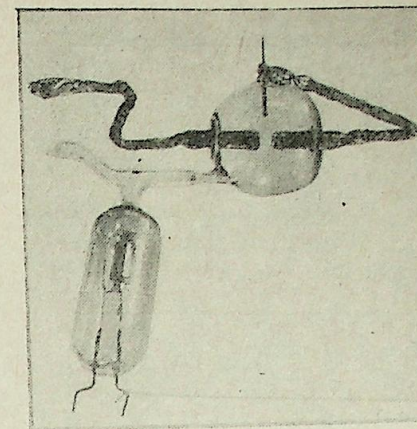


Рис. 2. Дуговой генерирующий элемент, выполненный в виде стеклянной лампы.

торой впаины соосные цилиндрические электроды (рис. 1). Фотография лампы представлена на рис. 2.

На рис. 3 приведена схема включения ДГЭ в двухконтурную цепь разряда. 1-й контур схемы образуется емкостью C , индуктивностью L , сопротивлением R_1 и ДГЭ, записанным как элемент $R_{пл}$. Этот контур, как будет показано ниже, задает частоту колебаний разряда. 2-й контур образован емкостью C_0 , индуктивностью L_2 , сопротивлением R_2 и выполняет защитные функции по отношению к источнику питания. Роль источника питания разряда в приведенной схеме играет конденсатор или батарея конденсаторов $C_0 \sim 10^{-3}$ Ф. Батарея C_0 заряжается от источника постоянного тока мощностью 1 кВт.

Разряд возникает при подаче на электроды лампы напряжения порядка 600—1000 В, что соответствует минимуму напряжения пробоя по кривой Пашена. При достижении критических плотностей токов возникают колебания в цепи разряда (рис. 4).

Расчет двухконтурной схемы, представленной на рис. 3, проведен на основании законов Кирхгофа.

$$i_{1п} + i_{2п} + i_c = 0. \quad (3)$$

$$\frac{1}{C} \int i_c dt = R_1 i_{1п} + L_1 \frac{di_{1п}}{dt} + R_{пл} i_{1п}, \quad (4)$$

$$V_0 = \varepsilon_0 = -R_2 i_{2п} - L_2 \frac{di_{2п}}{dt} + R_1 i_{1п} + L_1 \frac{di_{1п}}{dt} + R_{пл} \cdot i_{1п}. \quad (5)$$

Решение уравнений (3)–(5) относительно тока имеет вид

$$i_{1п} = i_0 + i_m \cos \omega t, \quad (6)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} + \frac{R_2 R_{пл}}{L_1 L_2} + \frac{1}{L_1 C} + \frac{1}{L_2 C}}, \quad (7)$$

$$i_0 = \varepsilon_0 / (R_1 + R_2). \quad (8)$$

Можно показать, что при длительности процесса τ , значительно большей периода возникающих колебаний, т. е. при квазистационарном режиме, необходимо выполнение условия

$$|R_{пл}| = R_1 + (L_1/L_2) \cdot R_2. \quad (9)$$

При этом переменная составляющая с учетом (9) записывается так:

$$i_{1м} = i_0 \cdot L_2/L_2 (R_2 \cdot L_1). \quad (10)$$

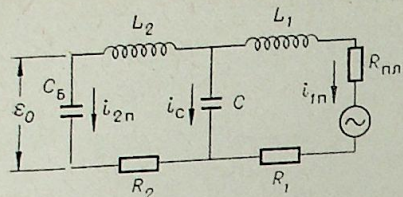
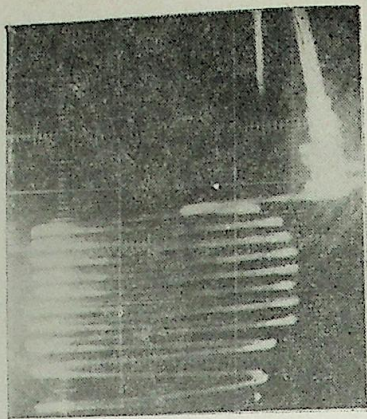


Рис. 3. Электрическая схема включения ДГЭ в цепь разряда.

Рис. 4. Осциллограмма колебаний, снятая с сопротивления в первом контуре. $f = 3,2$ МГц, длительность развертки $\tau_{раз} = 1$ мкс $\times 1$ клетку.



Отношение постоянной и переменной составляющих токов имеет вид

$$\frac{i_0}{i_{1m}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{L_1}{L_2} \quad (11)$$

Из (11) следует, что постоянная составляющая тока в стационарном режиме много меньше переменной составляющей, если выбрать соответствующие параметры цепи. В экспериментах выдерживались условия

$$L_1 \ll L_2; \quad R_1 \sim R_2. \quad (12)$$

На схеме, представленной на рис. 3, величины сопротивлений, индуктивности и емкости соответствовали значениям $R_1 \sim R_2 = 30$ Ом; $L_1 \sim 10^{-5}$ Г, $L_2 \sim 10^{-3}$ Г; $C \sim 10^{-9}$ Ф.

Измеренные осциллографически с точностью, не превышающей 15%, частота колебаний ($f \approx 3,2$ МГц) и ток разряда по падению напряжения на известном сопротивлении в 1-м контуре ($i_0 \sim 300$ А) соответствовали плотности тока $j_0 \sim 1500$ А·см⁻² при радиусе электродов $r = 2,5 \cdot 10^{-3}$ м.

Длительность колебательного процесса τ лежала в диапазоне 15–30 мкс, время повторения, определяемое зарядом батареи конденсаторов C_6 и мощностью источника постоянного тока, составляло 2–3 с.

Осциллографические измерения показали, что переменные составляющие токов достигали десятков килоампер, в то время как постоянные составляющие не превышали сотен ампер*.

Интересно отметить и то обстоятельство, что длительность процесса τ много меньше времени релаксации, $\tau_p = R_n C_6 \approx 2 \cdot 10^{-3}$ с. Это следует из того, что время разряда конденсатора определяется не сопротивлением нагрузки $R_n = R_1 + R_2$, а разностью между ее сопротивлением и сопротивлением плазмы, т. е. $R_n - |R_{nl}|$. Процесс носит квазистационарный характер — за время τ формируется квазипрямоугольный импульс (см. рис. 4).

Частоту колебаний можно было менять за счет изменения емкости C (см. рис. 5). Она определяется в данной схеме из формулы

$$f = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{L_1 C}}, \quad (13)$$

* Измерение токов производилось с помощью прибора «Бесконтактный электронный измеритель тока», представленного сотрудниками ЛЭТИ им. В. И. Ульянова (Ленина) д-ром техн. наук Ю. А. Быстровым, Ю. Ф. Радченко, Е. А. Заграничным, которым авторы выражают глубокую благодарность.

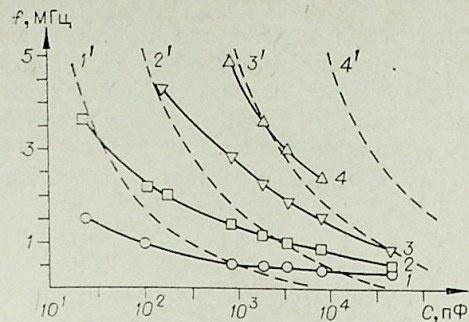


Рис. 5. Зависимость частоты колебаний в разрядной цепи от емкости и индуктивности контура.

$$L_1 \sim 10^{-4} (1-1'); \quad 10^{-5} (2-2'); \\ 10^{-6} (3-3'); \quad 10^{-7} (4-4').$$

которая следует из соотношения (7), если иметь в виду, что $L_1 \ll L_2$; $\frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} \ll$

$\frac{1}{L_1 C}$; $\frac{R_2 R_{nl}}{L_1 L_2} \ll \frac{1}{L_1 C}$. Из этих условий следует, что собственные частоты 1-го и 2-го контуров сильно отличаются друг от друга, поэтому их взаимное влияние мало. В соответствии с этим расчет частоты колебаний генератора можно вести на основании формулы (13).

На рис. 5 представлены экспериментальные кривые зависимости частоты колебаний генератора при различных значениях емкости и индуктивности контура. На этом же рисунке приведены теоретические кривые, построенные по формуле (13) (штриховая линия) при значениях индуктивностей, соответствующих опытным данным. Видно, что теоретические кривые частоты имеют большую крутизну, чем соответствующие им экспериментальные кривые, следовательно, существует расхождение значений частоты экспериментальных данных и теоретических величин.

Крутизна кривых частоты может быть найдена из выражения

$$\frac{df}{dC} = -\frac{1}{4\pi} L_1^{-1/2} C^{-3/2} = -\frac{1}{4\pi \sqrt{L_1} \cdot 3 \sqrt{C^2}}. \quad (14)$$

Приняв в качестве параметра теоретических кривых индуктивность контура, можно утверждать, что экспериментальные кривые частоты в зависимости от емкости контура получены при больших значениях индуктивности, чем это следует из опытных данных.

Очевидно, что в цепи 1-го контура имеется дополнительная индуктивность, включенная последовательно основной L_1 , которая и ответственна за понижение значений частоты по сравнению с расчетными. Возможно, что дополнительная индуктивность своим происхождением обязана индуктивности самого разряда, которая при частотах $f \sim 10^6$ Гц имеет значительную величину.

На рис. 6 представлена область давлений водорода, в которой были получены надежные сигналы квазипериодической формы. Понижение давления рабочего тела ниже определенного предела или повышение его с выходом за верхнюю границу оптимальных давлений приводит к изменению формы колебаний, которая приближается к релаксационной, или просто к срыву колебаний. Это можно интерпретировать следующим образом: при низких давлениях, лежащих в области А, колебания не возникают, поскольку концентрация молекул водорода недостаточна для того, чтобы образовать дуговой разряд с плотностью тока, равной или большей $j_{кр}$ (2). При повышении давления концентрация молекул,

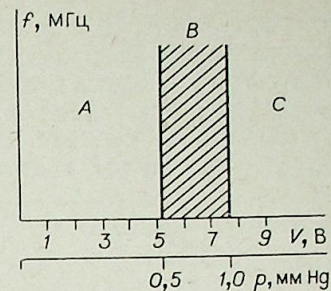


Рис. 6. Области существования колебаний в разряде при различных давлениях: области А и С соответствуют отсутствию колебаний, область В — наличию колебаний в разряде. По оси абсцисс приведено напряжение накала генератора водорода и соответствующее ему давление водорода.

а следовательно, и концентрация электронов возрастают и плотность тока достигает критического значения. Величина давления в этом случае отвечает области существования устойчивых колебаний (область В). Следует отметить, что колебания в этой области наблюдаются во всем диапазоне рабочих частот, т. е. величина критической плотности тока не зависит от частоты колебаний, что подтверждает соотношение (2).

ВЫВОДЫ

1. В двухэлектродной лампе с соосно расположенными электродами при зажигании дугового разряда с плотностью тока $j > j_{кр}$ возникают условия для возбуждения колебаний, если этот разряд включен в цепь колебательного контура.

2. Колебательный режим разряда, который называют самогенерирующим (СГ-разряд), зависит от ряда параметров плазмы. Основным условием существования этого типа разряда является замагниченность электронов плазмы собственным магнитным полем тока разряда. Это условие позволяет определить значение критической плотности тока разряда, ниже которого колебания не развиваются.

3. Частота колебаний зависит в основном от параметров контура, в который включен СГ-разряд. Это является важным фактором для практического применения СГ-разряда, обеспечивая возможность возникновения колебаний в широком диапазоне волн.

Московский институт народного хозяйства
им. Г. В. Плеханова

Поступила в редакцию
11/1 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Чернетский А. В., Рычков В. А., Темеев А. А. — В кн.: Вопросы физики низкотемпературной плазмы. Минск, Наука и техника, 1970.
2. Чернетский А. В. и др. Колебания в сильноточных дуговых разрядах и процессы в прианодной области. — Изв. вузов. Радиофизика, 1974, № 9.
3. Чернетский А. В. и др. Генерация колебаний с помощью вакуумной дуги. — Изв. вузов. Радиофизика, 1974, № 6.
4. Чернетский А. В., Лычников Д. С., Чернетская С. М. Неустойчивость плазмы в сильноточных дуговых разрядах. — Физика и химия обработки материалов, 1975, № 1.
5. Чернетский А. В., Темеев А. А., Чернетская С. М. Расчет параметров плазмы, ускоряемой в высокочастотном электрическом и статистическом магнитном полях. — Изв. вузов. Авиационная техника, 1972, № 2.
6. Чернетский А. В., Лычников Д. С. Самогенерирующие разряды. — В кн.: Теория электрической дуги в условиях вынужденного теплообмена. Новосибирск, Наука, 1977.
7. Баранников А. Л., Пекшев П. Ю. Газоразрядные приборы с отрицательной проводимостью. — Изв. СО АН СССР, 1977—1978, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.
8. Баранников А. Л., Каретников Д. В. Доклад на IV Международной конференции ТЭП. Эйховен. Голландия, 1975.
9. Баранников А. Л., Пекшев П. Ю., Голубев В. Г. Влияние магнитного поля на характеристики цезий-бариевого управляемого сеточного прибора с термоэмиссионным катодом. — Электронная техника, сер. 4. Электровакуумные и газоразрядные приборы, 1977, вып. 1.

10. Пекшев П. Ю., Баранников А. Л., Голубев В. Г. Возможность расширения зоны работоспособности управляющего электрода в трехэлектродном Cs—Ва термоэмиссионном преобразователе. — ЖТФ, 1977, т. 47, вып. 6.
11. Баранников А. Л. и др. Исследование явления обрыва тока в цезий-бариевом полностью управляемом вентиле. — Электронная техника, сер. 4. Электровакуумные и газоразрядные приборы, 1977, вып. 9.
12. Баранников А. Л., Феоктистов Б. К., Яминский В. В. К вопросу об управлении разрядным током с помощью сетки в цезий-бариевом полностью управляемом вентиле. — Электровакуумные и газоразрядные приборы, 1976, вып. 1.
13. Баранников А. Л. и др. Возможность использования Cs—Ва трехэлектродного преобразователя для генерирования колебаний низкой частоты. — ЖТФ, 1976, т. 46, вып. 11.
14. Кайбышев В. З., Кузин Г. А., Мельников В. М. О возможности использования термоэмиссионного преобразователя для управления током в электрических цепях. — ЖТФ, 1972, т. XLII, вып. 6.
15. Кайбышев В. З., Кузин Г. А. Влияние третьего электрода на обрыв тока в низковольтной дуге. — ЖТФ, 1975, т. XLVI, вып. 2.
16. Гаряинов С. А., Абезгауз И. Д. Полупроводниковые приборы с отрицательным сопротивлением. М.—Л., Энергия, 1966.
17. Анташов В. В., Баранников А. Л., Пекшев П. Ю. Управление газовым разрядом путем изменения его вольт-амперной характеристики и линии нагрузки. — Энергетические установки. Сб. тр. МВТУ им. Н. Э. Баумана. М., 1978.
18. Баранников А. Л. и др. Электрическая схема для регистрации участка отрицательной проводимости на вольт-амперных характеристиках сильноточных плазменных вентилях. — ПТЭ, 1977, вып. 5.

Н. В. ПАШАЦКИЙ, Е. А. МОЛЧАНОВ

ЭРОЗИЯ ГРАФИТОВЫХ ЭЛЕКТРОДОВ ПЛАЗМОТРОНА ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

При плазменной обработке неорганических материалов часто требуется высокая температура ($T > 3000$ К) плазменной струи, большой диаметр струи (50 ÷ 150 мм), небольшие скорости истечения (10 ÷ 50 м/с). Обычно такие условия реализуются в индукционных плазматронах. При выполнении электродов из графита указанные струи можно получать и в дуговом плазматроне.

Для определения размеров и геометрии плазменной головки из графита необходимы данные по эрозии электродов. В литературе имеются сведения по эрозии графитовых электродов, применяющихся в металлургии [1, 2], и угольных электродов в свободно горящих электрических дугах [3]. В опубликованных работах нет сведений по эрозии графитовых электродов в плазматронах на переменном токе, работающих на воздухе.

Схема установки, на которой проводились исследования плазматрона мощностью 150 кВт, показана на рис. 1. В качестве источника тока использовались два последовательно соединенных сварочных трансформатора 1. Регулирование тока проводилось изменением сопротивления балластного реостата 2. Детали плазменной головки выполнялись из графита марки ГЭ. Диаметр наружного электрода (втулки 3) составлял 100 мм, диаметр и длина внутреннего электрода (стержня 4) — 45 и 180 мм соответственно, зазор между стержнем и втулкой — 5 ÷ 7 мм. Торец стержневого электрода устанавливался заподлицо со срезом втулки. Во всех опытах эрозия электродов изучалась при воздействии струи плазмы на кладку из шамотного кирпича 5. Для наблюдения за процессом резки и защиты от светового излучения дуги 6 применялся защитный экран 7 со светофильтрами Э-1. Закрутка газового потока осуществлялась путем подачи газа через тангенциальное отверстие.

Поджиг плазматрона производился путем короткого замыкания электродов при отсутствии подачи плазмообразующего газа — воздуха. После выхода на режим плазматрон работал при следующих параметрах: сила тока $I = 1500$ А, напряжение на электродах $U = 100$ В; расход воздуха $V = 8$ м³/ч. Время работы с учетом поджига составляло 10 мин.

Как известно, скорость эрозии электродов зависит от свойств электродных материалов, размеров и геометрии электродов, рода газов, давления, температуры, тока

и многих других факторов. Выяснено также, что эрозия в нейтральных средах носит тепловой характер, т. е. она зависит от удельного теплового потока, поступающего от дуги в электрод [4]. При использовании воздуха в качестве плазмообразующего газа на величину эрозии сильное влияние оказывает и окислительное действие кислорода воздуха [5]. В данной работе исследована зависимость эрозии от таких факторов, которые существенно влияют на стойкость электродов и недостаточно освещены в литературе.

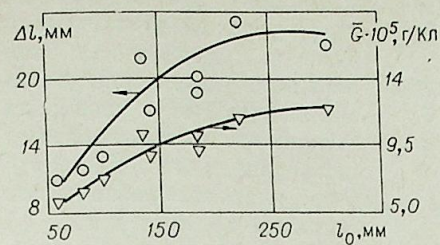


Рис. 2. Зависимость эрозии внутреннего электрода от длины стержня.

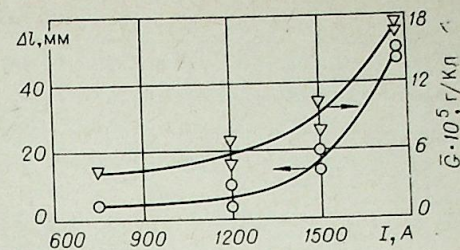


Рис. 3. Зависимость эрозии стержневого электрода от силы тока.

и многих других факторов. Выяснено также, что эрозия в нейтральных средах носит тепловой характер, т. е. она зависит от удельного теплового потока, поступающего от дуги в электрод [4]. При использовании воздуха в качестве плазмообразующего газа на величину эрозии сильное влияние оказывает и окислительное действие кислорода воздуха [5]. В данной работе исследована зависимость эрозии от таких факторов, которые существенно влияют на стойкость электродов и недостаточно освещены в литературе.

На рис. 2 показаны зависимости изменения длины Δl и удельной эрозии \bar{G} внутреннего стержневого электрода от начальной длины l_0 . В исследованном диапазоне изменения начальной длины эрозия заметно возрастает, начиная с $l_0 \approx 130$ мм. С увеличением длины стержня уменьшается отвод тепла путем теплопроводности из области привязки дуги в водоохлаждаемую державку. Это приводит к повышению температуры горячего торца электрода, возрастанию поверхности испарения и росту эрозии.

Кривая зависимости эрозии от силы тока (рис. 3) имеет слабый положительный наклон при токах, меньших 1500 А. Однако при дальнейшем увеличении тока существенную роль начинает играть джоулево тепло, выделяющееся в объеме стержня. Это тепло вызывает перераспределение профиля температуры по длине электрода, увеличение поверхности испарения и, следовательно, рост удельной эрозии. Уменьшение удельной эрозии электрода с ростом тока, отмечаемое в [6] и других работах, в условиях данных экспериментов не наблюдалось.

Характер зависимостей удельной эрозии \bar{G} и изменения длины Δl от времени работы плазматрона неодинаков (рис. 4). Если для Δl зависимость монотонно возрастающая, то удельная эрозия \bar{G} после 10 мин возрастает незначительно. Замедление роста скорости эрозии можно объяснить прогревом деталей плазменной головки и более устойчивым горением дуги.

Авторы [6, 7], исследовавшие эрозию вольфрамовых электродов, отмечали существование при заданной силе тока оптимального диаметра электрода, при котором эрозия мала. В опытах для графитовых

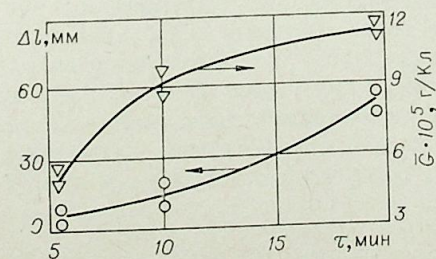


Рис. 4. Эрозия электрода в зависимости от времени горения дуги.

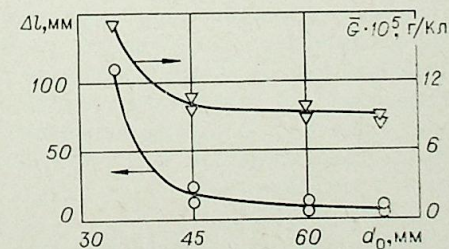


Рис. 5. Эрозия электрода в зависимости от диаметра стержня.

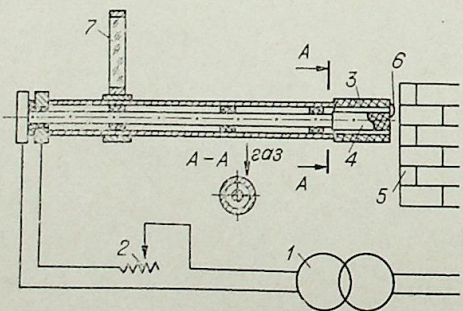


Рис. 1. Схема экспериментальной установки.

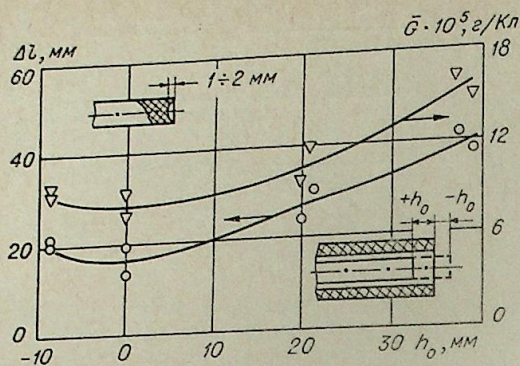


Рис. 6. Влияние заглубления внутреннего электрода на износ стержня.

взаимного расположения электродов в опытах и результаты исследования. Видно, что эрозия минимальна при установке внутреннего электрода заподлицо с наружным. Выступление стержневого электрода за срез втулки ($h_0 < 0$) увеличивает время, необходимое для поджига плазмотрона, приводит к неустойчивому режиму горения дуги и росту эрозии. С другой стороны, заглубление внутреннего электрода ухудшает его охлаждение путем излучения, ведет к перегреву электрода, росту поверхности испарения и усиленному уносу материала. На этом же рисунке показан характерный профиль торца стержня после испытания. Вогнутая торцовая поверхность (вогнутость составляет $1 \div 2$ мм) свидетельствует о том, что под действием газодинамических сил закрученного потока газа опорное пятно дуги смещается к оси стержня и вызывает более сильное выгорание материала электрода в прилегающей к оси области.

В результате осмотра стержневых электродов после испытаний было также установлено, что при $d_0 = 45$ мм большая часть материала уносится с торца электрода в результате электрической эрозии и меньшая часть — с боковой поверхности из-за окисления графита в потоке воздуха.

В отличие от стержневых электродов на износ втулок существенное влияние оказывает окислительное действие кислород воздуха. В процессе работы плазмотрона внутренний диаметр втулки увеличивается, особенно ближе к срезу. За 10 мин работы внутренний диаметр увеличивается на $2 \div 3$ мм в средней части и на $4 \div 5$ мм — на срезе втулки. Окислительному воздействию подвергается также и наружная поверхность. Наружный диаметр втулки у среза уменьшается на $3 \div 4$ мм, а длина — на $2 \div 3$ мм.

В заключение следует отметить, что по данным настоящей работы плазмотрон с графитовыми электродами по удельной эрозии ($G \approx 10^{-5}$ г · Кл⁻¹) близок к руднотермическим печам, для которых удельная эрозия одного электрода составляет $\approx 10^{-4}$ г · Кл⁻¹ [2].

Таким образом, в работе изложены результаты исследования эрозии мощного плазмотрона переменного тока с электродами, выполненными из графита; установлены размеры и геометрия плазменной головки, обеспечивающие минимальную эрозию электродов. Важную задачу представляет в дальнейшем выяснение и описание механизма тепло- и массопереноса в приэлектродных областях силовоточной дуги переменного тока, горящей в плазмотроне с соосно расположенными графитовыми электродами.

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
12/II 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Мармер Н. Э. Углеродистые материалы. Справочник. М., Металлургия, 1973.
2. Байрамов Б. И. и др. Материальный и тепловой баланс печи при выплавке ферросиликованадия. Сборник трудов ЧЭМК. М., Металлургия, 1975.
3. Фикельнбург В., Меккер Г. Электрические дуги и термическая плазма. М., ИЛ, 1961.
4. Кесаев И. Г. Катодные процессы электрической дуги. М., Наука, 1968.
5. Котельников Р. Б. и др. Особо тугоплавкие элементы и соединения. Справочник. М., 1969.
6. Жуков М. Ф., Аньшаков А. С., Дандарон Г.-Н. Б.— В кн.: Приэлектродные процессы и эрозия электродов плазмотронов/Под ред. М. Ф. Жукова. Новосибирск, 1977.
7. Жуков М. Ф., Смоляков В. Я., Урюков Б. А. Электродуговые нагреватели (плазмотроны). М., Наука, 1973.

УДК 629.7.018.1 : 533.6.071.1, 62-69

В. А. ЛЕБСАК, А. В. ПОДМАЗОВ, Б. В. ПОНОМАРЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАПАЛЬНОЙ СВЕЧИ ДЛЯ ПЛАЗМЕННОГО ЗАЖИГАНИЯ ЭЛЕКТРОДУГОВЫХ ПОДОГРЕВАТЕЛЕЙ ВОЗДУХА

Для зажигания дуги в подогревателях можно использовать различные методы: взрывающейся проволоочки, раздвигающихся электродов, высоковольтного искрового разряда, вырыска электролита или плазмы. Как показал опыт применения этих методов, наиболее технологичным является зажигание дуги вырыском в межэлектродный промежуток ионизированного газа [1].

Известные запальные свечи для плазменного зажигания дуги не обеспечивают зажигания дуги при давлениях воздуха, превыщающих 0,1 МПа, требуют высоковольтной защиты подогревателя и приборов и загрязняют рабочий газ продуктами выгорания пластиковых вкладышей [1]. Поэтому была предложена и испытана новая конструкция запальной свечи [2, 3], в которой используется скользящий искровой разряд [4], когда искра образуется на поверхности изолятора при подаче импульса напряжения. Кроме низкого уровня пробойного напряжения, преимуществом скользящего искрового разряда по отношению к нормальному искровому разряду в воздухе является его высокий энергетический КПД. Более 90% накопленной в конденсаторах энергии расходуется в самом скользящем разряде, в то время как при разряде в воздухе эта величина составляет 7—10% [5]. Недостатком скользящих искровых разрядов является ограниченное число включений ($10^2 \div 10^3$), так как искра постепенно разрушает изолятор.

На рис. 1 показана принципиальная схема плазменной свечи: корпус 1, центральный электрод 2, разрядник 3, конденсаторная батарея 4, токовый слой 5, фронт ударной волны 6 и изолятор 7.

Токовый слой, образующийся в коаксиальном разрядном устройстве, — это своего рода поршень, формирующий ударную волну. Процесс формирования сверхзвуковых плазменных факелов импульсного разряда большой мощности является гидродинамическим процессом взрывного типа [6]. После удаления ударной волны на большое расстояние от среза разрядной камеры структура факела начинает напоминать структуру непрерывной газовой струи, истекающей из сопла при сверхкритическом перепаде давлений. На выходе из свечи наблюдается течение со сверхзвуковой скоростью.

Для увеличения осевой направленности потока, а следовательно, и дальности струи, применяется цилиндрическое насадочное устройство длиной в 2—3 калибра, внутренний диаметр которого равен диаметру выходного электрода.

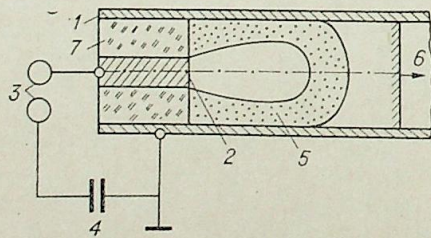


Рис. 1.

При выборе материала диэлектрика в свече необходимо учитывать, что добавки галогенов снижают электронную концентрацию в плазменной струе. При попытках использовать в наших испытаниях изоляторы из фторопласта или хлорвинила свеча переставала возбуждать дугу.

Плазменная свеча там, где это допускает конструкция подогревателя, устанавливается в непосредственной близости от рабочей зоны горения дуги. Там, где свеча не может быть установлена вблизи от разрядной зоны, свеча устанавливается на входе в разрядную камеру, где сначала возбуждается поджигающая дуга, которая выдувается в рабочую зону под действием аэродинамических и электромагнитных сил [3].

Исследование диапазонов работы запальных свечей производилось на установке, моделирующей условия работы свечи в подогревателе (рис. 2). Запальная свеча, содержащая корпус 1, центральный электрод 2, сменный электрод 3, изолятор, состоящий из текстолитовой 4 и фторопластовой 5 втулок, устанавливалась в корпусе разрядной камеры 6. Стенки разрядной камеры изолировались капроновым вкладышем 7. В крышку разрядной камеры вворачивались винты 8 различной длины, что позволяло регулировать длину разрядного промежутка, в котором с помощью запальной свечи инициировался разряд конденсатора, имитирующий дугу подогревателя. Блок электрического питания свечи (БП) состоит из батареи конденсаторов и зарядного устройства.

Испытания диапазонов работы запальной свечи проходили в следующей последовательности. В разрядной камере (см. рис. 2) устанавливалось заданное давление воздуха, включался блок питания и батарея конденсаторов заряжалась до заданного значения напряжения ($2 \div 5$ кВ), а конденсатор C_n , имитирующий дугу подогревателя, заряжался до напряжения холостого хода питающих устройств дуговых установок. (Влияния величины напряжения на конденсаторе C_n в диапазоне 400—5000 В на процесс пробоя разрядного промежутка не обнаружено.) Далее включалась запальная свеча и контролировался разряд конденсатора C_n . Если свеча ионизировала разрядный промежуток, то конденсатор C_n разряжался.

Результаты испытаний с точностью $\sim 10\%$ описываются следующей эмпирической зависимостью, связывающей параметры питающего устройства запальной свечи (напряжение U и емкость батареи конденсаторов C) и параметры в разрядной камере подогревателя (давление воздуха p и максимальный размер межэлектродного промежутка l):

$$CU = 12 \cdot \sqrt{pl}. \quad (1)$$

Эта зависимость проверена в следующих диапазонах изменения параметров: $C = 100\text{—}400$ мкФ; $U = 2 \div 5$ кВ; $p = 0,1\text{—}14,5$ МПа, $l = 5\text{—}32$ мм; диаметр центрального электрода свечи (рис. 2, 2) 4 мм; длина изоляционного промежутка между центральным 2 и выходным 3 электродами свечи $1 \div 2$ мм. Длина светящегося факела в неподвижном воздухе при атмосферном давлении составляла 150—250 мм.

Были испытаны сменные электроды (см. рис. 2, 2, 3), изготовленные из различных материалов (меди, вольфрама, гафния и стали). Ресурс стальных и медных электродов составил не менее 50 включений. Ресурс вольфрамовых и гафниевых электродов не определен, хотя каждый из

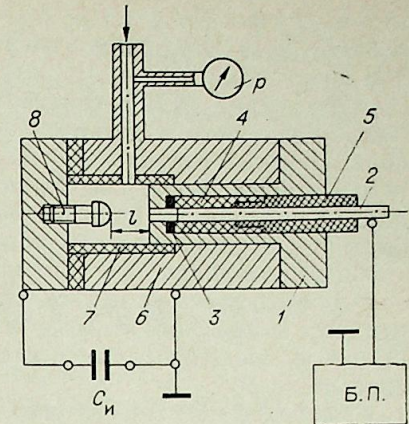


Рис. 2.

них выдерживает не менее 100 включений, так как в этом случае ресурс работы свечи определяет уже изолятор, выходящий из строя через 50—100 включений.

Измерение тока в скользящем разряде свечи проведено с помощью пояса Роговского и двухлучевого катодного осциллографа. Разряд носит колебательный затухающий характер. Основная доля энергии, накопленной в конденсаторах, выделяется в разряде в первый полупериод. Так как индуктивность цепи не менялась, то длительность импульса тока была пропорциональна корню квадратному из емкости батареи конденсаторов и составляла $85 \div 160$ мкс при емкости $100 \div 400$ мкФ.

Длительность импульса тока примерно равна времени релаксации процесса ионизации в воздухе при атмосферном давлении (~ 100 мкс, [7]), т. е. воздух в плазменном факеле за время разряда успевает ионизироваться.

Ресурс и надежность работы запальной свечи описанной выше конструкции во многом зависят от качества изготовления и сборки, которые в условиях единичного производства нельзя обеспечить надежным контролем. Поэтому был проведен поиск стандартных устройств, выпускаемых серийно, которые можно было бы после соответствующих доработок использовать в системе плазменного зажигания дуговых подогревателей.

Для этой цели выбрали стандартные полупроводниковые свечи, предназначенные для воспламенения топливовоздушной смеси газотурбинных двигателей. Однако эти свечи рассчитаны для работы с разрядом энергией ~ 10 Дж, а при плазменном зажигании дуги в разряд необходимо вкладывать энергию ~ 1000 Дж. Поэтому стандартную полупроводниковую свечу испытали на ресурс при атмосферном давлении. Было проведено 200 включений разряда от батареи конденсаторов емкостью $C = 200$ мкФ, заряженной до напряжения 4 кВ. При этом свеча еще не выработала своего ресурса. Заметной эрозии электродов не обнаружено, а полупроводниковый «изолятор» выгорел примерно на 0,5 мм по диаметру.

Центральный аэрогидродинамический институт Поступила в редакцию
им. Н. Е. Жуковского, 21/IV 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Barr T. A., Mayo R. F. A «Spark-Plug» Starter for Arc Plasma Generators.— J. of Spacecraft and Rockets, 1965, v. 2, N 5.
2. Лебсак В. А. и др. Исследование плазменного зажигания дуги в коаксиальных подогревателях аэродинамических труб.— Уч. зап. ЦАГИ, 1973, VI, № 2.
3. Лебсак В. А., Подмазов А. В., Столяров Ю. В. Электродуговой нагреватель газа. Авт. свид. № 610326.— Открытия, изобретения, промышленные образцы, товарные знаки, 1978, № 21.
4. Фольрат К. Искровые источники света и высокочастотная искровая кинематография.— В кн.: Физика быстротекающих процессов, т. 1, М., Мир, 1971.
5. Фрюнгель Ф. Импульсная техника. М.—Л., Энергия, 1965.
6. Султанов М. А. Исследование структуры сверхзвукового плазменного факела в импульсном разряде большой мощности.— ЖТФ, 1974, т. XLIV, вып. 4.
7. Малкин О. А. Релаксационные процессы в газе. М., Атомиздат, 1971.

УДК 537.52-60

С. П. БОРИСКИН, Б. Н. ДЕВЯТОВ, В. Ф. ЛЕВЧЕНКО

НАУЧНО-ИНЖЕНЕРНЫЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ И АНАЛИЗА ДИНАМИКИ ПЛАЗМОТРОНА КАК ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА. II.

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОЦЕССА В ПЛАЗМОТРОНЕ

Плазмохимические процессы, рассматриваемые в качестве перспективной технологии для крупнотоннажных производств, например, азотной промышленности, представляют большой народно-хозяйственный интерес. Плазмохимические процессы могут быть применены для получения таких крупнотоннажных химических продуктов, как азотная кислота, ацетилен, цианистый водород, нитрил актиловой кислоты, обесфторенные фосфаты и другие. Полная или частичная замена дефицитного углеводородного сырья позволит экономить миллиарды кубометров природного газа и миллионы тонн нефти [1].

В связи с широким применением низкотемпературной плазмы для технологических целей значительно возрос интерес к плазмотронам большой единичной мощности. В этих плазмотронах транспортное время нагреваемого газа соизмеримо со временем его химического превращения.

Для математического описания переходного процесса в технологическом плазмотроне требуется значение параметров в статике. Кроме основных параметров плазмотрона в статике используются еще и значения их производных по координате, входящих в линеаризованную модель динамики. Все параметры в статике с физико-химическими превращениями необходимы для последующего анализа динамики плазмотрона.

Математическое описание технологического процесса в статике в безразмерных величинах на основании выражений (1а)—(6а), (15) из нашего первого сообщения [2], а также с учетом межэлектродных вставок плазмотрона будет иметь вид

$$V_z \frac{dC_j}{dz} = K_D D \frac{d^2 C_j}{dz^2} + K_{R_j} R_j, \quad (1)$$

где

$$K_D = \frac{D_H}{l \cdot V_H}, \quad K_{R_j} = \frac{R_{jH} \cdot l}{V_H \cdot C_{jH}}$$

$$V_z \frac{dT}{dz} - 2V_z \frac{dP}{dz} = K_T a \frac{d^2 T}{dz^2} \pm K_{h_j} \frac{1}{\rho_{cP}} \sum_{j=1}^K h_j R_j + K_E E J \frac{1}{\rho_{cP}} - \frac{1}{\rho_{cP}} K_\Phi T, \quad (2)$$

где

$$K_E = \frac{E_H J_H}{\rho_H c_{PH} T_H V_H}, \quad K_\Phi = \frac{K\Phi}{\rho_H c_{PH}}$$

$$K_T = \frac{a_H}{l \cdot V_H}, \quad K_{h_j} = \frac{\left(\sum_{j=1}^K h_{jH} R_{jH} \right) l}{\rho_H \cdot c_{pH} \cdot T_H \cdot V_H}$$

$$V_z \frac{dV_z}{dz} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dz} + v K_v \frac{d^2 V_z}{dz^2}, \quad (3)$$

$$K_v = \frac{v_H}{l \cdot V_H}$$

$$\frac{d}{dz} (\rho V_z F) = \frac{d}{dz} [G_0 + \Sigma G_i(z)], \quad (4)$$

где i — номер секции плазмотрона,
 $G_i(z) = 0$ в пределах секции межэлектродных вставок (МЭВ),
 $G_i(z) = \text{const}$ в зазоре между МЭВ.

Расход газа через зазоры по длине плазмотрона меняется ступенчато. В пределах одной секции МЭВ плазмотрона расход остается постоянным, а вдоль зазора линейно растет.

$$P = K_P T M^{-1} \quad (5)$$

где

$$K_P = \frac{R_P T_H}{V_H^2 \cdot M_H}$$

$$V_z \frac{dJ}{dz} + K_J J = 0, \quad (6)$$

где

$$K_J = \frac{A_J l}{V_H}, \quad A_J = \frac{R_0 + \mu_g - \varphi_g}{\theta (R_0 + R_g - \varphi_g)},$$

$$E = P^{0.38} I^{0.008}. \quad (7)$$

Обозначения величин в уравнениях (1)–(7) общеприняты [2].

Безразмерные значения теплофизических свойств газа, входящие в уравнения (1)–(7), имеют следующие выражения: $= T^{3/2} M^{-1/2} P^{-1}$

$$c_p = T^{0.2} M^{-1.2}, \quad a = T^{1.3} M^{0.7} P^{-1}, \quad 1/\rho c_p = T^{0.8} P^{-1} M^{-2.2},$$

$$\rho = P T^{-1} M, \quad v = T^{3/2} M^{-1/2} P^{-1}.$$

В качестве характерной точки H можно выбрать значения характеристик при температуре $1 \cdot 40^4$ К.

Во всякой реагирующей газовой системе [3] одновременно протекают как простая бимолекулярная реакция, так и цепная. Вопрос заключается лишь в конкуренции между их относительными скоростями. Необходимо отметить, что в системе идет не одна цепная реакция, а одновременно протекают все цепные реакции, возможные с точки зрения теории строения, причем эти различные типы цепных реакций конкурируют друг с другом. Скорости разных типов цепных превращений обычно неодинаковы. Этот общий принцип делает цепные реакции распространенным типом химического превращения особенно в низкотемпературной плазме.

В качестве примера приведем типичный случай термической неразветвленной цепной реакции — реакции окисления азота, входящей в общую плазмохимическую схему получения азотной кислоты, поскольку она базируется на неисчерпаемом источнике сырья — атмосферном воздухе. Эта реакция имеет большую энергию активации, поэтому она протекает только при достаточно высоких температурах порядка 2000 К и выше. Реакция детально изучена как экспериментально, так и теоретически Я. Б. Зельдовичем с сотрудниками [4, 5]. Авторы работ [5, 6] установили чисто тепловой механизм реакции окисления азота.

Эта реакция при температуре свыше 2000 К распадается на следующие типы:

I. Бимолекулярную реакцию $N_2 + O_2 \rightarrow 2NO + 44$ ккал/моль.

II. Цепную реакцию

- | | | |
|--|---|-------------------|
| 1. $O_2 + M \rightarrow O + O + M + 118$ ккал/моль | } | иницирование цепи |
| 2. $N_2 + M \rightarrow N + N + M + 225$ | | |
| 3. $NO + M \rightarrow N + O + M + 150$ | | |
| 4. $O + N_2 \rightarrow NO + N + 75,5$ | } | цепь |
| 5. $N + O_2 \rightarrow NO + O - 32,5$ | | |
| 6. $O + O + M \rightarrow O_2 + M - 118$ | } | обрыв цепи |
| 7. $N + N + M \rightarrow N_2 + M - 225$ | | |

В реакциях типа II значение M относится к газовым каталитическим частицам.

С целью оценки кинетической системы (I, II) возьмем число Дамколера [7, 8], представляющее собой отношение двух характерных времен: времени нахождения химической реагирующей частицы в потоке (τ_n) и времени протекания химической реакции (τ_p), т. е.

$$D_a = \tau_n / \tau_p.$$

Рассмотрим теоретически три предельных случая протекания реакций.

1. Если $D_a \rightarrow 0$, то время протекания химической реакции много больше времени пребывания в потоке ($\tau_p \gg \tau_n$), и, следовательно, влияние химических реакций на плазменный поток незначительно. Здесь смесь газов может рассматриваться как химически инертная — идут процессы теплообмена между дугой и газом.

2. Если $D_a \approx 1$, то скорость химического процесса и процессов переноса оказывается одного порядка ($\tau_n / \tau_p \approx 1$), т. е. термическое состояние потока будет отличаться от равновесного. Для определения поля концентраций в этом случае необходимо использовать в математическом описании уравнения материального баланса по химическим компонентам.

3. Если $D_a \rightarrow \infty$, то время протекания химической реакции много меньше времени нахождения частицы в потоке ($\tau_p \leq \tau_n$), и, следовательно, в каждой точке потока будет успевать устанавливаться локальное термодинамическое равновесие. Распределение концентраций будет зависеть лишь от местных значений температур и давлений, а распределение концентраций определяется из условия $R_j = 0$ в уравнении (1).

Методы решения рассмотренных задач могут быть различными.

Опираясь на результаты работ [5–7, 9–11] и наших расчетных временных интервалах [12] для исходной азотно-кислородной смеси, в частности воздуха, выделим три характерные области:

1. $D_a \rightarrow 0$ $T < 0,2$ (в размерных величинах это будет $T < 2000$ К).
2. $D_a \approx 1$, $0,2 \leq T \leq 0,3$.
3. $D_a \rightarrow \infty$, $T > 0,3$.

В области температур 2000 ÷ 3000 К Я. Б. Зельдович [5] определил скорость химической реакции синтеза окиси азота из воздуха (значение скорости даем в безразмерных величинах):

$$R_{NO} = k [C_{NO,e}^2 - C_{NO}^2],$$

$$\text{где } k = C_{O_2}^{1/2} \cdot \exp \left[4,33 \left(1 - \frac{1}{T} \right) \right],$$

нижний индекс e означает равновесное значение при фиксированной температуре.

$$C_{NO,e} = \sum_{m=0}^{11} a_m \exp(imx),$$

$$C_{O_2} = \sum_{n=0}^{11} a_n \exp(inx),$$

где

$$x = \frac{0,14 - T}{0,62 - T} \cdot 2\pi,$$

a_m, a_n — известные коэффициенты, определяемые по равновесным табличным значениям воздуха [13—15].

При $T \leq 0,2$ значение безразмерного значения молекулярного веса в уравнениях (1)—(7) постоянно и равно $M \approx 2,035$.

При $T > 0,2$ значение молекулярного веса определяется по выражению $M = \sum_{k=0}^{11} a_k \exp(iKy)$, где $y = 2\pi \frac{0,2 - T}{0,44 - T}$, a_k определяет так же, как и a_m, a_n .

В секционированном плазмотроне подача газа осуществляется через все межсекционные зазоры. При этом газ, нагреваясь в какой-либо секции, на выходе из нее в зазоре встречается с холодным газом, идущим на защиту последующей секции, смешивается с понижением среднеинтегральной температуры или энтальпии по сечению. В этом случае энтальпия газа от одного начального состава при входе в n -ю секцию в зависимости от выхода из секции $n - 1$ будет

$$h_{n,0} = \frac{h_{n-1} T \left(\sum_{i=0}^{n-1} G_i \right)}{\sum_{i=0}^n G_i},$$

откуда может быть определена температура плазмы.

Заметим, что вопросы статики в этой статье рассмотрены применительно к секционированному плазмотрону ПР-05 одной из моделей промышленного назначения.

Математическое описание статики процесса в плазмотроне, исходя из значений чисел Дамколера (0; 1; ∞), соответственно состоит из трех характерных зон.

1. При $D_a \rightarrow 0$ и $T < 0,2$ из системы уравнений (1)—(7) выпадает уравнение (1) и в уравнении (2) значение скорости химической реакции равно нулю, т. е. имеем химически инертную систему.

2. При $D_a \approx 1$ и $0,2 \leq T \leq 0,3$ химически реагирующая включает уравнения (1)—(7).

3. При $D_a \rightarrow \infty$ и $T > 0,3$ система уравнений (1)—(7) несколько видоизменена, а именно в уравнениях (1)—(2) значение скорости химической реакции равно нулю, т. е. получим химически равновесную систему.

Система уравнений (1)—(7) с учетом значений чисел Дамколера (0; 1; ∞) решается известными численными методами с понижением порядка каждого дифференциального уравнения до первого, например методом Рунге — Кутты — Адамса или Рунге — Кутты — Мерсона, входящими в стандартное обеспечение ЭВМ.

Расчеты показали, что распределение параметров ($G_i, v_z, h, C_{j,e}$ и C_j) по длине секционированного плазмотрона имеет характерное отличие в зазорах секций, где наблюдаются скачкообразные их изменения.

Рассмотренные таким образом характеристики статики плазмотрона можно использовать для структурного исследования при аналитическом выражении переходного процесса, а также для статической и динамической оптимизации технологического плазмотрона. При такой оптимизации (статической и динамической) предусматривается нахождение

одного или нескольких режимов плазмотрона, обеспечивающих наиболее выгодную энерготехнологию процесса. Данные результаты могут быть также с успехом применены для анализа плазмохимических агрегатов.

Новомосковский филиал
Государственного научно-исследовательского
и проектного института азотной промышленности
и продуктов органического синтеза

Поступила в редакцию
3/III 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Яковлева Д. А. Экономические и региональные предпосылки развития многотонажных плазмохимических процессов в перспективный период. — В кн.: Тез. докл. Третьего Всесоюз. симпозиума по плазмохимии. М., Наука, 1979.
2. Борискин С. П., Девятов Б. Н., Левченко В. Ф. Научно-инженерный подход к проблеме моделирования и анализа динамики плазмотрона как технологического объекта. I. — Изв. СО АН СССР, 1980, № 3. Сер. техн. наук, вып. 1.
3. Семенов Н. Н. О некоторых проблемах химической кинетики и реакционной способности. М., Изд-во АН СССР, 1958.
4. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., Физматгиз, 1963.
5. Зельдович Я. Б., Садовников П. Я., Фран-Каменецкий Д. А. Окисление азота при горении. М., Изд-во АН СССР, 1947.
6. Ганз С. Н., Мельник А. П., Пархоменко В. Д. Плазма в химической технологии. Киев, Техника, 1969.
7. Ланин Ю. В. Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковом потоке газа. М., Физматгиз, 1970.
8. Гринзбург И. П. Трение и теплопередача при движении смеси газов. Л., ЛГУ, 1975.
9. Рождественский И. Б. Термодинамические и газодинамические свойства потока. — В кн.: Физическая газодинамика. М., ЭИИИ АН СССР, 1959.
10. Милн-Темсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. М., Мир, 1964.
11. Кларк Дж., Макческе М. Динамика реальных газов. М., Мир, 1967.
12. Борискин С. П. и др. Двумерная математическая модель плазмохимического реактора. — В кн.: Тез. докл. Второго Всесоюз. совещ. по плазмохимической технологии и аппаратостроению, т. II. М., 1977.
13. Предводителев А. С. и др. Таблицы термодинамических функций воздуха (для температур от 200 до 60000 К и давлений от 0,00001 до 100 атм). М., Изд-во АН СССР, 1962.
14. Предводителев А. С. и др. Таблицы термодинамических функций воздуха (для температур от 6000 до 12000 К и давлений от 0,001 до 1000 атм). М., Изд-во АН СССР, 1957.
15. Предводителев А. С. и др. Таблицы термодинамических функций воздуха (для температур от 1200 до 20000 К и давлений от 0,001 до 1000 атм). М., Изд-во АН СССР, 1959.

$T_0 = 1, P_0 = 1, H_{\varphi 0} = 0$; при $r = 1, T_0 = T_w$. Граничные условия по температуре позволяют определить постоянную E_{z0} .

Распишем систему уравнений (1) в проекциях на координатные оси и зададим малые, симметричные относительно z , возмущения функций. Линеаризуем полученную систему, пренебрегая членами с малыми параметрами A_1, A_2, A_3 после некоторых преобразований придем к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \rho_0 c_p (\partial \theta / \partial t + \partial T_0 / \partial r \cdot v) - \partial p / \partial t &= 2\sigma E_{z0} e_z + E_{z0}^2 d\sigma / dT_0 \theta, \\ \partial p / \partial r &= -\rho_0 \partial v / \partial t, \\ \partial p / \partial z &= -\rho_0 \partial w / \partial t, \\ \partial v / \partial r &= \partial (\theta / T_0 - p) / \partial t - (\rho_0^{-1} \partial \rho_0 / \partial r + r^{-1}) v - \partial w / \partial z, \\ \partial h_{\varphi} / \partial r &= \sigma e_z + E_{z0} d\sigma / dT_0 \cdot \theta - h_{\varphi} / r, \\ \partial h_{\varphi} / \partial z &= -\sigma e_r, \\ \partial e_z / \partial r &= \partial e_r / \partial z, \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения возмущений: θ — возмущение температуры, p — давления, v и w — радиальной и осевой составляющих скорости, e_r и e_z — радиальной и осевой составляющих напряженности электрического поля, h_{φ} — проекции напряженности собственного магнитного поля на ось φ .

Порядок системы (3) может быть понижен. Действительно, исключив e_r в двух последних уравнениях, эти два уравнения можно свести к одному. $\partial e_z / \partial r = -\sigma^{-1} \partial^2 h_{\varphi} / \partial z^2$.

В качестве начальных и граничных условий возьмем следующие: все функции равны нулю при $t \leq 0$, непроницаемость и неэлектропроводность стенки, постоянство температуры стенки и условие ограниченности функций. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} f(r, z, 0) = 0, \quad v(0, z, t) = h_{\varphi}(0, z, t) = \theta(1, z, t) = v(1, z, t) = 0, \\ v(r, 0, t) = \theta(r, 0, t) = 0, \quad p(r, L, t) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь параметр L — длина канала и, для краткости записи, через f обозначены все возмущения. В качестве возмущающей величины возьмем e_z и зададим ее в виде ступенчатой функции. Тогда в силу линейности задачи можно принять

$$e_z(r, 0, t) = 1. \quad (5)$$

Не будет принципиальной разницы, если в качестве возмущающей величины взять любую другую функцию, например, принять $v(1, 0, t) = 1$ и оставить условия (4). Это значит, что, начиная с момента $t = 0$, организована подача газа через узкую кольцевую щель при $z = 0$.

Следует отметить, что возмущение может быть задано распределенным по координате. Например, условием $v(1, z, t) = \Phi(z)$, где $\Phi(z)$ — произвольная заданная функция.

В данной работе в качестве примера рассматривается задача с условиями (4), (5). Итак, имеется система уравнений (3) в частных производных с начальными и граничными условиями (4), (5). Далее в решении задачи нами будет использован операторный метод Лапласа — Карсона и одновременно метод моментов, позволяющий в данном случае обойти трудности обратного преобразования для нахождения оригиналов.

Заменяем задачу отыскания решений сложной системы (3) другой задачей — нахождением инерционностей соответствующих переходных процессов, минуя прямое решение системы (3). Применяя операторный метод Лапласа, мы, однако, не будем (как это делается обычно) искать изображение функций. Такой подход очень ограничил бы наши возмож-

ности, так как при возврате к оригиналу нужно решение для изображения в общем виде. В противном случае задача сильно усложняется: приходится сначала искать численное решение для изображения как для функции комплексного переменного, а затем — численное обращение такого решения.

Как правило, основные общие уравнения динамики процессов, которые могут представлять интерес, имеют высокий порядок и не допускают решений в общем виде даже для изображений. Такова и система (3).

Поэтому после применения преобразования Лапласа — Карсона мы сразу же перейдем в полученных уравнениях к величинам, пропорциональным степенным моментам искомых функций. Это достигается последовательными операциями дифференцирования по q системы уравнений и подстановкой $q = 0$ в соответствии с известной формулой определения момента C_n порядка n для функции, изображения которой $F(q)$, т. е. $C_n = (-1)^n \partial^n F / \partial q^n |_{q=0}$.

Далее, аналогично изложенному выше, с помощью преобразования типа Лапласа на конечном интервале $(0, L)$ над полученными системами уравнений для временных моментов (инерционностей) перейдем к уравнениям относительно координатных моментов для каждой из инерционностей.

В итоге, определив из полученных систем уравнений необходимый набор величин моментов или инерционностей процесса, мы сможем с любой точностью восстановить приближенные аналитические представления передаточных и переходных функций. При этом для переходной функции мы воспользуемся разложениями либо по ортогональной системе полиномов Лагерра, либо по квазиортогональной системе некоторых специальных полиномов Каттериджа. Для представления передаточных функций используем ряды Бурмана — Лагранжа.

Применение к рассматриваемым функциям преобразования Лапласа — Карсона относительно переменной t дает $\tilde{f}(r, z, q) = q \int_0^{\infty} f(r, z, t) e^{-qt} dt$,

где q — комплексная переменная. В результате имеем соответствия $f(r, z, t) \rightarrow \tilde{f}(r, z, q)$, $\partial f(r, z, t) / \partial t \rightarrow q \cdot \tilde{f}(r, z, q)$ и сможем получить систему уравнений для изображений исходных функций.

Граничные условия для такой системы запишутся в следующем виде: $\tilde{v}(0, z, q) = \tilde{h}(0, z, q) = \theta(1, z, q) = \tilde{v}(1, z, q) = 0$, $\tilde{w}(r, 0, q) = \tilde{\theta}(r, 0, q) = \tilde{p}(r, L, q) = 0$, $\tilde{e}(r, 0, q) = 1$. Индексы φ и z при изображениях опущены.

Представим теперь функции \tilde{h} и \tilde{e} в виде сумм $\tilde{h} = \tilde{h}_- + \tilde{h}_+$ и $\tilde{e} = \tilde{e}_- + \tilde{e}_+$. Здесь \tilde{h}_- и \tilde{e}_- — значения функций при $z = 0$. Примем условно, что эти значения сохраняются и при $z < 0$.

Далее проведем преобразование относительно переменной z , подобное преобразованию Лапласа — Карсона, но на конечном интервале по z от 0 до L : $f(r, s, q) = s \int_0^L e^{-sz} \tilde{f}(r, z, q) dz$.

Тогда будут иметь место следующие соответствия: $\tilde{f}(r, z, q) \rightarrow f(r, s, q)$, $\partial \tilde{f}(r, z, q) / \partial z \rightarrow s[\tilde{f}(r, L, q) e^{-sL} - \tilde{f}(r, 0, q) + f(r, s, q)]$, $\partial^2 \tilde{f}(r, z, q) / \partial z^2 \rightarrow s\{e^{-sL} \partial \tilde{f}(r, z, q) / \partial z |_{z=L} - \partial \tilde{f}(r, z, q) / \partial z |_{z=0} + s[\tilde{f}(r, L, q) \times e^{-sL} - \tilde{f}(r, 0, q) + f(r, s, q)]\}$.

В результате получим систему уравнений для изображений по времени и координате, которая будет иметь вид

$$\begin{aligned} \rho_0 c_p (q\theta + T_0'v) - qp &= 2\sigma E_0 e + E_0^2 d\sigma / dT_0 \theta, \\ p' &= -\rho_0 qv, \\ s(p - P) &= -\rho_0 qw, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} v' &= q(\theta/T_0 - p) - (\rho_0^{-1}\rho_0^1 + r^{-1})v - s(e^{-sL}W + w), \\ \hat{h}' &= \sigma\hat{e} + E_0 d\sigma/dT_0 \cdot \theta - \hat{h}/r, \\ \hat{e}' &= s[e^{-sL}D_L - D_n + s(e^{-sL}H_L - H_n + h)]/\sigma_0. \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения: $P(r, q) = \tilde{p}(r, 0, q)$; $W(r, q) = w(r, L, q)$; $H_n(r, q) = \hat{h}(r, 0, q)$; $H_L(r, q) = \hat{h}(r, L, q)$; $D_n(r, q) = \partial\hat{h}(r, z, q)/\partial z|_{z=0}$; $D_L(r, q) = \partial\hat{h}(r, z, q)/\partial z|_{z=L}$; $\hat{e}(r, s, q) = e_-(q) + \hat{e}(r, s, q)$; $h(r, s, q) = h_-(r, q) + \hat{h}(r, s, q)$; e_- и h_- — изображения функций e и h по t при $z = 0$.

$$\text{Из граничных условий} \quad e_- = 1. \quad (7)$$

Учитывая граничные условия, функцию h_- можно определить из уравнения

$$dh_-/dr = \sigma e_- - h_-/r. \quad (8)$$

Для системы уравнений (6) с равенствами (7), (8) граничные условия будут нулевыми:

$$v(0, s, q) = h(0, s, q) = \theta(1, s, q) = v(1, s, q) = 0. \quad (9)$$

Далее находим инерционности функций, определяемых системой (6). Известно, что инерционность S функции f , имеющей изображение по Лапласу — Карсону $F(q)$, определяется [3] следующей формулой: $S_n = (-1)^n (n!)^{-1} \lim_{q \rightarrow 0} \partial^n F / \partial q^n$. При этом инерционности и моменты связаны соотношением $n!S_n = C_n$.

Преобразование Лапласа — Карсона по координате z на конечном интервале $(0, L)$ дает $s \int_0^L f(z) e^{-sz} dz = F_h(s, L)$. Тогда можно показать, что справедливы следующие соотношения:

$$\partial^n F_h(0, L) / \partial s^n = (-1)^n n! S_{kn} + (-1)^{n+1} L^n f(L), \quad S_{k0} = f(L).$$

Здесь $n!S_{kn} = C_{kn}$ есть момент функции на конечном интервале. Отсюда естественно назвать S_n ее инерционностью на этом конечном интервале $(0, L)$.

При дифференцировании по s преобразованной производной функции будут иметь место следующие выражения, если $F(sL) = s \int_0^L \partial f / \partial z e^{-sz} dz$, то $F(0, L) = 0$, $\partial F(0, L) / \partial s = f(L) - f(0)$, $\partial^n F(0, L) / \partial s^n = n[(-1)^{n-1} L^{n-1} f(L) - \partial^{n-1} F(0, L) / \partial s^{n-1}]$ при $n > 1$.

Отсюда получается выражение $\partial^n F(0, L) / \partial s^n$ через инерционность и крайнее значение $f(L)$: $\partial^n F(0, L) / \partial s^n = n(-1)^{n-1} [2L^{n-1} f(L) - n!S_{kn}]$. Унифицируем обозначение инерционностей, используя одну букву S с двумя индексами снизу (S_{ij}); $i, j = 0, 1, 2, \dots$. Индексами обозначим номера инерционностей: первым — инерционность по времени — по координате. При этом, предполагая функции f ограниченными, очевидно имеем $S_{i0} = 0$ при любом i .

Проводя операции дифференцирования системы (6) по параметрам q и s , используя приведенные выше соотношения, будем получать рекуррентные системы уравнений для последовательного нахождения временных и координатных инерционностей различных порядков.

Для определения инерционностей S_{01} (т. е. нулевых по времени и первых по координате) получим следующую систему:

$$\begin{aligned} \rho_0 c_p T_0' v_{01} &= 2\sigma E_0 e_{01} + E_0^2 d\sigma/dT_0 \theta_{01}, \\ p_{01}' &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{00} &= 0, \\ v_{01}' &= (\rho_0^{-1}\rho_0^1 + r^{-1})v_{01} + W_{00}N, \\ \hat{h}_{01}' &= \sigma\hat{e}_{01} + E_0 d\sigma/dT_0 \theta_{01} - \hat{h}_{01}/r, \\ \hat{e}_{01}' &= (D_{L00} - D_{n00})N/\sigma. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь N — множитель в формуле выражения инерционности. Вид граничных условий для этой системы, как и для последующих, не будет отличаться от выражения (9). Функции W_{00} , D_{L00} и D_{n00} представляют собой нулевые по времени инерционности на концах отрезка $0 - L$. Известно [4], что преобразование для $f(q)$ при $q \rightarrow 0$ эквивалентно преобразованию для $f(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Но указанные выше функции при $t \rightarrow \infty$ равны 0 и, таким образом, система (10) упрощается. Далее, решая систему (11), находим инерционности (1, 1):

$$\begin{aligned} \rho_0 c_p (\theta_{01} + T_0' v_{11}) - p_{01} &= 2\sigma E_0 e_{11} + E_0^2 d\sigma/dT_0 \theta_{11}, \\ p_{11}' &= -\rho_0 v_{01}, \\ \rho_0 w_{01} &= NP_{10}, \\ v_{11}' &= \theta_{01}/T_0 - p_{01} - (\rho_0^{-1}\rho_0^1 + r^{-1})v_{11} - W_{10}N, \\ \hat{h}_{11}' &= \sigma\hat{e}_{11} + E_0 d\sigma/dT_0 \theta_{11} - \hat{h}_{11}/r, \\ \hat{e}_{11}' &= (D_{L10} - D_{n10})N/\sigma. \end{aligned} \quad (11)$$

Затем, используя следующие ниже преобразования, перейдем (в первом приближении) к оригиналам, т. е. искомым функциям. Воспользуемся рядами Бурмана — Лагранжа, разложениями функций по ортогональной системе полиномов Лагерра и квазиортогональной системе полиномов Каттериджа [3, 5]. Полученные отсюда передаточные функции будут иметь вид

$$\begin{aligned} F(r, z, q) &\approx \sum_{n=0}^k d_n (q/(q + \lambda))^n, \quad d_n(r, z) = \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^{n-m} C_{n-1}^m \lambda^{n-m} S_{n-m}; \\ C_{n-1}^m &= (n-1)!/[m!(n-m-1)!]; \quad \lambda \approx S_{k-1}/S_k, \quad S_n = S_n(r, z); \\ S_n(r, z) &\approx \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j S_{nj} \Phi_j(z)/L^j, \quad \text{где } S_{nj} = S_{nj}(r) \text{ при } j \neq 0; \\ S_{n0} &= S_n(r, L). \end{aligned}$$

Функции Φ_j ($j = 0, 1, 2, \dots, n$) представляют собой специальную квазиортогональную систему полиномов [5]. Отсюда получается общее выражение переходной функции через полиномы Лагерра и Каттериджа:

$$f(r, z, t) \approx S_0 + e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^k d_n L_{n-1}(\lambda t),$$

где S_i , следовательно и $d_n(S_i)$, выражаются через полиномы $\Phi_j(z)$ с помощью найденных инерционностей S_{ij} . Граничные условия для искоемых функций f на концах отрезка $0 - L$ позволяют определить функции W , H_n и H_L .

Используя такую методику, можно определить последующие приближения искоемых функций. Инерционности (2, 1) находятся из следующей системы:

$$\begin{aligned} \rho_0 c_p (2\theta_{11} + T_0' v_{21}) - 2p_{11} &= 2\sigma E_0 e_{21} + E_0^2 d\sigma/dT_0 \theta_{21}, \\ p_{21}' &= -2\rho_0 v_{11}, \\ NP_{20}' &= -2\rho_0 w_{11}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} v'_{21} &= 2(\theta_{11}/T_0 - p_{11}) - (\rho_0^{-1}\rho'_0 + r^{-1})v_{21} - W_{20}N, \\ \tilde{h}'_{21} &= \sigma\tilde{e}_{21} + E_0 d\sigma/dT_0 \theta_{21} - \tilde{h}_{21}/r, \\ \tilde{e}_{21} &= (D_{L20} - D_{n20})N/\sigma. \end{aligned}$$

Переходя к функциям — оригиналам и используя граничные условия, получим искомые функции во втором приближении по времени и первом по координате. Аналогичные операции проводятся для инерционностей (1, 2) и (2, 2). Таким же способом, решая системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами относительно последующих инерционностей и используя изложенную выше методику, можно достичь желаемой точности в определении искомых функций $f(r, z, t)$. Как показали предварительные результаты, вполне приемлемую точность обеспечивает ограничение третьей инерционностью [1].

Таким образом, предложена методика решения линейной многомерной задачи динамики плазмы путем сведения ее к рекуррентным системам обыкновенных дифференциальных уравнений относительно обобщенных динамических характеристик дуги (инерционностей процесса). Использование преобразования типа Лапласа на конечном интервале $(0, L)$ позволяет представить решение в аналитическом виде по двум переменным (z, t) . По третьей переменной (r) , от которой зависят коэффициенты основных уравнений динамики и величина инерционностей, предусматривается численный счет задачи.

Институт теплофизики
СО АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
28/XII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Девятков Б. Н., Жуков М. Ф., Хайтман С. М. Постоянная времени дуги, инерционность процесса и линейная модель динамики плазмы.— Изв. СО АН СССР, 1980, № 3, Сер. техн. наук, вып. 1.
2. Жуков М. Ф., Коротеев А. С., Урюков Б. А. Прикладная динамика термической плазмы. Новосибирск, Наука, 1975.
3. Девятков Б. Н., Демиденко Н. Д., Охорзин В. А. Динамика распределенных процессов в технологических аппаратах, распределенный контроль и управление. Красноярск, Кн. изд-во, 1976.
4. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М., Высшая школа, 1965.
5. Каттеридж О. П. Применение специальной системы полиномов для приближенного вычисления переходной характеристики.— Тр. Первого конгресса IFAC, т. 1. М., Изд-во АН СССР, 1961.

УДК 536.244

Ю. А. СУРИНОВ, В. В. РУБЦОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ОСЛАБЛЯЮЩЕЙ СРЕДЫ В ИЗЛУЧАЮЩЕЙ СИСТЕМЕ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ДВУХ КОАКСИАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРОВ РАЗЛИЧНОЙ ДЛИНЫ

1. ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена применению обобщенного зонального метода [1—3] к численному решению и исследованию четвертой и пятой постановок задачи о лучистом теплообмене [4—6] в излучающей системе, состоящей из двух коаксиальных цилиндров различной длины, заполненной поглощающей и изотропно рассеивающей средой. Граничная поверхность F рассматриваемой излучающей системы (рис. 1) предполагается состоящей из шести зон

F_i ($F = \sum_{i=1}^6 F_i$): двух боковых поверхностей соответственно внутреннего и внешнего цилиндров (зоны F_2 и F_5) и их оснований (зоны F_1, F_3, F_4, F_6), которые принимаются серыми диффузно излучающими и отражающими, а также оптически и энергетически однородными с заданными отражательными способностями $R_i = 1 - A_i$; ($i = 1, 2, \dots, 6$) и обобщенными энергетическими характеристиками $E_{\alpha i}$ ($i = 1, 2, \dots, 6$). Кроме того, объем среды рассматривается как одна объемная зона V , для которой задаются коэффициенты объемного поглощения $\alpha(M) = \text{const}$ и рассеяния $\beta(M) = \text{const}$, а также плотность объемного результирующего излучения $\eta_{\text{рез}}(M) = \text{const}$.

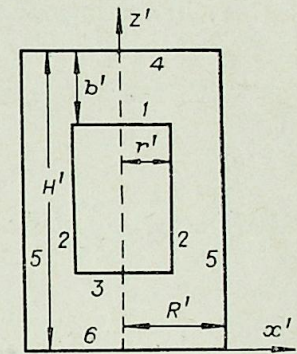


Рис. 1. Схема излучающей системы.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваемые постановки задачи заключаются в определении температурного поля среды, причем в случае четвертой постановки задачи определяется также поле значений поверхностной плотности результирующего излучения для всех граничных зон F_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) при условии задания поля температур всюду на границе системы (т. е. $E_{\alpha i} = E_{c, i}$; $i = 1, 2, \dots, 6$). Пятая постановка задачи характеризуется смешанными заданиями граничных условий, которые отличаются от граничных условий для четвертой постановки заданием для зон F_5 и F_6 результирующих лучистых потоков $Q_{\text{рез. } 5} = E_{\text{рез. } 5} F_5$, $Q_{\text{рез. } 6} = E_{\text{рез. } 6} F_6$ вместо температур. Итак, в этом случае имеем $E_{\alpha i} = E_{c, i}$ ($i = 1, 2, 3, 4$); $E_{\alpha i} = -E_{\text{рез. } i}$ ($i = 5, 6$). При этом требуется определить поле температур для граничных зон F_5 и F_6 и для зон F_1, F_2, F_3, F_4 поле значений плотности

результатирующего излучения.* Наряду с температурным полем по объему среды для каждой из двух постановок задачи требуется определить векторное поле сферического вектора излучения $\vec{E}_{A\pi}(M)$ ($M \in V$), а также распределение температурных скачков на границах системы [9].

Как известно, пространственная плотность падающего излучения терпит разрыв непрерывности на границе излучающей системы как потенциал двойного слоя [9], соответственно и температура среды, которая определяется через пространственную плотность падающего излучения, терпит на границе системы разрыв непрерывности. Впервые интегральное уравнение, описывающее распределение скачков пространственной плотности падающего излучения на границе системы, получено в работе [9]. Однако в данной работе для численного выражения распределения температурных скачков используется другой подход, опирающийся на применение нового обобщенного зонального метода [1–3], который позволяет определять температурное поле среды.

3. ОСНОВНЫЕ РАСЧЕТНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Для определения локальных и осредненных энергетических характеристик лучистого теплообмена используются следующие расчетные выражения, представленные в безразмерном виде [1–3].

1. Для четвертой постановки задачи

$$\theta_{\text{рез}}(M_i) = A_i \left[\sum_{h=1}^6 A_h \theta_{hi} \Pi(M_i, F_h) - \frac{q_{\text{рез}}}{4} \tilde{\mathfrak{A}}(M_i, V) \right]; \quad (1)$$

$(M_i \in F_i; i = 1, 2, \dots, 6);$

$$\theta(M) = \frac{1}{4} \left\{ \sum_{h=1}^6 A_h \theta_{hi} \Pi^{(1)}(M, F_h) - \left[1 + \frac{1}{4} \tilde{\mathfrak{A}}^{(1)}(M, V) \right] \cdot q_{\text{рез}} \right\}; \quad (M \in V); \quad (2)$$

$$\theta_{\text{рез } i} = A_i \left[\sum_{h=1}^6 A_h \theta_{hi} \Pi_{ih} - \frac{q_{\text{рез}}}{4} \tilde{\mathfrak{A}}_i(V) \right]; \quad (i = 1, 2, \dots, 6); \quad (3)$$

$$\theta(V) = \frac{1}{4} \left\{ \sum_{h=1}^6 A_h \theta_{hi} \Pi^{(1)}(V, F_h) - \left[1 + \frac{1}{4} \tilde{\mathfrak{A}}^{(1)}(V) \right] \cdot q_{\text{рез}} \right\}; \quad (4)$$

где

$$\theta_{\text{рез}}(M_i) = \frac{E_{\text{рез}}(M_i)}{\sigma_0(T_1^4 - T_4^4)}; \quad \theta(M) = \frac{T^4(M) - T_1^4}{T_1^4 - T_4^4}; \quad q_{\text{рез}} = \frac{\eta_{\text{рез}}}{\alpha \sigma_0(T_1^4 - T_4^4)}; \quad (5)$$

$$\theta_{\text{рез } i} = \frac{E_{\text{рез } i}}{\sigma_0(T_1^4 - T_4^4)}; \quad \theta(V) = \frac{T^4(V) - T_1^4}{T_1^4 - T_4^4}; \quad \theta_{hi} = \frac{T_h^4 - T_i^4}{T_1^4 - T_4^4}; \quad (6)$$

2. Для пятой постановки задачи

$$\theta_{\text{рез}}(M_i) = A_i \left[\sum_{h=1}^4 A_h \theta_{hi} \Pi(M_i, F_h) - \sum_{h=5}^6 \theta_{\text{рез } h} \Pi(M_i, F_h) - \frac{q_{\text{рез}}}{4} \tilde{\mathfrak{A}}(M_i, V) \right]; \quad (M_i \in F_i; i = 1, 2, 3, 4); \quad (7)$$

* Систематическое численное определение и исследование локальных характеристик лучистого теплообмена в излучающей системе, состоящей из пары коаксиальных цилиндров конечной одинаковой длины, дано в работах [7, 8].

$$\theta(M_i) = \sum_{h=1}^4 A_h \theta_{hi} \Pi(M_i, F_h) - \sum_{h=5}^6 \theta_{\text{рез } h} \Pi(M_i, F_h) - \frac{\theta_{\text{рез } i}}{A_i} - \frac{q_{\text{рез}}}{4} \tilde{\mathfrak{A}}(M_i, V); \quad (M_i \in F_i; i = 5, 6); \quad (8)$$

$$\theta(M) = \frac{1}{4} \left\{ \sum_{h=1}^4 A_h \theta_{hi} \Pi^{(1)}(M, F_h) - \sum_{h=5}^6 \theta_{\text{рез } h} \Pi^{(1)}(M, F_h) - \left[1 + \frac{1}{4} \tilde{\mathfrak{A}}^{(1)}(M, V) \right] q_{\text{рез}} \right\}; \quad (9)$$

$$\theta_{\text{рез } i} = A_i \left[\sum_{h=1}^4 A_h \theta_{hi} \Pi_{ih} - \sum_{h=5}^6 \theta_{\text{рез } h} \Pi_{ih} - \frac{q_{\text{рез}}}{4} \tilde{\mathfrak{A}}_i(V) \right]; \quad (i = 1, 2, 3, 4); \quad (10)$$

$$\theta_{i1} = \sum_{h=1}^4 A_h \theta_{hi} \Pi_{ih} - \sum_{h=5}^6 \theta_{\text{рез } h} \Pi_{ih} - \frac{\theta_{\text{рез } i}}{A_i} - \frac{q_{\text{рез}}}{4} \tilde{\mathfrak{A}}_i(V); \quad (i = 5, 6); \quad (11)$$

$$\theta(V) = \frac{1}{4} \left\{ \sum_{h=1}^4 A_h \theta_{hi} \Pi^{(1)}(V, F_h) - \sum_{h=5}^6 \theta_{\text{рез } h} \Pi^{(1)}(V, F_h) - \left[1 + \frac{1}{4} \tilde{\mathfrak{A}}^{(1)}(V) \right] \cdot q_{\text{рез}} \right\}; \quad (12)$$

где

$$\theta(M_i) = \frac{T^4(M_i) - T_1^4}{T_1^4 - T_4^4}; \quad \theta_{i1} = \frac{T_i^4 - T_1^4}{T_1^4 - T_4^4}. \quad (6a)$$

Для вычисления разрешающих характеристик лучистого теплообмена $\Pi(M_i, F_h)$, $\Pi^{(1)}(M, F_h)$, $\tilde{\mathfrak{A}}(M_i, V)$, $\tilde{\mathfrak{A}}^{(1)}(M, V)$, Π_{ih} , $\Pi^{(1)}(V, F_h)$, $\tilde{\mathfrak{A}}_i(V)$ и $\tilde{\mathfrak{A}}^{(1)}(V)$, содержащихся в выражениях (1)–(4) и (7)–(12), воспользуемся второй формой представления обобщенного зонального метода Ю. А. Суринова [1–3], в основе которой лежат обобщенные системы линейных алгебраических уравнений и выражений

$$\Pi_{ih} - \sum_{j=1}^6 \tilde{R}_j \Psi_{jh} \Pi_{ij} - \frac{1}{4(1-p)} \psi^{(1)}(V, F_h) \tilde{\mathfrak{A}}_i(V) = \psi_{ih}; \quad (i, k = 1, 2, \dots, 6); \quad (13)$$

$$\frac{1}{1-p} \left[1 - \frac{1}{4} A^{(1)}(V) \right] \tilde{\mathfrak{A}}_i(V) - \sum_{h=1}^6 \tilde{R}_h A_h(V) \Pi_{ih} = A_i(V); \quad (i = 1, 2, \dots, 6); \quad (14)$$

$$\Pi^{(1)}(V, F_k) - \sum_{j=1}^6 \tilde{R}_j \Psi_{jh} \Pi^{(1)}(V, F_j) - \frac{1}{4(1-p)} \psi^{(1)}(V, F_k) \tilde{\mathfrak{A}}^{(1)}(V) = \psi^{(1)}(V, F_k); \quad (k = 1, 2, \dots, 6); \quad (15)$$

$$\frac{1}{1-p} \left[1 - \frac{1}{4} A^{(1)}(V) \right] \tilde{\mathfrak{A}}^{(1)}(V) - \sum_{h=1}^6 \tilde{R}_h A_h(V) \Pi^{(1)}(V, F_h) = A^{(1)}(V); \quad (16)$$

$$\Pi(M_i, F_h) = \psi(M_i, F_h) + \sum_{j=1}^6 \tilde{R}_i \Pi_{jh} \psi(M_i, F_j) + \frac{1}{4} \Pi^{(1)}(V, F_h) A(M_i, V); \quad (M_i \in F_i; i, k = 1, 2, \dots, 6); \quad (17)$$

$$\tilde{\mathfrak{X}}(M_i, V) = \left[1 - p + \frac{1}{4} \tilde{\mathfrak{X}}^{(1)}(V) \right] A(M_i, V) + \sum_{k=1}^6 \tilde{R}_k \tilde{\mathfrak{X}}_k(V) \psi(M_i, F_k);$$

$$(M_i \in F_i; \quad i = 1, 2, \dots, 6); \quad (18)$$

$$\Pi^{(1)}(M, F_k) = \psi^{(1)}(M, F_k) + \sum_{j=1}^6 \tilde{R}_j \Pi_{jk} \psi^{(1)}(M, F_j) +$$

$$+ \frac{1}{4} \Pi^{(1)}(V, F_k) A^{(1)}(M, V); \quad (M \in V); \quad (19)$$

$$\tilde{\mathfrak{X}}^{(1)}(M, V) = \left[1 - p + \frac{1}{4} \tilde{\mathfrak{X}}^{(1)}(V) \right] A^{(1)}(M, V) + \sum_{k=1}^6 \tilde{R}_k \tilde{\mathfrak{X}}_k(V) \psi^{(1)} \times$$

$$\times (M, E_k); \quad (M \in V); \quad (20)$$

где $p = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$; $\tilde{R}_i = R_i$; ($i = 1, 2, \dots, 6$) — для четвертой постановки задачи и $\tilde{R}_i = R_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) и $\tilde{R}_i = 1$ ($i = 5, 6$) — для пятой постановки задачи. Заметим, что величины $\Pi(M_i, F_k)$, $\Pi^{(1)}(M, F_k)$, Π_{ik} и $\Pi^{(1)}(V, F_k)$, удовлетворяют также уравнениям замкнутости вида [1–6]:

$$\sum_{k=1}^6 \tilde{A}_k \Pi(M_i, F_k) = 1; \quad (M_i \in F_i; \quad i = 1, 2, \dots, 6);$$

$$\sum_{k=1}^6 \tilde{A}_k \Pi^{(1)}(M, F_k) = 4; \quad (M \in V); \quad (21)$$

$$\sum_{k=1}^6 \tilde{A}_k \Pi_{ik} = 1; \quad (i = 1, 2, \dots, 6); \quad \sum_{k=1}^6 \tilde{A}_k \Pi^{(1)}(V, F_k) = 4, \quad (22)$$

с помощью которых осуществлялась проверка результатов расчета указанных разрешающих характеристик лучистого теплообмена.

Используя далее третью форму представления обобщенного зонального метода [1, 3], получаем следующее расчетное выражение, определяющее безразмерный сферический вектор излучения $\vec{\theta}_{4\pi}(M)$:

$$\vec{\theta}_{4\pi}(M) = \sum_{k=1}^6 \left[\frac{1 - A_k}{A_k} \theta_{\text{рез } k} + \theta_{k1} - \frac{p \cdot q_{\text{рез}}}{4} - \frac{\theta(V)}{4} \right] \cdot \vec{\psi}_*(M, F_k); \quad (M \in V); \quad (23)$$

где

$$\vec{\theta}_{4\pi}(M) = \frac{\vec{E}_{4\pi}(M)}{\sigma_0 (T_1^4 - T_4^4)}. \quad (24)$$

Зная распределение температур на границе F и по объему V рассматриваемой излучающей системы, легко определить температурные скачки $\Delta\theta(M_i)$ на границе системы с помощью выражений вида

$$\Delta\theta(M_i) = \theta_{\text{пр}}(M_i) - \theta_{i1} = \frac{T_{\text{пр}}^4(M_i) - T_i^4}{T_1^4 - T_4^4}; \quad (M_i \in F_i; \quad i = 1, 2, \dots, 6); \quad (25)$$

(для четвертой постановки задачи),

$$\Delta\theta(M_i) = \theta_{\text{пр}}(M_i) - \theta_{i1} = \frac{T_{\text{пр}}^4(M_i) - T_i^4}{T_1^4 - T_4^4}; \quad (M_i \in F_i; \quad i = 1, 2, 3, 4); \quad (26)$$

$$\Delta\theta(M_i) = \theta_{\text{пр}}(M_i) - \theta(M_i) = \frac{T_{\text{пр}}^4(M_i) - T^4(M_i)}{T_1^4 - T_4^4}; \quad (M_i \in F_i; \quad i = 5, 6);$$

(для пятой постановки задачи), где $\theta_{\text{пр}}(M_i) = \lim_{M \rightarrow M_i} \theta(M)$; ($M \in V$; $M_i \in F_i$; $i = 1, 2, \dots, 6$).

Из систем линейных алгебраических уравнений и выражений (13)–(20), (23) видно, что расчет разрешающих характеристик лучистого теплообмена связан с необходимостью предварительного определения обобщенных локальных $\psi(M_i, F_k)$ и средних ψ_{ik} угловых коэффициентов излучения, обобщенных локальных $\pi\psi^{(1)}(M, F_k)$ и средних $\pi\psi^{(1)}(V, F_k)$ ослабляющих способностей среды и оптико-геометрических векторов излучения $\vec{\psi}_*(M, F_k)$. Величины $\psi(M_i, F_k)$, $\psi^{(1)}(M, F_k)$, $\vec{\psi}_*(M, F_k)$, ψ_{ik} определяются с помощью приближенной методики, предложенной в работе [10], с использованием полученных в [11–14] расчетных формул и выражений для соответствующих геометрических характеристик излучения. Вычисление обобщенных средних телесных углов $\pi\psi^{(1)}(V, F_k)$ осуществлялось на основании приближенных соотношений вида

$$\psi^{(1)}(V, F_k) \approx \frac{2 \cdot S}{H - r^2(H - 2b)} \sum_i \sum_j \frac{\rho_{i-1} + \rho_i}{2} \psi^{(1)}(M_{ij}, F_k); \quad (k = 1, 2, \dots, 6); \quad (27)$$

где $H = H'/R'$; $r = r'/R'$; $b = b'/R'$; $\rho = x'/R'$; $z = z'/R'$; $M_{ij} = \left(\frac{\rho_{i-1} + \rho_i}{2}; \frac{z_{j-1} + z_j}{2} \right)$; $\rho_0 = 0$; $\rho_1 = h_\rho$; $\rho_2 = 2h_\rho$; ...; $\rho_L = Lh_\rho = 1$; $z_0 = 0$; $z_1 = h_z$; $z_2 = 2h_z$; ...; $z_N = Nh_z = H$; $S = h_\rho \cdot h_z$, а суммирование в (27) ведется по тем индексам i, j , для которых $M_{ij} \in V$. Кроме того, для определения локальных и средних ослабляющих способностей среды имеем следующие уравнения замкнутости:

$$A(M_i, V) = 1 - \sum_{k=1}^6 \psi(M_i, F_k); \quad A^{(1)}(M, V) = 4 - \sum_{k=1}^6 \psi^{(1)}(M, F_k); \quad (28)$$

$$A_i(V) = 1 - \sum_{k=1}^6 \psi_{ik}; \quad A^{(1)}(V) = 4 - \sum_{k=1}^6 \psi^{(1)}(V, F_k). \quad (29)$$

4. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для излучающей системы рассматриваемого типа численные исследования всех основных энергетических характеристик лучистого теплообмена и граничных температурных скачков были выполнены на основании соотношений (1)–(26) с использованием ЭВМ ЕС-1020. При этом геометрические размеры системы H, r, b и отражательные способности R_i зон F_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) полагались фиксированными и соответственно равными: $H = 4,0$; $r = 0,6$; $b = 0,8$; $R_1 = 0,2$; $R_2 = 0,0$; $R_3 = 0,3$; $R_4 = 0,0$; $R_5 = 0,1$; $R_6 = 0,0$.

Четвертая постановка задачи. В случае указанной постановки задачи численные исследования энергетических характеристик лучистого теплообмена производились при следующих значениях безразмерных температур θ_{1i} зон F_i : $\theta_{11} = 0,0$; $\theta_{12} = 4,0$; $\theta_{13} = 0,0$; $\theta_{14} = 1,0$; $\theta_{15} = 3,0$; $\theta_{16} = 2,0$. Кроме того, поле излучения предполагалось несоленоидальным ($q_{\text{рез}} > 0$). Указанные исходные значения θ_{1i} и $q_{\text{рез}}$ выбирались из условий $T_1 > T_2$; $T_1 = T_3$; $T_1 > T_4$; $T_1 > T_5$; $T_1 > T_6$; $T_1 \geq T(M)$, откуда следует, что $\eta_{\text{рез}} > 0$.

На рис. 2,3 приведены зависимости безразмерных поверхностных плотностей результирующего излучения $\theta_{\text{рез}}(M_i)$ от соответствующих ко-

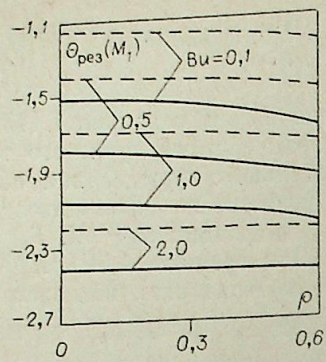


Рис. 2. Зависимости $\theta_{рез}(M_1)$ от координаты ρ точки M_1 при различных значениях числа Бугера. ——— четвертая постановка задачи; - - - пятая постановка задачи.

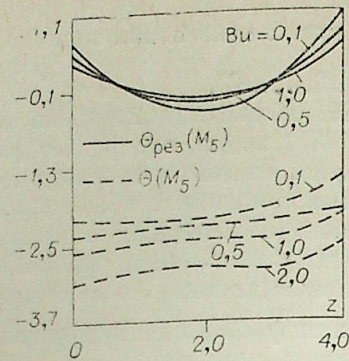


Рис. 3. Зависимости $\theta_{рез}(M_5)$ (четвертая постановка задачи) и $\theta(M_5)$ (пятая постановка задачи) от координаты z точки M_5 при различных значениях числа Бугера.

ординат точек M_i ($M_i \in F_i$; $i = 1, 5$) при различных значениях числа Бугера и для величин p и $q_{рез}$, удовлетворяющих соотношению $(1-p)q_{рез} = 0,5$. Из представленных графиков видно, что $\theta_{рез}(M_1)$ ($M_1 \in F_1$) монотонно убывает при перемещении точки M_i от центра соответствующей зоны F_i к ее границе, а $\theta_{рез}(M_5)$ монотонно убывают при увеличении координаты z точки M_5 , достигая минимума при $z = 2,0$, а затем монотонно возрастают. Далее, из рис. 2 видно, что большим значениям числа Бугера соответствуют меньшие значения величины $\theta_{рез}(M_1)$.

Результаты численных исследований зависимостей температуры среды $\theta(M)$ и проекций $\theta_{4\pi x}(M)$ и $\theta_{4\pi z}(M)$ сферического вектора излучения от координат ρ и z точки M для $Bi = 0,5$; $p = 0,5$ и $q_{рез} = 1,0$ представлены в графической форме на рис. 4, 5. Из приведенных графиков, в частности, следует, что для рассматриваемых значений $z \in (0,0; 0,8)$ и $z \in (3,2; 4,0)$ температура среды $\theta(M)$ является убывающей функцией, а для $z \in (0,8; 3,2)$ — возрастающей функцией координаты ρ , причем предельные значения $\theta(M)$ в точках, принадлежащих боковой поверхности внешнего цилиндра, при $z \in (0,0; 0,8)$ и $z \in (3,2; 4,0)$ меньше, а при $z \in (0,8; 3,2)$ больше соответствующих предельных значений для точек, принадлежащих боковой поверхности внутреннего цилиндра. Из соотношений (1) и (2), кроме того, видно, что большим значением величины $(1-p)q_{рез}$ соответствуют меньшие значения величин $\theta_{рез}(M_i)$ и $\theta(M)$. В частности, при фиксированных значениях числа Бугера Bi и безразмерной плотности объемного результирующего излучения $q_{рез} > 0$ большому значению коэффициента рассеяния β соответствуют большие значения $\theta_{рез}(M_i)$ и $\theta(M)$.

Представленные на рис. 3 зависимости $\theta_{4\pi x}(M)$ и $\theta_{4\pi z}(M)$ от соответствующих координат ρ и z точки M показывают, что в точках, принадлежащих оси симметрии системы $\theta_{4\pi x}(M) = 0$, вектор $\theta_{4\pi}(M)$ направлен по оси симметрии. Далее из рис. 5 видно, что в точках, принадлежащих зоне F_2 , величина $|\theta_{4\pi z}(M)|$ мала по

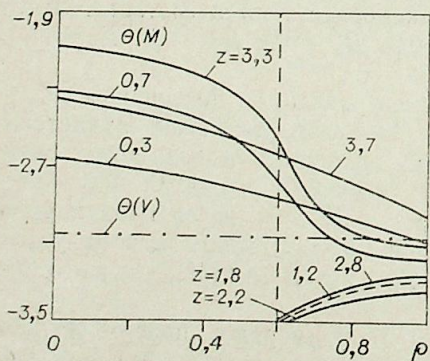


Рис. 4. Зависимости $\theta(M)$ от координат ρ и z точки M (четвертая постановка задачи).

Рис. 5. Зависимости $\theta_{4\pi x}(M)$ и $\theta_{4\pi z}(M)$ от координат ρ и z точки M (четвертая постановка задачи).

сравнению с $|\theta_{4\pi x}(M)|$ и, следовательно, на боковой поверхности внутреннего цилиндра направление вектора $\theta_{4\pi}(M)$ мало отличается от направления нормали к данной поверхности.

Для указанных выше значений безразмерных температур θ_{i1} зон F_i при $Bi = 0,5$ и $p = 0,5$ были получены распределения температурных скачков $\Delta\theta(M_i)$ на границах рассматриваемой излучающей системы для соленоидального ($q_{рез} = 0$) и несоленоидального ($q_{рез} = 1,0$) полей излучения. Из полученных результатов, представленных в виде графических зависимостей на рис. 7, следует, что $\Delta\theta(M_2) > 0$ ($M_2 \in F_2$), а $\Delta\theta(M_5) \geq 0$ ($M_5 \in F_5$) для $q_{рез} = 0$, и меняет знак для $q_{рез} = 1,0$ при $z = 3,6$. Кроме того, кривые, изображающие зависимости $\Delta\theta(M_i)$ от координат точек M_i , в случае несоленоидального поля излучения располагаются ниже соответствующих кривых для соленоидального поля излучения.

Пятая постановка задачи. Результаты численных исследований энергетических характеристик лучистого теплообмена для рассматриваемой постановки задачи представлены на рис. 2, 3, 6, 7. Приведенные зависимости были получены при заданном $q_{рез} > 0$ (несоленоидальное поле излучения) для следующих исходных значений граничных энергетических характеристик излучения: $\theta_{11} = 0,0$; $\theta_{12} = 2,0$; $\theta_{13} = 0,0$; $\theta_{14} = 1,0$; $\theta_{рез,5} = 0,1$; $\theta_{рез,6} = 0,5$. При этом выбор указанных значений $q_{рез}$, θ_{i1} ($i = 1, 3, 4, 6$) и $\theta_{рез,i}$ ($i = 5, 6$) осуществлялся на основании условий $T_1 > T_2$; $T_1 = T_3$; $T_1 > T_4$; $T_1 \geq T(M_5)$; $T_1 \geq T(M_6)$; $T_1 \geq T(M)$.

На рис. 2, 3 приведены графические зависимости безразмерной поверхностной плотности результирующего излучения $\theta_{рез}(M_1)$ ($M_1 \in F_1$) и безразмерной температуры $\theta(M_5)$ ($M_5 \in F_5$) от соответствующих коор-

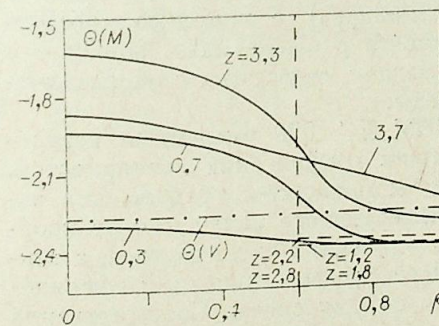


Рис. 6. Зависимости $\theta(M)$ от координат ρ и z точки M (пятая постановка задачи).

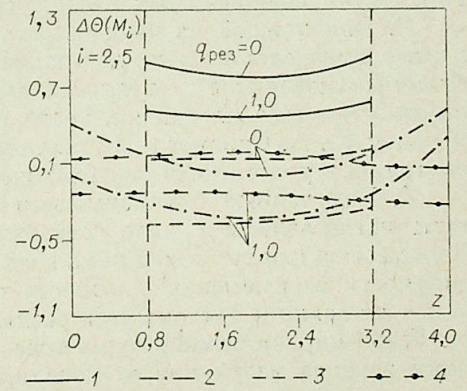
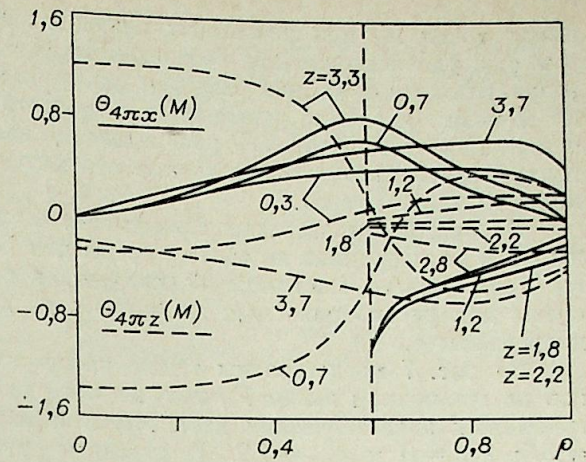


Рис. 7. Распределения безразмерных температурных скачков $\Delta\theta(M_i)$ по зонам F_i ($i = 2, 5$). 1, 2 — четвертая постановка задачи; 3, 4 — пятая постановка задачи.

динат точек M_i при различных значениях числа Бугера для значений p и $q_{\text{рез}}$, удовлетворяющих соотношению $(1-p)q_{\text{рез}} = 0,5$. Из полученных результатов следует, что большим значениям числа Бугера соответствуют меньшие значения определяемых энергетических характеристик излучения, причем для зоны F_1 распределение значений поверхностной плотности результирующего излучения стремится к равномерному при увеличении числа Бугера.

На рис. 6 представлены зависимости безразмерной температуры среды $\theta(M)$ от координат по объему среды для $Bu = 0,5$; $p = 0,5$ и $q_{\text{рез}} = 1,0$. Из приведенных зависимостей следует, в частности, что температура среды для рассматриваемых значений z является убывающей функцией координаты ρ .

На рис. 7 представлены также распределение температурных скачков по граничным зонам F_i , полученные для указанных выше значений граничных энергетических характеристик излучения при $Bu = 0,5$; $p = 0,5$; $q_{\text{рез}} = 0$ и $q_{\text{рез}} = 1,0$. Полученные результаты показывают, что скачки $\Delta\theta(M_i)$ ($M_i \in F_i$; $i = 2, 5$) сохраняют знаки в пределах соответствующих зон F_i при этом, как и в случае четвертой постановки задачи, полученные кривые для несолоноидального поля излучения располагаются ниже соответствующих кривых для соленоидального поля излучения.

ВЫВОДЫ

1. Дано применение второй и третьей форм обобщенного зонального метода Ю. А. Суринова [1—3] к численному решению и исследованию соответственно, четвертой и пятой постановок сложной пространственной задачи [4—6], связанных с определением температурного поля ослабляющей среды, заполняющей излучающую систему, ограниченную парой коаксиальных цилиндров различной длины.

2. Наряду с определением температурного поля среды произведено численное исследование всех основных локальных граничных и внутренних характеристик излучения и, в частности, поля значений проекций сферического вектора излучения, а также поля значений поверхностной плотности результирующего излучения на граничной поверхности системы для четвертой постановки задачи и поля температур на боковых поверхностях коаксиальных цилиндров в случае пятой постановки задачи.

3. Для каждой из двух рассмотренных постановок задачи дано численное определение и исследование температурных скачков на границе системы (поверхности коаксиальных цилиндров) с помощью простого вычислительного алгоритма, тесно связанного с обобщенным зональным методом Ю. А. Суринова для постановок задачи, связанных с определением температурного поля ослабляющей среды.

4. Полученные с использованием ЭВМ ЕС-1020 численные результаты представлены в виде соответствующих графических зависимостей. В частности, для четвертой постановки задачи приводятся графические зависимости безразмерной плотности результирующего излучения от координат на границе системы при различных значениях числа Бугера, а также безразмерной температуры ослабляющей среды и проекций сферического вектора излучения от координат по объему среды. Соответственно при рассмотрении пятой постановки задачи приводятся графические зависимости безразмерной температуры среды, а также зависимости безразмерных температур и поверхностных плотностей результирующего излучения от координат для соответствующих зон граничной поверхности излучающей системы.

5. Результаты численных расчетов и исследований температурных скачков на границе системы представлены по каждой из двух рассмотренных постановок задачи в виде графических зависимостей как для соленоидального, так и несолоноидального полей излучения.

Московский экономико-статистический институт

Поступила в редакцию 23/IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Суринов Ю. А. Обобщенный зональный метод исследования и расчета лучистого теплообмена в поглощающей и рассеивающей среде.— Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт, 1975, № 4.
2. Суринов Ю. А. Обобщенный зональный метод исследования и расчета лучистого теплообмена в поглощающей и рассеивающей среде.— Изв. СО АН СССР, 1977, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.
3. Суринов Ю. А. Применение обобщенного зонального метода к решению конкретных задач теории лучистого теплообмена, связанных с определением температурного поля поглощающей и рассеивающей среды.— В кн.: Теория и методы расчета лучистого теплообмена. М., Наука, 1976.
4. Суринов Ю. А. К теории переноса излучения и лучистого теплообмена в поглощающей и рассеивающей среде.— Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт, 1966, № 6.
5. Суринов Ю. А. Интегральные уравнения теории переноса излучения в поглощающей и анизотропно рассеивающей среде.— Теплофизика высоких температур, 1967, т. 5, № 2.
6. Суринов Ю. А. Современное состояние и перспективы развития теории и методов расчета лучистого теплообмена в тепловых устройствах.— Тр. Краснодар. политехн. ин-та, вып. 53. Краснодар, 1973.
7. Суринов Ю. А., Хорольский С. В. Численное исследование локальных характеристик излучения для пары коаксиальных цилиндров конечной длины.— Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1969, № 2.
8. Суринов Ю. А., Хорольский С. В. Исследование и расчет локальных характеристик лучистого теплообмена для концентрических цилиндров конечной длины.— Изв. СО АН СССР, 1968, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.
9. Суринов Ю. А. Лучистый теплообмен при наличии поглощающей и рассеивающей среды.— Изв. АН СССР. ОТН, 1952, № 9, 10.
10. Суринов Ю. А., Киселева Е. С. Перенос излучения и лучистый теплообмен в цилиндрической камере конечной длины, заполненной поглощающей средой.— Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1971, № 6.
11. Рубцов В. В., Суринов Ю. А. Расчетные формулы, определяющие угловые коэффициенты излучения для пары коаксиальных цилиндров разной длины.— В кн.: Теория и методы расчета лучистого теплообмена. М., Наука, 1976.
12. Рубцов В. В. Об угловых коэффициентах излучения для пары коаксиальных цилиндров различной длины.— Там же.
13. Суринов Ю. А., Рубцов В. В. Исследование и определение угловых коэффициентов излучения для пары коаксиальных цилиндров конечной, но разной длины.— Инж. физ. журнал, 1976, т. 31, № 5.
14. Рубцов В. В. Определение телесных углов в замкнутой излучающей системе ограниченной парой коаксиальных цилиндров конечной, но разной длины.— В кн.: Методы вычислительной математики и их применение. М., МЭСИ, 1975.

УДК 662.987 : 536.247

Ю. С. БОРЧЕВШИН, Б. П. КОРОЛЬКОВ

ДИНАМИКА ТЕПЛООБМЕННИКА
С НЕЗАВИСИМЫМ ОБОГРЕВОМ
ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПЛОТНОСТИ
ТЕПЛОВОГО ПОТОКА ПО КООРДИНАТЕ

Лучевоспринимающие поверхности нагрева топочных экранов парогенераторов на органическом топливе и каналы ядерных реакторов могут быть отнесены к типу теплообменников с независимым обогревом. В таких теплообменниках реальная эпюра распределения теплового потока неравномерна относительно осевой координаты z каналов. С целью упрощения динамических расчетов зависимость $q(z)$, как правило [1], усредняется.

Попытки учета влияния неравномерности распределения плотности теплового потока на динамику процессов предприняты в работах [2—4]. В работе [2] для синусоидального закона $q(z)$ решение получено в громоздкой интегральной форме, его анализ и выделение определяющих факторов чрезвычайно затруднены. В [4] анализировались динамические свойства теплообменника со сверхкритическими параметрами теплоносителя в частотной области и только для линейного закона изменения теплоподвода по координате. Влияние неравномерности на динамику теплоподвода установлено, однако сделан вывод о возможности усреднения закона $q(z)$.

В данной работе рассматривается математическая модель динамических процессов в теплообменнике с однофазным несжимаемым теплоносителем в достаточно общей постановке произвольного закона изменения плотности теплового потока по координате. Анализ разгонных характеристик, полученных для конкретных законов $q(z)$ (линейного и синусоидального), позволил установить физическую природу влияния

неравномерности пространственного распределения плотности теплового потока на инерционные свойства теплообменника.

Для произвольного закона изменения плотности теплового потока по координате (рис. 1) можно записать

$$q(z) = q_1 + \gamma(z). \quad (1)$$

Здесь $\gamma = \gamma(z)$ — переменная составляющая плотности теплового потока. Тогда

$$\Delta q(z) = \Delta q_1 + \Delta \gamma(z), \quad (2)$$

где $\Delta q_1 = q_1 - q_{10}$, $\Delta \gamma = \gamma - \gamma_0$.

Параметры исходного стационарного режима $t_0(z)$ и $\theta_0(z)$ найдем, решив

соответствующую систему уравнений

$$D_{B0} C_B \frac{dt_0}{dz} = q_0(z) = \alpha_{B0} h_B (\theta_0 - t_0). \quad (3)$$

Интегрирование по z первого из уравнений (3) с использованием (1) дает законы стационарного распределения температур

$$t_0 = t_{10} + \frac{q_{10}}{D_{B0} C_B} z + \frac{1}{D_{B0} C_B} \int_0^z \gamma_0(z) dz, \quad \theta_0 = t_0 + \frac{q_0(z)}{\alpha_{B0} h_B}. \quad (4)$$

С учетом (4) нестационарные процессы в рассматриваемом теплообменнике для отклонений параметров опишутся следующей линеаризованной по методике [5] системой дифференциальных уравнений сохранения энергии в теплоносителе и стенке*:

$$L_B \frac{\partial \Delta t}{\partial z} + T_B \frac{\partial \Delta t}{\partial \tau} = \Delta \theta - \Delta t, \quad (5)$$

$$K_q \Delta q(z) - T_M \frac{\partial \Delta \theta}{\partial \tau} + K_B(z) \Delta D_{B1} = \Delta \theta - \Delta t,$$

где

$$T_B = \frac{s_B c_B}{\alpha_B h_B}; \quad T_M = \frac{s_M c_M}{\alpha_B h_B};$$

$$L_B = \frac{D_{B1} c_B}{\alpha_B h_B}; \quad K_q = \frac{1}{\alpha_B h_B}; \quad K_B(z) = -L_B \frac{dt_0/dz}{D_{B1}}.$$

При записи этих уравнений приняты следующие допущения: 1) поток теплоносителя одномерный, 2) уравнение нестационарной теплопроводности заменено уравнением теплового баланса, 3) пренебрежено осевыми тепловыми потоками за счет теплопроводности по металлу и теплоносителю по сравнению с конвективным переносом тепла, 4) в каждый момент времени давление и расход одинаковы по всей длине теплообменника (уравнение движения не рассматривается), 5) теплоемкости металла и теплоносителя постоянны. Коэффициент теплоотдачи α_B на внутренней стороне канала считается зависящим только от расхода и принят одинаковым (осредненным) для всей поверхности теплообмена. Реальное его изменение по оси z в условиях неравномерного теплоподвода $q(z)$ [6] велико лишь для коротких каналов при малых значениях числа Pr [7] (жидкие металлы). Для длинных каналов энергетических установок с водным теплоносителем ($Pr \gg 1$) осреднение величины $\alpha_B(z)$ оправдано тем более, если учесть слабое влияние погрешности задания коэффициента теплоотдачи на вид и количественные характеристики динамических кривых [8].

Систему уравнений (5) с нулевыми начальными условиями преобразуем по Лапласу по временной координате τ . Исключая $\Delta \theta(z, s)$, получим:

$$\frac{d\Delta t(z, s)}{dz} + \beta \Delta t(z, s) = R(z, s), \quad (6)$$

где

$$\beta = \frac{T_B}{L_B} \cdot \frac{s(s + s_0)}{s + a_0}; \quad s_0 = \frac{T_M + T_B}{T_M T_B}; \quad a_0 = \frac{1}{T_M}.$$

Уравнение (6) отличается от аналогичного уравнения для случая равномерного пространственного распределения [1] только зависимостью от z правой части $R(z, s)$. При эквидистантном смещении эпюры обогрева

* Система уравнений (5) записана в обозначениях [1].

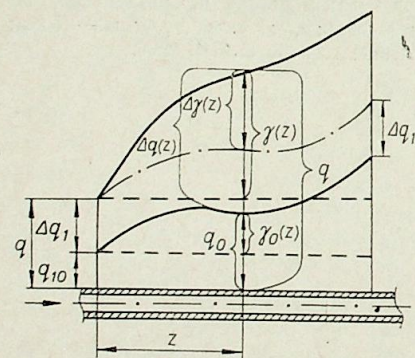


Рис. 1. Произвольное распределение плотности теплового потока вдоль пространственной координаты теплообменника.

ва $[\Delta\gamma(z) = 0]$, $\Delta q = \Delta q_1$ и $R \neq f(z)$. Решение в этом случае полностью совпадает с таковым для равномерного распределения теплоподвода.

Общее решение уравнения (6) в области изображений имеет вид:

$$\Delta t(z, s) = e^{-\beta z} \left[\int_0^z R(z, s) e^{\beta z} dz + C \right], \quad (7)$$

где C — произвольная постоянная определяется из граничных условий $C = \Delta t(0, s) = \Delta t_1(s)$.

Выражение (7) дает решение для любого из возмущений $[\Delta t_1(s), \Delta q(z, s), \Delta D_{B1}(s)]$ и произвольного закона изменения плотности теплового потока по координате. Как видно из (7), динамические характеристики при возмущении температурой на входе не зависят от характера распределения $q(z)$.

Для рассматриваемой линейной задачи справедлив принцип суперпозиции, поэтому динамические характеристики при возмущениях плотностью теплового потока и расходом складываются из решений, обусловленных равномерными ($q_{10}, \Delta q_1$) и неравномерными $[\gamma_0(z), \Delta\gamma(z)]$ составляющими плотности теплового потока и его возмущения.

Разгонные характеристики для равномерных составляющих обогрева получены в [1]. Наибольший интерес представляют решения, обусловленные неравномерными составляющими. Они и будут анализироваться ниже при рассмотрении некоторых частных случаев.

1. Линейный закон изменения q по координате. Могут представиться два случая: а) линейное увеличение плотности теплового потока ($dq/dz > 0$) в направлении движения теплоносителя (рис. 2, а); б) линейное уменьшение плотности теплового потока по координате ($dq/dz < 0$) (рис. 2, б). В уравнении (1) для линейного закона $q(z)\gamma(z) = mz$, где

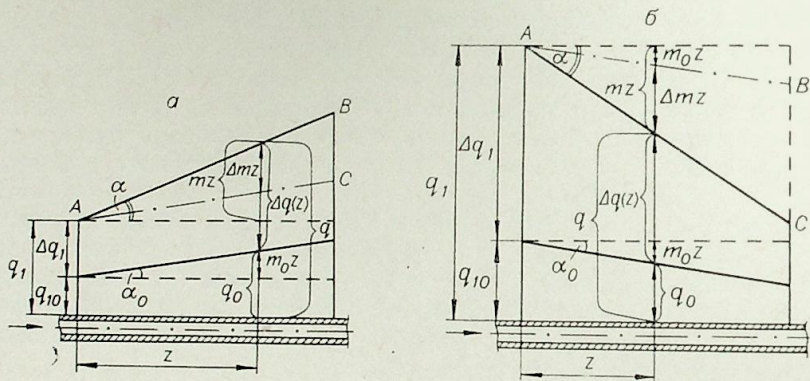


Рис. 2. Линейное распределение теплоподвода по оси канала. $dq/dz > 0$ (а), $dq/dz < 0$ (б).

$m = k \operatorname{tg} \alpha$, k — коэффициент размерности. Первый и второй случаи автоматически определяются тангенсами углов α . Таким образом, для данного случая

$$\Delta q(z) = \Delta q_1 + \Delta m z, \quad (8)$$

где $\Delta m = m - m_0$. Нетривиальное решение возможно только при возмущении обогрева с изменением угла наклона эпоры теплоподвода ($\Delta m \neq 0$). С учетом значения $\gamma_0(z)$ и (4) получим стационарное распределение температуры потока вдоль оси движения:

$$t_0 = t_{10} + \frac{q_{10}}{D_{B0} c_B} z + \frac{m_0}{D_{B0} c_B} \cdot \frac{z^2}{2}. \quad (9)$$

Таким образом, температуры по координате нарастают по квадратичному закону.

Подставив значения $\Delta q(z)$ и $q_0(z)$ в (7), получим зависимости для $\Delta t(z, s)$ при возмущениях теплоподводом и расходом теплоносителя:

$$\Delta t(z, s) = e^{-\beta z} \left\{ \int_0^z \frac{K_q [\Delta q_1(s) + \Delta m(s)z]}{L_B T_M (s + a_0)} e^{\beta z} dz - \int_0^z \frac{K_q (q_{10} + m_0 z) \Delta D_{B1}(s)}{D_{B0} L_B T_B (s + a_0)} e^{\beta z} dz + \Delta t_1(s) \right\}. \quad (10)$$

При возмущениях только обогревом или только расходом решения имеют одинаковую структуру

$$\Delta t(z, s) = \Delta t_p(z, s) - \Delta t_n(z, s), \quad (11)$$

где первый член отражает реакцию на равномерную составляющую $\Delta q_1 = \text{const}$ (при возмущении теплоподводом) или $q_{10} = \text{const}$ (при возмущении расходом), а второй — на изменение угла наклона Δm прямой $q(z)$ по сравнению с $q_0(z)$ (при возмущении обогревом) или неравномерную составляющую плотности теплового потока в исходном режиме $m_0 z$ (при возмущении расходом). Выражения для равномерных составляющих аналогичны решениям [1], и ниже анализируются лишь решения $\Delta t_n(z, \tau)$.

Интегрируя (10) при $\Delta q_1 = q_{10} = 0$, получим обобщенную зависимость для реакции теплообменника на возмущения теплоподводом и расходом

$$\Delta t_n(z, s) = -\Omega \frac{K_q}{L_B T_M (s + a_0) \beta^2} (1 - e^{-\beta z} - \beta z),$$

где $\Omega = \begin{cases} \Delta m(s) & \text{— для возмущения обогревом;} \\ -\frac{m_0}{D_{B0}} \Delta D_{B1}(s) & \text{— для возмущения расходом.} \end{cases}$

Таким образом, разгонные характеристики теплообменника на возмущения обогревом и расходом совпадают с точностью до коэффициентов.

Запишем изображение $\Delta t_n(z, s)$ с учетом обозначений [1]

$$\Delta t_n(z, s) = \Omega \frac{K_q L_B}{T_M T_B^2} \left[\frac{\xi T_B}{s^2 (s + s_0)} - \frac{s + a_0}{s^3 (s + s_0)^2} \left(1 - e^{-\tau_{mp} s} e^{-\frac{\xi T_M s}{1 + T_M s}} \right) \right], \quad (12)$$

где $\xi = z/L_B$, $\tau_{mp} = z/w$ — время прохода частицей канала. Обращение этого изображения требует предварительного разложения алгебраической дроби с кратными полюсами на простые дроби [6]. В результате получим следующее решение во временной области, обусловленное изменением угла наклона эпоры теплоподвода Δm ;

$$\Delta t_n(z, \tau) = \Omega K_q L_B \left(\frac{\mu}{1 + \mu} \right)^2 \left\{ \frac{\xi}{\mu} [(1 + \mu) a_0 \tau - 1 + e^{-(1 + \mu) a_0 \tau}] - \Phi_2 - \frac{\mu}{1 + \mu} (\Phi_1 + \bar{f}_{2,k}) \right\}, \quad (13)$$

где $\Phi_i, \bar{f}_{2,k}$ — специальные функции, определенные в [1, 9], $\mu = T_M/T_B$. Используя асимптотику специальных функций, нетрудно определить, что в новом установившемся режиме (при $\tau \rightarrow \infty$)

$$\Delta t_n(z) = \frac{\Omega}{D_{B1} c_B} \cdot \frac{z^2}{2}.$$

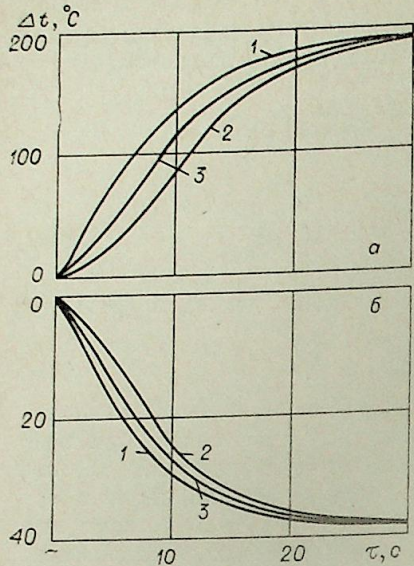
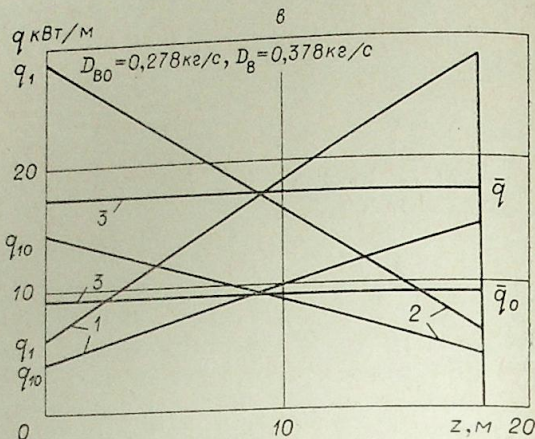


Рис. 3. Реакция теплообменника на скачкообразные возмущения обогрева (а) и расхода (б) при линейном законе $q(z)$; \bar{q} — распределения плотности теплового потока:

$dq/dz > 0$ (1), $dq/dz < 0$ (2), усредненный теплоподвод (3).



Разгонные характеристики теплообменника с независимым обогревом и линейной неравномерностью теплоподвода представлены на рис. 3. Они оказываются чувствительными к знаку производной dq/dz .

Проанализируем течение динамического процесса при возмущении расхода. Рассматривая при скачке расхода случай $dq/dz > 0$ (рис. 4, а), замечаем, что на участке до точки А по сравнению с усредненным распределением теплоноситель недополучает количество тепла, эквивалентное площади заштрихованного треугольника. В реальных условиях это приводит к более быстрому снижению температуры теплоносителя. Избыточный против среднего обогрев после точки А компенсирует недогрев на участке левее А, однако в целом различие динамических кривых действительного и усредненного обогрева существенно. Снижение обогрева на первой половине канала эквивалентно нанесению сопутствующего отрицательного возмущения по энтальпии, которое и является причиной наблюдаемого расхождения. Переходные процессы в обоих случаях завершаются в одни и те же временные интервалы.

В случае $dq/dz < 0$ (см. рис. 4, б) повышенный в сравнении с усредненным обогрев первой половины канала задерживает снижение температуры при набросе расхода, но на конечном этапе переходного процесса соотношение $q(z) < \bar{q}$ на второй половине канала увеличивает темп падения температуры.

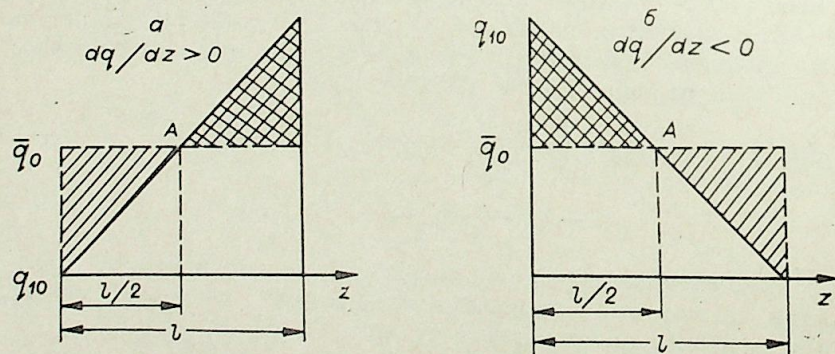
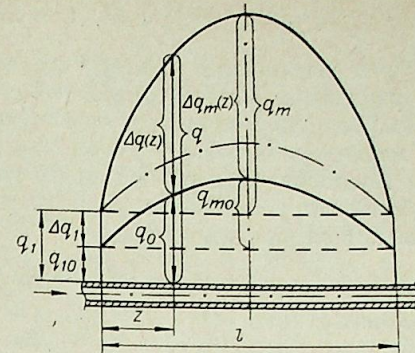


Рис. 4. К анализу пространственной распределенности обогрева при линейном законе $q(z)$. $dq/dz > 0$. (а), $dq/dz < 0$. (б).

Рис. 5. Синусоидальное распределение обогрева по оси теплообменника.



При скачке теплоподвода процессы протекают несколько иначе (см. рис. 3, а). Температурный напор стенка — теплоноситель изменяется практически мгновенно на всем канале, и на выходе в первую очередь проявляется влияние выходных участков теплообменника. При $dq/dz > 0$ в начальной стадии наблюдается повышенный темп роста температуры, так как тепловой поток на выходе превышает усредненный уровень. В дальнейшем, по мере истечения транспортных времен, вклад менее теплонапряженного входного участка возрастает и темп роста температуры теплоносителя уменьшается.

В свете приведенного анализа становится ясно, почему при эквидистантном приращении неравномерного теплоподвода переходные процессы для динамических отклонений описываются зависимостями для равномерного обогрева. Действительно, установлено, что характер протекания динамических процессов с неравномерным распределением при возмущении обогревом определяется неодновременным включением в переходный процесс входных и выходных участков теплообменника. При эквидистантном возмущении приращения теплового потока во всех сечениях одинаковы, поэтому очередность включения в переходный процесс различных участков канала значения не имеет.

Синусоидальный закон изменения плотности теплового потока по координате. Для данного случая (рис. 5) $\gamma(z) = q_m \sin \omega z$; $\Delta \gamma(z) = \Delta q_m \sin \omega z$, где q_m — амплитуды синусоидальной полуволны в исходном и конечном режимах, $\omega = \pi/l$, l — длина канала (длина полуволны синусоиды).

Интегрирование (7) при синусоидальном законе изменения $q(z)$ для скачкообразного возмущения снова приводит к соотношению (11), причем $\Delta t_p(z, s)$ очевидно, а

$$\Delta t_n(z, s) = \frac{\Omega K_q}{L_B T_M s (s + a_0) (\beta^2 + \omega^2)} [\omega (e^{-\beta z} - \cos \omega z) + \beta \sin \omega z], \quad (14)$$

где

$$\Omega = \begin{cases} \Delta q_m & \text{— для возмущения теплоподводом} \\ -\frac{q_{m0}}{D_{B0}} \Delta D_{B1} & \text{— для возмущения расходом.} \end{cases}$$

Рассмотрим решения $\Delta t_n(z, s)$, в которых отражаются специфические особенности синусоидального распределения теплоподвода по координате.

АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Соотношение (14) преобразуем с учетом выражения (6) для β

$$\Delta t_n(z, s) = \frac{\Omega K_q L_B (s + a_0)}{T_M T_B^2 s f(s)} [\omega (e^{-\beta z} - \cos \omega z) + \beta \sin \omega z]. \quad (15)$$

В знаменателе (15) в явном виде выделена характеристическая функция, представляющая собой полный многочлен четвертого порядка:

$$f(s) = s^4 + A_3 s^3 + A_2 s^2 + A_1 s + A_0, \quad (16)$$

где $A_3 = 2s_0$, $A_2 = S_0^2 + \delta^2$, $A_1 = 2\delta^2 a_0$, $A_0 = \delta^2 a_0^2$, $\delta = \frac{L_B}{T_B} \omega$.

Характеристическая функция определяет реакцию системной функции на различные виды возмущений. Для определения свойств системной функции и перехода во временную область необходимо определить корни характеристического уравнения $f(s) = 0$.

Воспользуемся решением Феррари уравнения четвертой степени [7]. Кубическая резольвента уравнения $f(s) = 0$ для данной конкретной физической задачи имеет вид

$$y [y^2 - (s_0^2 + \delta^2)y + 4\delta^2 a_0 (s_0 - a_0)] = 0. \quad (17)$$

Ее корни

$$y_1 = 0; \quad y_{2,3} = \frac{1}{2} [s_0^2 + \delta^2 \pm \sqrt{(s_0^2 - \delta^2)^2 + 4\delta^2 s_0^2}], \quad (18)$$

где $\bar{s}_0 = \frac{T_M - T_B}{T_M T_B}$.

Для нахождения корней исходного характеристического многочлена достаточно знать только один из корней кубической резольвенты, допустим $y_1 = 0$, и четыре корня уравнения (16) находятся как корни двух квадратных уравнений

$$\begin{aligned} s^2 + (s_0 + i\delta)s + i\delta a_0 &= 0, \\ s^2 + (s_0 - i\delta)s - i\delta a_0 &= 0, \end{aligned} \quad (19)$$

эквивалентных характеристическому уравнению $f(s) = 0$. Все четыре корня уравнений (19), согласно формулам Виета [11], попарно комплексно-сопряженные. Комплексность корней характеристического уравнения свидетельствует о колебательности переходного процесса. Установим знак действительных частей корней уравнения $f(s) = 0$ с положительными коэффициентами.

По частному случаю теоремы Рауса-Гурвица [11] для действительного алгебраического уравнения с положительными коэффициентами существует критерий Льенара — Шипара, согласно которому все корни уравнения $f(s) = 0$ будут иметь отрицательную действительную часть, если $H_1 > 0$ и $H_3 > 0$, где H_i — определители Гурвица для уравнения $f(s) = 0$. Определители с нечетным индексом $H_1 = 2S_0$ и $H_3 = 4\delta^2 a_0 (s_0^2 + \delta^2) \frac{1}{T_B}$ — положительны. Наличие отрицательных действительных частей комплексно-сопряженных корней свидетельствует о затухании колебательного переходного процесса во времени.

Решая уравнения (19), найдем корни характеристического многочлена (16)

$$S_{1,2} = -\frac{s_0 + i\delta}{2} \pm \sqrt{N + iM}; \quad s_{3,4} = -\frac{s_0 - i\delta}{2} \pm \sqrt{N - iM}, \quad (20)$$

где $N = (s_0^2 - \delta^2)/4$; $M = \delta(\bar{s}_0/2)$.

При $\delta = 0$ все корни становятся действительными, колебательность исчезает.

С целью анализа свойств системной функции в корнях характеристического полинома целесообразно выделить вещественные и мнимые части. Для большинства аппаратов $s - \delta^2 > 0$, тогда, извлекая квадратные корни из комплексных чисел (20) по известным правилам [10], получим:

$$s_{1,2} = u_1 \pm iv_1, \quad s_{3,4} = u_2 \pm iv_2,$$

где

$$u_{1,2} = -\frac{s_0}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2}(I + N)}; \quad v_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2}(I - N)} \mp \frac{\delta}{2};$$

$$I = \sqrt{N^2 + M^2}.$$

Действительные части $u_{1,2}$ являются коэффициентами затухания (величинами, обратными постоянной времени объекта), а мнимые части $v_{1,2}$ — частотами переходного процесса. В случае несоблюдения неравенства $s_0^2 - \delta^2 > 0$ корни следует вычислять по (20).

Коэффициенты затухания u_i , характеристические частоты v_i определяются одними и теми же комплексными частотами s_0, δ, \bar{s}_0 . Это значит, что колебательность переходного процесса является органическим свойством теплообменника с независимым обогревом и однофазным теплоносителем при синусоидальном распределении теплоподвода.

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Учитывая сопряженность корней, разложим знаменатель изображения (15) на простые дроби [11]. Для случая скачкообразного возмущения обогрева:

$$\begin{aligned} \Delta t_H(z, s) = \frac{\Omega}{s} \frac{K_q L_B \omega}{T_M T_B^2 T} \sum_{k=1}^2 (-1)^k \frac{Cs + B_k}{(s - u_k)^2 + v_k^2} (e^{-\beta z} - \cos \omega z) + \\ + \frac{K_q \Omega}{T_M T_B T} \sin \omega z \sum_{k=1}^2 (-1)^k \frac{Ds + B_{k+2}}{(s - u_k)^2 + v_k^2}, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} C &= E - 2a_0 p; \quad B_k = a_0 (E + 4p u_k) + 2p M_k^2; \\ D &= E - 2s_0 p; \quad B_{k+2} = s_0 (E + 4p u_k) + 2p M_k^2; \\ M_k &= \sqrt{u_k^2 + v_k^2}; \quad E = M_1^2 - M_2^2; \quad p = u_2 - u_1; \\ T &= E^2 + 4p (M_1^2 u_2 - M_2^2 u_1). \end{aligned}$$

Используя соотношения [1] и [9], выполним обращение изображения (21) во временную область τ

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t_H(z, \tau)}{\frac{\Omega}{T} \frac{K_q}{T_M T_B}} = \sum_{k=1}^2 (-1)^k e^{u_k \tau} \left\{ \delta C \int_0^\tau V_1 e^{-u_k t} \left[\frac{l_k}{v_k} \sin v_k (\tau - t) + \cos v_k (\tau - t) \right] dt + \right. \\ \left. + \delta \left[\frac{B_k}{M_k^2} \cos v_k \tau - \frac{1}{v_k} \left(\frac{B_k}{M_k^2} + C \right) \sin v_k \tau \right] \cos \omega z + D \left(\frac{l_{k+2}}{v_k} \sin v_k \tau + \right. \right. \\ \left. \left. + \cos v_k \tau \right) \sin \omega z \right\} - \frac{1}{\delta a_0} \cos \omega z, \end{aligned} \quad (22)$$

где функция $V_1(\xi, \eta)$ определена в [1] и [9],

$$l_k = \frac{B_k}{C} + u_k, \quad l_{k+2} = \frac{B_{k+2}}{D} + U_k.$$

Используя асимптотику функции V_1 [6], убеждаемся, что в нулевых точках ($\tau = 0, z = 0$) и в новом установившемся режиме (при $\tau \rightarrow \infty$) решения (22) дают правильные результаты, в последнем случае совпадающие с решением стационарной задачи для отклонений, которые для возмущений теплоподводом и расходом соответственно имеют вид:

$$\Delta t_H(z) = \frac{K_q \Omega}{L_B \omega} (1 - \cos \omega z).$$

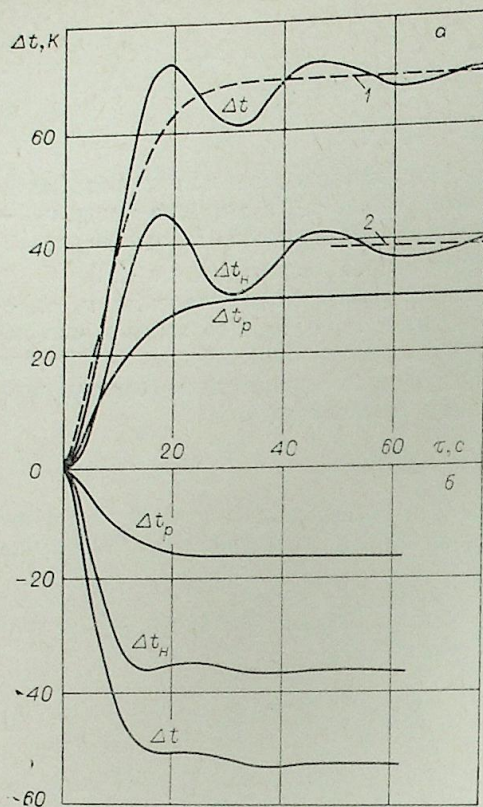


Рис. 6. Реакция канала с синусоидальным теплоподводом на скачкообразные возмущения обогрева (а), расхода теплоносителя (б).
1 — Δt при $q = \bar{q}$; 2 — установившееся значение $\Delta t_{\text{н}}$.

На рис. 6 представлены разгонные характеристики теплообменника при синусоидальном распределении теплового потока, построенные по зависимостям (22); там же изображены кривые для случая усреднения теплоподвода.

Видно качественное различие в характере динамического процесса при точном учете синусоидального распределения по сравнению со случаем усреднения. Зависимости (22) описывают затухающий колебательный процесс, стремящийся к установившемуся значению нового стационарного режима.

Из теории колебательных процессов с затуханием [12] известно, что свободная часть

решения в переходных процессах может иметь величину, значительную по сравнению с установившейся частью. Действительно, как видно из рис. 6, в течение переходного процесса возможны забросы температуры выше нового установившегося значения, что представляет определенную опасность для канала и может привести к срабатыванию защиты турбины. Кроме того, фактор колебательности приводит к существенному увеличению времени переходного процесса по сравнению с временем монотонного процесса при равномерном распределении в случае усреднения тепловой нагрузки.

Физически колебательность и растягивание динамического процесса обусловлены знакопеременным обменом энергией между стенкой и потоком теплоносителя на участке ниспадающей ветви эпюры синусоидального теплоподвода. В самом деле, максимальное значение приращения плотности теплового потока в средней части канала при возмущении теплоподводом вызывает в динамике (в условиях относительно небольших температурных напоров между стенкой и рабочей средой) перегрев температуры теплоносителя относительно температуры стенки, на ниспадающем участке синусоидальной эпюры обогрева. Это приводит, с одной стороны, к прекращению подвода тепла на этом участке к рабочей среде и охлаждению теплоносителя, с другой — к интенсивному накоплению тепловой энергии стенкой за счет одновременного обогрева внешним теплоподводом и теплоносителем. Процесс накопления и срабатывания тепла в стенке является инерционным, в силу чего баланс тепла в данной системе устанавливается в колебательных циклах с затуханием.

По-видимому, а аппаратах со значительными температурными напорами стенка — теплоноситель колебательность должна быть выражена слабее: для компенсации большего температурного напора требуются чрезмерно большие скачки теплового потока.

Колебательность переходного процесса в случае синусоидального распределения возникает в силу изменения знака производной $d\Delta q/dz$ представлениям колебательности на участке $d\Delta q/dz > 0$ должна отсутствовать и увеличиваться на участке $d\Delta q/dz < 0$ при смещении вправо по ных характеристик в трех промежуточных сечениях подтвердил это предположение.

Установленный при анализе линейного распределения факт неоднородности включений в переходные процессы входных и выходных мических процессов и при синусоидальном распределении. Действительности синусоидального распределения ($d\Delta q/dz > 0$) и выходной ($d\Delta q/dz < 0$) способствует развитию колебательного переходного процесса.

ВЫВОДЫ

1. Выявлена существенная зависимость от динамических свойств теплообмена с независимым обогревом от распределения тепловой нагрузки. В случае линейного закона отличие от равномерного распределения носит количественный характер, в случае синусоидального — еще и качественный.
2. Показано, что колебательность является органичным свойством однофазного теплообменника с независимым обогревом при синусоидальном теплоподводе. Коэффициенты затухания и характеристические частоты определяются инерционными свойствами теплообменника и степенью неравномерности синусоидальной нагрузки.

Сибирский энергетический институт
СО АН СССР,
Иркутск

Поступила в редакцию
17/X 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Серов Е. П., Корольков Б. П. Динамика парогенераторов. М., Энергия, 1972.
2. Галицкий А. К., Еназин В. А. О нестационарной теплопередаче между тепловыделяющими элементом и однофазным потоком теплоносителя. — В кн.: Исследования по теплопроводности/Под ред. Лыкова А. В. и Смольского Б. М. Минск, 1967.
3. Емельянов И. Я., Гаврилов П. А., Селиверстов Б. Н. Управление и безопасность ядерных энергетических реакторов. М., Атомиздат, 1975.
4. Смирнов В. Н., Цюрик В. Н. Влияние распределения тепловой нагрузки на динамические свойства теплообменника сверхкритических параметров рабочей среды. — Тр. ЦНИИ комплексной автоматизации, вып. 21. М., Энергия, 1969.
5. Корольков Б. П., Борчевкин Ю. С., Пупин А. А., Таиров Э. А. О методике линеаризации уравнений динамики теплообменников. — Изв. вузов СССР. Энергетика, 1977, № 8.
6. Кутателадзе С. С. и др. Тепломассообмен и трение в турбулентном пограничном слое. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1964.
7. Петухов Б. С., Генин Л. Г., Ковалев С. А. Теплообмен в ядерных энергетических установках. М., Атомиздат, 1974.
8. Таиров Э. А. Моделирование и исследование динамических свойств систем теплообменников. Автореф. канд. дис. М., МЭИ, 1979.
9. Корольков Б. П. Специальные функции для исследований динамики нестационарного теплообмена. М., Наука, 1976.
10. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., Наука, 1968.
11. Мишина А. П., Проскуряков П. В. Высшая алгебра. Линейная алгебра, многочлены, общая алгебра. М., Наука, 1965.
12. Гарднер М. Ф., Варнс Д. Л. Переходные процессы в линейных системах с сосредоточенными постоянными. М., Физматгиз, 1961.

УДК 532.68.001.5 : 536.42

И. И. ГОГОНИН, А. Р. ДОРОХОВ

К ОБОБЩЕНИЮ ОПЫТНЫХ ДАННЫХ
ПО КРИТИЧЕСКИМ ТЕПЛОВЫМ ПОТОКАМ
В СТЕКАЮЩИХ ПЛЕНКАХ ЖИДКОСТИ

Нагрев стекающей пленки жидкости приводит в ряде случаев к ее разрыву, в результате чего на теплоотдающей поверхности образуются так называемые «сухие пятна». Значение удельного потока тепла, при котором возникает «сухое пятно», называют критическим тепловым потоком q^* . Если жидкость недогрета до температуры насыщения, то основной причиной образования «сухого пятна» является действие термокапиллярных сил [1].

Предложенная в [1, 2] зависимость для обобщения опытных данных по q^* при стекании недогретой жидкости имеет вид

$$\frac{q^*}{\gamma\lambda} \left(\frac{g}{v^2} \right)^{1/3} \frac{\partial\sigma}{\partial t} = f(\text{Re}), \quad (1)$$

где γ — удельный вес, Н/м³, λ — теплопроводность, Вт/м²С, v — кинематическая вязкость жидкости, м²/с, g — ускорение свободного падения, м/с², $\partial\sigma/\partial t$ — температурный коэффициент поверхностного натяжения, Н/м²С, Re — число Рейнольдса пленки.

В [3] предлагается учитывать локальный характер появления «сухого пятна» введением в (1) некоторого параметра x — длины пробега пленки до точки разрыва. Полученные там же опытные данные по q^* при стекании пленки воды, этанола и водоглицериновой смеси обобщены до $\text{Re} = \text{Re}_*$, критического числа Рейнольдса перехода от ламинарного к турбулентному режиму стекания пленки, зависимостью вида

$$\frac{q^*x}{\gamma\lambda} \left(\frac{g}{v^2} \right)^{2/3} \frac{\partial\sigma}{\partial t} = f(\text{Re}). \quad (2)$$

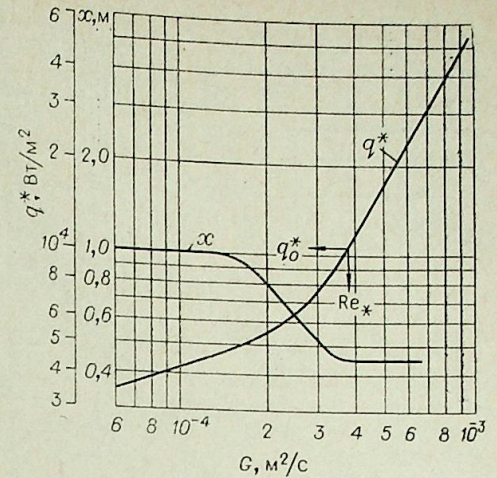
Обзор литературных данных, приведенный в [3], а также последние публикации по данному вопросу, например [2], свидетельствуют о большом внимании к проблеме образования «сухих пятен» в стекающих пленках жидкости. Результаты, изложенные в [3], могут быть дополнены следующими соображениями.

Впервые в [4] было показано, что число Рейнольдса начала волнообразования в пленке жидкости определяется зависимостью

$$\text{Re}_* = 0,607 \left(\frac{\sigma^3}{g\rho^3\nu^4} \right)^{1/11}. \quad (3)$$

Формула (3), устанавливающая связь между Re_* и безразмерным комплексом $(\sigma^3/g\rho^3\nu^4)$, называемым в литературе «пленочным числом», единственно известная авторам зависимость, полученная теоретически. В более поздних работах экспериментально показано, что зависимость (3) имеет более общий характер и при различных значениях постоянного коэффициента описывает границы существования возможных гид-

Рис. 1. Зависимость критического теплового потока q , Вт/м² и точки разрыва x , М от плотности орошения G , м²/с.



родинамических режимов стекания пленки. В частности, для определения критического числа Рейнольдса Re_* в [5] получена формула

$$\text{Re}_* = 35,0 \left(\frac{\sigma^3}{g\rho^3\nu^4} \right)^{1/10}. \quad (4)$$

Термокапиллярный разрыв пленки возможен при наличии неоднородности ее толщины в результате волнообразования. При стекании различных жидкостей подобные волновые структуры определяются в общем случае двумя параметрами — числом Рейнольдса Re и пленочным числом $K_F = \frac{\sigma^3}{g\rho^3\nu^4}$, где σ — поверхностное натяжение, Н/м; ρ — плотность жидкости, кг/м³. Неучет последнего принципиально не позволяет производить обобщение данных по q^* в координатах (1), (2) для различных жидкостей в широком диапазоне исследуемых параметров.

На рис. 1 приведены зависимости критического теплового потока q^* , при котором происходит разрушение пленки, и точки разрыва x , отсчитываемой от выходной щели распределителя, от плотности орошения G , м²/с. Линии осредняют опытные данные [3] при стекании водяной пленки с температурой на входе $t_0 = 24^\circ\text{C}$ по трубе наружным диаметром 28 мм и длиной 1 м. Аналогичные зависимости получены в опытах с другими жидкостями и на участках различной длины. Линия $(x-G)$ имеет две явно выраженные точки перегиба. В опытах с различными жидкостями (вода при температурах на входе от 20 до 50^oС, водоглицериновая смесь, этанол при $t_0 = 24^\circ\text{C}$) установлено, что вторые точки перегиба $(x-G)$ -зависимостей достаточно хорошо соответствуют значениям чисел Рейнольдса, определенным по (4), и изменяются в диапазоне $250 \leq \text{Re}_* \leq 500$.

Если выбирать эти значения числа Рейнольдса и соответствующие им критические тепловые потоки q_0^* в качестве реперных, то можно получить следующую зависимость:

$$q^*/q_0^* = f(\text{Re}/\text{Re}_*). \quad (5)$$

На рис. 2 приведена обработка экспериментальных данных по критическим тепловым потокам в условиях недогрева в координатах (5). При $\text{Re} > \text{Re}_*$ опытные данные вполне удовлетворительно обобщаются по (5). Расчет по зависимости, приведенный на рис. 2, возможен, если известно реперное значение q_0^* при соответствующем Re_* . Для определения q_0^* предлагается использовать результаты обобщения по q^* , приведенного в [3], где показано, что в диапазоне изменения чисел Рейнольдса, соответствующему первому и второму перегибам на кривой $(x-G)$, комплекс в правой части уравнения (2) имеет постоянное значение:

$$\frac{q^*x}{\gamma\lambda} \left(\frac{g}{v^2} \right)^{2/3} \frac{\partial\sigma}{\partial t} = 5,2 \cdot 10^4. \quad (6)$$

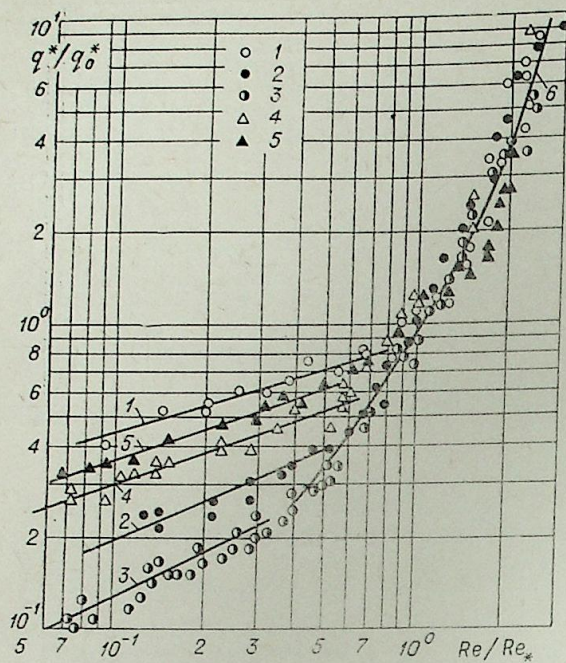


Рис. 2. Обобщение экспериментальных данных по q^* при $Re > Re_*$ по (5).

1 — водоглицериновый раствор (20% глицерина по весу), $L=2,1$ м; 2 — этанол (96%), $L=2,1$ м; 3 — вода, $L=2,1$ м; 4 — вода, $L=1$ м; 5 — вода, $L=0,5$ м; 6 — линия, осредняющая экспериментальные данные при $Re > Re_*$.

Из рис. 1 следует, что реперному числу Рейнольдса Re_* соответствует минимальное значение x , которое, как показало сопоставление полученных данных с опытами [6], соответствует длине начального теплового участка x_1 . В таком случае подстановка этого значения в (6) позволяет определить q_0^* . Для расчета значений q^* при $Re \leq Re_*$ можно рекомендовать зависимость, приведенную в [3].

Институт теплофизики
СО АН СССР,
СКБ «Энергохиммаш»,
Новосибирск

Поступила в редакцию
17/1 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Кутателадзе С. С., Стырикович М. А. Гидродинамика газожидкостных систем. Изд. 2-е, перераб. и доп. М., Энергия, 1976.
2. Fujita T., Ueda T. Heat transfer to falling liquid films and film breakdown. I. Subcooled liquid films.— Intern. J. of Heat and Mass Transfer, 1978, v. 21.
3. Гоголин И. И., Дорохов А. Р., Бочагов В. Н. К вопросу образования «сухих пятен» в стекающих тонких пленках жидкости.— Изв. СО АН СССР, 1977, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.
4. Капица П. Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости.— Журн. эксперим. и теор. физики, 1948, т. 18, № 7.
5. Brauer H. Strömung und Wärmeübergang bei Rieselfilmen.— VDI Forschungsheft, 1956, 457.
6. Wilke W. Wärmeübergang an Rieselfilmen.— VDI Forschungsheft, 1962, 490.

УДК 551.345 : 53

Ю. С. ДАНИЭЛЯН, П. А. ЯНИЦКИЙ

О ФОРМИРОВАНИИ ЛЕДЯНЫХ ПРОСЛОЕВ ПРИ ПРОМЕРЗАНИИ ВЛАЖНЫХ ГРУНТОВ

Промерзание влажных грунтов в некоторых случаях сопровождается образованием ледяных прослоев или шпиров. Иными словами, первоначально однородный по влажности грунт после промораживания представляет собой существенно неоднородное тело с ледяными включениями. Причиной этого, очевидно, являются миграционные процессы, протекающие одновременно с промерзанием. Многочисленные экспериментальные исследования позволили выявить некоторые факты, влияющие на образование ледяных прослоев. Так, например, в [1, 2] отмечено, что формирование ледяных прослоев обычно наблюдается при «медленном» промораживании, а «быстрые» процессы протекают без образования шпиров. Известны и другие особенности, характеризующие промерзание грунтов. Существуют различные подходы к описанию этого сложного явления (например, в [3] применяется граничное условие специального типа).

Промерзание влажных грунтов происходит при одновременном действии различных взаимосвязанных процессов. Такими являются миграция влаги к фронту промерзания, изменение влажности в прифронтной области, ускорение или замедление фронта и т. д. В связи с этим представляется целесообразным исследование процесса промораживания на устойчивость. В настоящей работе делается попытка определить причины неоднородного промерзания грунта на основе постановки некоторой модельной задачи. Образование ледяного прослоя при этом предлагается рассматривать как следствие потери устойчивости равномерного процесса промерзания.

Процесс тепломассопереноса при одномерном промерзании математически может быть описан [4, 5] следующей задачей:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}, \quad x < s(t), \quad T_1 < 0,$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}, \quad x > s(t), \quad T_2 > 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = k \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad x > s(t),$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = Q_1, \quad \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=L} = Q_2,$$

$$W|_{x=L} = W_0.$$

На подвижной границе

$$T_1 = T_2, \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} - \kappa q = \kappa (W - W_n) \cdot \frac{ds}{dt}, \quad (A)$$

$$k \frac{\partial W}{\partial x} = \Phi(W, l),$$

где W — влажность, k — коэффициент влагопроводности, κ — скрытая теплота фазового перехода, W_n — количество незамерзшей воды на фронте промерзания, W_0 — начальная влажность образца, $q = k \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=s(t)}$ — миграционный поток влаги к фронту промерзания, $v = ds/dt$ — скорость перемещения фронта промерзания; l — льдистость на фронте промерзания.

Приведенная постановка задачи отличается от [4, 5] лишь условием (А). Вид этого граничного условия не является общепринятым. Согласно (А), миграционный поток влаги к фронту промерзания зависит как от влажности W со стороны талой зоны, так и от льдистости l со стороны мерзлой. Можно, видимо, принять, что с увеличением влажности на фронте промерзания при прочих равных условиях миграционный поток увеличивается.

Принятие гипотезы квазистационарности для температурного поля позволяет значительно упростить задачу, записав ее в виде

$$\frac{\partial W}{\partial t} = k \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad x > s(t), \quad (1)$$

$$W|_{x=\infty} = W_0, \quad (2)$$

$$q = k \frac{\partial W}{\partial x} = \Phi(W, l) \quad \left. \vphantom{q} \right\} x = s(t), \quad (3)$$

$$A - \kappa q = \kappa (W - W_n) v \quad (4)$$

где A — константа, равная $Q_1 - Q_2$. Льдистость на фронте промерзания определяется соотношением [3] $l = W - W_n + q/v$. Сравнение этой формулы с (4) дает зависимость льдистости от скорости движения фронта промерзания

$$l = A/(\kappa v). \quad (5)$$

Это позволяет выразить миграционный поток q в переменных W , v . $q = \Phi(W, l) = \Psi(W, v)$.

Следуя [6], ниже проводится исследование стационарного решения задачи (1)–(4) на устойчивость методом малых возмущений. Режим промерзания, при котором влажность и льдистость на фронте промерзания постоянны, будем называть стационарным. Стационарное решение $W(x - v_1 t)$ запишется так:

$$\frac{W - W_0}{W_k - W_0} = \exp\left(-\frac{v_1(x - v_1 t)}{k}\right), \quad (6)$$

где W_k — значение стационарной влажности на фронте; v_1 — стационарная скорость. Выражая $q = \kappa(\partial W/\partial x)$ из (6) и подставляя в (4), получим для стационарной скорости промерзания

$$v_1 = \frac{A}{\kappa(W_0 - W_n)}. \quad (7)$$

Стационарная льдистость из (5) и (7) определяется выражением

$$l_1 = W_0 - W_n, \quad (8)$$

т. е. при стационарном промерзании льдистость мерзлого грунта распределена равномерно и равна начальной влажности без незамерзшей воды. Возмущенное распределение имеет следующий вид:

$$W = W_1 + \varepsilon \exp(mx + nt) = W_0 + (W_k - W_0) \exp\left(-\frac{v_1}{k}x + \frac{v_1^2}{k}t\right) + \varepsilon \exp(mx + nt), \quad \varepsilon \ll W_0 - W_k.$$

W_1 — невозмущенное распределение влажности (6).

Возмущенное распределение должно удовлетворять уравнению (1) и граничным условиям (3) и (2). Подстановка (9) в (1) дает $n = \kappa \cdot m^2$. Из (2) следует, что $\text{Re } m < 0$. Миграционный поток и влажность на подвижной границе, а также скорость перемещения фронта представляются в обычном для теории возмущений виде

$$q = q_1 + q_2 \cdot \exp(\omega t), \quad (10)$$

$$v = v_1 + v_2 \cdot \exp(\omega t), \quad (11)$$

$$W = W_1 + W_2 \exp(\omega t). \quad (12)$$

Здесь $q_1 = v_1(W_0 - W_n)$ — невозмущенное значение миграционного потока,

$$\omega = m v_1 + \kappa \cdot m^2. \quad (13)$$

Разложение (9) в ряд по $x - x_1 = x - v_1 t$ и пренебрежение малыми величинами выше первого порядка дают следующее выражение для влажности: $W = W_k - (W_k - W_0)(v_1/k)(x - v_1 t) + \varepsilon \cdot \exp(\omega t)$.

Координата возмущенной подвижной границы с учетом этого соотношения и (12) записывается в виде

$$x = v_1 t + \frac{\varepsilon - W_2}{W_k - W_0} \cdot \frac{k}{v_1} \exp(\omega t), \quad (14)$$

откуда

$$v = \frac{dx}{dt} = v_1 + \frac{\varepsilon - W_2}{W_k - W_0} \cdot \frac{k}{v_1} \omega \exp(\omega t).$$

Сравнение последнего выражения с (11) дает

$$v_2 = \frac{k\omega}{v_1} \frac{\varepsilon - W_2}{W_k - W_0} = -\frac{k\omega}{q_1} (\varepsilon - W_2). \quad (15)$$

Рассматривая разложение возмущенного миграционного потока в ряд по $x - x_1 = x - v_1 t$,

$$q = k \frac{\partial W}{\partial x} = -v_1 (W_k - W_0) + \frac{v_1^2}{k} (x - v_1 t) (W_k - W_0) + \varepsilon m k \exp(\omega t)$$

и учитывая (14) и (10), получим

$$q_2 = k[m\varepsilon + (\varepsilon - W_2)(v_1/k)]. \quad (16)$$

Разложение в ряд величин q , v , W в (3) и (4) приводит к следующим соотношениям:

$$q_2 = \Psi_2 v_2 + \Psi_1 W_2, \quad (17)$$

$$q_2 + (W_k - W_n)v_2 + v_1 W_2 = 0, \quad (18)$$

где

$$\Psi_2 = \frac{\partial \Psi}{\partial v} \Big|_{W_k, v_1}, \quad \Psi_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial W} \Big|_{W_k, v_1}.$$

Величина m определяется из условия совместности четырех однородных линейных уравнений (15), (16), (17) и (18) с четырьмя неизвестными: q_2 , v_2 , W_2 , ε .

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -\frac{k\omega}{q_1} & \frac{k\omega}{q_1} \\ 1 & 0 & v_1 & -k\left(m + \frac{v_1}{k}\right) \\ 1 & -\Psi_2 & -\Psi_1 & 0 \\ 1 & W_k - W_n & v_1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Это уравнение, рассматриваемое относительно m , имеет три корня:

$$m_1 = -\frac{v_1}{k}, \quad m_2 = \frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}, \quad m_3 = \frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2},$$

где

$$a_1 = \frac{(W_K - W_H) \Psi_1 - \Psi_2 v_1}{k(\Psi_2 + W_K - W_H)}, \quad a_2 = \frac{q_1(\Psi_1 + v_1)}{k^2(\Psi_2 + W_K - W_H)}.$$

Согласно принятой выше гипотезе о том, что с ростом влажности на фронте промерзания миграционный поток влаги увеличивается, можно записать неравенство $\Psi_1 > 0$. С помощью выражений (13) и (19) выводятся следующие соотношения:

$$\omega_1 = 0, \\ \left. \begin{aligned} \omega_i &= m_i v_1 + k m_i^2 = m_i(v_1 + k a_1) - k a_2 \\ \operatorname{Re} \omega_i &= \operatorname{Re} m_i(v_1 + k a_1) - k a_2 \end{aligned} \right\} i = 2, 3,$$

где

$$v_1 + k a_1 = \frac{(W_K - W_H)(\Psi_1 + v_1)}{\Psi_2 + W_K - W_H}.$$

Устойчивость решения (6) определяется по отношению к возмущениям, для которых $\operatorname{Re} m_i < 0$, $i = 1, 2, 3$. Это обусловлено тем, что при $\operatorname{Re} m_i > 0$ не выполняется граничное условие (2). В этом случае корень m_i считается посторонним. Если одновременно выполняются условия $\operatorname{Re} m_i < 0$, $\operatorname{Re} \omega_i < 0$, решение устойчиво по отношению к i -му возмущению. Особо необходимо отметить случай $\operatorname{Re} \omega = 0$, соответствующий сдвигу возмущенного решения по отношению к стационарному. Следуя [7], такой переход будем считать устойчивым.

Ниже рассматриваются все возможные варианты значений исходных параметров:

$$a) \quad \Psi_2 < -(W_K - W_H), \\ \operatorname{Re} m_1 = -(v_1/k), \quad \omega_1 = 0; \quad \operatorname{Re} m_2 > 0; \quad \operatorname{Re} m_3 < 0; \quad \operatorname{Re} \omega_3 > 0;$$

$$б) \quad \Psi_2 > \frac{\Psi_1(W_K - W_H)}{v_1},$$

$$\operatorname{Re} m_1 = -v_1/k, \quad \omega_1 = 0; \quad \operatorname{Re} m_2 < 0, \quad \operatorname{Re} \omega_2 < 0; \quad \operatorname{Re} m_3 < 0; \quad \operatorname{Re} \omega_3 < 0;$$

$$в) \quad -(W_K - W_H) < \Psi_2 < \frac{\Psi_1(W_K - W_H)}{v_1},$$

$$\operatorname{Re} m_1 = -v_1/k, \quad \omega_1 = 0; \quad \operatorname{Re} m_2 > 0; \quad \operatorname{Re} m_3 > 0.$$

Объединяя варианты a , $б$ и $в$, получаем критерий устойчивости $\Psi_2 > -(W_K - W_H)$. Для функции Φ критерий устойчивости принимает следующий вид:

$$\frac{\Phi'_l (W_0 - W_H)^2}{W_K - W_H} \cdot \frac{\kappa}{A} < 1, \quad (20)$$

где W_K находится из уравнения

$$\frac{A}{\kappa} \cdot \frac{W_0 - W_K}{W_0 - W_H} = \Phi(W_K, l_1), \quad l_1 = W_0 - W_H.$$

Таким образом, при выполнении неравенства (20) процесс промерзания устойчив, т. е. имеет место однородное промерзание. Невыполнение условия (20) характеризует неустойчивый процесс, что в соответствии с изложенным выше может привести к образованию ледяных прослоев.

Рассмотрим частный случай $\Phi(W, l) = f(l) \cdot (W - W_H)$, $f'(l) > 0$. Такая запись объединяет гипотезу относительно миграционного потока, принятую в [8], и экспериментально замеченный факт [9, 10], что присутствие льда интенсифицирует приток влаги к фронту промерзания. Критерий устойчивости в этом случае выглядит так

$$\frac{f'(l_1)(W_0 - W_H)}{v_1} < 1. \quad (Б)$$

Следовательно, увеличение начальной влажности W_0 выше определенного значения приводит к потере устойчивости промерзания, что в свою очередь может привести к образованию ледяных шпиров. То же можно сказать и об уменьшении скорости промерзания v_1 . Эти свойства критерия (Б) качественно совпадают с экспериментальными фактами, приведенными в [1, 2, 11].

В заключение отметим следующее:

1. Полученный критерий устойчивости дает лишь необходимое условие образования ледяных прослоев. Для получения достаточного условия требуется рассмотрение физико-механических свойств промораживаемых грунтов [12].

2. В данной статье исследование проведено на модельной задаче, в которой не учтены миграционные процессы в мерзлой зоне, неравновесные эффекты при кристаллизации, а также зависимость теплофизических параметров от влажности и температуры. Учет этих факторов значительно усложняет анализ и требует специального рассмотрения.

Государственный научно-исследовательский
и проектный институт
нефтяной и газовой промышленности
им. В. И. Муравленко,
Тюмень

Поступила в редакцию
26/IV 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Цытович Н. А. Механика мерзлых грунтов. М., Вышп. школа, 1973.
2. Шемякин Ф. М., Михалев П. Ф. Физико-химические периодические процессы. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1938.
3. Меламед В. Г. Математическая формулировка задачи промерзания влажных грунтов с учетом миграции влаги и условия образования ледяных прослоев.— В кн.: Мерзлотные явления, вып. VI. М., МГУ, 1966.
4. Меламед В. Г. Математическая постановка и алгоритмы решения задачи тепло- и массообмена во влажных тонкодисперсных грунтах при наличии фазовых превращений.— В кн.: Мерзлотные исследования, вып. IX. М., МГУ, 1969.
5. Достовалов Б. Н., Кудрявцев В. А. Общее мерзлотоведение. М., МГУ, 1969.
6. Зельдович Я. Б. Об устойчивости режима горения пороха в полузакрывном объеме.— ПМТФ, 1969, № 1.
7. Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б. Об устойчивости распространения пламени.— ПММ, 1957, т. 21, № 6.
8. Жесткова Т. Н., Шур Ю. Л. О влажности талого грунта на границе промерзания.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. геол., 1974, № 4.
9. Иванов Н. С. Тепло- и массоперенос в мерзлых горных породах. М., Наука, 1969.
10. Чистотин Л. В. Миграция влаги в промерзающих неводонасыщенных грунтах. М., Наука, 1973.
11. Орлов В. О., Дубнов Ю. Д., Мерепков Н. Д. Пучение промерзающих грунтов и его влияние на фундаменты сооружений. Л., Стройиздат, 1977.
12. Ершов Э. Д. Механизм миграционно-сегрегационного льдовыделения в промерзающих и оттаивающих дисперсных грунтах.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. геол., 1977, № 3.

В. Н. ШЕПЕЛЕНКО

ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ОБТЕКАНИЕ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ
ПОТОКОМ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Излагается алгоритм расчета потенциального течения около тела вращения при его произвольном движении в идеальной несжимаемой жидкости. Задача решается методом интегральных уравнений. Отличие данной работы от работ [1—4] состоит в способе вычисления сингулярных интегралов задачи. Алгоритм обеспечивает высокую точность расчетов для тел с удлинением до 25.

1. Задача обтекания тела вращения потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости эквивалента решению следующей системы интегральных уравнений:

$$pl_k(s) = -\frac{1}{\pi} \int_{h=1,2,3} pl_h(t) R^h(s, t) dt + f_k(s), \quad (1.1)$$

где pl_k — модифицированная плотность источников, распределенных по поверхности тела;

$$R^1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} ((F - E) x'(s) + EG),$$

$$R^2 = R^3 = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left[(2x'(s) - G) \frac{2(F - E)}{k^2} - (3F - E) x'(s) + (2F - E) G \right],$$

$$G = \frac{2w(s)(x'(s) \cdot \gamma - w'(s) \beta)}{\gamma^2 + \beta^2},$$

$$f_1 = w(s)w'(s), \quad f_2 = -w(s)x'(s),$$

$$f_3 = -w(s)(x(s)x'(s) - w(s)w'(s));$$

F, E — полные эллиптические интегралы от модуля $k^2 = \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\alpha^2 + \beta^2}$, $\alpha = w(s) + w(t)$, $\beta = x(s) - x(t)$, $\gamma = w(s) - w(t)$, $x(s), w(s)$ — уравнение профиля тела, заданное в параметрической форме, s — параметр задания. Интегрирование здесь и ниже выполняется по промежутку изменения параметра s : (s_-, s_+) .

При известных плотностях источников потенциалы скоростей и присоединенные массы тела определяются формулами [1]:

$$\Phi_k(s) = \frac{2}{\pi} \int_{h=1,2,3} pl_h(t) \Phi^h(s, t) dt, \quad (1.2)$$

$$\Phi^1 = \frac{F}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \Phi^2 = \Phi^3 = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left(\frac{2(F - E)}{k^2} - F \right);$$

$$\Lambda_{26} = \pi \int \varphi_2(t) f_2(t) dt = \pi \int \varphi_3(t) f_3(t) dt,$$

$$\Lambda_{11} = 2\pi \int \varphi_1(t) f_1(t) dt,$$

$$\Lambda_{22} = \pi \int \varphi_2(t) f_2(t) dt, \quad (1.3)$$

$$\Lambda_{66} = \pi \int \varphi_3(t) f_3(t) dt.$$

Скорость \vec{V} потока в системе координат, относительно которой жидкость покоится на бесконечности, имеет вид $\vec{V} = \vec{U} + \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}$.

Здесь \vec{U} — скорость потока относительно системы координат, жестко связанной с телом (подвижная система координат), $\vec{V}_0, \vec{\omega}$ — соответственно линейная скорость начала и угловая скорость вращения подвижной системы координат относительно неподвижной, \vec{r} — радиус-вектор, проведенный из начала подвижной системы координат в рассматриваемую точку потока.

Введем местную систему координат (см. рисунок), определяемую единичными векторами

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_\vartheta \times \vec{r}_x}{|\vec{r}_\vartheta \times \vec{r}_x|}, \quad \vec{t} = \frac{\vec{r}_x}{|\vec{r}_x|}, \quad \vec{b} = -\frac{\vec{r}_\vartheta}{|\vec{r}_\vartheta|},$$

где $\vec{r} = x\vec{e}_x + \eta(x)\vec{e}_\eta(\vartheta)$ уравнение поверхности тела в подвижной (цилиндрической) системе координат. Тогда относительную скорость \vec{U} потока можно записать в виде

$$\vec{U} = U_t \vec{t} + U_b \vec{b}, \quad (1.4)$$

где $U_t = (\vec{V} - \vec{V}_T, \vec{t})$, $U_b = (\vec{V} - \vec{V}_T, \vec{b})$, $\vec{V}_T = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}$

Для компонент U_t и U_b скорости \vec{U} имеют место следующие разложения:

$$U_t(s, \vartheta) = V_1^0 U_t^1(s) + A(\vartheta) U_t^2(s) + B(\vartheta) U_t^3(s),$$

$$U_b(s, \vartheta) = \omega_1 w(s) + A_\vartheta'(\vartheta) U_b^2(s) + B_\vartheta'(\vartheta) U_b^3(s), \quad (1.5)$$

$$A(\vartheta) = V_2^0 \cos \vartheta + V_3^0 \sin \vartheta,$$

$$B(\vartheta) = -\omega_2 \sin \vartheta + \omega_3 \cos \vartheta,$$

$V_k^0, \omega_k, k = 1, 2, 3$ — компоненты скоростей \vec{V}_0 и $\vec{\omega}$ в подвижной системе координат,

$$U_t^k(s) = \frac{1}{\sqrt{x'^2(s) + w'^2(s)}} \left(\frac{1}{\pi w(s)} \int pl_h(t) T^h(s, t) dt - g_k(s) \right), \quad (1.6)$$

$$k = 1, 2, 3,$$

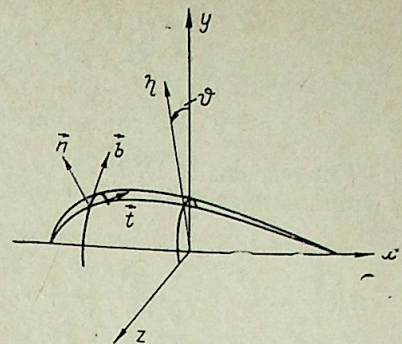
$$U_b^k(s) = -\frac{1}{\pi w(s)} \int pl_h(t) S^h(s, t) dt + h_k(s); \quad (1.7)$$

$$k = 2, 3,$$

$$T^1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} ((E - F) w'(s) - EH),$$

$$T^2 = T^3 = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left((2w'(s) - H) \frac{2(F - E)}{k^2} - (3F - E) w'(s) + (2F - E) H \right),$$

$$H = \frac{2w(s)(w'(s) \gamma + x'(s) \beta)}{\gamma^2 + \beta^2},$$



$$g_1 = x'(s), \quad g_2 = w'(s), \quad g_3 = x(s)w'(s) - x'(s)w(s),$$

$$S^2 = S^3 = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left(\frac{2(F-E)}{k^2} - F \right),$$

$$h_1 = 1, \quad h_2 = x(s)$$

Интегралы (1.1), (1.2) и (1.7) при $t \rightarrow s$ имеют логарифмическую особенность, интегралы (1.6) — особенность Коши.

Используя разложения [6] $F = \pi \left(\frac{1}{2} + \frac{k^2}{8} + \frac{9}{2} \cdot \frac{k^2}{8} \cdot \frac{k^2}{8} + \dots \right)$, $E = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{k^2}{8} + \frac{3}{2} \cdot \frac{k^2}{8} \cdot \frac{k^2}{8} + \dots \right)$ и перейдя к пределу при $s \rightarrow s_{\pm}$, нетрудно показать, что $pl_k(s_{\pm}) = 0$, $k = 1, 2, 3$, $\varphi_2(s_i) = 0$, $\varphi_3(s_{\pm}) = 0$. Составляющая U^1 скорости U_i в концевых точках, как следует из формулы (1.5), также равна нулю.

Сформулированная выше задача решается приближенно. Функции $x(s)$ и $w(s)$ (контур тела) аппроксимируются кубическим сплайном по N точкам

$$Sp(s) = z_i + a_i(s - s_i) + b_i(s - s_i)^2 + c_i(s - s_i)^3$$

$$s \in [s_i, s_{i+1}], \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

где z_i — значение функции $x(s)$ или $w(s)$ в точке s_i .

Для решения интегральных уравнений (1.1) используется итерационная схема Зейделя

$$pl_{kj}^{(n+1)} = -\frac{1}{\pi} \int \tilde{R}^k(pl_{k1}^{(n+1)}, \dots, pl_{kj-1}^{(n+1)}, pl_{kj}^{(n)}, \dots, pl_{kN}^{(n)}) dt + f_{kj},$$

$$\tilde{R}^k = pl_k(t)R^k(s_j, t), \quad j = 2, 3, \dots, N-1,$$

$$pl_{k1} = 0, \quad pl_{kN} = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

(2.1)

Логарифмическая особенность при вычислении интегралов (1.1), (1.2) и (1.7) устраняется следующей заменой независимой переменной:

$$t = s + (s_+ - s_-)(1 - \cos \xi)^p \operatorname{sgn}(\xi) \quad (2.2)$$

Новая подынтегральная функция в точке $\xi = 0$, соответствующей точке $t = s$, при $p > 1$ непрерывна и имеет непрерывную производную для всех $s \in (s_-, s_+)$. После замены интегралы (1.1), (1.2) и (1.7) вычисляются по приближенной формуле

$$\int Z(s, \xi) d\xi = \sum_1^{N-1} q_i \left(z_i + q_i \left(\frac{a_i}{2} + q_i \left(\frac{b_i}{3} + q_i \frac{c_i}{4} \right) \right) \right), \quad q_i = \xi_{i+1} - \xi_i, \quad (2.3)$$

построенной на сплайновой интерполяции подынтегральной функции [7]. Здесь z_i — значения подынтегральной функции $Z(s, \xi)$ в точках ξ_i , $i = 1, 2, \dots, N$, a_i, b_i, c_i — коэффициенты ее кубического сплайна.

Интегралы, содержащие особенности Коши, вычисляются следующим образом. Подынтегральная функция $Z(s, t)$ записывается в виде $Z(s, t) = \frac{\tilde{Z}(s, t)}{s-t}$; $\tilde{Z}(s, t) = Z(s, t)(s-t)$, функция $\tilde{Z}(s, t)$ аппроксимируется кубическим сплайном, после чего выполняется интегрирование [7]:

$$\int Z(s, t) dt = -\sum_1^{N-1} \left(Z_i \ln \left| \frac{p_i}{q_i} \right| + A_i(p_i - q_i) + \frac{B_i}{2}(p_i^2 - q_i^2) + \frac{c_i}{3}(p_i^3 - q_i^3) \right), \quad (2.4)$$

Здесь $Z_i = z_i + a_i r_i + b_i r_i^2 + c_i r_i^3$, $A_i = a_i + 2b_i r_i + 3c_i r_i^2$, $B_i = b_i + 3c_i r_i$, $C_i = c_i$, $z_i = Z(s, t_i)$, $p_i = t_i - s$, $q_i = t_{i+1} - s$, $r_i = -p_i$, a_i, b_i, c_i — коэффициенты кубического сплайна функции $Z(s, t)$. Если $s = t_j$, расчет выполняется на сетке

$$s_- = t_1 < t_2 < \dots < t_{j-1} < t'_j < \dots < t'_{N-1} = s_t,$$

$$t'_i = t_{i+1}, \quad i = j, \dots, N-1.$$

Для вычисления полных эллиптических интегралов F и E , входящих в подынтегральные функции, использованы формулы [8, 9]:

$$F = \sum_1^5 (a_j^F - b_j^F \ln \sigma) \sigma^{j-1}$$

$$E = \sum_1^5 (a_j^E - b_j^E \ln \sigma) \sigma^{j-1} \quad \sigma = 1 - k^2 \quad (2.5)$$

Таблица 1
Присоединенные массы эллипсоида вращения

Удли.		Численное решение	Аналитическое решение
1 : 1	Λ_{11}	2,617959—01	2,617994—01
1 : 5	Λ_{11}	1,238226—03	1,238231—03
	Λ_{22}	1,872929—02	1,872935—02
	Λ_{66}	7,621875—04	7,621976—04
1 : 10	Λ_{11}	1,084151—04	1,084159—04
	Λ_{22}	5,027782—03	5,027778—03
	Λ_{66}	2,336222—04	2,336229—04
1 : 20	Λ_{11}	8,894399—06	8,894522—06
	Λ_{22}	1,291452—03	1,291446—03
	Λ_{66}	6,299847—05	6,299821—05
1 : 25	Λ_{11}	3,931541—06	3,931602—06
	Λ_{22}	8,299725—04	8,299680—04
	Λ_{66}	4,079237—05	4,079212—05

Таблица 2

Эллипсоид 1 : 25. Численное решение

x	U_t^1	U_t^2	U_t^3	U_b^2	U_b^3
0,0000	-1,0047	0,0000	0,0005	1,9907	0,0000
0,0998	-1,0047	0,0162	0,0021	1,9907	0,1971
0,1940	-1,0046	0,0334	0,0069	1,9907	0,3832
0,2780	-1,0043	0,0531	0,0151	1,9907	0,5491
0,3484	-1,0039	0,0771	0,0270	1,9907	0,6882
0,4036	-1,0032	0,1085	0,0438	1,9907	0,7973
0,4440	-1,0017	0,1529	0,0676	1,9907	0,8770
0,4709	-0,9985	0,2214	0,1036	1,9907	0,9303
0,4871	-0,9901	0,3383	0,1636	1,9907	0,9622
0,4955	-0,9636	0,5637	0,2772	1,9904	0,9787
0,4989	-0,8563	1,0418	0,5158	1,9900	0,9853
0,4999	-0,4530	1,7774	0,8817	1,9947	0,9895

Таблица 3

Эллипсоид 1 : 25. Аналитическое решение

x	U_t^1	U_t^2	U_t^3	U_b^2	U_b^3
0,0000	-1,0047	0,0000	0,0005	1,9907	0,0000
0,0998	-1,0047	0,0162	0,0021	1,9907	0,1971
0,1940	-1,0046	0,0335	0,0069	1,9907	0,3832
0,2780	-1,0043	0,0532	0,0151	1,9907	0,5491
0,3484	-1,0039	0,0773	0,0271	1,9907	0,6881
0,4036	-1,0032	0,1088	0,0438	1,9907	0,7973
0,4440	-1,0017	0,1532	0,0677	1,9907	0,8769
0,4709	-0,9984	0,2218	0,1038	1,9907	0,9303
0,4871	-0,9900	0,3389	0,1639	1,9907	0,9622
0,4955	-0,9634	0,5646	0,2776	1,9907	0,9788
0,4989	-0,8557	1,0431	0,5165	1,9907	0,9856
0,4999	-0,4518	1,7781	0,8820	1,9907	0,9875

Таблица 4

Тело с удлинением 1 : 2,75 ($\Lambda_{11}=9,9664-03$, $\Lambda_{22}=5,5879-02$, $\Lambda_{26}=2,7568-03$,
 $\Lambda_{66}=1,9088-03$)

x	w	U_t^1	U_t^2	U_t^3	U_b^2	U_b^3
-0,4996	0,0004	-0,0072	-1,5110	0,6449	2,4647	-1,0629
-0,4901	0,0099	-0,1849	-1,4249	0,6007	2,3369	-0,9924
-0,4695	0,0305	-0,5742	-1,2285	0,4999	2,0468	-0,8317
-0,4404	0,0596	-0,7371	-1,0905	0,4274	1,8377	-0,6967
-0,4003	0,0927	-1,0367	-0,9100	0,3509	1,7816	-0,6139
-0,3341	0,1192	-1,0535	-0,5803	0,2110	1,9150	-0,5200
-0,2660	0,1378	-1,0667	-0,4267	0,1474	1,8255	-0,4131
-0,2060	0,1506	-1,0759	-0,3359	0,1142	1,8245	-0,3155
-0,1549	0,1594	-1,0842	-0,2729	0,0953	1,8218	-0,2325
-0,1109	0,1658	-1,0914	-0,2237	0,0839	1,8184	-0,1614
-0,0718	0,1706	-1,0971	-0,1824	0,0771	1,8143	-0,0983
-0,0355	0,1742	-1,1024	-0,1448	0,0731	1,8100	-0,0400
0,0000	0,1771	-1,1078	-0,1081	0,0715	1,8054	-0,0166
0,0365	0,1794	-1,1132	-0,0696	0,0722	1,8006	0,0774
0,0762	0,1811	-1,1191	-0,0263	0,0757	1,7951	0,1369
0,1216	0,1818	-1,1257	0,0266	0,0835	1,7883	0,2073
0,1757	0,1809	-1,1329	0,0967	0,0989	1,7789	0,2899
0,2420	0,1769	-1,1408	0,1986	0,1293	1,7644	0,3883
0,3217	0,1667	-1,1477	0,3659	0,1921	1,7395	0,5009
0,4069	0,1452	-1,1471	0,6887	0,3315	1,6877	0,6055
0,4705	0,1089	-0,9804	1,4092	0,6450	1,5764	0,6427
0,4911	0,0665	-0,5811	2,1857	0,9743	1,4794	0,6496
0,4963	0,0321	-0,2740	2,7691	1,2215	1,4074	0,6545
0,4986	0,0098	-0,0822	3,1425	1,3799	1,3607	0,6578
0,4999	0,0004	-0,032	3,3021	1,4476	1,3404	0,6594

3. Иллюстративные расчеты выполнены на сетке с числом узлов 71 при $p=2$. В табл. 1—3 приведены результаты расчетов для эллипсоида вращения, в табл. 4 — результаты расчета для некоторого произвольного тела вращения.

Институт теоретической
и прикладной механики
СО АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
25/XI 1972

ЛИТЕРАТУРА

- Vandrey F. A. A method for calculating the pressure distribution of a body of revolution moving in a circular path through a perfect incompressible fluid.— Reports and Memoranda, 1953, N 3139, Dec.
- Маслов Л. А. Использование одного метода определения потенциала скоростей обтекания тела вращения идеальной жидкостью для расчета присоединенных масс.— Инж. журн., 1965, т. 5, № 4.
- Колобов Б. П. Потенциальное обтекание идеальной несжимаемой жидкостью произвольно движущегося тела вращения при наличии отсоса.— Числ. методы механики сплошной среды, 1971, т. 2, № 2.
- Колобов П. П., Колобов Б. П. Потенциальное обтекание идеальной несжимаемой жидкостью произвольного тела вращения при наличии отсоса.— Числ. методы механики сплошной среды, 1973, т. 4, № 2.
- Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, т. 1. М., 1955.
- Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М., 1964.
- Шепеленко В. Н. Использование сплайнов для приближенного вычисления интегралов с особенностью и решения трансцендентных уравнений.— Числ. методы механики сплошной среды, 1973, т. 4, № 5.
- Hastings C. Approximation for digital computers.— Princeton University press, 1955.
- Дымарский Я. С. и др. Справочник программиста, т. 1. Л., 1963.

УДК 533.601.312 и 533.601.314

Н. М. БЫЧКОВ, В. М. КОВАЛЕНКО

АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА В ПОПЕРЕЧНОМ ПОТОКЕ

Поперечное обтекание кругового цилиндра — достаточно изученная и, по существу, классическая задача аэродинамики. Первые измерения сопротивления цилиндра (Лесслер, Ренар, Франк) были сделаны еще на рубеже XIX и XX вв., одни из последних — в исследованиях [1—8]. В этих и других работах для различных условий было измерено распределение давления и его пульсации вокруг цилиндра, определено положение точек отрыва пограничного слоя, измерены аэродинамические силы и их колебания, определены характеристики следа за цилиндром и др. В большинстве случаев измерения проведены при относительно высокой степени турбулентности потока $\varepsilon = 0,2 \div 0,7\%$. Аэродинамические силы определялись, как правило, по распределению осредненного давления вокруг цилиндра, т. е. без учета нестационарных эффектов. В результате наименее исследованной оставалась критическая область чисел Рейнольдса.

Основными отличительными особенностями данных испытаний являлись очень низкая степень турбулентности набегающего потока ($\varepsilon = 0,04\%$) и возможность регистрировать мгновенные значения сил и давлений, действующих на цилиндр, в условиях максимально возможного исключения концевых эффектов. Наибольшее внимание было уделено зоне критических по числам Рейнольдса режимов, где обнаружены качественно новые и значительные по величине нестационарные эффекты.

1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОБОРУДОВАНИЕ И МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Опыты проведены в дозвуковой малотурбулентной аэродинамической трубе замкнутого типа с закрытой рабочей частью сечением 1×1 м² и длиной 4 м при числах Рейнольдса, рассчитанных по диаметру цилиндра, $Re = 10^5 \div 6 \cdot 10^5$. Исследуемый цилиндр диаметром $d = 0,15$ м и общей длиной $L = 1$ м располагался поперек рабочей части аэродинамической трубы на расстоянии 1,31 м от ее начала и мог поворачиваться вокруг своей оси (рис. 1). Для наилучшего приближения к плоскому течению цилиндр разделен на три секции, центральная из которых является весовой и соединена с тензометрическими весами. Сигнал с тензовесов поступал на шлейфовый осциллограф Н-117, на ленте которого регистрировались мгновенные значения аэродинамических сил — подъемной Y или силы сопротивления X . Это позволяло опеределять коэффициент сопротивления $C_x = X/q \cdot S$, коэффициент подъемной силы $C_y = Y/q \cdot S$, а также максимальные амплитуды колебаний этих коэффициентов \bar{C}_x и \bar{C}_y . Последние находились по записи значений $X(\tau)$ и $Y(\tau)$ за достаточно большой интервал времени τ для каждого числа Re или угла поворота φ . Здесь q — скоростной напор, $S = d \cdot L$ — лобовая площадь цилиндра, φ —

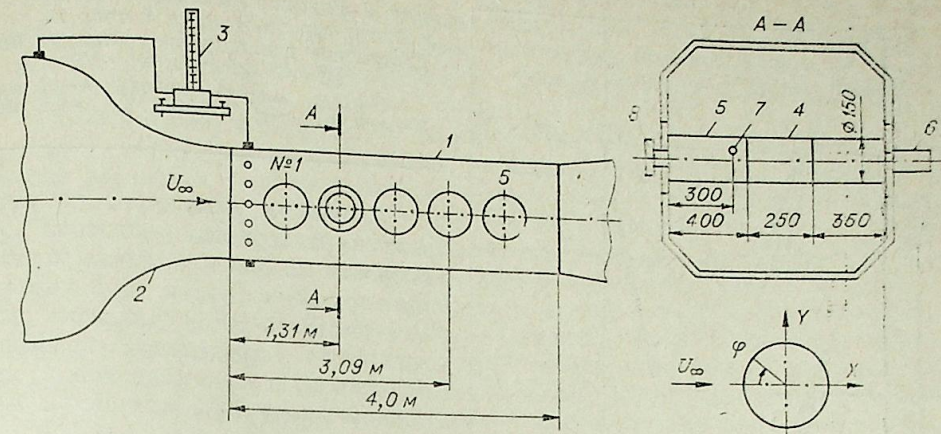


Рис. 1. Схема расположения цилиндра в трубе. Измеряемые силы.
1 — рабочая часть аэродинамической трубы, 2 — сопло, 3 — манометр, 4 — весовая секция цилиндра, 5 — боковые секции, 6 — тензовесы, 7 — отверстие для замера давления, 8 — шкала поворота цилиндра.

угол между направлением потока и нормалью к поверхности цилиндра, отсчитываемый от передней критической точки.

Кроме сил, одновременно измерялось также давление p и его пульсации Δp на поверхности цилиндра, что позволило определить коэффициент давления $\bar{p} = \frac{p - p_\infty}{q}$, максимальную амплитуду коэффициента пульсаций давления $\Delta \bar{p} = \Delta p/q$, а также коэффициент сопротивления давления

$$C_{x_d} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \bar{p} \cos \varphi d\varphi = C_x - C_F, \quad (1)$$

где C_F — средний коэффициент сопротивления трения, который в испытанном диапазоне Re не превышает 1—2% от величины C_{x_d} [3]. Это позволяет в дальнейшем достаточно обоснованно сопоставлять экспериментальные значения коэффициента сопротивления давления C_{x_d} рассчитанные по распределению давления, и коэффициента полного сопротивления цилиндра C_x , полученные по весовым измерениям.

Давление p на цилиндре измерялось с помощью спиртового микроманометра, а также датчиком давления ДД мембранного типа с полупроводниковыми тензорезисторами, соединенными по мостовой схеме. Пульсации давления Δp измерялись датчиком ДД и пьезокерамическим датчиком ЛХ-610.

При испытаниях варьировались скорость потока U_∞ (от 10 до 60 м/с), степень его турбулентности ($\varepsilon = 0,04$ и $0,7\%$), шероховатость поверхности цилиндра ($h = 4$ и 100 мкм) и угол поворота ($\varphi = 0 \div 360^\circ$). Турбулизация потока создавалась с помощью сетки, устанавливаемой на входе в рабочую часть трубы, а шероховатость поверхности цилиндра — наклеиванием наждачной бумаги с размером основной фракции абразивного материала около 100 мкм.

Загромождение рабочей части трубы цилиндром (степень загромождения $\sigma = 0,15$) приводило к увеличению средней расчетной скорости потока U_0 в соответствии с известной формулой Аллена и Винсенти примерно на 5%, что учитывалось при обработке результатов измерений. Неравномерность поля скоростей невозмущенного потока составляла около 0,001. В присутствии цилиндра, как показали специальные измерения, поле скоростей на расстоянии 1,7 м вверх по потоку было также вполне равномерным. При наличии турбулизирующей сетки максимальные отклонения скорости в ядре потока достигали 1,3%.

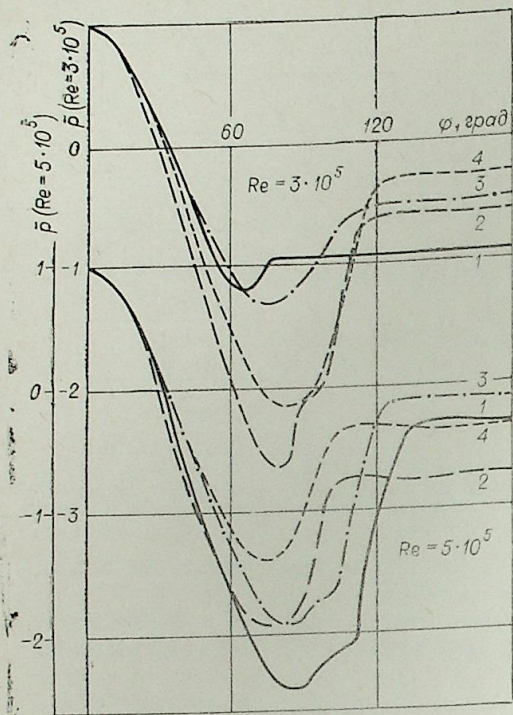


Рис. 2. Влияние шероховатости поверхности и турбулентности потока на распределение давления на цилиндре при $Re = 3 \cdot 10^5$ и $Re = 5 \cdot 10^5$.

1 — $\epsilon = 0,04\%$, $h = 0$; 2 — $\epsilon = 0,04\%$, $h = 0,1$ мм;
3 — $\epsilon = 0,7\%$, $h = 0$; 4 — $\epsilon = 0,7\%$, $h = 0,1$ мм.

Точность измерений различных характеристик зависела от скорости потока и наличия нестационарных эффектов. При числах $Re = 3 \cdot 10^5 - 6 \cdot 10^5$ суммарная погрешность определения коэффициентов C_x и C_y составляла в основном около 5%, при $Re < 2 \cdot 10^5$ она возрастала до 8 ÷ 10% и более.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ИСПЫТАНИЙ И ИХ АНАЛИЗ

2.1. Давление и его пульсации на цилиндре.

Экспериментально получено распределение давления по окружности гладкого и

шероховатого цилиндра при двух степенях турбулентности потока в диапазоне чисел $Re = 10^5 \div 6 \cdot 10^5$. На рис. 2 показаны примеры таких графиков при Re равных $3 \cdot 10^5$ и $5 \cdot 10^5$.

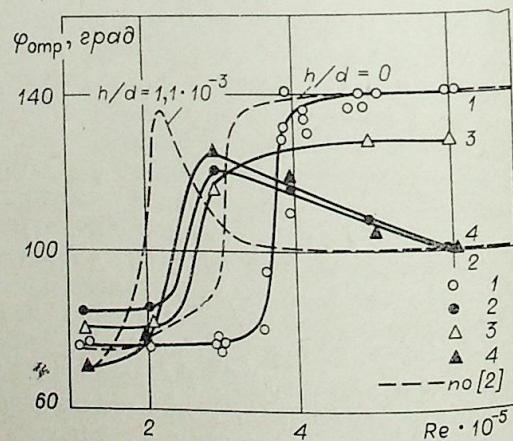
При некоторых условиях, особенно в зоне критических по числам Рейнольдса режимов на гладком цилиндре, наблюдается асимметрия в распределении давления соответственно на верхней и нижней поверхности, что свидетельствует о появлении боковой (в данном случае подъемной) силы. Турбулизация потока или повышение степени шероховатости поверхности существенно снижают асимметрию либо даже обеспечивают полностью симметричное обтекание.

По виду кривых распределения давления $\bar{p}(\varphi)$ можно определить некоторые характерные точки. В частности, точка перегиба на кривой давления при $Re > Re_{кр}$ непосредственно за областью максимального отрицательного давления совпадает с минимальным значением напряжения на стенке. Вблизи этой точки происходит переход от ламинарного течения к турбулентному. По данным наших измерений, для случая гладкого цилиндра в малотурбулентном потоке точка перехода $\varphi_{пер} \approx 95^\circ$, на цилиндре с шероховатой поверхностью $\varphi_{пер}$ несколько меньше ($\approx 90^\circ$). Если поток имеет повышенную турбулентность, то точка перегиба в этой зоне вообще не наблюдается.

Известно также, что область почти постоянного давле-

Рис. 3. Влияние шероховатости поверхности и турбулентности потока на положение точки отрыва потока. Сравнение с данными Е. Ахенбаха [2].

Обозначения те же, что на рис. 2.



ния в кормовой части начинается там, где трение падает до нуля, т. е. непосредственно за точкой отрыва пограничного слоя от поверхности симости от Re набегающего потока, его турбулентности и шероховатости (рис. 3).

Наступление критического режима ($Re \approx Re_{кр}$) сопровождается для каждого варианта условий резким смещением зоны отрыва к кормовой части цилиндра, т. е. увеличением угла $\varphi_{отр}$. По данным на рис. 3, для этого $\varphi_{отр}$ достигает 140° . На шероховатом цилиндре число $Re_{кр} \approx 3 \cdot 10^5$, и угол $\varphi_{отр}$, следовательно, с увеличением степени турбулентности потока след за цилиндром становится шире. Отметим, что смещение точки отрыва вплоть до угла $\varphi = 140^\circ$ свидетельствует о наличии так называемого отрывного пузыря — замкнутой области, включающей ламинарный отрыв, переход, присоединение и окончательный отрыв пограничного слоя [1, 6].

Полученные для точки отрыва результаты качественно согласуются с исследованиями Е. Ахенбаха [2]. Однако наступление критических режимов по данным Е. Ахенбаха, как и большинства других исследователей, происходит несколько раньше, т. е. при меньших числах Рейнольдса (см. рис. 3). Это объясняется, по-видимому, неодинаковой степенью турбулентности потока и другими отличиями в условиях испытаний.

С целью более полного изучения процесса возникновения отрыва пограничного слоя в зависимости от Re , а также от шероховатости поверхности и турбулентности потока было измерено нарастание пульсаций давления по окружности цилиндра. Из анализа представленных на рис. 4 данных можно сделать следующие выводы:

1. При малых числах Рейнольдса ($Re < 2 \cdot 10^5$) в трех случаях из четырех (кроме варианта $\epsilon = 0,7\%$, $h = 0,1$ мм) не наблюдается ярко выраженного максимума пульсаций давления. С ростом Re от $3 \cdot 10^5$ до $6 \cdot 10^5$ возникает пик $\Delta \bar{p}_{max}$ на кривой $\Delta \bar{p}(\varphi)$. На гладком цилиндре в малотурбулентном потоке величина $\Delta \bar{p}_{max}$ возрастает от 0,1 при $Re = 3 \cdot 10^5$ до 0,4 при $Re = 4,15 \cdot 10^5$ и затем снова несколько снижается. При этом значения $\varphi|_{\Delta \bar{p}_{max}}$ сдвигаются по потоку от $\varphi = 70$ до $\varphi = 125^\circ$.

2. Шероховатость поверхности или турбулизация потока, а также их совместное действие существенно снижают величину $\Delta \bar{p}_{max}$, а общий уровень пульсаций давления по окружности несколько возрастает, т. е. происходит как бы распределение интенсивности пульсаций по всему цилиндру. Примечательно, что на кормовой части цилиндра амплитуда пульсаций давления при всех вариантах сохраняется достаточно высокой, в частности, намного выше, чем в передней критической точке.

Величина и положение коэффициентов $\Delta \bar{p}_{max}$, измеренных датчиком давления ДД, в зависимости от Re качественно отображаются кривыми на рис. 5. Для всех вариантов при некоторых значениях числа Re отмечается резкое возрастание амплитуды $\Delta \bar{p}_{max}$. Из сопоставления данных на рис. 5 и 3 видно, что пульсации давления на цилиндре достигают экстремальных значений при углах $\varphi < \varphi_{отр}$, т. е. отрыв потока наступает несколько дальше вниз по потоку по сравнению с положением максимума пульсаций давления.

2.2. Аэродинамические силы на цилиндре.

На круговой цилиндр в поперечном потоке действует сила сопротивления и подъемная сила, каждая из которых складывается из постоянной и переменной составляющих. Наличие подъемной силы на цилиндре определяется либо особенностями обтекания цилиндра в критической области чисел Рейнольдса, либо технологическими отклонениями от идеальной круговой формы. Рассмотрим сначала стационарную составляющую силы сопротивления.

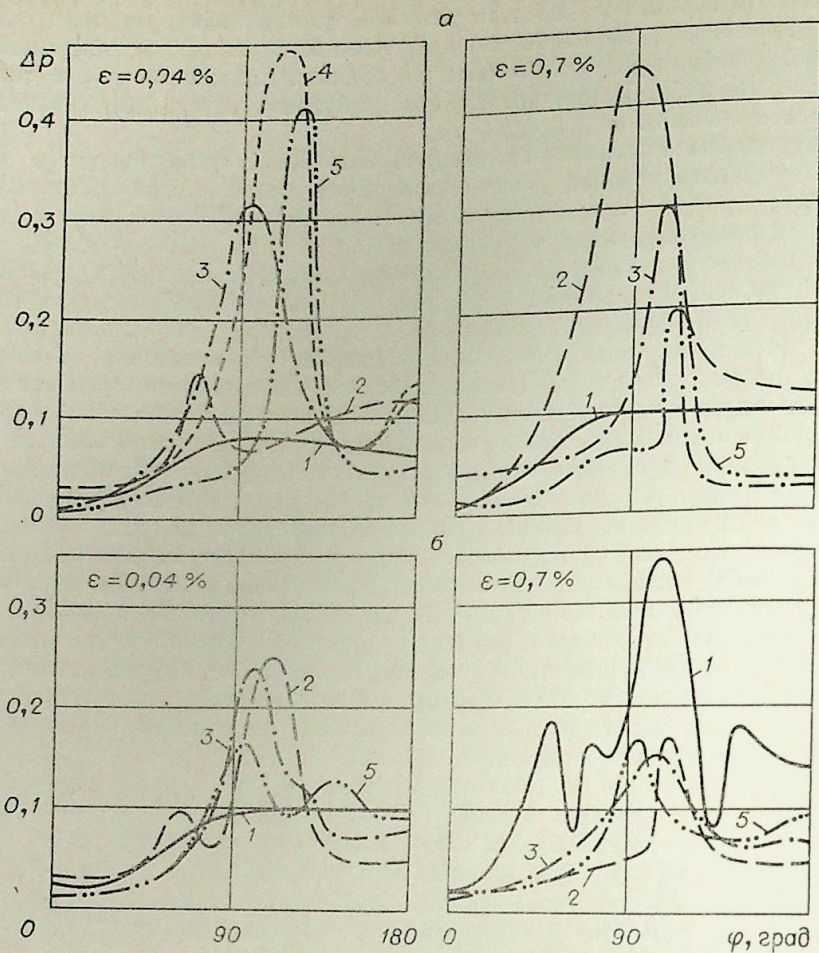


Рис. 4. Коэффициент пульсаций давления на гладком (а) и шероховатом (б) цилиндрах.
 $Re = 2 \cdot 10^5$ (1); $3 \cdot 10^5$ (2); $3,9 \cdot 10^5$ (3); $4,15 \cdot 10^5$ (4); $5 \cdot 10^5$ (5).

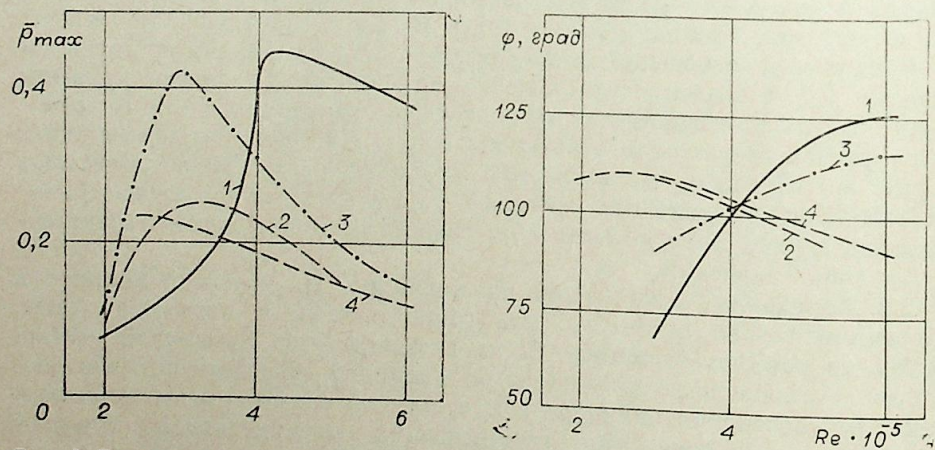
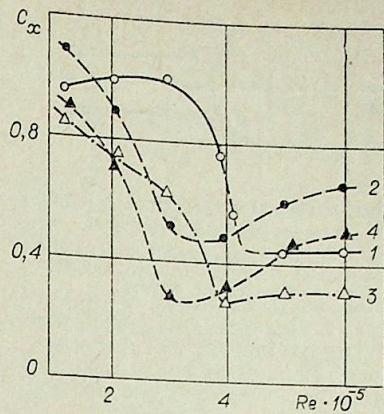


Рис. 5. Величина и положение максимальных значений коэффициента пульсаций давления на цилиндре.
 Обозначения те же, что на рис. 2.

Рис. 6. Коэффициент сопротивления давления цилиндра при различной турбулентности потока и шероховатости поверхности. Расчет по формуле (1).

Обозначения те же, что на рис. 2.



В экспериментах коэффициент сопротивления был определен двумя путями: 1) расчетом по формуле (1) с использованием измеренного распределения давления (рис. 6) и 2) по результатам весовых измерений силы полного сопротивления центральной секции цилиндра (рис. 7). Наиболее подробные и систематические данные по весовым измерениям получены для гладкого цилиндра при двух значениях турбулентности потока.

Из рассмотрения кривых на рис. 6 видно, что шероховатость поверхности цилиндра $h = 0,1$ мм ($h/d = 6,7 \cdot 10^{-4}$) приводит к более раннему наступлению кризисного режима по числам Re примерно на 20—25% как для малотурбулентного, так и для турбулизованного потока. При этом в докритической области сопротивление цилиндра уменьшается, а в закритической области, наоборот, увеличивается, приближаясь к некоторой постоянной величине. Этот результат качественно согласуется с известными данными [3, 6], однако критические числа Рейнольдса, которые соответствуют минимуму кривой $C_x(Re)$, в работах [3, 6] при аналогичных или близких значениях h/d и ϵ заметно меньше, чем в данных опытах, что связано, как отмечалось выше, с некоторыми отличиями в условиях испытаний.

Весьма интересными являются результаты по влиянию турбулентности потока на сопротивление цилиндра. Увеличение турбулентности потока до $\epsilon = 0,7\%$ снижает $C_{x\min}$ на гладком и на шероховатом цилиндрах примерно на 40% по результатам расчета по формуле (1) и на 16—18% — по данным весовых измерений. Разница результатов двух методов определения C_x , особенно заметная для шероховатого цилиндра в турбулизованном потоке, объясняется, по крайней мере, тремя причинами: 1) неидентичностью условий обтекания на весовой секции и в том сечении цилиндра, где измерялось распределение давления, что определя-

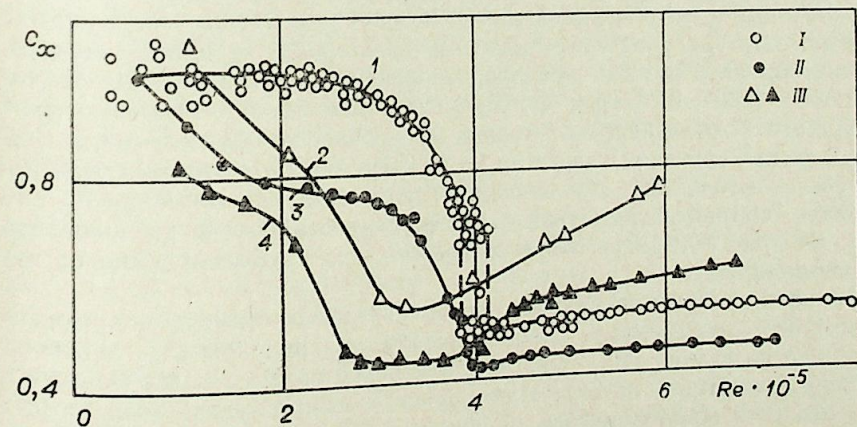


Рис. 7. Коэффициент сопротивления цилиндра при различных условиях испытаний. Результаты весовых измерений.
 1-я серия испытаний, апрель 1977 г. (I), 2-я серия испытаний, ноябрь 1977 г. (II), 3-я серия испытаний, июль 1978 г. (III). Обозначения 1—4 те же, что на рис. 2.

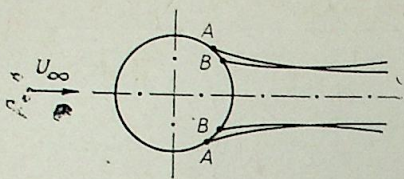
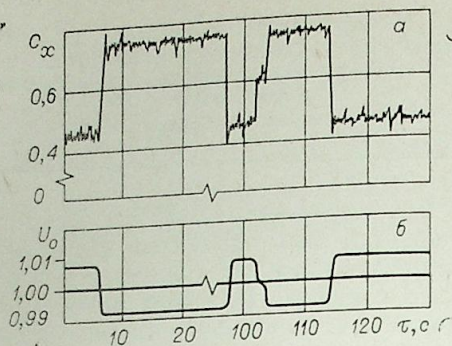


Рис. 8. Схема линий тока в ближнем следе за цилиндром.

A — точка отрыва турбулизованного потока, B — точка отрыва малотурбулентного потока.

Рис. 9. Изменение коэффициента сопротивления (а) и скорости потока (б) по времени для гладкого цилиндра в малотурбулентном потоке при числе $Re = 4,1 \cdot 10^5$.



ются как микрогеометрией цилиндра на этих участках (на шероховатом цилиндре отличия в форме были более заметными), так и разным расстоянием до боковых стенок аэродинамической трубы; 2) отсутствием систематических измерений весовым методом в случае шероховатого цилиндра, что привело к снижению точности результатов, полученных таким методом; 3) включением при измерениях на весах сил трения, составляющих до 2% от полного сопротивления. По-видимому, могли влиять и другие факторы [5]. Что касается качественного влияния, то оно одинаково по результатам обоих методов измерений.

Сопоставление кривых распределения давления для четырех рассматриваемых вариантов при двух режимах течения (см. рис. 2) показывает, что искусственная турбулизация потока хотя и вызывает более ранний его отрыв, т. е. ближний след за цилиндром становится шире, однако глубина разрежения потока на кормовой части цилиндра, независимо от состояния поверхности, при этом существенно уменьшается. Это и приводит в конечном счете к уменьшению сопротивления давления цилиндра в зоне критических чисел Рейнольдса. Возможная картина линий тока в кормовой части цилиндра, которая реализуется при этих условиях, схематично показана на рис. 8. Более высокое давление на корме устанавливается, как об этом можно судить по кривизне линий тока, при отрыве турбулизованного потока.

Рассмотрим более подробно поведение коэффициента сопротивления C_x гладкого цилиндра в малотурбулентном потоке. На рис. 7 видно, что в области критических чисел Рейнольдса этот коэффициент является неоднозначным, т. е. при одной и той же скорости потока могут наблюдаться два или три различных значения C_x . Переход от одного значения к другому происходил, как правило, скачкообразно с максимальной разницей $\Delta C_x = 0,25 \div 0,28$ (рис. 9). Интервал времени, в течение которого коэффициент C_x находился на одном из уровней (обычно верхнем или нижнем, реже — среднем) достигал 90 с. Скорость потока на этих режимах также резко изменялась: с увеличением сопротивления цилиндра и, следовательно, сопротивления тракта трубы скорость потока уменьшалась, и наоборот (рис. 9). Число оборотов вентилятора трубы сохранялось при этом неизменным.

Резкие и достаточно сильные колебания коэффициента сопротивления, которые, по-видимому, можно назвать аperiodическими, наблюдались только на гладком цилиндре в критической области чисел Рейнольдса малотурбулентного потока. При других условиях указанный эффект практически не обнаруживался, и изменения C_x представляли разновидность случайных колебаний, зачастую близких к периодическим. Максимальные амплитуды колебаний коэффициента сопротивления в зависимости от Re и условий обтекания показаны на рис. 10. Там же

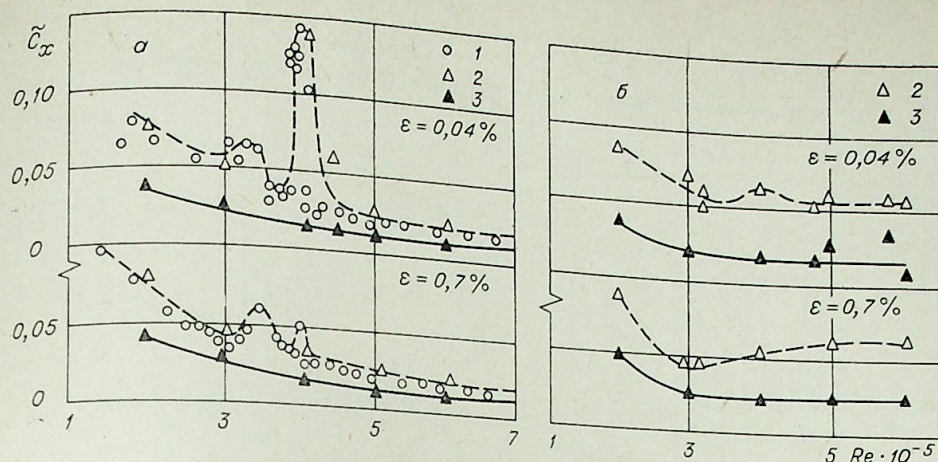


Рис. 10. Максимальная амплитуда колебаний коэффициента сопротивления цилиндра в зависимости от числа Рейнольдса при различных условиях. а) Гладкий цилиндр $h=0$; б) шероховатый цилиндр $h/d = 6,7 \cdot 10^{-4}$. Измерения при $\varphi = \text{const}$ (1); при $\varphi = \text{var}$: верхняя граница (2), нижняя граница (3).

нанесены значения максимальных и минимальных отклонений коэффициента C_x при изменении положения цилиндра в потоке, т. е. при изменении угла φ в условиях постоянной скорости потока.

Рассмотрим теперь нестационарную подъемную силу, действующую на неподвижный цилиндр в потоке. Эта сила исследовалась в работах [6—10]. В наших опытах не только измерена величина коэффициента $C_y = f(Re)$, но также оценено влияние на него шероховатости поверхности и турбулентности потока.

На рис. 11 представлены характерные осциллограммы мгновенных значений подъемной силы $Y(\tau)$ для гладкого цилиндра в малотурбулентном потоке при различных числах Рейнольдса. В докритической области с увеличением скорости потока амплитуда колебаний возрастает, достигая максимума при числах $Re = Re_{кр}$. В закритической области амплитуда колебаний резко уменьшается и почти не зависит от числа Рейнольдса. При числе $Re_{кр} = 4 \cdot 10^5$ и в непосредственной окрестности этого режима колебания подъемной силы принимают скачкообразный аperiodический характер с резкими выбросами в положительную или отрицательную сторону (рис. 11, а, б). При этом амплитуда колебаний коэффициента подъемной силы достигает значений $C_y = 0,85$ (рис. 12). Кроме того, в области чисел $Re = 3,8 \cdot 10^5 \div 4,1 \cdot 10^5$ при каждом из испытанных чисел Рейнольдса обнаружены колебания с двумя весьма различными по величине амплитудами. Такое изменение амплитуды колебаний при $Re = \text{const}$ наблюдалось как в процессе одного испытания, так и при его дублировании, а также при увеличении и последующем уменьшении скорости потока в трубе.

Отмеченные особенности хорошо видны на рис. 12, где представлены результаты обработки осциллограмм для различных условий испытаний. В турбулизованном потоке максимум колебаний, аналогичный описанному выше, не обнаруживался. По-видимому, режим, характеризующийся скачкообразным аperiodическим изменением аэродинамических сил, возникает только при обтекании гладкого цилиндра потоком с очень низкой степенью турбулентности.

По данным других авторов, максимум колебаний коэффициента подъемной силы достигается в области докритических чисел $Re = 10^5 \div 1,5 \cdot 10^5$ [7—9]. Максимальная величина C_y , по этим данным, существенно зависит от степени загромождения трубы, от турбулентности потока, однако влияние всех факторов достаточно полно еще не изучено.

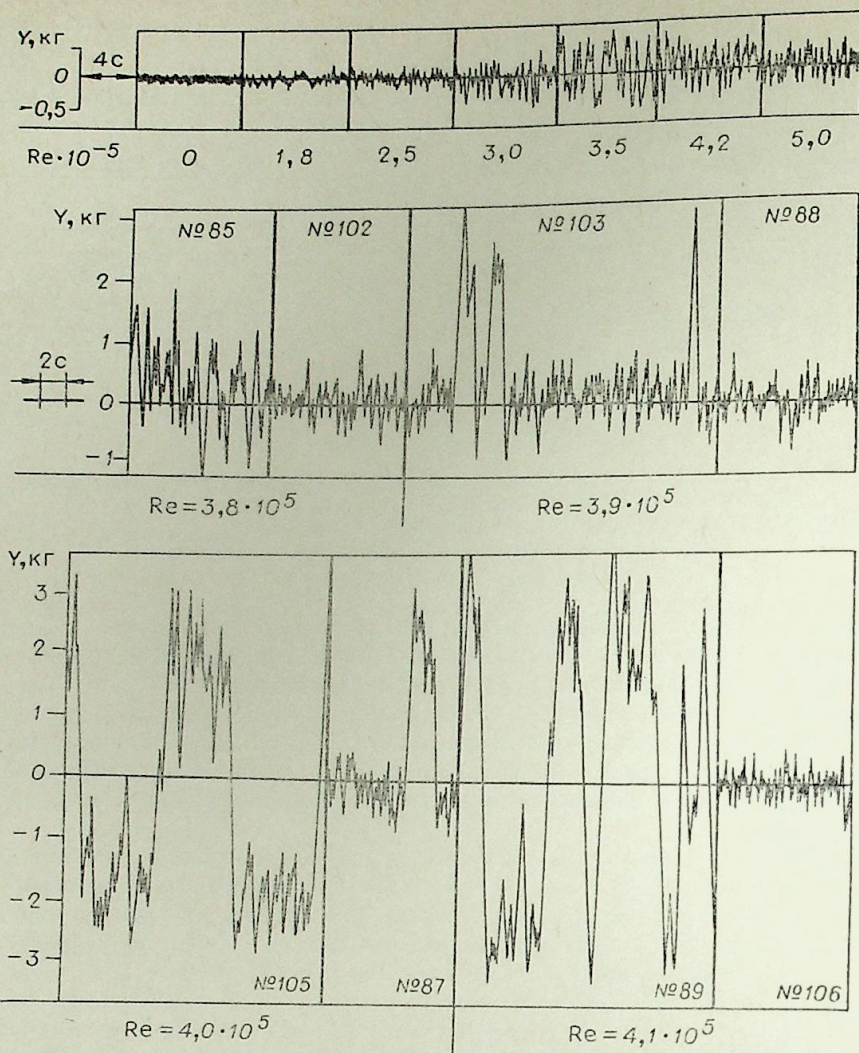


Рис. 11. Характерные осциллограммы мгновенных значений подъемной силы в зависимости от времени при различных числах Рейнольдса ($\varepsilon=0,04\%$, $h=0$).

Для понимания того, как могут изменяться компоненты полной аэродинамической силы, действующей на цилиндр, рассмотрим возможные режимы его обтекания. В критической области чисел Рейнольдса положение точек отрыва пограничного слоя, отмеченное индексами Л (ламинарный отрыв) или Т (турбулентный отрыв), является неустойчивым и течение одного какого-либо вида может скачкообразно переходить в течение другого вида (рис. 13). Вариант *a* соответствует максимальному, а вариант *г* — минимальному значению коэффициента сопротивления. При асимметричном положении точек отрыва возникает подъемная сила, знак которой либо положителен (вариант *б*), либо отрицателен (вариант *в*). Таким образом, могут реализоваться как три различных значения коэффициента сопротивления ($C_{x_{\max}}$, $C_{x_{\min}}$ и $C_{x_{\text{ср}}}$ — некоторое среднее значение), так и три различных значения коэффициента подъемной силы ($C_y=0$, $C_y>0$ и $C_y<0$). Данная схема течения построена с учетом результатов работы [11].

С увеличением турбулентности потока или шероховатости поверхности цилиндра точки отрыва в области $Re_{\text{кр}}$ занимают более устойчивое

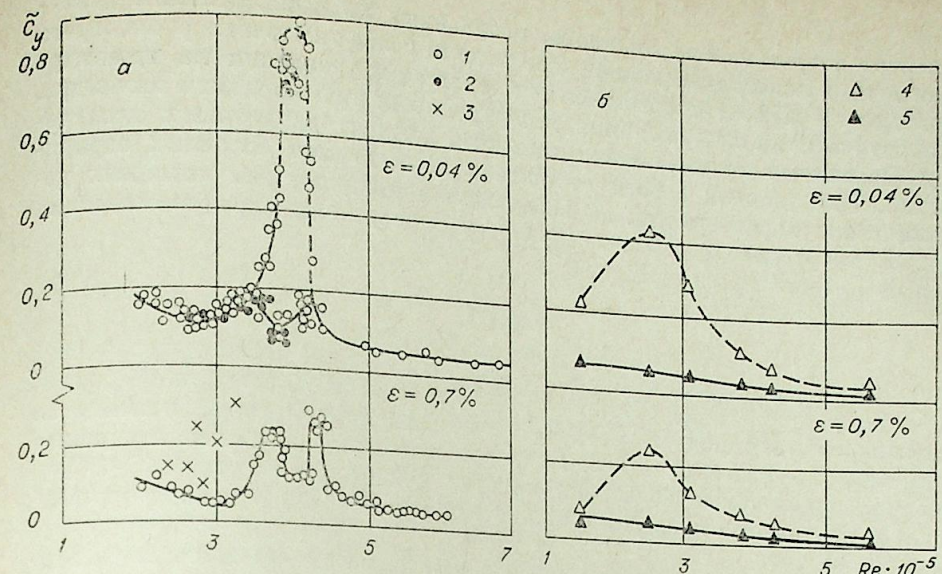


Рис. 12. Максимальная амплитуда колебаний коэффициента подъемной силы в зависимости от числа Рейнольдса при различных условиях.

а) Гладкий цилиндр $h=0$; б) шероховатый цилиндр $h/d=6,7 \cdot 10^{-4}$. Измерения при $\varphi = \text{const}$: 1 — при увеличении U , 2 — при уменьшении, 3 — отдельные выбросы; измерения при $\varphi \text{ var}$: 4 — верхняя граница, 5 — нижняя граница.

положение, диапазон их возможных смещений сужается (см. рис. 3), что и приводит соответственно к уменьшению амплитуды колебаний аэродинамических сил (см. рис. 10, 12).

Отметим, что положение точек отрыва может определяться также отклонениями в геометрии цилиндра от идеальной круговой формы, т. е. наличием различного рода микронеровностей и их расположением относительно набегающего потока. Влияние микронеровностей наиболее заметно на гладком цилиндре в малотурбулентном потоке при критических режимах и подавляется с увеличением степени турбулентности и шероховатости. При испытаниях на гладком цилиндре, имеющем слабую овальность $\Delta = d_{\max} - d_{\min} = 0,06$ мм, амплитуда изменения коэффициентов аэродинамических сил при повороте цилиндра в пределах $\varphi=0 \div 360^\circ$ была соизмерима со значениями C_y и C_x .

В заключение отметим следующее. В данных опытах определена максимальная амплитуда коэффициента пульсаций давления на цилиндре. Для возможности сопоставления с результатами других опытов целесообразно измерять и среднеквадратичную величину пульсаций давления, а также частотный спектр этих пульсаций. Желательно, кроме того, оценить влияние пространственности обтекания цилиндра на его аэродинамические характеристики [5]. Это обстоятельство, в частности, может являться одной из причин отмеченной в опытах разницы коэффици-

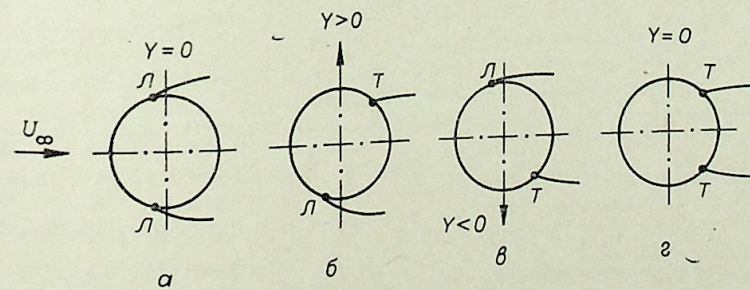


Рис. 13. Схемы отрывных течений при $Re \approx Re_{\text{кр}}$. Л — ламинарный отрыв, Т — турбулентный отрыв.

центов сопротивления цилиндра, полученных по распределению давлений и по весовым измерениям. Необходимо более тщательно рассмотреть возможный эффект взаимодействия пульсаций давления на цилиндре с акустическими возмущениями, генерируемыми при обтекании цилиндра. Названные вопросы могут составить предмет дальнейших исследований. Цель данной работы состояла в исследовании основных аэродинамических характеристик на неподвижном цилиндре как исходных условий, необходимых для последующего определения аэродинамических сил на вращающемся цилиндре.

ВЫВОДЫ

1. При поперечном обтекании гладкого цилиндра малотурбулентным потоком в критической области чисел Рейнольдса обнаружена большая знакопеременная подъемная сила Y , коэффициент сопротивления которой изменяется в пределах $-0,85 \leq C_y \leq 0,85$. Сила сопротивления X также проявляет весьма значительные колебания на этих режимах, так что $0,45 \leq C_x \leq 0,75$. На других режимах колебания сил Y и X гораздо меньше указанных выше.

Данный результат свидетельствует о несимметричном и нестационарном положении точек отрыва пограничного слоя, что подтверждается измерениями давления и его пульсаций вокруг цилиндра.

2. Пульсации давления Δp на поверхности цилиндра увеличиваются, начиная от передней критической точки, и достигают максимальных значений в предотрывной зоне, особенно при критических по числам Рейнольдса режимах для всех четырех рассмотренных вариантов условий.

3. Турбулизация набегающего потока или повышение шероховатости поверхности цилиндра стабилизируют положение точек отрыва, обеспечивая более симметричное обтекание цилиндра. При этом уменьшается критическое число Рейнольдса, снижаются пульсации давления и колебания подъемной силы и силы сопротивления в зоне $Re_{кр}$. Турбулизация потока приводит, кроме того, к уменьшению минимального коэффициента сопротивления гладкого цилиндра в критической зоне.

Институт теоретической
и прикладной механики
СО АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
9/VII 1979

ЛИТЕРАТУРА

- Roshko A. Experiments on the flow past a circular cylinder at very high Reynolds number.— J. of Fluid Mech., 1961, v. 10, part 3.
- Achenbach E. Distribution of local pressure and skin friction around a circular cylinder in cross-flow up to $Re=5 \cdot 10^6$.— J. of Fluid Mech., 1968, v. 34, part 4.
- Achenbach E. Influence of surface roughness on the cross-flow around a circular cylinder.— J. of Fluid Mech., 1971, v. 46, part 2.
- Batham J. P. Pressure distribution on circular cylinders at critical Reynolds numbers.— J. of Fluid Mech., 1973, v. 57, part 2.
- Трещевский В. Н., Волков Л. Д., Короткий А. И. Аэродинамический эксперимент в судостроении. Л., Судостроение, 1976.
- Szchenyi E. Supercritical Reynolds numbers simulation for two-dimensional flow over circular cylinders.— J. of Fluid Mech., 1975, v. 70, part 3.
- Федяевский К. К., Блюмина Л. X. Гидродинамика отрывного обтекания тел. М., Машиностроение, 1977.
- Fung Y. C. Fluctuating lift and drag acting on a cylinder in a flow at supercritical Reynolds numbers.— J. of the Aerospace Sciences, 1960, v. 27, N 11.
- Richter A., Naudascher E. Fluctuating forces on a rigid circular cylinder in confined flow.— J. of Fluid Mech., 1976, v. 78, part 3.
- Беспрозванная И. М., Соколов А. Г., Фомин Г. М. Воздействие ветра на высокие сплошнотенчатые сооружения. М., Стройиздат, 1976.
- Федяевский К. К., Настюкова Г. К. Цилиндрическое тело с интенсивным кризисом сопротивления.— Журн. техн. физики, т. 28, вып. 7.

Н. М. БЫЧКОВ, В. М. КОВАЛЕНКО

АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ СИЛЫ НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ ГЛАДКОМ ЦИЛИНДРЕ В ПОПЕРЕЧНОМ ПОТОКЕ

Вращение тел в потоке жидкости или газа представляет, по существу, процесс управления пограничным слоем, позволяющий получить значительные изменения аэродинамических характеристик обтекаемого тела. Однако в настоящее время конечный результат такого управления во многих случаях трудно предсказуем. Это связано с тем, что течения на движущихся поверхностях, в особенности при наличии градиента давления и отрывов пограничного слоя, изучены явно недостаточно как теоретически, так и экспериментально.

Сложность теоретического исследования характеристик вращающегося тела, даже не имеющего каких-либо особенностей формы, состоит в том, что необходимо учитывать не только воздействие движущейся поверхности и внешнего (невязкого) течения на формирование пограничного слоя, но и обратное влияние образовавшегося асимметричного пограничного слоя на внешний поток, т. е. необходимо принимать во внимание эффекты, которые при отсутствии вращения обычно не являются определяющими. Теоретически такая задача решена только для безотрывного обтекания удлиненного тела вращения, в частности цилиндра, при малых углах атаки.

В данной работе экспериментально исследуется поперечное обтекание вращающегося цилиндра, которое оказывает определяющее влияние на аэродинамические характеристики при всех углах атаки, исключая лишь область безотрывного обтекания, т. е. при $\alpha \rightarrow 0$. Картина течения около вращающегося цилиндра становится более полной с учетом результатов, полученных при тех же условиях для неподвижного цилиндра [1]. Важность таких исследований возрастает в связи со значительным расширением диапазона и способов использования вращающихся тел в современных практических приложениях.

Поперечное обтекание вращающегося цилиндра исследовалось рядом авторов, начиная с первых опытов Робинса (1747), Г. Магнуса (1853), затем М. Лафeya (1910), Е. Рида (1924), А. Тома (1925—1934 гг.) и др. В более поздних работах [2—5 и др.] полученные ранее результаты были уточнены и существенно дополнены. В частности, на некоторых режимах было обнаружено появление большой отрицательной подъемной силы. Предложены также некоторые модели течения, объясняющие полученные результаты. По некоторым характеристикам исследования проведены до значений параметра вращения $\theta = 17$ [2], где θ — отношение окружной скорости вращения к скорости набегающего потока. При этом в области $\theta = 0 \div 0,5$, где коэффициенты аэродинамических сил имеют более сложный вид, чем при $\theta > 0,5$, наблюдается наибольшее рассогласование экспериментальных данных разных авторов. В значительной мере это связано с воздействием таких факторов, как степень турбулентности потока и шероховатость поверхности цилиндра. Некоторое влияние могли оказывать также конструктивные особенности экспериментальных установок.

Отличительные особенности данных испытаний — возможность измерения мгновенных значений аэродинамических сил и очень низкая степень турбулентности падающего потока $\varepsilon = 0,04\%$, что значительно ниже уровня, при котором получены прежние результаты. Часть опытов проведена при повышенной турбулентности потока ($\varepsilon = 0,7\%$). Основное внимание уделено критической области чисел Рейнольдса.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОБОРУДОВАНИЕ И МЕТОДИКА ИСПЫТАНИЙ

Испытания проведены в дозвуковой малотурбулентной аэродинамической трубе ИТМ Т-324 с помощью экспериментального оборудования, которое использовалось также для исследования обтекания неподвижного цилиндра [1]. Трехсекционная конструкция цилиндра позволяла в значительной степени исключить влияние концевых эффектов и рассматривать течение около центральной секции как плоскопараллельное. Для испытаний с вращением цилиндра эта секция, соединенная с тензометрическими весами, имела независимый привод в виде встроеного электродвигателя, который не влиял на показания тензовесов. Боковые секции цилиндра вращались от внешнего электродвигателя. Система синхронизации вращения позволяла исключить механическое взаимодействие центральной секции с боковыми, что повышало точность измерений. Перед испытаниями проводилась динамическая балансировка цилиндра. Амплитуда биений наружной поверхности не превышала 0,02 мм. Резонансная частота колебаний цилиндра составляла около 1,5 Гц при достаточно высоком коэффициенте демпфирования, за счет чего в резонансной области не происходило заметного увеличения амплитуды колебаний. Скорость вращения цилиндра достигала $n = 1600$ об/мин.

С помощью такого устройства измерены мгновенные значения подъемной силы Y_i и силы сопротивления X_i на вращающемся цилиндре при числе $Re = (1 \div 6) \cdot 10^5$ и относительно небольших $\theta \leq 1$ (точнее $\theta \leq 1,2 \cdot 10^5 / Re$). Аэродинамические силы определялись по разности показаний при $\theta > 0$ и $\theta = 0$ или $\theta \rightarrow 0$ (последнее значение использовалось из-за неустойчивого характера сил при $\theta = 0$, особенно в области $Re \rightarrow Re_{кр}$, см. [1]). При обработке результатов учитывались изменения скорости потока, достигавшие 5% за счет загромождения рабочей части трубы и 7% за счет вращения цилиндра.

Результаты измерений представлены в виде коэффициентов аэродинамических сил $C_{y_i} = Y_i / q_i \cdot S$, $C_{x_i} = X_i / q_i \cdot S$, причем

$$C_{x_i} = (C_{x_0})_i + \Delta C_{x_i}, \quad (1)$$

$$\Delta C_{x_i} = \Delta C'_{x_i} - \left[(C_{x_0})_i - (C_{x_0})_0 \cdot \frac{q_0}{q_i} \right], \quad (2)$$

где $(C_{x_0})_i$ и $(C_{x_0})_0$ — коэффициенты сопротивления невращающегося цилиндра при скоростях потока, соответствующих $\theta > 0$ и $\theta = 0$; ΔC_{x_i} — изменение коэффициента сопротивления, обусловленное вращением цилиндра; $\Delta C'_{x_i}$ — измеренное значение ΔC_{x_i} . При скорости потока $U_i(\theta) = \text{const}$ (например, в аэродинамической трубе с открытой рабочей частью) вместо (2) получим $\Delta C'_{x_i} = \Delta C_{x_i}$.

Для проверки повторяемости результатов измерений некоторые режимы неоднократно дублировались (до 3—5 раз). Дорожка разброса экспериментальных данных для коэффициентов аэродинамических сил составляет в основном не более $\pm(0,01 \div 0,02)$ при характерных величинах этих коэффициентов от 0 до $\pm 0,8$. Исключение представляет диапа-

зон чисел $Re \leq 2 \cdot 10^5$ и отдельные неустойчивые режимы, при которых разброс точек может возрастать в 2—3 раза. Погрешность определения U и θ примерно на порядок ниже.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИСПЫТАНИЙ И ИХ АНАЛИЗ

Подъемная сила вращающегося цилиндра. Мгновенные значения подъемной силы Y_i в зависимости от скорости вращения для двух чисел Рейнольдса показаны на осциллограммах рис. 1.

Сила Y_i , действующая на цилиндр, считается положительной, если она направлена в сторону, где поверхность вращающегося цилиндра движется по потоку. Из рис. 1 видно, что в критической области, при $Re = 4,1 \cdot 10^5$, где на неподвижном цилиндре наблюдаются очень большие ну обтекания, колебания подъемной силы существенно уменьшаются. Вне критической области значительного изменения амплитуды колебаний за счет вращения не наблюдается.

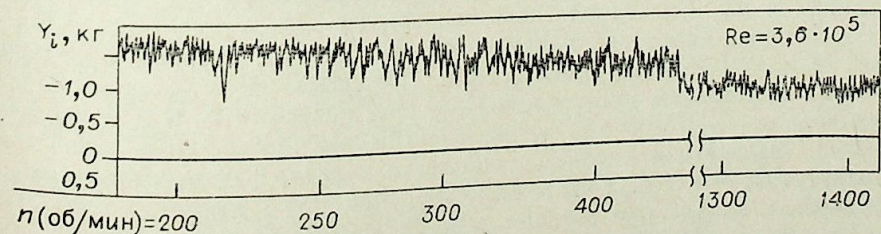
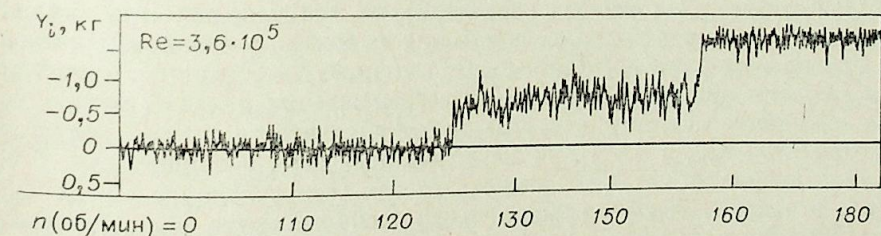
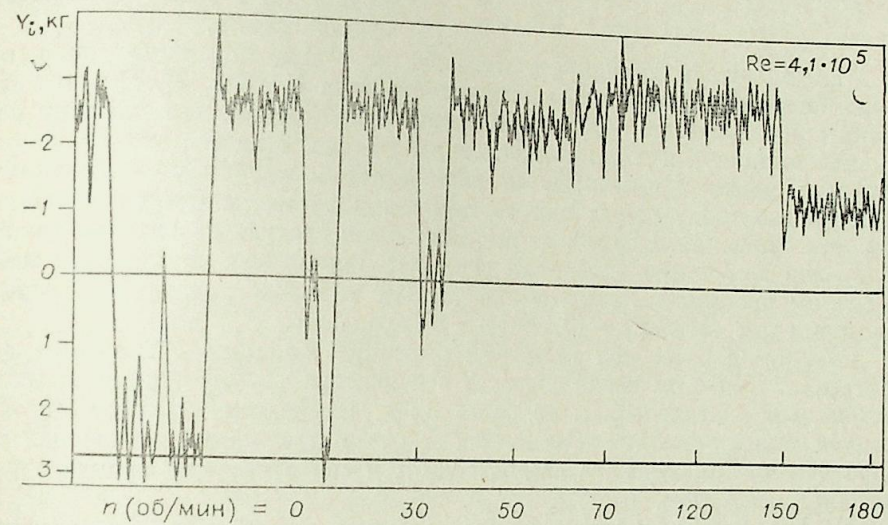


Рис. 1. Осциллограммы изменения подъемной силы на вращающемся гладком цилиндре в малотурбулентном потоке.

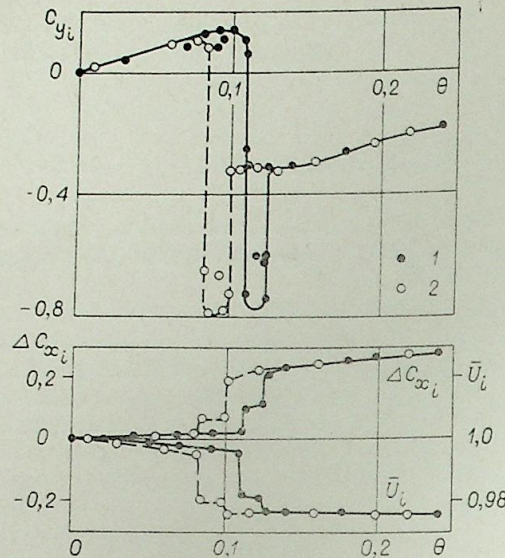


Рис. 2. Характер изменения величин C_{y_i} , ΔC_{x_i} и \bar{U}_i в малотурбулентном потоке при увеличении (1) и уменьшении (2) скорости вращения цилиндра. $Re = 5,3 \cdot 10^5$.

Из осциллограмм видно также, что при некоторых скоростях вращения происходит резкое, скачкообразное изменение подъемной силы. Такое явление наблюдается обычно в двух точках (т. е. при двух значениях θ) и наиболее заметно в закритической области чисел Рейнольдса. При $Re \rightarrow Re_{кр} = 4 \cdot 10^5$ оба скачка сливаются в один, что и видно на верхней осциллограмме.

При вращении цилиндра изменялась не только подъемная сила, но также сила сопротивления X_i и скорость потока U_i (рис. 2). Все эти величины претерпевают синхронные изменения, отражающие картину обтекания цилиндра при данных условиях. На рис. 2 видно, что вращение цилиндра может сопровождаться гистерезисным явлением — несовпадением кривых, полученных при увеличении и последующем уменьшении скорости вращения. Оно может возникать, как следует из опытов, также при различном темпе изменения скорости. Гистерезисные явления наблюдались преимущественно в окрестности скачкообразного изменения сил, начиная с чисел $Re = (3,4 \div 3,6) \cdot 10^5$ и больше.

Скорость потока при вращении цилиндра изменялась довольно существенно. При этом число оборотов вентилятора трубы поддерживалось постоянным с отклонением не более 0,1%. Изменение скорости потока в трубе закрытого типа объясняется тем, что при вращении меняется сопротивление цилиндра, а следовательно, и сопротивление тракта аэродинамической трубы.

На рис. 3 представлены значения относительной скорости потока $\bar{U}_i(\theta)$, измеренной на входе в рабочую часть трубы, при различных числах Рейнольдса. Эти данные характеризуют как условия, при которых проводились измерения сил, действующих на цилиндр, так и в некотором обобщенном виде исследуемые силы и картину обтекания цилиндра. Для гладкого цилиндра при степени загромождения $\sigma = 0,15$ максимальные изменения скорости в случае малотурбулентного потока достигали 7% при $Re < Re_{кр}$ и 3,5% при $Re > Re_{кр}$. При этом в докритической области величина $\Delta \bar{U}_i = \bar{U}_i - 1$ положительная (сопротивление уменьшается), а в закритической — отрицательная (сопротивление увеличивается).

Изменение скорости потока при вращении цилиндра сопровождалось, как и для подъемной силы, появлением одного или двух скачков через θ_1 и θ_2 и назовем критическими. Положение этих скачков зависит от числа Рейнольдса, причем при $Re \rightarrow Re_{кр}$ значения θ_1 и θ_2 стремятся к нулю (рис. 4). Условие $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ определяет критическое число Рейнольдса, которое для гладкого цилиндра в малотурбулентном потоке составляет $Re_{кр} = 4 \cdot 10^5$. Режим $Re = Re_{кр}$ при $\theta = 0$ является очень неустойчивым, однако при $\theta > 0$ этот режим стабилизируется (см. рис. 1).

На рис. 5 представлены сводные данные по коэффициенту подъемной силы C_{y_i} гладкого цилиндра в малотурбулентном потоке. Видно,

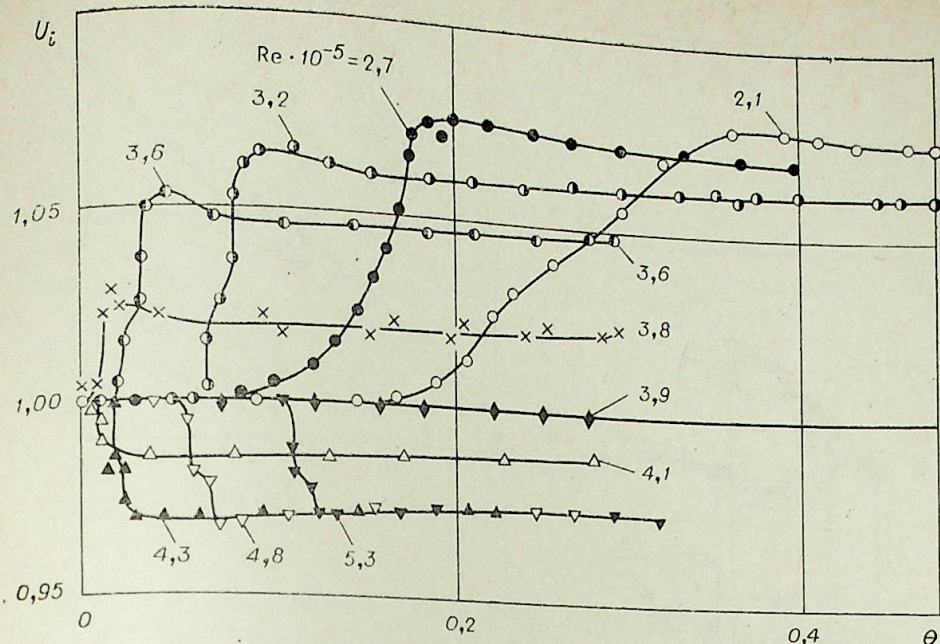


Рис. 3. Изменение скорости потока в малотурбулентной аэродинамической трубе Т-324 при вращении цилиндра.

что характер изменения коэффициентов $C_{y_i}(\theta)$ различен при докритических и закритических режимах. Для закритических режимов характерно появление сравнительно больших отрицательных пиков, которые достигают значений $C_{y_i} = -0,85$ при $Re \rightarrow Re_{кр}$ и $\theta \rightarrow 0$. Таким образом, максимальные значения $|C_{y_i}|$ при указанных условиях оказываются равными максимальным значениям C_y при $\theta = 0$ [1]. Отметим, что отрицательные значения C_{y_i} наблюдаются только при $\theta < 0,5$, при $\theta > 0,5$ всегда $C_{y_i} > 0$.

В потоке с повышенной турбулентностью коэффициент C_{y_i} изменяется более плавно (рис. 6). Такое же влияние турбулентность потока оказывает и на изменение нестационарной подъемной силы неподвижного цилиндра [1]. Более плавное изменение аэродинамических характеристик в турбулентном потоке свидетельствует об отсутствии ярко выраженной границы между ламинарным и турбулентным пограничными слоями. Кроме того, для получения приблизительно одинаковых максимальных отрицательных значений C_{y_i} в турбулизованном потоке необходимы несколько большие скорости вращения цилиндра, чем в малотурбулентном потоке.

Экспериментальные данные позволяют определить некоторые предельные границы — верхнюю и нижнюю, между которыми находятся все возможные значения C_{y_i} (см. рис. 5). При докритических числах Рейнольдса верхней границей является семейство асимптот A_1 , при закритиче-

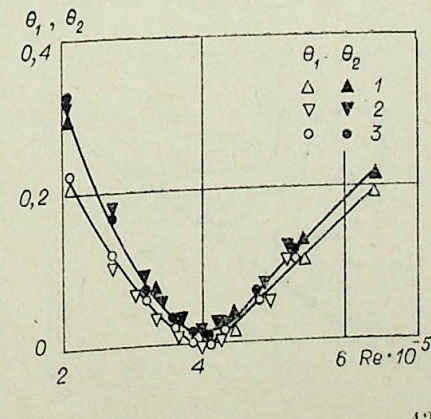


Рис. 4. Критические значения параметра вращения θ , соответствующие скачкообразным изменениям коэффициентов $C_{y_i}(1)$, $\Delta C_{x_i}(2)$ и $\bar{U}_i(3)$.

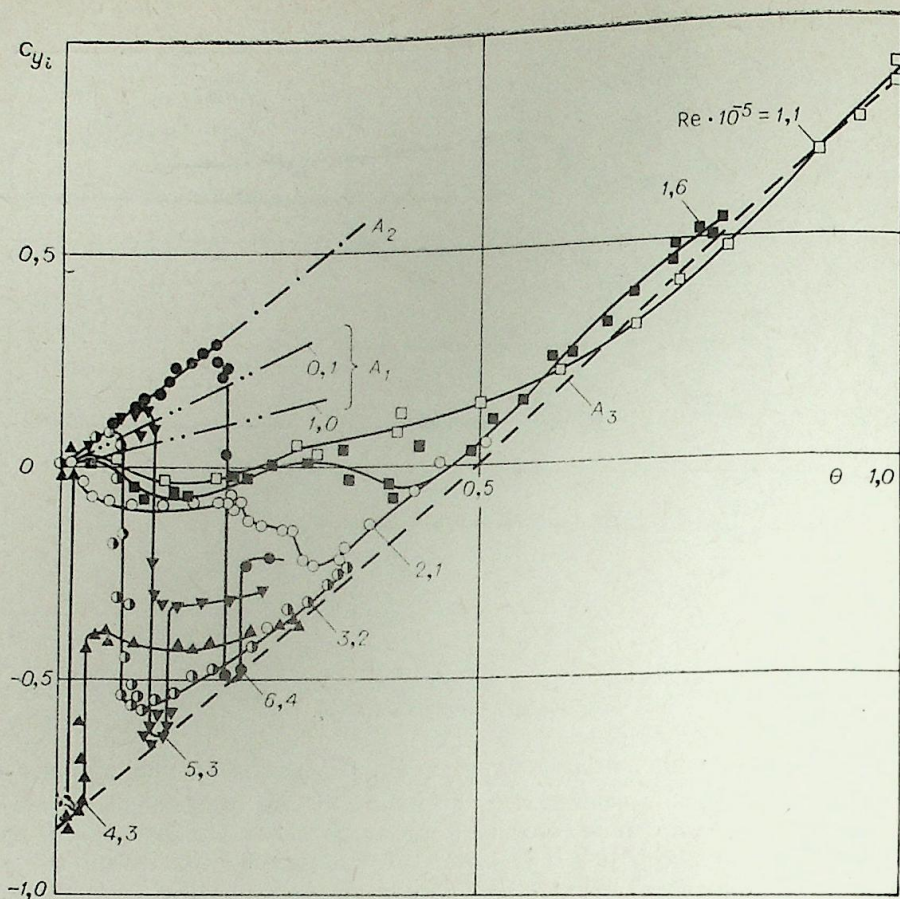


Рис. 5. Коэффициент подъемной силы гладкого цилиндра при вращении в малотурбулентном потоке.

ских — асимптота A_2 . Нижней границей при всех режимах является асимптота A_3 . При увеличении параметра θ значения C_{y_i} находятся сначала на одной из верхних асимптот A_1 или A_2 , затем переходят на асимптоту A_3 , при этом коэффициенты C_{y_i} перестают зависеть от числа Рейнольдса. Отметим, что при $Re \rightarrow Re_{кр}$ переход с верхней асимптоты на нижнюю наступает при очень малых скоростях вращения, т. е. при $\theta \rightarrow 0$.

В случае малотурбулентного потока асимптота A_1 приближенно аппроксимируется зависимостью

$$C_{y_i} = (1,2 - 0,002\sqrt{Re}) \cdot \theta, \quad (3)$$

справедливой, по крайней мере, в области $10^4 \leq Re \leq 2 \cdot 10^5$ [6]. Для параметра θ имеющиеся данные позволяют указать границы применимости лишь в виде $0 \leq \theta \leq K\theta_1$, где $0 < K < 1$.

При $Re \geq 3 \cdot 10^5$ значения $C_{y_i}(\theta)$ стремятся к асимптоте A_2 , имеющей вид

$$C_{y_i} = 1,6 \cdot \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_1. \quad (4)$$

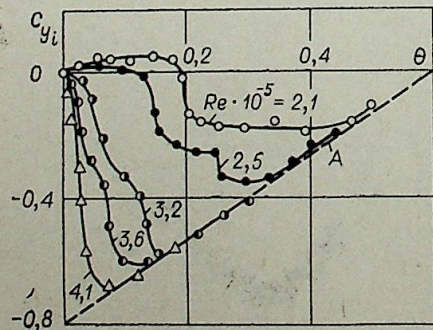


Рис. 6. Коэффициент подъемной силы гладкого цилиндра при вращении в турбулизованном потоке.

Нижняя асимптота A_3 может быть представлена в виде

$$C_{y_i} = a + b \cdot \theta, \quad \theta > \theta_1, \quad (5)$$

где $a = -0,85$, $b = 1,7$ — в случае малотурбулентного потока и $a = -0,8$, $b = 1,33$ — для турбулизованного потока. В последнем случае асимптота положительным только при $\theta > 0,6$ (в малотурбулентном потоке — при $\theta > 0,5$). Соотношения (3)–(5) зависят не только от степени турбулентности потока, но, по-видимому, и от шероховатости цилиндра.

Интересно отметить, что коэффициент a , который представляет, с одной стороны, предельное значение C_{y_i} при $Re \rightarrow Re_{кр}$, $\theta \rightarrow 0$, должен быть равен одновременно величине $-(\tilde{C}_y)_{\max}$ при $\theta = 0$ [1]. Для малотурбулентного потока это условие выполняется, т. е.

$$C_{y_i}|_{\theta \rightarrow 0} = -\tilde{C}_y|_{\theta=0} = -0,85 \text{ при } Re \rightarrow Re_{кр}. \quad (6)$$

Однако для турбулизованного потока при таких же условиях имеем

$$-C_{y_i}|_{\theta \rightarrow 0} = 0,8 > \tilde{C}_y|_{\theta=0} = 0,3. \quad (7)$$

Это свидетельствует о том, что из двух ветвей $\tilde{C}_y|_{\theta=0}$, наблюдаемых в малотурбулентном потоке при $Re \rightarrow Re_{кр}$, верхняя ветвь ($\tilde{C}_y \rightarrow 0,85$) в турбулизованном потоке при $\varepsilon = 0,7\%$ полностью отсутствует. Однако при вращении цилиндра даже с очень малой скоростью это или близкое к нему значение может быть снова реализовано, в частности (см. рис. 6)

$$C_{y_i} \rightarrow -0,8 \text{ при } \theta = 0,05 \text{ и } Re \rightarrow Re_{кр}. \quad (8)$$

В малотурбулентном потоке значения θ , при которых достигается максимум C_{y_i} , будут еще меньше

$$C_{y_i} \rightarrow -0,85 \text{ при } 0,01 < \theta < 0,02 \text{ и } Re = 4,1 \cdot 10^5. \quad (9)$$

Обнаруженный эффект, по-видимому, может быть использован в практических приложениях для получения сравнительно большой подъемной силы путем придания цилиндру относительно малой угловой скорости (в пределе $\theta \rightarrow 0$ при $Re \rightarrow Re_{кр}$).

На рис. 7 представлены результаты сравнения коэффициентов C_{y_i} по данным различных авторов. Видно, что наилучшее совпадение результатов наблюдается при $\theta > 0,5$, где кривые $C_{y_i}(\theta)$ мало зависят от числа Рейнольдса. При $\theta < 0,5$ значения $C_{y_i}(\theta)$ сильно зависят не только от

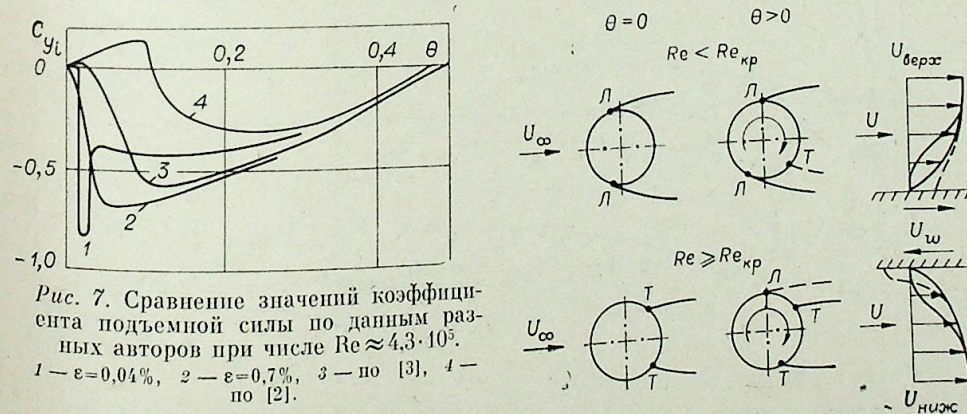


Рис. 7. Сравнение значений коэффициента подъемной силы по данным различных авторов при числе $Re \approx 4,3 \cdot 10^5$. 1 — $\varepsilon = 0,04\%$, 2 — $\varepsilon = 0,7\%$, 3 — по [3], 4 — по [2].

Рис. 8. Положение точек отрыва и профили скоростей в пограничном слое на цилиндре.

Re, но также от степени турбулентности потока, шероховатости поверхности и других условий, в том числе от конструкции цилиндра. Поэтому результаты, полученные в разных условиях, могут существенно отличаться друг от друга (см. рис. 7).

Особенности поведения коэффициента $C_{yi}(\theta)$, в частности изменение его знака, определяются положением точек отрыва пограничного слоя. На рис. 8 представлены схемы возможных положений точек отрыва при $\theta \geq 0$ с учетом данных, полученных при $\theta = 0$ [1]. Видно, что при вращении цилиндра может появиться как положительная, так и отрицательная подъемная сила. Отрицательной подъемной силой L — на верхушке цилиндра и T — на нижней стороне как для докритических, так и для закритических чисел Рейнольдса. Режимы, отмеченные штриховыми линиями, реализуются либо за счет перехода пограничного слоя из ламинарного состояния в турбулентное на нижней стороне при $Re < Re_{кр}$, либо, наоборот, из турбулентного состояния в ламинарное на верхней стороне при $Re \geq Re_{кр}$.

На рис. 8 показаны также возможные профили скоростей в пограничном слое на верхней и нижней стороне цилиндра при $\theta \geq 0$ (штриховой линии соответствует случай $\theta > 0$). Видно, что движение поверхности цилиндра по потоку или против него способствует либо большей устойчивости пограничного слоя при переходе из ламинарного состояния в турбулентное (верхняя сторона цилиндра), либо ускоряет этот переход (нижняя сторона). Форма профиля скорости в значительной мере определяет отмеченные выше изменения положения точек отрыва и в конечном счете знак коэффициента C_{yi} .

Схемы, изображенные на рис. 8, построены с учетом данных [2] и других работ и представляют некоторое дальнейшее развитие основных положений, имеющих в литературе по рассматриваемому вопросу.

Сопротивление вращающегося цилиндра. Коэффициент сопротивления C_{xi} вращающегося цилиндра может быть представлен в виде

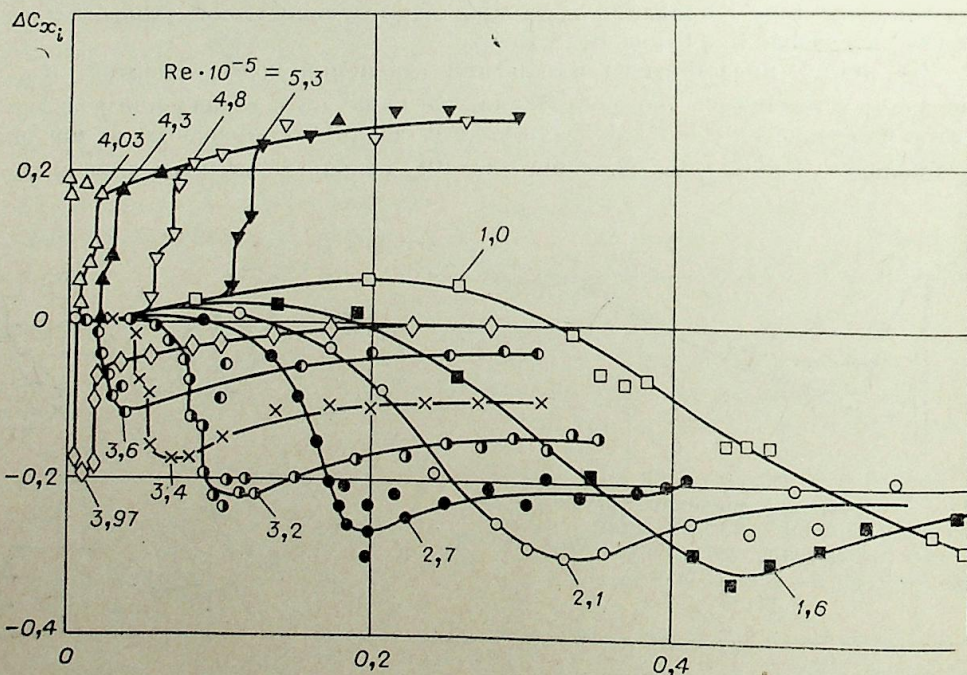
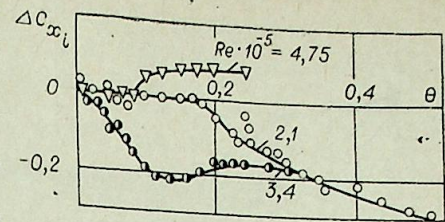


Рис. 9. Коэффициент дополнительного сопротивления, создаваемого вращением гладкого цилиндра в малотурбулентном потоке.

Рис. 10. Коэффициент дополнительного сопротивления, создаваемого вращением гладкого цилиндра в турбулизованном потоке.



суммы двух слагаемых — C_{x_0} и ΔC_{xi} [см. (1)], из которых величина ΔC_{xi} определялась по измерениям при $\theta > 0$, а величина C_{x_0} — по данным при $\theta = 0$ [1].

Основные результаты измерений величины ΔC_{xi} в зависимости от Re и θ при двух степенях турбулентности потока показаны на рис. 9 и 10. Видно, что характер изменения кривых $\Delta C_{xi}(\theta)$ существенно зависит от числа Рейнольдса: при $Re < Re_{кр}$ коэффициенты ΔC_{xi} в основном только отрицательны; при $Re > Re_{кр}$, наоборот, $\Delta C_{xi} > 0$. Переход к положительным значениям в случае малотурбулентного потока хорошо виден на рис. 9: при $Re = 3,97 \cdot 10^5 < Re_{кр}$ коэффициент $\Delta C_{xi} < 0$, но уже при $Re = 4,03 \cdot 10^5 > Re_{кр}$ коэффициент $\Delta C_{xi} > 0$.

Отмеченные особенности поведения коэффициента ΔC_{xi} , как и C_{yi} , связаны с положением точек отрыва. Из схемы на рис. 8 следует, что при $Re < Re_{кр}$ переход точки отрыва на нижней стороне цилиндра из положения L в T сопровождается не только появлением большой отрицательной подъемной силы, но одновременно и уменьшением силы сопротивления ($\Delta C_{xi} < 0$). При $Re > Re_{кр}$ переход точки отрыва на верхней стороне цилиндра из положения T в L сопровождается увеличением сопротивления ($\Delta C_{xi} > 0$). Подъемная сила в этом случае либо отрицательна ($Re \rightarrow Re_{кр}$), либо резко уменьшается ($Re \gg Re_{кр}$).

Из рис. 9 видно, что вращение цилиндра в малотурбулентном потоке сопровождается при некоторых числах Рейнольдса скачкообразными изменениями коэффициента ΔC_{xi} — аналогично коэффициенту C_{yi} (см. рис. 5) и скорости \bar{U}_i (см. рис. 3), причем такие изменения происходят при одинаковых значениях параметра $\theta(Re)$, указанных на рис. 4.

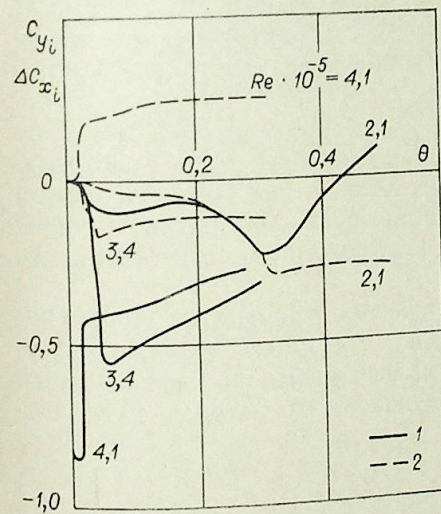


Рис. 11. Сопоставление коэффициентов подъемной силы C_{yi} (1) и дополнительного сопротивления ΔC_{xi} (2) вращающегося гладкого цилиндра в малотурбулентном потоке.

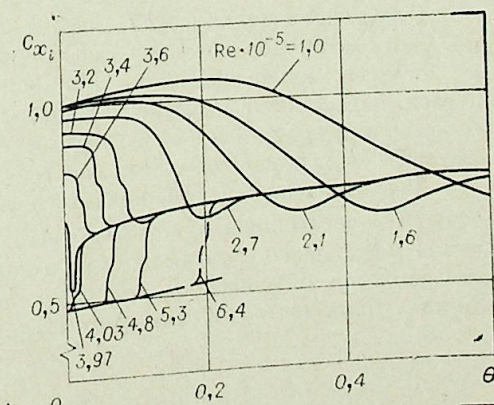


Рис. 12. Осредненные значения коэффициента сопротивления вращающегося цилиндра в малотурбулентном потоке.

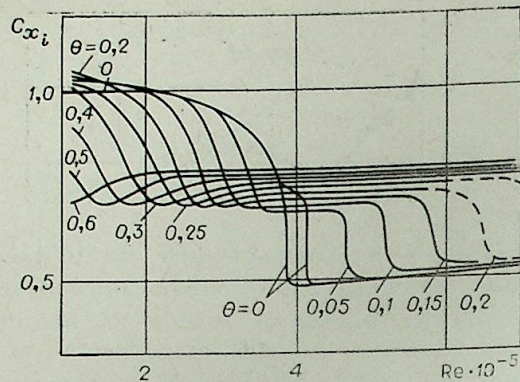


Рис. 13. Осредненные значения $C_{x_i}(Re)$ при $\theta = \text{const}$ в малотурбулентном потоке.

Сопоставление кривых $\Delta C_{x_i}(\theta)$ и $C_{y_i}(\theta)$ для нескольких значений числа Рейнольдса приведено на рис. 11.

Отметим также, что в области скачкообразного изменения коэффициента ΔC_{x_i} из-за неустойчивого положения точек отрыва при таких режимах могут наблюдаться колебания

силы сопротивления. Значения $|\Delta C_{x_i}|_{\text{max}}$ в зависимости от числа Рейнольдса хорошо коррелируют с коэффициентом C_{x_0} .

Для практики представляет интерес вопрос о полной величине сопротивления вращающегося цилиндра. Такие данные для случая гладкого цилиндра в малотурбулентном потоке приведены на рис. 12 и 13. Видно, что за счет вращения может быть достигнуто уменьшение сопротивления цилиндра до 30% в докритической области или, наоборот, увеличение его до 60% в закритической области. С увеличением скорости вращения в рассмотренном диапазоне параметров коэффициент C_{x_i} стремится к некоторой асимптоте и достигает значений, близких 0,8. При $\theta \rightarrow 0$ асимптотическое значение коэффициента C_{x_i} равно примерно 0,6. Этот вывод качественно согласуется с данными [2] для $\theta \leq 1,5$. Асимптотическая кривая может быть представлена в виде

$$C_{x_i} = 0,6 + 0,23 \cdot \theta^{1/3}. \quad (10)$$

По виду зависимостей $C_{x_i}(Re)$ при $\theta = \text{const}$ (см. рис. 13) весь исследованный диапазон чисел Рейнольдса можно разделить на две области: 1) область, где $C_{x_i} \approx C_{x_0}$, т. е. вращение не оказывает существенного влияния на коэффициент сопротивления; 2) область, где коэффициент C_{x_i} определяется асимптотой (10), т. е. близок к некоторой постоянной величине. Переход от одной области к другой происходит на довольно крутом участке кривой $C_{x_i}(Re)$ при числах Рейнольдса, определяющих критические значения θ_1 и θ_2 .

Сказанное означает, что в первой области реализуется либо ламинарное асимметричное обтекание цилиндра при $Re < Re_{кр}$, либо турбулентное асимметричное обтекание при $Re > Re_{кр}$. Во второй области реализуется обтекание смешанного типа, при котором на одной стороне цилиндра пограничный слой отрывается в ламинарном состоянии, а на другой — в турбулентном (см. рис. 8).

Результаты по коэффициенту сопротивления C_{x_i} вращающегося цилиндра качественно согласуются с данными работ [2, 3, 5], но количественно несколько отличаются. Как и для коэффициента подъемной силы, эти отличия обусловлены степенью турбулентности потока, шероховатостью цилиндра и другими факторами.

ВЫВОДЫ

1. Установлены некоторые основные закономерности обтекания вращающегося цилиндра поперечным потоком. В частности, определена сила сопротивления и подъемная сила в зависимости от числа $Re = 10^5 \div 6 \cdot 10^5$ и параметра вращения $\theta \leq 1,2 \cdot 10^5/Re$. Предложена схема

течения, объясняющая отличия в поведении коэффициентов C_{y_i} и C_{x_i} при до- и закритических числах Рейнольдса. Для оценки этих коэффициентов получены аппроксимирующие зависимости.

2. В потоке с очень низкой турбулентностью ($\epsilon = 0,04\%$) обнаружены резкие изменения подъемной силы, соизмеримые по величине с сильных точек отрыва пограничного слоя. Наибольшие изменения C_{y_i} происходят при $\theta \rightarrow 0$ и $Re \rightarrow Re_{кр}$. Максимальные значения C_{y_i} достигаются, однако, в относительно узком диапазоне значения C_{y_i} реализации вращения θ . Данный эффект, не отмеченный в известной литературе, может найти практические приложения.

Обнаружен гистерезис функций $C_{y_i}(\theta)$ и $C_{x_i}(\theta)$ в области резкого их изменения. Показано, что вращение стабилизирует картину течения около цилиндра в критической области чисел Рейнольдса и уменьшает колебания аэродинамических сил.

3. Коэффициент сопротивления вращающегося цилиндра в докритической области уменьшается до 30%, а в закритической области, наоборот, возрастает до 60% от соответствующих значений C_{x_0} , приближаясь к величине $C_{x_i} = 0,8$.

4. Увеличение степени турбулентности потока приводит к более плавному изменению коэффициентов аэродинамических сил за счет более устойчивого положения точек отрыва.

Институт теоретической
и прикладной механики
СО АН СССР, Новосибирск

Поступила в редакцию
9/VII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Бычков Н. М., Коваленко В. М. Аэродинамические характеристики кругового цилиндра в поперечном потоке.— Изв. СО АН СССР, постоянный номер журнала.
2. Свенсон В. М. Эффект Магнуса: обзор результатов исследования.— Техн. механика, 1961, № 3.
3. Griffiths R. T., Ma C. Y. Differential boundary-layer separation effects in the flow over a rotating cylinder.— The Aeron. J. of Royal Aeron. Soc., 1969, v. 73.
4. Fletcher C. A. J. Negative Magnus forces in the critical Reynolds number regime.— J. Aircraft, 1972, v. 9, N 12.
5. Tanaka H., Nagano S. Study of flow around a rotating circular cylinder.— Bull. of JSME, 1973, v. 16, N 92.
6. Бычков Н. М., Коваленко В. М. Аэродинамические характеристики вращающихся и невращающихся осесимметричных тел.— В кн.: Физическая газодинамика. Новосибирск, ИТПМ, 1976.

И. В. СТУРОВА, В. А. СУХАРЕВ

ГЕНЕРАЦИЯ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В ТЕРМОКЛИНЕ

Для океанов, морей и других водоемов характерно изменение плотности по глубине, причем, как правило, это распределение является устойчивым, т. е. плотность возрастает с глубиной. Любое возмущение в таких стратифицированных жидкостях, находящихся в поле силы тяжести, приводит к возникновению внутренних гравитационных волн. В отличие от поверхностных волн максимальные амплитуды внутренних волн достигаются внутри жидкости.

В связи с изучением различных геофизических явлений представляет интерес исследование характеристик внутренних волн, генерируемых различными типами возмущений: неровностями дна, подводными или атмосферными возмущениями. Анализ этих задач выполняется по единой методике [1]. Исследованию внутренних волн посвящены монографии [2, 3].

В данной работе рассмотрены внутренние волны, возникающие при обтекании погруженной системы точечных источника и стока равной интенсивности. На наш взгляд, исследование внутренних волн от подводных возмущений представляет наибольший интерес, так как в этом случае имеется дополнительный параметр — глубина погружения, который существенно влияет на картину внутренних волн. Исследование внутренних волн выполнено в линейной постановке, т. е. предполагается, что волновые возмущения, вызванные наличием особенностей, малы. Считается, что для слабо стратифицированной жидкости обтекание такой системы особенностей (аналогично случаю безграничной однородной жидкости) эквивалентно обтеканию осесимметричного тела. Радиус миделева сечения тела R , удлинение его d и скорость основного потока U однозначно определяют интенсивность источника m и расстояние между особенностями $2a$ (отрезок прямой, соединяющий особенности, параллелен направлению основного потока). Стратификация жидкости предполагается слабой в том смысле, что длина внутренних волн, возникающих за телом, велика по сравнению с максимальным размером тела. В этом случае течение в окрестности тела в первом приближении является потенциальным [4, 5] и совпадающим с течением в однородной безграничной жидкости. Влияние стратификации проявляется в основном за телом в дальнем поле на расстояниях, сравнимых с длиной внутренних волн.

Линеаризованные стационарные уравнения движения несжимаемой стратифицированной жидкости без учета вязкости и диффузии в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{u} &= m[\delta(x+a) - \delta(x-a)] \cdot \delta(y+h) \cdot \delta(z), \\ \rho_0 U \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} &= -\nabla p + \rho \vec{F}, \\ U \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho'_0(y) v &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\vec{u} = (u, v, w)$, p, ρ — возмущения вектора скорости, давления и плотности, вызванные наличием особенностей в первоначально невозмущенном течении, $\rho_0(y)$ — плотность жидкости в невозмущенном состоянии, x и z лежат в горизонтальной плоскости, причем направление вектора скорости жидкости далеко вверх по потоку совпадает с направлением оси x , ось y направлена вертикально вверх, $\vec{F} = (0, -g, 0)$ — вектор массовых сил, g — ускорение силы тяжести, h — глубина погружения особенностей, δ — дельта-функция Дирака, штрих означает дифференцирование по y .

Функция $\eta(x, y, z)$, определяющая вертикальные смещения жидкой частицы, удовлетворяет линеаризованному условию $\partial \eta / \partial x = v / U$. Уравнение (1) можно свести к одному уравнению, например для функции v

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta v + \frac{g \rho'_0(y)}{\rho_s U^2} \Delta_2 v = m \cdot \delta(z) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \delta(y+h) \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\delta(x+a) - \delta(x-a)], \quad (2)$$

где Δ и Δ_2 — соответственно трехмерный и двумерный (по x и z) операторы Лапласа. В силу того, что в реальных условиях стратификация является слабой, использовано приближение Буссинеска, при котором значения ρ_s учитываются только в члене, описывающем плавучесть, в инерционных же членах действительная плотность заменяется значением ρ_s . Следует отметить, что введение этого приближения не является принципиальным, а не используется здесь для более краткой записи последующих результатов.

В настоящее время решение уравнения (2) с соответствующими граничными условиями известно лишь для некоторых частных случаев распределения $\rho_0(y)$, допускающих аналитическое решение. Однако использование современных ЭВМ позволяет получить численные решения для произвольной непрерывной функции $\rho_0(y)$. Решение соответствующей плоской задачи изложено в [6].

В данной работе этот метод распространен на пространственный случай. В качестве примера распределения плотности в невозмущенном состоянии выбрана модель термоклина, т. е. изменение плотности происходит лишь в слое конечной толщины (причем градиент плотности имеет единственный максимум), а вне этого слоя плотность остается постоянной. Такое распределение плотности характерно для реальных морей и океанов. Первой попыткой исследования внутренних волн в термоклин можно считать изучение случая двухслойной жидкости со скачком плотности. Нами исследовано влияние толщины термоклина на поведение внутренних волн и выполнено сравнение с решением для двухслойной жидкости. Для простоты жидкость предполагается безграничной. Функция $\rho_0(y)$ имеет вид

$$\rho_0(y) = \rho_s \begin{cases} 1 & (y \geq b) \\ 1 + \frac{\varepsilon}{2b} \left(b - y - \frac{b}{\pi} \sin \frac{\pi y}{b} \right) & (-b < y < b) \\ 1 + \varepsilon & (y \leq -b). \end{cases} \quad (3)$$

При таком распределении плотности отношение $\rho_0(-b)/\rho_0(b) = 1 + \varepsilon$ сохраняется постоянным, независящим от толщины термоклина, которая равна $2b$. Граничные условия в (1) будут иметь вид $u, w, p, \rho \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty, v \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \pm \infty, z \rightarrow \pm \infty, x \rightarrow \infty$, а в уравнении (2) — $v \rightarrow 0$ при $x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty$. Решение задачи (2) можно найти с помощью преобразования Фурье по переменным x и z с вещественными параметрами μ и ν соответственно. Для функции f — двойного фурье-образа v получим

обыкновенное дифференциальное уравнение $f'' - k^2[1 - \gamma(y)/\mu^2]f = 2im \cdot \sin \mu a \cdot \delta'(y+h)$, $f \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \pm \infty$, где $k^2 = \mu^2 + \nu^2$, $\gamma(y) = \Lambda |\rho'_0(y)|/\rho_0$, $\Lambda = gRU^2$. Здесь введены безразмерные переменные, причем за масштабные единицы длины и скорости приняты величины R и U .

Используя результаты решения плоской задачи [6] и учитывая, что основной интерес представляет исследование внутренних волн на больших расстояниях от источника возмущения (см. [7]), искомое решение для функции η получим в виде

$$\eta(r, \varphi, y) = -\frac{m}{\pi} \sum_{n=1}^N \left\{ \int_0^{\pi/2} P_n \cdot \sin [rk_n \sin(\theta + \varphi)] d\theta + \int_{\varphi}^{\pi/2} P_n \cdot \sin [rk_n \sin(\theta - \varphi)] d\theta \right\}, \quad (4)$$

где

$$P_n = \frac{\sin(ak_n \sin \theta)}{k_n \sin \theta} \cdot \frac{W'(k_n, \theta, -b) \cdot W(k_n, \theta, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} W^2(k_n, \theta, y) dy}$$

и произведена замена переменных $\mu = k \cdot \sin \theta$, $\nu = k \cdot \cos \theta$, $x = r \cdot \cos \varphi$, $z = r \cdot \sin \varphi$.

Функция $W(k, \theta, y)$ является собственной функцией задачи Штурма — Лиувилля

$$W'' + \kappa \gamma(y)W = \lambda W, \quad (5)$$

$$W' \pm \sqrt{\lambda} W = 0 \text{ при } y = \pm b, \quad \kappa = \sin^2 \theta,$$

с $\lambda = k^2$ в роли спектрального параметра, при $|y| > b$ $W(k, \theta, y) = e^{-k|y|}$. Выражения для других характеристик течения имеют аналогичный вид [7].

В данной задаче, в отличие от плоской, собственные числа λ являются функцией параметра κ . Для заданного значения κ имеется конечное число положительных собственных чисел λ_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), число которых растет с увеличением κ (подробнее см. [8]).

Асимптотические оценки интегралов в (4) при $r \rightarrow \infty$ показывают, что основной вклад порядка $O(r^{-1/2})$ вносит второй интеграл, так как только он имеет стационарные точки в интервале интегрирования. Вклад первого интеграла имеет порядок не ниже $O(r^{-1})$, что можно доказать следующим образом. Стационарные точки определяются из уравнения $\Psi'(\theta) = 0$, где $\Psi(\theta) = k_n(\theta) \sin(\theta \pm \varphi)$ можно привести к виду $\text{tg } \varphi = \pm \Phi(\theta)$, здесь

$$\Phi(\theta) = \frac{\text{tg } \theta \cdot dk_n/d\theta + k_n}{dk_n/d\theta - k_n \cdot \text{tg } \theta} = \frac{\kappa^2 \sqrt{\kappa - 1} d(\lambda_n/\kappa)/d\kappa}{\kappa(\kappa - 1) d\lambda_n/d\kappa + \lambda_n}.$$

В [8] показано, что $d(\lambda_n/\kappa)/d\kappa > 0$, следовательно, $\Phi(\theta) > 0$ при всех значениях θ ($0 < \theta < \pi/2$), и стационарные точки при $0 < \varphi < \pi/2$ может иметь только второй интеграл в (4), для которого $\Psi(\theta) = k_n(\theta) \sin(\theta - \varphi)$. Однако непосредственное использование метода стационарной фазы для вычисления этого интеграла затруднительно, так как функция $\Psi(\theta)$ может иметь в общем случае несколько экстремальных точек в интервале интегрирования, причем трудно предсказать заранее их число и характер.

Метод решения данной задачи реализован численно и состоит из трех этапов: 1) определение положительных собственных значений λ_n при $\lambda = 0$ для заданного числа волновых мод; 2) нахождение зависимостей $\lambda_n(\kappa)$; 3) выполнение численного интегрирования (4) аналогично [7].

Численные расчеты были выполнены при следующих значениях исходных параметров: $\Lambda = 10$, $\varepsilon = 0,01$. При вычислении собственных значений $\lambda_n(\kappa)$ задачи (5) удобно ввести преобразование Приюфера

$$W(y) = e^{\psi(y)} \sin \omega(y), \quad (6)$$

$$W'(y) e^{\psi(y)} \cos \omega(y).$$

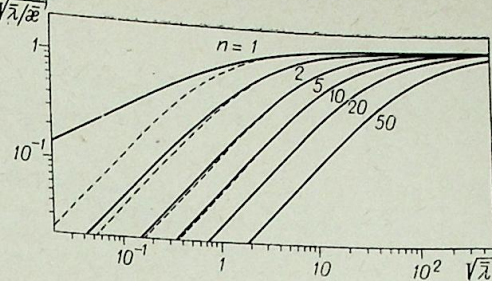


Рис. 1.

Затем выполним замену $\bar{y} = y/b$ (позволяющую исключить явную зависимость от b) и воспользуемся симметрией данной задачи, в результате чего для определения собственных значений получим следующую краевую задачу:

$$\omega' = 1 + [\bar{\kappa}(1 + \cos \pi \bar{y}) - \bar{\lambda} - 1] \sin^2 \omega, \quad (7)$$

$\omega = \text{arctg}(1/\sqrt{\bar{\lambda}})$ при $\bar{y} = -1$, $\omega = n\pi/2$ при $\bar{y} = 0$, где $\lambda = \lambda b^2$,

$\bar{\kappa} = \kappa \Lambda b \varepsilon / 2$. Для численного решения уравнения (7) применялся метод Рунге — Кутты — Мерсена четвертого порядка точности с автоматическим выбором шага, уточнение полученных собственных чисел производилось методом пристрелки. Относительная точность при решении дифференциального уравнения равнялась 10^{-6} , при пристрелке — 10^{-5} . Ниже приведены первые десять значений $\lambda_n(0)$, характеризующие величины углов, в которых заключены соответствующие волновые моды

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lambda_n(0)$	0,4	3,909	14,997	31,708	54,497	83,412	118,39	159,48	206,66	259,86

На рис. 1 сплошными линиями представлены дисперсионные зависимости, связывающие частоты и волновые числа, для некоторых мод волнового движения ($n = 1, 2, 5, 10, 20, 50$). Для сравнения штриховой линией показаны соответствующие дисперсионные кривые, вычисленные по методу ВКБ, который используется для приближенного решения задачи Штурма — Лиувилля и дает количественно точные результаты при $\bar{\lambda} \gg 1$ (см., например, [5]). Для заданного профиля плотности (3) метод ВКБ дает следующие соотношения для собственных чисел:

$$\int_0^{y_0} \sqrt{\bar{\kappa}(1 + \cos \pi y) - \bar{\lambda}_n} dy = (2n - 1) \pi / 4,$$

где

$$y_0 = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\pi} \arccos(1 - \bar{\lambda}_n/\bar{\kappa}) & \text{при } \bar{\lambda}_n/\bar{\kappa} \leq 1, \\ \frac{1}{\pi} \arccos(\bar{\lambda}_n/\bar{\kappa} - 1) & \text{при } \bar{\lambda}_n/\bar{\kappa} > 1. \end{cases}$$

Из рис. 1 видно, что, начиная с пятой моды, результаты обоих решений становятся очень близкими (при $n = 20$ и 50 они совпадают).

Зная универсальные зависимости $\bar{\lambda}_n(\bar{\kappa})$, легко построить дисперсионные кривые для волновых мод при различных значениях толщины терплого клина. На рис. 2 представлены эти кривые для первых трех мод при $b/R = 0,1; 1; 10$. Штриховой линией на этом рисунке показана дисперсионная кривая для двухслойной жидкости со скачком плотности, равным ε , что является пределом распределения (3) при $b \rightarrow 0$. В этом случае волновое движение обладает единственной модой, для которой

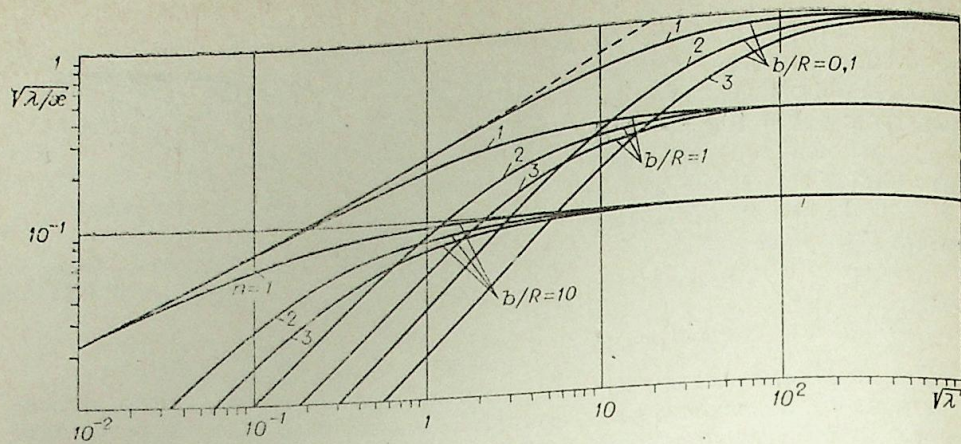


Рис. 2.

$\lambda = [\epsilon \Lambda k / (2 + \epsilon)]^2$. Видно, что чем меньше значение b , тем больше первая мода совпадает с дисперсионной кривой для двухслойной жидкости.

Расчеты вертикальных смещений жидких частиц, описываемых функцией $\eta(x, y, z)$, выполнены для различных значений h при $d = 10$ ($a/R = 9.5$, $mR/U^2 = 3.16$). При этом в (4) также следует использовать преобразование (6). На рис. 3 представлены функции η при $y = 0$, $z/R = 100$, $h/R = 5, 10, 15$ для $b/R = 1, 10$ и случая двухслойной жидкости ($b = 0$) в зависимости от x . Видно, что при $b \leq R$ волновые возмущения близки к тем, что возникают в случае двухслойной жидкости. При $b/R = 0.1$ это совпадение становится еще большим. При $b/R = 10$ амплитуды волновых возмущений меньше, однако и затухание их с ростом x резко замедляется.

Исследование вклада различных мод показало, что при $b \leq R$ волновые возмущения практически полностью обусловлены первой модой. При $b/R = 10$ первая мода является по-прежнему основной, однако вклад следующих мод может быть довольно значительным, особенно это проявляется при h , $|y| \leq b$. На рис. 4 представлены суммарные возмущения, содержащие восемь мод, и вклад первых двух мод при $b/R = 10$, $y/R = -3$, $z/R = 100$, $h/R = 5; 10$. Следует отметить, что при h , $|y| \leq b$ волновые возмущения медленно затухают с ростом x в отличие от тех случаев, когда h , $|y| > b$.

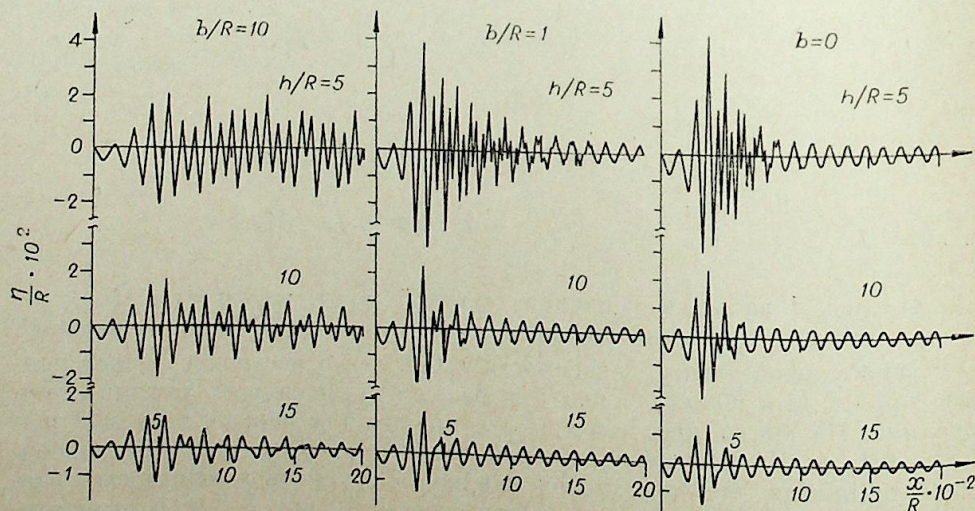


Рис. 3.

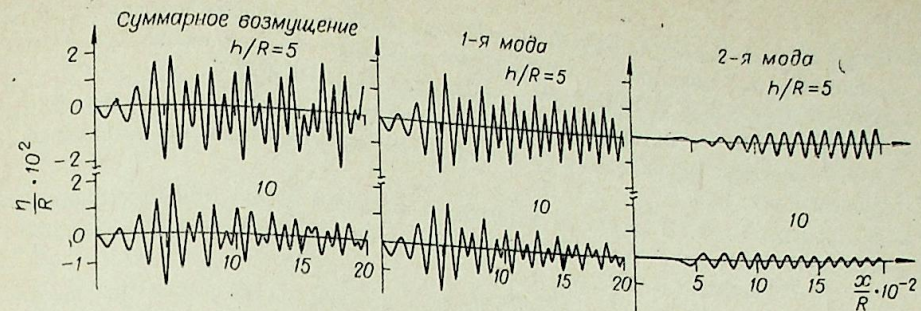


Рис. 4.

Представленные расчеты являются примером численного эксперимента, который можно проводить по предлагаемой методике для произвольного непрерывного устойчивого распределения плотности по глубине.

Экспериментальная проверка результатов линейной теории внутренних волн в невязкой жидкости выполнена в [9] на примере плоской заставки разной плотности, возникающих при равномерном горизонтальном движении кругового цилиндра и симметричного крылового профиля. Показано, что длины волн достаточно хорошо описываются линейной теорией, однако амплитуды волн оказываются заниженными по сравнению с экспериментальными данными. Последнее обстоятельство, по-видимому, объясняется тем, что в теоретическом решении не учитывается вязкость жидкости. При буксировке тела в реальной вязкой жидкости в поток вносится импульс, равный силе сопротивления тела и особенно заметный при наличии отрыва потока от тела. Этим можно объяснить тот факт, что расхождение теоретических и экспериментальных данных тем меньше, чем более совершенной в гидродинамическом смысле является форма тела. Так, для плохообтекаемого кругового цилиндра расхождение достигает 200%, а для хорошообтекаемого профиля с удлинением 1:6 — не превосходит 25%. В опытах [9] использовались смешивающиеся жидкости, для которых неизбежно имеет место некоторый размыв границы раздела. Сравнение экспериментальных данных с теоретическим решением для двухслойной жидкости и численным решением для размывной границы раздела показывает, что в последнем случае совпадение с экспериментом становится несколько лучше.

Институт гидродинамики
СО АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
14/VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Доценко С. Ф. Об асимптотическом анализе неустановившихся волн от начальных периодических и движущихся возмущений. — В кн.: Морские гидрофизические исследования, № 3. Севастополь, 1977.
2. Краусс В. Внутренние волны. Л., Гидрометеоиздат, 1968.
3. Черкесов Л. В. Гидродинамика поверхностных и внутренних волн. Киев, Наукова думка, 1976.
4. Murdock J. W. The near-field disturbance created by a body in stratified medium with a free surface. — Trans. of the ASME, ser. E. J. of Appl. Mech., 1977, v. 44, N 4.
5. Miles J. W. Internal waves generated by a horizontally moving source. — Geophysical Fluid Dynamics, 1971, v. 2.

6. Стурова И. В., Сухарев В. А. Плоская задача о волновых движениях, возникающих в непрерывно стратифицированной жидкости при обтекании погруженного тела.— Изв. АН СССР. Мех. жидкости и газа, 1978, № 4.
7. Стурова И. В. Внутренние волны, генерируемые локальными возмущениями в стратифицированной жидкости.— В кн.: Динамика сплошной среды, вып. 35. Новосибирск, 1978.
8. Доценко С. Ф. О структуре волнового движения в потоке при произвольном изменении плотности по глубине.— В кн.: Морские гидрофизические исследования, № 3. Севастополь, 1973.
9. Букреев В. И. Волны на границе раздела двух жидкостей разной плотности, генерируемые движением кругового цилиндра и симметричного крыла.— ПМТФ, 1980, № 1.

Г. М. ШУМСКИЙ

О ВИХРЕВЫХ СТРУКТУРАХ ЗА ПРОФИЛЕМ,
ДВИЖУЩИМСЯ ВБЛИЗИ ВОЛНИСТОЙ СТЕНКИ

Исследование вихревых структур за профилем, движущимся вблизи волнистой стенки, представляет теоретический и прикладной интерес. В частности, при изучении аэродинамической интерференции несущих поверхностей летательного аппарата над взволнованной водной поверхностью. В литературе практически отсутствуют расчетные и экспериментальные данные о вихревых структурах на таких режимах движения. В работе [1] рассматривалась нелинейная задача безотрывного обтекания идеальной несжимаемой жидкостью тонкого профиля, движущегося вблизи твердой волнистой стенки. В качестве примера рассчитана форма вихревого следа для одного частного случая. В данной работе на основе численного метода [1] исследуются вихревые структуры за профилем для различных форм границы волнистой стенки. Приводятся сопоставленные расчетных данных с экспериментальными результатами, полученными в гидротомке.

1. Введем неподвижную систему координат Oxy (рис. 1). Рассмотрим движение в идеальной несжимаемой жидкости тонкого прямолинейного профиля с постоянной горизонтальной скоростью V вблизи твердой волнистой стенки. Пусть контур стенки задается уравнением

$$\bar{y} = \bar{\lambda} \sin K\bar{x},$$

где

$$K = \omega b / V = 2\pi b / l, \quad \bar{x} = x / b, \quad \bar{y} = y / b, \quad \bar{\lambda} = \lambda / b.$$

Здесь λ — амплитуда, l — длина волны контура стенки; b — хорда профиля; ω — круговая частота колебаний контура стенки; K — число Струхала.

На рис. 2 показаны формы вихревых следов за профилем, рассчитанные на основе численного метода [1] при следующих значениях параметров $\theta = 5^\circ$, $h = 0,2b$, $\lambda = 0,15b$.

Из этих данных следует, что на режиме движения при $K = 1,047$ форма ближнего вихревого следа устойчива и почти прямолинейна, в то время как при $K = 3,14$ наблюдается заметная деформация вихревой пелены. С течением времени эта деформация растет и происходит сворачивание пелены в несимметричные спирали, которые располагаются за гребнями волн стенки на расстоянии l друг от друга. Неустойчивость вихревой пелены в этом случае развивается быстрее, по-видимому, потому, что с увеличением числа Струхала возрастает неравномерность распределения вихревой интенсивности по ее длине. Дальнейшее увеличение числа Струха-

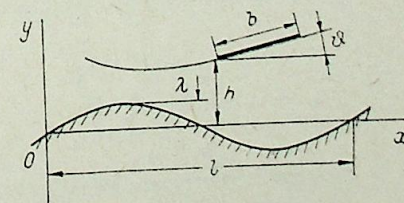


Рис. 1.

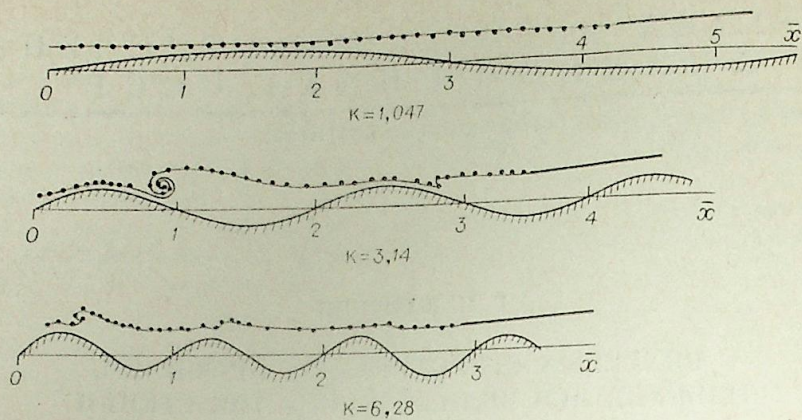


Рис. 2.

ля сопровождается сближением участков следа с экстремальной интенсивностью (противоположного знака) и нейтрализацией их влияния, вследствие чего наблюдается уменьшение деформации вихревой пелены ($K = 6,28$).

Образование аналогичных несимметричных спиралей даже при постоянной интенсивности вихревой пелены, имевшей вначале синусоидальную форму, было показано в безграничной жидкости Розенхедом [2].

Следует отметить, что при поступательных колебаниях с амплитудой h_a профиля в потоке вблизи плоской стенки вихревая пелена ближнего вихревого следа концентрируется в сгустки, расположенные в форме вихревой дорожки Кармана (рис. 3). Аналогичные результаты получены в работе [3] для большого числа Струхалия ($K = 17$). Как видно из рис. 3, в одном из двух сгустков, образовавшихся за период колебания профиля, свободные вихри размещены по спирали. В другом их расположение хаотично, что объясняется более плавным распределением вихревой интенсивности той части пелены, из которой этот сгусток образовался.

Вихревая пелена ближнего следа за профилем, движущимся вблизи волнистой стенки с постоянной горизонтальной скоростью, более устойчива, так как отсутствуют возмущения ее формы за счет колебаний профиля. В этом случае на расстоянии длины волны за профилем образуется только одна спираль (см. рис. 2).

Ввиду того, что спирали возникают на достаточном удалении от профиля, их влияние на его аэродинамические характеристики на рассмотренных режимах, как показали расчеты, пренебрежимо мало. Однако

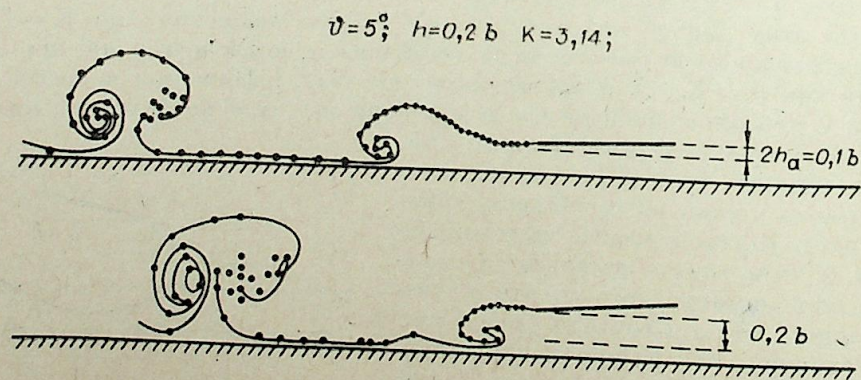


Рис. 3.

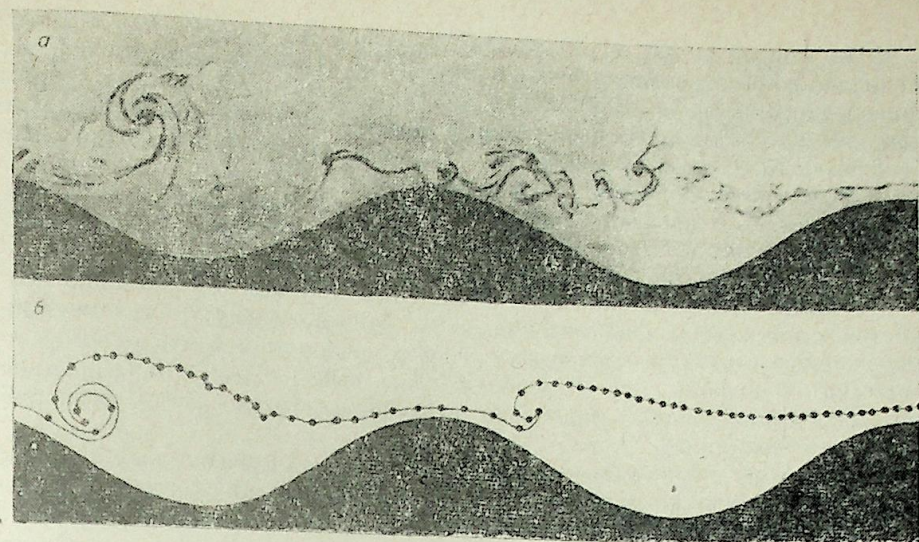


Рис. 4.

На рис. 4 и 5 — эксперимент (а); расчет (б).

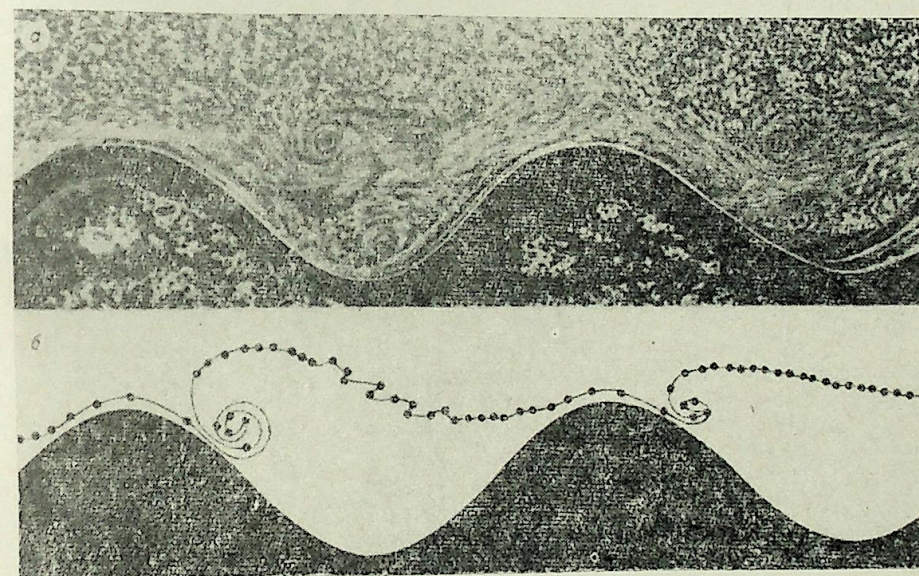


Рис. 5.

при определении аэродинамической интерференции системы профилей это влияние может оказаться существенным.

2. Образование вихревых спиралей, выявленное в результате численного эксперимента, было подтверждено экспериментальными исследованиями в гидротомке. Рассматривался вихревой след за плоской пластинкой, движущейся под углом тангажа $\varphi = 4^\circ$ с постоянной горизонтальной скоростью вблизи волнистой стенки синусоидальной формы. Число Струхалия равнялось $K = 3,14$, число Рейнольдса $Re \approx 10^3$. Поступательное движение пластинки осуществлялось с помощью специальной тележки, перемещавшейся по направляющей жидкости (марганцовокислого калия) и алюминиевого порошка.

Численный метод, используемый в расчетах, был построен в предположении безотрывного течения жидкости. Поэтому при проведении физического эксперимента особое внимание обращалось на то, чтобы течение жидкости около пластинки и гребней волн стенки было также безотрывным. С этой целью носок пластинки отклонялся на некоторый угол, обеспечивающий более плавное обтекание.

На рис. 4, 5 показаны экспериментальные (а) и расчетные (б) формы вихревых следов на участке двух длин волны стенки для амплитуд $\lambda = 0,2b$, $\lambda = 0,3b$ соответственно. Вихревые следы в расчете и эксперименте соответствуют одинаковому положению профиля относительно волнистой стенки. Из сопоставления этих данных следует, что крупномасштабные структуры вихревых следов в физическом и численном экспериментах подобны. Это позволяет сделать вывод о том, что выбранная математическая модель правильно отражает главные черты реальной картины обтекания.

Однако из приведенных на рис. 4, 5 экспериментальных данных видно, что во впадинах стенки наблюдаются небольшие вихревые образования, которые не нашли отражения в результатах численных расчетов. Можно ожидать, что использование в расчетах моделей отрывного обтекания как профиля, так и стенки позволит получить лучшее соответствие численных и экспериментальных данных.

Автор выражает глубокую благодарность В. Озерову за помощь при выполнении эксперимента.

Поступила в редакцию
28/VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Шумский Г. М. Нелинейная задача о движении профиля вблизи волнистой стенки.— Изв. СО АН СССР, 1977, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.
2. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М., Мир, 1964.
3. Головченко В. В., Горелов Д. Н. О произвольном движении тонкого профиля вблизи экрана.— В кн.: Динамика сплошной среды, вып. 22. Новосибирск, 1975.

В. М. ГЕЛЛЕР

СИСТЕМНАЯ ЭНЕРГООПТИМИЗАЦИЯ МОЩНЫХ МНОГОКАСКАДНЫХ УСИЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ

При построении современных радиопередающих устройств на ЭВП с сеточным управлением, а также ВЧ и СВЧ источников мощности электрофизических и электронно-технологических систем весьма актуальна задача реализации устойчивого широкополосного усиления мощности с обеспечением предельных энергетических и частотно-полосовых параметров аппаратуры.

Необходимость решения поставленной задачи значительно усложняет и удорожает схемы и конструкции устройств, вынуждает применять в качестве усилительных элементов мощные электронные приборы, использовать инверсные схемы включения последних, применять не только резонансные методы, но и методы распределенного усиления. Сравнительно малое усиление на единичный каскад, что является следствием использования отмеченных технических решений, оказывает решающее влияние на конструкцию, структуру и энергетiku всего устройства, затрудняя оптимальность его построения.

Действительно, заметную роль в суммарном энергопотреблении играют предмощный усилительный комплекс, и такие традиционные критериальные энергопараметры выходного каскада мощного усилительного устройства, как электронный КПД и коэффициент усиления по мощности K_p , совершенно недостаточно характеризуют систему в целом даже при мощном резонансном усилении. В еще большей степени это положение усугубляется для мощных многокаскадных УРУ.

Отмеченные обстоятельства, несомненно, должны найти отражение в методах проектирования, которые, как будет показано ниже, следует базировать на принципе минимизирования суммарного энергопотребления при реальном учете ограничивающих факторов, и важнейшей задачей становится формирование целевой функции — критерия оптимальности. Очевидно, критерий оптимальности A , как и вообще критериальные параметры, используемые при системном рассмотрении современных многопараметрических, сложнопонерархических задач, может быть лишь производным, синтезированным на базе существующего множества частных критериев $\sum A_n$ и оптимально выраженным через систему первичных скалярных фундаментальных констант x_1, x_2, \dots, x_n :

$$A = F\{A_{1\text{out}}(x_1, x_2, \dots, x_n), A_{2\text{out}}(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, A_{N\text{out}}(x_1, x_2, \dots, x_n)\}, \quad (1)$$

жестко лимитирующих энергочастотные и конструктивно-технологические ресурсы рассматриваемого мощного радиоустройства*.

* Выражение (1) является достаточно формализованной моделью состояния системы; при этом первичные фундаментальные константы могут входить в критериальные условия в произвольных аналитических сочетаниях, частные критерии могут входить в производные в игровых либо аддитивных аналитических формах. Методы логического формирования и аналитического конструирования оптимальных критериев в технических приложениях подчас субъективны и малообоснованы; значительнее более строгими представляются в этом плане стратегии решений экономико-математических задач [4].

Поскольку рассматривается обычно сложная иерархическая система, процесс оптимизации будет, очевидно, многоступенчатым, и аналитическая связь частных, а в конечном счете, и производного критерия с фундаментальными константами на практике реализуется лишь с помощью дополнительного подмножества y_1, y_2, \dots, y_m вторичных, экстремально-варьируемых параметров режима и конструкции:

$$\begin{aligned} A_1 &= f_1[y_{1\text{опт}}(x_1, x_2, \dots, x_n), y_{2\text{опт}}(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, y_{m\text{опт}}(x_1, \dots, x_n)], \\ A_2 &= f_2[y_{1\text{опт}}(x_1, x_2, \dots, x_n), y_{2\text{опт}}(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, y_{m\text{опт}}(x_1, \dots, x_n)], \\ &\vdots \\ A_N &= f_N[y_{1\text{опт}}(x_1, x_2, \dots, x_n), y_{2\text{опт}}(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, y_{m\text{опт}}(x_1, x_2, \dots, x_n)], \end{aligned} \quad (2)$$

принимая оптимальные значения*.

Следует отметить, что «промежуточные» аналитические связи вида:

$$\begin{aligned} A_1 &= \varphi_1(y_1) && \text{при } x_1 = \text{const}, \\ A_2 &= \varphi_2(y_2) && x_2 = \text{const}, \\ &\vdots && \vdots \\ A_N &= \varphi_N(y_m) && x_n = \text{const} \end{aligned} \quad (3)$$

чаще всего, действительно, носят экстремальный характер, что и предопределило наименование семейства факторов y_1, y_2, \dots, y_m , данное выше. В соответствии с установленными требованиями [2] производные вида $\partial A_1/\partial y_1, \partial A_2/\partial y_2, \dots, \partial A_N/\partial y_m$ во всем пространстве «рабочих состояний» должны, очевидно, быть непрерывными, что иногда вынуждает вносить существенные коррективы в сложившееся модельное представление электронных приборов с сеточным управлением [3].

Далее, как следует из практики решения оптимизационных задач, наличие и «интенсивность» аналитических связей вида

$$\begin{aligned} y_1 &= F_1(y_2, y_3, \dots, y_m), \\ y_2 &= F_2(y_1, y_3, \dots, y_m), \\ &\vdots \\ y_m &= F_m(y_1, y_2, \dots, y_{m-1}) \end{aligned} \quad (4)$$

вносит окончательное корректирование в пользу выбора той или иной стратегии оптимизации, могущей включать в себя не только дискретные оптимизирующие процедуры, но и, при определенных условиях, «оптимальные управления».

Если с помощью используемых дискретных либо «управляющих» оптимизирующих процедур семейство экстремально-варьируемых факторов y_1, y_2, \dots, y_m удастся исключить из рассмотрения, то система оптимизируется, описываясь монотонным функционалом

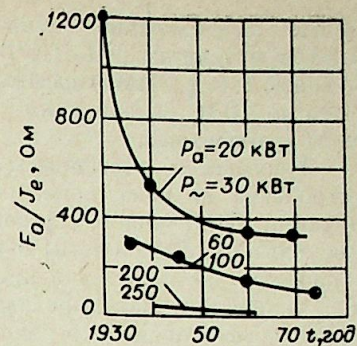
$$A = f_{\text{опт. опт}}[x_1, x_2, \dots, x_n] \quad (5)$$

при реальных ограничениях:

$$\begin{aligned} x_1 &\leq x_{1\text{пред}}, \\ x_2 &\leq x_{2\text{пред}}, \\ &\vdots \\ x_n &\leq x_{n\text{пред}}. \end{aligned} \quad (6)$$

* В практике построения мощных радиоусилительных и радиогенераторных устройств вторичные параметры y_1, y_2, \dots, y_m широко используются при экспериментальной реализации оптимальных режимов, и важнейшей проблемой является возможность их строгой метрологической оценки.

Рис. 1. Изменение величины импедансного параметра E_a/I_c ГЭВП по годам разработок.



Остановимся подробнее на вопросах учета ограничивающих факторов. За время развития техники генераторных электровакуумных приборов (ГЭВП) в качестве ограничивающих факторов использовались следующие параметры: ток эмиссии катода I_c , мощность рассеяния на аноде P_a и других электродах ΣP_c , анодное напряжение E_a , срок службы прибора — T , наконец, ощущаемая ГЭВП нагрузка. Наличие гаммы ограничений привело к существованию большого числа расчетно-аналитических методов проектирования источников ВЧ (СВЧ) мощности и неоднозначности самого понятия проектирования последних, что нашло свое отражение в ряде работ по теории и расчету лампового генератора с независимым возбуждением [4–9].

Однако конструктивно-технологическая эволюция ГЭВП исключила либо существенно ослабила ряд ограничений. Переход, например, к оксидным катодам снял ограничение по току эмиссии; благодаря переходу к новым материалам и улучшению качества вакуумно-технологической обработки приборов значительно ослаблена лимитирующая роль теплового рассеяния*; электронно-оптическая оптимизация внутренней геометрии прибора, общее снижение габаритов приборов и улучшение вакуумной технологии позволили снизить напряжение анода, значительно удлинился срок службы ГЭВП.

На рис. 1 приведен график зависимости от времени (по годам) производного параметра $\Gamma = \frac{E_a}{I_c}$ (при фиксированном уровне номинальной выходной мощности и предельной мощности рассеяния прибора)**.

Как следует из графика, одним из важнейших следствий прогресса в области конструирования ГЭВП является асимптотическое снижение параметра Γ во времени. Если учесть, что параметр Γ и внутреннее сопротивление ГЭВП — R_i связаны зависимостью, близкой к линейной, а внутреннее сопротивление ГЭВП при любых реализуемых энергооптимизациях должно находиться в четкой логической и количественной связи с величиной нагрузки, ощущаемой ГЭВП***, то становится ясным, что реальным лимитирующим фактором при создании современных ВЧ (СВЧ) электронных источников мощности (ЭИМ) на новых ГЭВП действительно является реакция нагрузки.

Поскольку часто в настоящее время ЭИМ является регулируемым объектом в системе автоматического регулирования (САР), а также принимая во внимание, что существует объективная технико-экономическая тенденция к сокращению ассортимента выпускаемых ГЭВП за счет универсализации их использования****, можно констатировать актуальность задачи оценки возможности создания ВЧ (СВЧ) ЭИМ на заданную мощ-

* Особенно большие успехи достигнуты для средне и маломощных ГЭВП диапазона СВЧ (МКЛ, ТКЛ).

** График построен на основе анализа справочных материалов советского электровакуумного приборостроения.

*** Реальные нагрузки электронно-технологических и электрофизических установок, а также современных мощных радиопередатчиков лежат в пределах от долей и единиц до десятков и сотен ампер при мощностях, доходящих до единиц и десятков мегаватт. Создание прибора «низкого сопротивления» позволяет значительно упростить задачу согласования ГЭВП с нагрузкой.

**** Часто выгодно использовать ГЭВП не на полную номинальную мощность; СВЧ ГЭВП могут успешно использоваться и в менее высокочастотных диапазонах.

ность. Следовательно, оптимальным критериальным параметром при со-здании источника ВЧ (СВЧ) мощности может служить лишь результирующей КПД ЭИМ. Сказанное выше в полной мере может быть отнесено и к ЭИМ, содержащим усилительные элементы динамического типа либо транзисторы.

Разумеется, постановка задачи максимизации КПД мощного радиоустройства не нова, ранее [10—12] были рассмотрены примеры максимизации КПД мощных резонансных усилительных устройств на ГЭВП с использованием системы первичных независимых параметров устройств, в качестве которых были приняты крутизна линии критического режима $S_{кр}$, эквивалентное сопротивление ненагруженного анодного резонатора $R_{оex}$ и коэффициент передачи усилительного каскада по напряжению K_u , в работе [13] при несколько ином рассмотрении, более строго учтено энергопотребление предмощного каскада. Однако во всех перечисленных работах, по существу, игнорировался частотный признак, и оптимальная напряженность режима была априорно обусловлена, что не всегда справедливо. С другой стороны, в диапазонах повышенных частот* также существует значительное количество частных оптимизирующих решений [14—16], удовлетворительно согласующихся с физическими представлениями, но «не сшивающихся» — с низкочастотными, что препятствует универсализации использования приборов в различных частотных диапазонах, причем указанные оптимизирующие решения реализованы, как правило, в рамках уединенного усилительного каскада.

В работе [17] на основе максимизации энергетического критерия оптимальности — результирующего КПД мощного резонансного многокаскадного усилителя — получены универсальные аналитические соотношения, пригодные как в СВЧ, так и НЧ радиодиапазонах. За основу взята система фундаментальных первичных параметров, к числу которых отнесены статическая крутизна анодно-сеточной характеристики S , эквивалентное сопротивление ненагруженного анодного резонатора $R_{оex}$, предмощный усилительный комплекс учтен его результирующим КПД η_2 ; к числу экстремально-варьируемых параметров оптимизации Σy — мы относим угол отсечки анодного (катодного) тока каскада $\theta_a(\theta_c)$, напряженность режима $\gamma = e_{c \max}(t)/e_{a \min}(t)$ и КПД нагрузочного резонатора η_c . Для устройств, используемых в СВЧ диапазоне, дополнительно введены в рассмотрение частотные факторы — пролетные углы в сеточно-катодном φ_c и сеточно-анодном φ_a пространствах, органически входящие в состав некоторых первичных и вторичных параметров, при этом дополнительными вторичными варьируемыми параметрами становятся расстояние сетка — анод ГЭВП — d_{ac} и, при определенных условиях, напряжение анода E_a . Предложенная система первичных и вторичных параметров режима и конструкции представляется наиболее объективной, поскольку позволяет реализовать оптимальный критерий, одновременно удовлетворяющий требованиям схемно-конструктивной, режимной и частотной инвариантности.

В соответствии с [3] и сказанным выше [см. (1)] запишем выражение критерия оптимальности

$$\eta_{\Sigma} = \frac{\eta_1}{1 + \frac{\eta_1}{K_{P1}\eta_2} + \dots + \frac{\eta_1}{(K_{P1} \cdot K_{P2} \cdot \dots \cdot K_{PN-1})\eta_N}} \quad (7)$$

Здесь $\eta_1 = \eta_{k1} \cdot \eta_{e1}$ — результирующий КПД выходного каскада; η_N — результирующий КПД N -го каскада; K_{PN-1} — коэффициент передачи по

* Следует отметить, что достигнутый прогресс в области ГЭВП делает желательным использование сравнительно простого механизма взаимодействия зарядов частотах.

мощности $(N-1)$ -го каскада; K_{P1} — коэффициент передачи по мощности выходного каскада; η_k — КПД резонатора; η_e — электронный КПД каскада; N — порядковый индекс наименее мощного каскада (при этом следует учесть, что $N \leq 2$).

Как показывает опыт, в реальных условиях достаточно учесть энергопотребление двух наиболее мощных каскадов. При этом

$$\eta_{\Sigma} = \frac{\eta_1 \eta_2 K_{P1}}{\eta_1 + \eta_2 K_{P1}} \quad (8)$$

Числитель выражения (8) содержит произведение результирующего КПД η_1 и коэффициента передачи по мощности K_{P1} окончательного каскада, являющихся частными критериальными параметрами, т. е. в соответствии со сказанным выше $\eta_1 \cdot K_{P1}$ является ядром производного критерия, о необходимости синтеза которого говорилось выше. Принятый метод формирования оптимального энергетического критерия позволяет обосновать уместность игровой формы его аналитического представления и максимально ослабить при этом субъективные тенденции. В самом деле, в выражении (8) максимумы сомножителей, имеющих порядковый номер 1, наступают неодновременно, и в процессе регулирования устройства параметры η_1 и K_{P1} в зависимости от напряженности режима, КПД цепей связи либо при изменении угла отсечки анодного тока, а также ряда дополнительных параметров, меняются обратным образом, не доминируя друг над другом в рабочей области режимов.

Поскольку соотношение (8) является схемно-инвариантным, то часть усилительных ступеней с произвольными, в общем случае, порядковыми номерами, могут быть не резонансными, а апериодическими, обычно УРУ (рис. 2). В этом случае методы оптимизации устройства несколько видоизменяются. В самом деле, УРУ, будучи активным распределенным 8-полюсником, характеризуется пространственной неоднородностью режимов активных элементов (АЭ), выражающейся в неодинаковости энергетического вклада отдельных АЭ, зависящей от номера последних, пространственной неравномерности тепловыделения и пр. Энергетические параметры подобных устройств обычно невысоки, и энергооптимизация таких усилительных систем возможна, очевидно, лишь на путях реализации дополнительных неоднородностей, особым образом распределенных в структуре УРУ, играющих режимно-компенсирующую роль [17]. При этом у ряда варьируемых параметров: напряженностей режимов АЭ, углов отсечки токов, протекающих через АЭ, «горячих» затуханий в линиях УРУ физическая оптимальность становится двойственной — оптимизируется дискретное значение указанных параметров в начальном либо промежуточном сечении устройства и оптимизируется пространственный закон изменения указанного параметра правее отмеченного сечения, т. е. реализуется «оптимальное управление» [18]. Математические процедуры подобных оптимизаций относятся обычно к классу вариационных и решаются, большей частью, с помощью «прямых» методов при аппроксимации

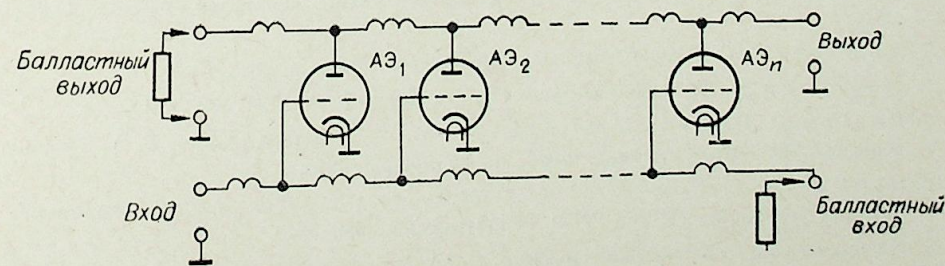


Рис. 2. Усилитель с распределенным усилением.

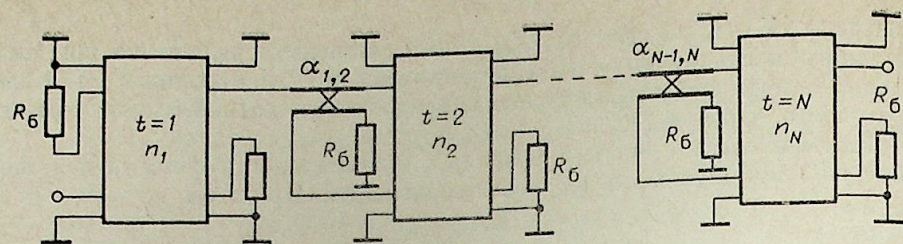


Рис. 3. Схема направленного сложения мощностей блоков УРУ.

мации функции управления многопараметрическими функциями с «гибкой структурой».

При определенных условиях [19] сохранение схемно-однородной структуры УРУ становится нерациональным и приходится вводить в систему энергостимулирующие эффекты типа регенерации — «перекачка» (рис. 3). В этом случае факторы пространственной неоднородности приобретают укрупненный, блочный характер — дискретные многоэлементные блоки УРУ с энергосуммированием в общем выходном тракте. В подобной схеме выявляются дополнительные вторичные параметры межблочной оптимизации: трансформирующие параметры регенеративной «перекачки» α , числа ЛЭ в блоках, значения которых находятся в жесткой оптимизируемой зависимости от номера блока t . Оптимизация подобных устройств также реализуется с помощью дискретных и «управляющих» процедур, рассмотренных выше.

Резюмируя сказанное, можно отметить, что метод системной энергетической оптимизации резонансных, апериодических и смешанных многокаскадных ЭИМ, базирующийся на использовании рекомендуемой системы скалярных «первичных» и «вторичных» параметров, позволяет обычно сводить задачу к отысканию безусловного экстремума, т. е. к достаточно экономичным алгоритмам.

Новосибирский
электротехнический
институт

Поступила в редакцию
15/V 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М., Наука, 1970.
2. Лейтман Дж. Введение в теорию оптимального управления. М., Наука, 1968.
3. Геллер В. М., Ласточкина Л. П. Об оптимизации мощных резонансных многокаскадных электронных усилителей.— Радиотехника, 1976, т. 31, № 12.
4. Радиопередающие устройства/Под ред. Г. А. Зейтленка. М., Связь, 1969.
5. Евтянов С. И. Ламповые генераторы. М., Связь, 1967.
6. Дробов С. А., Бычков С. И. Радиопередающие устройства. М., Сов. радио, 1969.
7. Аршинов С. С. Расчет ламповых генераторов. М.—Л., ГЭИ, 1955.
8. Марголин М. Г. Ламповый усилитель мощности. М., ГЭИ, 1957.
9. Персон С. В., Лебедев-Карманов А. И., Хацкелевич В. А. Теория и расчет АМ-ламповых генераторов. М., Сов. радио, 1955.
10. Нейман М. С. О некоторых основных вопросах развития мощных радиопередающих устройств.— ИВУЗ, МВО. Радиотехника, 1959, № 2.
11. Нейман М. С. О методике расчета и проектирования генераторов на триодах, тетрадах, и пентодах.— Радиотехника, 1956, т. 11, № 4.

12. Корчагина Е. П., Уткин Г. М. О расчете генераторов с заземленной сеткой.— Радиотехника, 1957, т. 12, № 11.
13. Зейтленок Г. А. О расчете цепи сетки лампового генератора на триоде.— Радиотехника, 1966, т. 21, № 11.
14. Митин И. М. Расчет оптимального междуэлектродного расстояния С—А в тетраде или триоде СВЧ, предназначенного для усиления мощности в широкой полосе частот.— В кн.: Электроприборостроение, вып. 3. Л., Энергия, 1967.
15. Митин И. М. Об оптимальных соотношениях для широкополосного СВЧ тетрада при ограничении анодного напряжения и мощности рассеяния на аноде.— Электронная техника, 1973, сер. 4, вып. 5.
16. Митин И. М. К расчету широкополосного генераторного СВЧ тетрада триода с оптимальными параметрами.— Электронная техника, 1972, сер. 4, вып. 4.
17. Геллер В. М., Меренков В. М., Панджакидзе Д. А. Исследование методов энергооптимизации мощных многокаскадных широкополосных усилителей.— В кн.: Тез. V Всесоюз. межвуз. конф. по теории и методам расчета пеллинейных электрических цепей и систем. Ташкент, 1975.
18. Решение и исследование обыкновенных дифференциальных уравнений на основе функций с гибкой структурой. Тем. сборник/Под ред. проф. Н. К. Куликова. М., МЭИ, 1974.
19. Геллер В. М., Васильев В. В., Витюгов В. А. Об энергетической оптимизации мощных УРУ СВЧ диапазона.— В кн.: Всесоюз. конф. «Современные проблемы радиотехники в народном хозяйстве». Тез. докл. М., 1977.

УДК 621.314.018.781.3

В. А. ИЛЬИН

ТАБЛИЧНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ МАТРИЦЫ
В ЗАДАЧЕ ЦИФРОВОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ГРУПП
ТРАНСФОРМАТОРОВ ТОКА

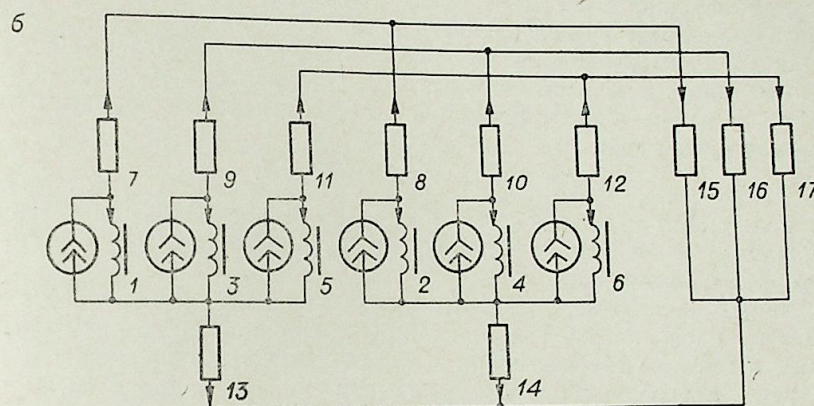
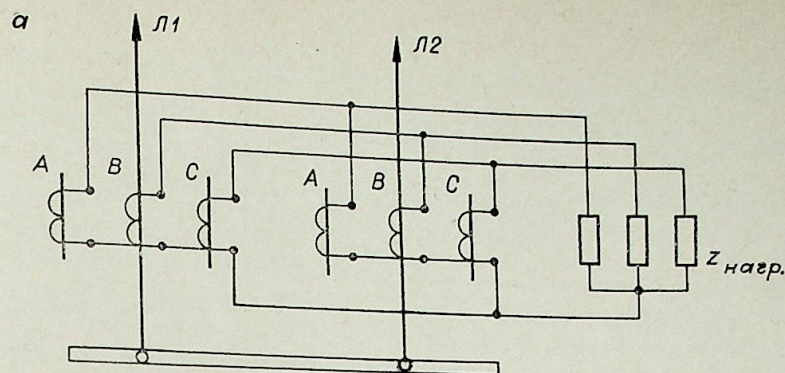
В настоящее время при цифровом математическом моделировании переходных режимов работы группы трансформаторов тока (ТТ) находит применение сочетание матричных методов с топологическими [1, 2]. Предложена методика моделирования [2], основанная на использовании матричного преобразования Крона и численном решении системы дифференциальных контурных уравнений, описывающих переходный процесс. При этом гибкость и универсальность используемого матричного аппарата позволили разработать программу с приемлемыми параметрами, пригодную для моделирования различных групп из двух-трех однокаскадных ТТ.

Распространение методики на группы ТТ многоплечевых защит и на различные группы каскадных ТТ затрудняется значительным увеличением размерности задачи.

В качестве примера на рисунке, а показана схема соединения вторичных цепей группы ТТ дифференциальной защиты сборных шин. Соответствующая расчетная схема замещения (см. рисунок, б) построена в предположении, что ТТ являются однокаскадными. Первичные обмотки ТТ представлены на расчетной схеме идеальными источниками тока, ветви намагничивания — нелинейными индуктивностями. Выбор ветвей намагничивания в качестве главных ветвей однозначно определяет дерево схемы и систему главных контуров. Топологическая матрица главных контуров (контурная матрица) при выбранном порядке нумерации ветвей и контуров имеет вид

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & & & & & & -1 & & & & & \\ 2 & 1 & & & & & & -1 & & & & \\ 3 & & 1 & & & & & & -1 & & & \\ 4 & & & 1 & & & & & & -1 & & \\ 5 & & & & 1 & & & & & & -1 & \\ 6 & & & & & 1 & & & & & & -1 \\ & & & & & & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ & & & & & & -1 & & -1 & & & \\ & & & & & & & -1 & -1 & & & \\ \rightarrow & & & & & & -1 & & & -1 & & \\ & & & & & & & -1 & & -1 & & \\ & & & & & & -1 & & & & -1 & \\ & & & & & & & -1 & & & & -1 \end{bmatrix}$$

Отметим, что объем машинной памяти, необходимый для размещения контурной матрицы, растет пропорционально квадрату числа при-



Группа трансформаторов тока дифференциальной защиты шин.
а — схема соединения вторичных цепей, б — расчетная схема замещения (на схеме обозначены номера и принятые положительные направления ветвей).

соединений первичной сети, охватываемых защитой (на рисунке для простоты показаны лишь два присоединения):

$$V_m = m \times n = 21N^2 + 9N. \quad (1)$$

Здесь V_m — объем памяти (слов), необходимый для размещения матрицы, $m = 3N$ — число строк матрицы, равное числу главных контуров расчетной схемы, $n = 7N + 3$ — число столбцов матрицы, равное числу ветвей расчетной схемы, N — число присоединений первичной сети.

Методика моделирования [2] предполагает использование контурной матрицы во всех основных преобразованиях. В частности, требуется ее перемножение с матрицами параметров схемы и параметров переходного процесса. Операции со слабозаполненной топологической матрицей большой размерности приводят к неоправданным затратам машинного времени.

Между тем топология расчетной схемы такова, что соответствующая контурная матрица может быть разделена на небольшое число вертикальных зон-подматриц, строки которых содержат не более одного ненулевого элемента (см. выше). Подматрицы имеют простую и закономерную структуру, не изменяющуюся при увеличении числа присоединений, охватываемых защитой. Это позволяет предложить удобную в данном случае форму организации матрично-топологических преобразований с использованием известного способа описания топологии схемы множеством, элементами которого являются номера ветвей [3].

Введем таблицу с числом строк, равным числу строк контурной матрицы, и с числом столбцов, равным числу подматриц контурной матрицы.

1	-7	-13	-15
2	-8	-14	-15
3	-9	-13	-16
4	-10	-14	-16
5	-11	-13	-17
6	-12	-14	-17

Строки таблицы заполнены номерами ветвей, входящих в главные контуры расчетной схемы. Номерам присвоены знаки соответствующих ненулевых элементов контурной матрицы. Благодаря тому, что структура контурной матрицы известна, таблица может быть сформирована по числу присоединений N без предварительного построения исходной матрицы.

Как видно из сравнения, таблица со всей полнотой отображает контурную матрицу, в то время как размерность таблицы значительно меньше. При большом числе присоединений достигаемая экономия памяти становится существенной:

$$\Delta V = V_m - V_t = 21N^2 - 3N. \quad (2)$$

Здесь V_m — объем памяти по (1), необходимый для размещения контурной матрицы, $V_t = 3N \times 4$ — объем памяти, необходимый для размещения отображающей таблицы.

Если ТТ каскадные, то даже при использовании упрощенной схемы замещения каскадного ТТ с одной нелинейностью в верхнем каскаде и двумя в нижнем [4] размерность задачи возрастает по меньшей мере в три раза, а требующийся объем памяти — почти на порядок. В этом случае использование вместо топологической матрицы ее табличного отображения дает еще более значительную экономию памяти:

$$\Delta V = 171N^2 - 27N. \quad (3)$$

В справедливости последнего выражения можно убедиться, построив в соответствии с рисунком, a расчетную схему на основе упрощенной схемы замещения каскадного ТТ.

Важно и то, что с использованием отображающей таблицы матрично-топологические преобразования могут быть организованы более рационально. Пусть, например, требуется умножить контурную матрицу размерности $m \times n$ на квадратную матрицу собственных и взаимных индуктивностей ветвей L :

$$B \times L = P. \quad (4)$$

Чтобы получить некоторый элемент p_{ij} матрицы P , нет необходимости все элементы i -й строки контурной матрицы перемножать на соответствующие элементы j -го столбца матрицы L с последующим сложением произведений. Достаточно сложить (с учетом знаков) лишь те элементы j -го столбца матрицы L , номера которых содержатся в i -й строке отображающей таблицы.

Обозначив время выполнения на ЦВМ операций умножения и сложения соответственно M и S , сопоставим затраты времени на матричное перемножение по (4) обычным путем и с использованием отображающей таблицы. В первом случае затраты времени составят $T_1 = [nM + (n-1)S]nm$, во втором — $T_2 = 3Sn$. Относительный выигрыш времени:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{[nM + (n-1)S]nm}{3Sn} = \frac{1}{3} \left[mn \frac{M}{S} + m(n-1) \right].$$

В случае двух присоединений в первичной сети (см. рисунок) $m = 6$; $n = 17$. Приняв ориентировочно $M/S = 2$, получаем $T_1/T_2 = 100$, т. е. затраты времени уменьшаются на два порядка. С увеличением числа при-

соединений в первичной сети относительный выигрыш времени становится еще большим.

Табличное отображение топологической матрицы использовалось при разработке программы расчета переходных процессов в группе каскадных ТТ дифференциальной защиты шин. Показано, что благодаря достигаемой экономии памяти и машинного времени постановка задачи возможна на машине с ресурсом оперативной памяти 32К.

Предлагаемая форма организации матрично-топологических преобразований удобна для реализации на ЦВМ и позволяет добиться существенной экономии ресурсов машины при цифровом математическом моделировании групп трансформаторов тока.

Сибирский научно-исследовательский
институт энергетики,
Новосибирск

Поступила в редакцию
27/XII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Королев Е. П. Матрично-топологический метод расчета цепей с насыщающимися трансформаторами тока. — Изв. вузов. Электромеханика, 1975, № 7.
2. Дмитриев К. С. Динамическое моделирование групп защитных трансформаторов тока. — Изв. вузов. Электромеханика, 1976, № 7.
3. Kruskal I. B. On the shortest spanning subree of a graph and the traveling salesman problem. — Proc. Amer. Math. Soc., 1956, v. 7, N 1.
4. Дроздов А. Д. и др. Переходные режимы работы каскадных трансформаторов тока 500 кВ. — Электрические станции, 1970, № 5.

УДК 621.314.018.781.3

Ильин В. А. Табличное отображение топологической матрицы в задаче цифрового моделирования групп трансформаторов тока. — Изв. СО АН СССР, 1980, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

Затронут вопрос использования матрично-топологических методов при моделировании на ЦВМ переходных режимов работы групп трансформаторов тока. Предложена удобная для реализации на ЦВМ форма организации матрично-топологических преобразований, основанная на табличном отображении топологической матрицы главных контуров. Показано, что использование в преобразованиях табличного отображения топологической матрицы обеспечивает существенную экономию ресурсов машины. Рис. 1, библиогр. 4.

С. Н. РЫЧКОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЗИСТИВНОГО КОЛЬЦА,
ЗАМКНУТОГО ДЖОЗЕФСОНОВСКИМ КОНТАКТОМ

В настоящее время наблюдается значительный рост числа исследований по эффекту Джозефсона и возможностям его применения в различных областях научного эксперимента и технических приложений, в том числе для создания сверхбыстродействующих больших интегральных схем различного назначения и в конечном результате ЭВМ нового поколения [1—5].

Резистивный контур, замкнутый джозефсоновским контактом, — хорошо известная и широко применяемая система, например, в качестве основы одного из вариантов разрабатываемых логических элементов для быстродействующих операционных устройств [4, 7—9].

В предыдущей работе [10] автором проведено качественное аналитическое исследование резистивного кольца, замкнутого джозефсоновским контактом с малой емкостью, которое описывается системой двух нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка с тремя параметрами.

Система с туннельным контактом Джозефсона (рис. 1, а) описывается системой трех дифференциальных уравнений первого порядка с четырьмя параметрами, причем, насколько известно автору,

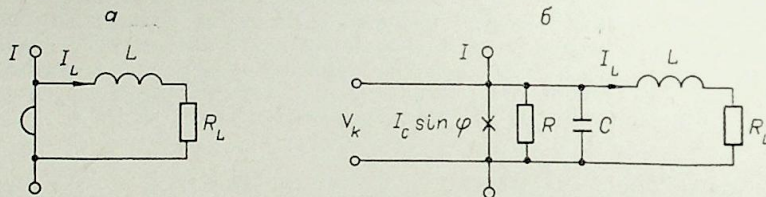


Рис. 1.

работы по ее теоретическому исследованию отсутствуют. В данной статье с помощью функций Ляпунова, систем сравнения, поверхностей без контакта и локальной теории бифуркаций многомерных динамических систем проведено качественное исследование системы. Туннельный контакт описывался моделью

$$c\ddot{\Phi} + \frac{\Phi\dot{\Phi}}{R} + I_c \sin \varphi = I_k, \quad (\cdot) \equiv \left(\frac{d}{dt}\right),$$

где c , R , I_c — соответственно емкость, сопротивление и критический ток контакта; I_k — ток через контакт; φ — разность фаз сверхпроводника по обе стороны контакта; $\Phi = \Phi_0/2\pi$, $\Phi_0 \approx 2,07 \cdot 10^{-15}$ Вб-квант потока.

Установлено, что рабочая область параметров определяется бифуркацией петли сепаратрисы седла и кратных циклов второго рода.

Уравнения движения. Эквивалентная схема элемента приведена на рис. 1, б, где V_k — напряжение на контакте. Согласно рис. 1, б, имеем

$$\Phi\dot{\varphi} = V_k, \quad L\dot{I}_L + R_L I_L = V_k,$$

$$c\dot{V}_k + V_k/R + I_c \sin \varphi + I_L = I, \quad (\cdot) \equiv \left(\frac{d}{dt}\right). \quad (1)$$

Полагая в (1)

$$\tau = R_L I_c t / \Phi, \quad z = I_L / I_c, \quad u = V_k / R_L I_c, \quad (2)$$

получим $\dot{\varphi} = u$, $\dot{z} = \alpha(u - z)$,

$$\beta\dot{u} = \gamma - \sin \varphi - ru - z, \quad (\cdot) \equiv \left(\frac{d}{d\tau}\right), \quad (3)$$

где $\alpha = \Phi / LI_c$; $\beta = cR_L^2 I_c / \Phi$; $r = R_L / R$, $\gamma = I / I_c$.

Система (3) задана в цилиндрическом фазовом пространстве $G = S^1 \times R^2$ ($\varphi \in S^1$, $z, u \in R^2$). Согласно [11], система (3) может иметь не только циклы первого рода, т. е. сохраняющие свойство замкнутости в покрывающем пространстве R^3 ($\varphi \in R$; $z, u \in R^2$), но и циклы второго рода, которые теряют свойство замкнутости в покрывающем пространстве. Будем называть циклы второго рода, т. е. рекуррентные траектории вращательного типа, φ -циклами (траекториями).

Параметр γ считается неотрицательным, поскольку система (3) инвариантна к преобразованию

$$\varphi \rightarrow -\varphi, \quad z \rightarrow -z, \quad u \rightarrow -u, \quad \gamma \rightarrow -\gamma. \quad (4)$$

Область притяжения пространства G . Рассмотрим определенно положительную функцию

$$W_1 = \frac{1}{2} \left(\beta u^2 + \frac{1}{\alpha} z^2 \right) \quad (5)$$

в пространстве переменных u, z . Производная функции W_1 в силу системы (3) имеет вид

$$\dot{W}_1 = -z^2 + u(\gamma - \sin \varphi - ru). \quad (6)$$

Нетрудно установить, что $\dot{W}_1 < 0$ при $(\gamma + 1)/r < u < (\gamma - 1)/r$, если $\gamma \leq 1$ и $\dot{W}_1 < 0$ при $(\gamma + 1)/r < u < 0$, когда $\gamma > 1$. Таким образом, имеет место следующее.

Предложение 1. При $\tau \rightarrow +\infty$ все траектории системы (3) из области $G \setminus G_u$, где

$$G_u = \{ \varphi \in S^1; z \in R; (\gamma + 1)/r > u > (\gamma - 1)/r, \gamma \leq 1; \quad (7)$$

$$(\gamma + 1)/r > u > 0, \gamma > 1 \},$$

входят внутрь области G_u .

Рассмотрим в области G_u направляющую функцию

$$W_2 = \frac{1}{2\alpha} z^2. \quad (8)$$

Производная функции W_2 в силу системы (3) имеет вид

$$\dot{W}_2 = z(u - z). \quad (9)$$

Из (9) и предложения 1 устанавливаем, что $\dot{W}_2 < 0$ при $(\gamma - 1)/r > z > (\gamma + 1)/r$. Итак, получаем следующее.

Предложение 2. При $\tau \rightarrow +\infty$ все траектории системы (3) из области $G_u \setminus G_0$, где

$$G_0 = \{ \varphi \in S^1; (\gamma + 1)/r > u > (\gamma - 1)/r, (\gamma + 1)/r > z > (\gamma - 1)/r, \quad (10)$$

$$\gamma \leq 1; (\gamma + 1)/r > u > 0, (\gamma + 1)/r > z > 0, \gamma > 1 \},$$

входят внутрь области G_0 .

Объединяя предложения 1 и 2, устанавливаем следующее.

Предложение 3. При $\tau \rightarrow +\infty$ все траектории системы (3) из области $G \setminus G_0$ входят внутрь области G_0 . Следовательно, областью притяжения пространства G системы (3) при $\tau \rightarrow +\infty$ является устойчивая область G_0 .

Состояния равновесия. Состояния равновесия системы (3) расположены в области G_0 на окружности $z = u = 0$ и равны

$$\varphi_1 = \arcsin \gamma, \quad \varphi_2 = \pi - \arcsin \gamma. \quad (11)$$

Характеристическое уравнение для состояний равновесия φ_k ($k = 1, 2$) имеет вид

$$\beta \lambda^3 - (r + \alpha\beta)\lambda^2 + (\alpha + \alpha r + \cos \varphi_k)\lambda + \alpha \cos \varphi_k = 0. \quad (12)$$

При $\gamma = 1$ состояния равновесия O_1 и O_2 сливаются $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$, образуя сложную особую точку с одним нулевым корнем. Полагая в (12) $\cos \varphi_k = 0$, получаем $\lambda_1 = 0$ и

$$\lambda_{2,3} = \frac{-(r + \alpha\beta) \pm \sqrt{(r - \alpha\beta)^2 - 4\alpha\beta}}{2\beta}. \quad (13)$$

Корни $\lambda_{2,3}$ будут вещественные ($\lambda_{2,3} < 0$), если

$$\frac{L - 2R\sqrt{Lc}}{cR} \geq R_L \geq \frac{L + 2R\sqrt{Lc}}{cR}, \quad (14)$$

и комплексные ($\text{Re } \lambda_{2,3} < 0$) при

$$\frac{L - 2R\sqrt{Lc}}{cR} < R_L < \frac{L + 2R\sqrt{Lc}}{cR} \quad (15)$$

Пусть $0 \leq \gamma < 1$. Поскольку $\cos \varphi_1 = \sqrt{1 - \gamma^2} > 0$, точка равновесия O_1 либо устойчивый узел ($\lambda_i < 0, i = 1, 2, 3$), либо устойчивый фокус ($\lambda_1 < 0, \text{Re } \lambda_{2,3} < 0$).

Для точки равновесия O_2 имеем $\cos \varphi_2 = -\sqrt{1 - \gamma^2} < 0$, поэтому O_2 либо седло ($\lambda_1 > 0, \lambda_{2,3} < 0$), либо седло-фокус ($\lambda_1 > 0, \text{Re } \lambda_{2,3} < 0$). Наличие вещественных или комплексных корней $\lambda_{2,3}$ определяется знаком величины

$$D = 27a^2d^2 + 4ac^3 + 4b^3d - b^2c^2 - 18abcd, \quad (16)$$

где $a = \beta, b = r + \alpha\beta, c = \alpha(1 + r) + \cos \varphi_2, d = \alpha \cos \varphi_2$. Если $D < 0$, все корни вещественные и различные. При $D = 0$ имеем $\lambda_2 = \lambda_3$. Если $D > 0$, то корни $\lambda_{2,3}$ комплексные.

Лемма 1. В точке равновесия O_2 выполнено неравенство $\lambda_1 + \text{Re } \lambda_{2,3} < 0$.

Доказательство. Положим $\lambda_1 = x_1, \lambda_2 = -x_2 \pm ix_3, x_{1,2} > 0$. Из уравнения (2) следует, что $2x_2 - x_1 = (r + \alpha\beta)/\beta$. Равенство $x_1 = x_2$ имеет место, если $x_1 = (r + \alpha\beta)/r$ является корнем уравнения (12). Подставляя x_1 в (12), получим следующее уравнение относительно β :

$$2\alpha^3\beta^3 + \alpha[\alpha + \alpha r + \cos \varphi_2 + 6\alpha r + \cos \varphi_2]\beta^2 + r[\alpha + \alpha r + \cos \varphi_2 + 6\alpha r]\beta + 2r^3 = 0. \quad (17)$$

При $\cos \varphi_2 = 0$ уравнение (17) имеет корни $\beta_{1,2,3} < 0$. Полагая $\beta_{2,3} = \pm i\omega$ (условие перехода к корням с $\text{Re } \beta_{2,3} > 0$), получим из (17)

$$\omega^2 = \frac{2r^3}{\alpha(\alpha + \alpha r + \cos \varphi_2) + 6\alpha^2 r + \cos \varphi_2}.$$

Поскольку $\omega^2 > 0$, должно выполняться неравенство $(\alpha + \alpha r + \cos \varphi_2) + 6\alpha r > -\cos \varphi_2 > 0$, которое приводит к положительности всех коэффициентов уравнения (17). Следовательно, мы не имеем вещественных $\beta > 0$, таких, что $x_1 = x_2$. А так как при $\gamma = 1 - \text{Re } \lambda_{2,3} > 0$, то $-\text{Re } \lambda_{2,3} > \lambda_1$, что и доказывает лемму.

Согласно работам [12, 13], через точку равновесия O_2 проходят два многообразия: одномерная кривая, состоящая из O_2 и двух неустойчивых сепаратрис S_1^- и S_2^- , выходящих в области $G_0^1 = G_0 (u > 0)$ и $G_0^2 = G_0 (u < 0)$ соответственно, и двумерная устойчивая поверхность S^+ . Система (3) при $\gamma = 0$. Введем в рассмотрение функцию

$$V = \frac{\beta u^2}{2} - \frac{z^2}{2\alpha} + \int_{\varphi_1}^{\varphi} (\sin \psi - \gamma) d\psi. \quad (18)$$

Производная функции V в силу системы (3) равна

$$\dot{V} = -z^2 - ru^2 \leq 0. \quad (19)$$

Множество $\dot{V} = 0$ не содержит целых траекторий системы (3), кроме состояний равновесия O_1 и O_2 .

При $\gamma = 0$ V — периодическая функция Ляпунова [11], поэтому неравенство (19) доказывает следующее утверждение.

Лемма 2. При $\gamma = 0$ система (3) не имеет циклов первого, а также второго рода. Точка равновесия O_1 асимптотически устойчива во всем пространстве G_0 , за исключением седла O_2 и его устойчивой сепаратрисной поверхности S^+ . Многообразия $S_{1,2}^-$ стремятся к O_1 , а S^+ уходит в бесконечность.

Циклы первого рода при $\gamma > 0$. Область притяжения точки O_1 . При $\gamma > 0$ функция (18) не будет периодической по φ . Будем считать, что функция (18) определена в покрывающем пространстве R^3 , а не в области G_0 .

Допустим, что система (3) имеет цикл первого рода. Тогда при полном обходе фазовой точки по этому циклу в пространстве R^3 однозначная функция (18) должна получить согласно неравенству (19) отрицательное приращение, что невозможно [11]. Следовательно, система (3) не имеет циклов первого рода.

Рассмотрим область

$$R^+ : V(\varphi, z, u) < V(\varphi_2, 0, 0) = 2\sqrt{1 - \gamma^2} + \gamma(2 \arcsin \gamma - \pi), \quad (20)$$

при $\gamma < 1, \varphi < \varphi_2$. Из (20) и (18) можно видеть, что в области R^+ функция V положительно определенная. Учитывая (19), устанавливаем, что R^+ является областью притяжения устойчивого состояния равновесия O_1 .

Циклы второго рода в областях $u \leq 0$ и $z \leq 0$. Введем 2π -периодические функции

$$V_k = \frac{1}{2} [\beta u^2 + \alpha^{-1} z^2 - \alpha^{-1} (1 + (-1)^k) z - 2 \cos \varphi], \quad k = 1, 2, \quad (21)$$

производные которых в силу системы (3) равны

$$\dot{V}_1 = -z^2 + u(\gamma - ru), \quad \dot{V}_2 = -ru^2 + z(\gamma - z). \quad (22)$$

Из (22) устанавливаем, что \dot{V}_1 знакоотрицательна в области $G_0: u \leq 0$, а \dot{V}_2 знакоотрицательна в области $G_0: z \leq 0$. Следовательно, система (3) не имеет φ -траекторий в области $G_0: u \leq 0$, а также в области $G_0: z \leq 0$.

Системы сравнения. Рассмотрим вспомогательную систему

$$\dot{\varphi} = u, \quad \beta \dot{u} = \gamma - \sin \varphi - ru \quad (23)$$

в области $G^+ = G: \{z \geq 0, u \geq 0\}$. Обозначим через $u^+(\varphi)$ и $u(\varphi)$ интегральные кривые систем (23) и (3) соответственно. Можно видеть, что векторные поля систем (23) и (3) связаны следующим образом:

$$\frac{du^+}{d\varphi} \geq \frac{du}{d\varphi}, \quad z, u \in G^+. \quad (24)$$

Применение теоремы 4—1.8(б) из работы [11] приводит к утверждению, что: если система (23) в области G^+ не имеет φ -циклов, то система (3) также не имеет φ -циклов в этой области.

Известно [11], что система (23) при $0 \leq \gamma \leq 1$ имеет единственную бифуркационную кривую $\beta = \beta_m(\gamma, r)$, такую, что при $\beta < \beta_m$ циклов второго рода нет, а при $\beta > \beta_m$ отмечается единственная устойчивая φ -траектория.

Таким образом, имеет место следующее.

Лемма 3. При $0 < \gamma \leq 1$, $\beta < \beta_m(\gamma, r)$, где $\beta_m(\gamma, r)$ — бифуркационная кривая системы (23), исследуемая система (3) не имеет φ -циклов в области G^+ .

Рассмотрим систему

$$\dot{\varphi} = u, \quad \beta \dot{u} = \gamma_1 - \sin \varphi - ru, \quad z, \quad u \in G^+, \quad (25)$$

где $\gamma_1 = \gamma - (\gamma + 1)/r$, $(r - 1)^{-1} \leq \gamma < 1$, $r > 2$. Сравнивая векторные поля системы (1.3) и (25), устанавливаем, что

$$\frac{du}{d\varphi} \geq \frac{du^+}{d\varphi}, \quad z, \quad u \in G^+ \cap G_0, \quad (26)$$

где $u(\varphi)$, $u^+(\varphi)$ — интегральные кривые систем соответственно (3) и (25). Из неравенства (26) с использованием теоремы 4—1.8(а) работы [11], утверждения 3, теоремы Брауэра [14], а также наличия единственной бифуркационной кривой $\beta = \beta_p(\gamma, r)$, системы (25) вытекает следующее

Лемма 4. При $(r - 1)^{-1} \leq \gamma < 1$, $r > 2$, $\beta \geq \beta_p(\gamma, r)$, где $\gamma_1 = \gamma - (\gamma + 1)/r$, $\beta_p(\gamma, r)$ — бифуркационная кривая системы (25), исследуемая система (3) имеет φ -цикл в области $G^+ \cap G_0$.

Бифуркации и циклы второго рода. Особую траекторию, образующую сепаратрисой S_1^- , идущей из седла O_2 в него же, делая при этом оборот по φ в области $G_0^+ = G_0$; $u > 0$, обозначим через Γ .

Теорема 1. Существует функция $\beta = \beta_k(\gamma, \alpha, r)$, которая соответствует существованию петли Γ , причем

$$\beta_m(\gamma, r) < \beta_k(\gamma, \alpha, r) < \beta_p(\gamma_1, r), \quad (27)$$

$$0 < \gamma \leq 1, \quad \gamma_1 = \gamma - (\gamma + 1)/r, \quad 0 < \gamma_1 < 1.$$

Доказательство. Из леммы 1, а также результатов пятого раздела следует, что при $\gamma > 0$ многообразия S_1^- и S^+ пересекают плоскость $\varphi = \varphi_1$. Пусть u^-, z^- — координаты точки, в которой сепаратриса S_1^- первый раз пересекает плоскость $\varphi = \varphi_1$ со стороны $\varphi < \varphi_1$. Обозначим через $u^+(z)$ уравнение кривой, по которой поверхность S^+ первый раз пересекает плоскость $\varphi = \varphi_1$ со стороны $\varphi > \varphi_1$.

Введем функцию $\rho(\beta, \gamma, \alpha, r) = u^- - u^+(z^-)$, которая определена в области $0 < \gamma < 1$ и является непрерывной относительно параметров системы (3).

При $\beta \ll 1$ система (3) имеет единственную устойчивую инвариантную поверхность $u = \psi(\varphi, z)$, совпадающую с поверхностью медленных движений

$$u = \frac{1}{r} (\gamma - \sin \varphi - z) \quad (28)$$

при $\beta = 0$ [15—17], поскольку $\partial \dot{u} / \partial u = -r < 0$, а вырожденная система

$$r\dot{\varphi} = \gamma - \sin \varphi - z, \quad r\dot{z} = \alpha(\gamma - \sin \varphi - (1+r)z) \quad (29)$$

является грубой при $\gamma < 1$.

Для системы (29) с учетом равенства (28) имеем

$$\rho(\beta \ll 1, \gamma, \alpha, r) < 0. \quad (30)$$

При $\sqrt{\beta} \gg 1$, выполняя в (3) преобразование

$$\tau \rightarrow \sqrt{\beta} \tau, \quad u \rightarrow u/\sqrt{\beta}, \quad z \rightarrow z/\sqrt{\beta}, \quad (31)$$

также приходим к изучению двумерной системы

$$\dot{\varphi} = u, \quad \dot{u} = \gamma - \sin \varphi - \beta^{-1/2}(1+r)u, \quad (32)$$

для которой [11] при достаточно больших β

$$\rho(\beta \gg 1, \gamma, \alpha, r) > 0. \quad (33)$$

Учитывая (30) и (33) и применяя теорему Коши о нуле функции, устанавливаем существование функции $\beta = \beta_k(\gamma, \alpha, r)$, которая соответствует наличию петли Γ . Условия (24) следуют из лемм 3 и 4. Теорема доказана.

Примечание: для простоты изложения мы предполагаем, что функция β_k однозначна.

Теорема 2. 1) при $\gamma > 1$ в области G_0 существует устойчивый φ -цикл; 2) при $\alpha(1+r) \geq 1$ с уменьшением γ от $\gamma > 1$ до $0 < \gamma \leq 1$, устойчивый φ -цикл влипает в петлю Γ при $\beta = \beta_k(\gamma, \alpha, r)$.

Доказательство. 1. Из предложения 3, а также отсутствия состояний равновесия при $\gamma > 1$ следует существование периодической по φ области G_0 , которую траектории системы (3) переводят в себя. Отсюда при использовании теоремы Брауэра [14] и учета того факта, что при достаточно малых и достаточно больших β система (3) имеет единственный устойчивый цикл второго рода, получаем существование в G_0 устойчивого φ -цикла.

2. При $\beta > \beta_k(\gamma, \alpha, r)$ из предложения 3, разделов 5 и 6, а также расположения многообразий S_1^-, S^+ в G_0^+ следует существование периодической по φ области $g^+ \subset G_0^+$, гомеоморфной тору, которую траектории системы (3) переводят в себя. Применяя теорему Брауэра, получаем существование в области g^+ хотя бы одного устойчивого цикла второго рода.

Согласно лемме 2, при $\gamma = 0$ все φ -циклы должны исчезнуть. Анализ уравнения (12) показывает, что при $\alpha(1+r) \geq 1$, для вещественных корней в точке O_2 имеет место неравенство $\lambda_1 + \lambda_{2,3} < 0$. С учетом леммы 1 выполняются условия теоремы из работы [18], в соответствии с которой опускающийся вниз по области G_0^+ устойчивый φ -цикл влипает в петлю Γ при $\beta = \beta_k(\gamma, \alpha, r)$. Теорема доказана.

Следствие. При $\alpha(1+r) \geq 1$ разбиение пространства параметров β и γ при фиксированных α, r показано на рис. 2, а.

В области d_0 φ -циклов нет. При любых начальных условиях система уходит в устойчивую узловую точку O_1 (исключая траектории на поверхности S^+). В области d_1 имеется устойчивая φ -траектория. Состояния равновесия отсутствуют. В области d_{10} сепаратрисная поверхность S^+ охватывает устойчивое состояние равновесия O_1 и тем

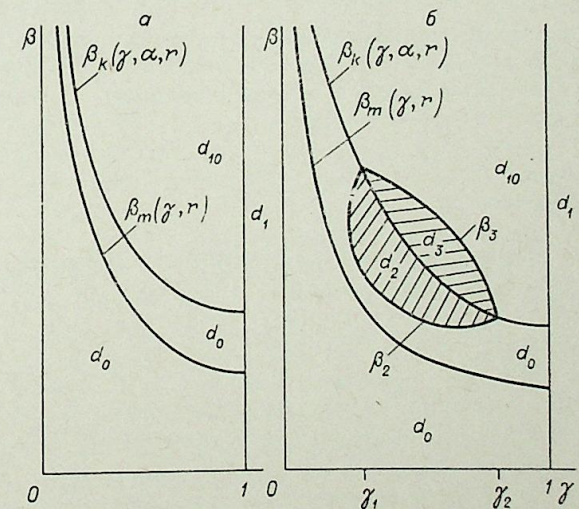


Рис. 2.

а — $(\alpha + \alpha r \geq 1)$; б — $(\alpha + \alpha r < 1)$.

Тихомиров И. А. Высоочастотные факельные плазмотроны и их практическое применение.— Изв. СО АН СССР, 1980, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

Делается обзор исследований по разработке ВЧ плазмотронов различного типа. Основное внимание уделяется ВЧ факельному (ВЧФ) плазмотрону. Рассматриваются свойства и особенности ВЧ факельного разряда. Даются (в теоретическом и экспериментальном плане) сведения о функции распределения электронов по энергиям в таком разряде. Излагаются по амплитудной модуляции питающего разряд поля и сведения о свойствах амплитудной модулированной плазмы, излучающей акустические колебания. Предлагается математическая модель поведения капель раствора в условиях плазмы. Выдвигаются положения (с учетом модели самого разряда), закладываемые при разработке ВЧФ плазмотронов. Описываются типы ВЧФ плазмотронов, их принципиальные и конструктивные особенности. Рис. 5, библиогр. 68.

УДК 621.039.61

Кудин В. В. Проблемы и перспективы развития плазменного нанесения покрытий.— Изв. СО АН СССР, 1980, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

Показаны основные области применения плазменных покрытий и намечены наиболее перспективные направления дальнейшего развития этого процесса. Сформулированы задачи в области исследования и разработки плазменной аппаратуры для нанесения покрытий из металлов, сплавов, окислов и других соединений. Показано, что повышение качества покрытий может быть достигнуто увеличением скорости и температуры напыляемых частиц, повышением производительности процесса напыления, увеличением коэффициента сосредоточенности потока напыляемых частиц, регулированием термических и химических свойств плазмы, повышением стабильности и ресурса работы плазменной аппаратуры и рядом других технических мероприятий. Рис. 2, библиогр. 23.

УДК 533.951.7 : 52-60

Девятков Б. Н., Назарук В. И. Локально-множественный подход к моделированию течения в канале плазмотрона методом Монте-Карло.— Изв. СО АН СССР, 1980, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

С позиций исследования электродуговых течений рассмотрены современные направления в развитии дискретных моделей турбулентности.

В связи с анализом некоторых направлений их развития выявлены предпосылки нового вероятностного множественного подхода.

В основе такого подхода к описанию электродуговых течений лежит теория случайных множеств и множественных случайных процессов. Моделью динамики развития турбулентного течения в данном случае является процесс случайного взаимодействия.

Исходя из представления о турбулентном течении, как о хаотическом движении отдельных молекул потока, построена локально-множественная модель случайных процессов рождения, перемещения и взаимодействия молекул, позволяющая моделировать развитие течения в канале. Показаны пути развития модели с целью учета влияния столба дуги на формирование течения в целом и получение количественных оценок его характеристик. Приводятся результаты численных экспериментов на ЭВМ методом Монте-Карло. Рис. 3. Библиогр. 24.

УДК 537.523 : 52-60

Назарук В. И. Статистическое моделирование процесса взаимодействия дуги с турбулентным потоком.— Изв. СО АН СССР, 1980, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

На основе локально-множественного подхода в моделировании турбулентной дуги предложен метод статистического моделирования процесса развития формы плазменного шнура в условиях турбулентного течения газа, предполагающий использование численных экспериментов на ЭВМ. При этом учитываются локальные условия для простейшей модели возникновения и развития изгибных неустойчивостей проводящего канала дуги. Показаны пути решения задачи управления геометрической формой столба дуги на модели путем локального воздействия на характер протекания процесса, которое в определенных случаях может привести к условиям резонансного возмущения. Рис. 2, библиогр. 7.

Бербасов В. В. Электрическая дуга в поперечном магнитном поле.— Изв. СО АН СССР, 1980, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

В работе поставлена задача расчета электрической дуги в поперечном магнитном поле, обдуваемом потоком газа, так, чтобы сила Лоренца была направлена против потока. Предложен численный метод решения эллиптических уравнений. Путем применения данного метода для решения поставленной задачи получено приближенное численное решение о поведении электрической дуги в плоском узком канале с наложенным внешним магнитным полем. Рис. 8, библиогр. 5.

УДК 532.529.5

Солонепко О. П., Яцкарь П. Я. Распространение струи частиц в потоке газа, натекающем на пластину.— Изв. СО АН СССР, 1980, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

Приведены результаты численного исследования динамики струи монодисперсных сферических частиц диаметром 6, 30, 60 мкм в заданном гиперболическом потоке газа, натекающем на пластину. Для описания дисперсной фазы принято континуальное представление. Влиянием частиц на газовый поток пренебрегается. Оценивается влияние поправок на вязкость газа.

Приводятся оценки скорости нарастания толщины покрытия, образованного частицами на преграде. При этом предполагается, что все частицы, достигшие пластины, оседают на ней. Рис. 5, библиогр. 5.

УДК 537.523 : 52-60

Девятков Б. Н., Назарук В. И. Спектральный анализ статистической модели пульсаций турбулентной дуги.— Изв. СО АН СССР, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

Излагаются результаты исследования поперечных пульсаций дуги на ее множественной, вероятностной модели. Приводятся данные численных экспериментов и постановка задачи идентификации модели по результатам физического эксперимента, основанного на фотоэлектрической регистрации дуги в турбулентном потоке.

Показана возможность использования статистического метода для моделирования вишовой неустойчивости столба дуги. Определены пути выявления гармонической составляющей сигнала в случае возникновения этой неустойчивости. Даны рекомендации по применению спектральных окон быстрого преобразования Фурье с целью выявления и регистрации вишовой формы дуги. Рис. 7, библиогр. 13.

УДК 537.525.5

Баранников А. Л., Галкин Ю. А., Лычников Д. С., Чернетский А. В. Исследование высоочастотных колебаний в водородной плазме сильноточного разряда низкого давления.— Изв. СО АН СССР, 1980, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

Описана конструкция двухэлектродной водородной лампы для плазменного генератора ВЧ-колебаний. Показана область давлений водорода и диапазон рабочих токов, при которых в водородной лампе наблюдается устойчивая генерация ВЧ-колебаний в диапазоне частот 1—10 МГц. Рис. 6, библиогр. 18.

УДК 533.924

Пашадкий Н. В., Молчанов Е. А. Эрозия графитовых электродов плазмотрона переменного тока.— Изв. СО АН СССР, 1980, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

Излагаются результаты экспериментальных исследований эрозии графитовых электродов в мощном дуговом плазмотроне, работающем на воздухе. Основное внимание уделено определению зависимостей эрозии внутреннего электрода от диаметра и длины стержня, силы тока, времени горения дуги, взаимного положения внутреннего и наружного электродов. Результаты исследований эрозии качественно сравниваются с данными других авторов. Рис. 6, библиогр. 7.

Лебсак В. А., Подмазов А. В., Пономарев Б. В. Исследование запальной свечи для плазменного зажигания электродуговых подогревателей воздуха.— Изв. СО АН СССР, 1980, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

Для зажигания дуги в электродуговых подогревателях воздуха предложена и испытана специальная запальная свеча, принцип действия которой состоит в использовании резкого повышения давления и температуры в момент емкостного скользящего разряда по поверхности изолятора в глубине глухого канала для выброса факела разряда из открытой части канала.

Приведены результаты экспериментального исследования такой свечи на специально созданном стенде и получена эмпирическая зависимость для определения ее основных параметров. Показана возможность применения для зажигания дуговых подогревателей стандартной полупроводниковой свечи. Рис. 2, библиогр. 7.

УДК 537.52-60

Борискин С. П., Девятков Б. Н., Левченко В. Ф. Научно-инженерный подход к проблеме моделирования и анализа динамики плазматрона как технологического объекта. II. Метод определения статических характеристик процесса в плазматроне.— Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1980, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

На основе анализа физики процесса рассмотрено несколько зон в плазматроне с МЭВ на основе использования чисел Дамколера, представляющих собой отношение характерных времен: времени нахождения химически реагирующей частицы в плазматроне и собственно ее времени химической реакции. Методы решения систем уравнений в статике различаются в зависимости от характерных чисел Дамколера с учетом возможности их упрощения. Системы уравнений решаются численными методами с понижением порядка каждого дифференциального уравнения до первого. Данные статические характеристики необходимы для последующего структурного анализа динамики плазматрона по аналитическим выражениям функций переходного процесса [2]. Библиогр. 15.

УДК 533.95

Девятков Б. Н., Перегудов В. С. Общий метод аналитического представления решений многомерных линейных задач динамики плазмы.— Изв. СО АН СССР, 1980, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

Рассмотрена линейная многомерная задача о переходных процессах в электрической дуге, горящей в цилиндрическом канале. Предложена методика решений трехмерной задачи динамики плазмы путем сведения ее к рекуррентным системам обыкновенных дифференциальных уравнений относительно обобщенных динамических характеристик дуги (инерционностей процесса). Применение преобразования типа Лапласа на конечном интервале $(0, L)$ позволило представить решение в аналитическом виде по двум переменным. По третьей переменной, от которой зависят коэффициенты основных уравнений динамики, предусматривается численный счет задачи. Для выражения передаточных и переходных функций через инерционности процесса использованы ряды Бурмана—Лагранжа, разложения по ортогональной системе полиномов Лагерра и квазиортогональной системе полиномов Каттериджа. Библиогр. 5.

УДК 536.244

Суринов Ю. А., Рубцов В. В. Определение температурного поля ослабляющей среды в излучающей системе, состоящей из двух коаксиальных цилиндров различной длины.— Изв. СО АН СССР, 1980, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

В работе дано исследование и решение четвертой и пятой постановок задачи о лучистом теплообмене по классификации Ю. А. Суринова [4—6] в излучающей системе, состоящей из двух коаксиальных цилиндров различной длины, разделенных поглощающей и изотропно рассеивающей средой. Кроме того, дано численное определение температурных скачков на границе указанной излучающей системы. Рис. 7, библиогр. 14.

УДК 662.987 : 536.247

Борчевкин Ю. С., Корольков Б. П. Динамика теплообменника с независимым обогревом при неравномерном распределении плотности теплового потока по координате.— Изв. СО АН СССР, 1980, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

В статье приведена линейная математическая модель динамики теплообменника с независимым обогревом с учетом неравномерности распределения плотности теплового потока. Постановка задачи реализована для произвольного закона изменения $q(z)$. Аналитические решения получены для практически наиболее интересных распределений q по координате: линейного и синусоидального. Анализ решений позволил установить механизм развития и определяющие параметры переходных процессов при наличии пространственной распределенности теплоподвода, а также количественные и качественные отличия последних от динамических процессов в теплообменниках с равномерным обогревом. Рис. 6, библиогр. 12.

УДК 532.68.001.5 : 536.42

Гоголин И. И., Дорохов А. Р. К обобщению опытных данных по критическим тепловым потокам в стекающих пленках жидкости.— Изв. СО АН СССР, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

Приведены результаты обобщения экспериментальных данных по критическим тепловым потокам в стекающих пленках подогретой жидкости в турбулентной области чисел Рейнольдса. Рис. 2, библиогр. 6.

УДК 551.345 : 53

Даниэлян Ю. С., Яницкий П. А. О формировании ледяных прослоев при промерзании влажных грунтов.— Изв. СО АН СССР, 1980, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

В работе предлагается новый подход к объяснению причин образования ледяных прослоев при промерзании влажных грунтов. В основу положена гипотеза о том, что образование ледяных шпиров является следствием потери устойчивости равномерного процесса промерзания. Исследование на устойчивость проведено на модельной задаче. Миграционный поток влаги на фронте промерзания записан в виде произвольной функции влажности и льдистости. Получен безразмерный критерий равномерного промерзания. Показано, что структура критерия находится в согласии с известными экспериментальными наблюдениями формирования ледяных прослоев. Библиогр. 12.

УДК 532.5

Шенеленко В. П. Потенциальное обтекание тела вращения потоком идеальной несжимаемой жидкости.— Изв. СО АН СССР, 1980, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

Предлагается алгоритм расчета потенциального течения около тела вращения при его произвольном движении в идеальной несжимаемой жидкости. Задача решается методом интегральных уравнений. Сингулярные интегралы задачи вычисляются по приближенным формулам, построенным на сплайновой интерполяции подынтегральных функций. Алгоритм обеспечивает высокую точность расчетов для тел с удлинением до 25. Рис. 1, табл. 4, библиогр. 9.

УДК 533.601.312+533.601.314

Бычков Н. М., Коваленко В. М. Аэродинамические характеристики кругового цилиндра в поперечном потоке.— Изв. СО АН СССР, 1980, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.

Экспериментально исследованы аэродинамические силы, распределение давления и его пульсации на круговом цилиндре в поперечном потоке. Опыты проведены в малотурбулентной дозвуковой аэродинамической трубе ИТПМ Т-324 в диапазоне чисел $10^5 \leq Re \leq 6 \cdot 10^5$ на специально созданной установке, позволившей регистрировать мгновенные значения сил и давлений с довольно высокой точностью и малой инерционностью. Измерения выполнены для четырех вариантов условий, отличавшихся степенью турбулентности потока и шероховатостью поверхности цилиндра.

При обтекании гладкого цилиндра малотурбулентным потоком в критической области чисел Рейнольдса обнаружены большие знакопеременная подъемная сила, а также значительные колебания силы сопротивления, что свидетельствует о несимметричном и нестационарном положении точек отрыва пограничного слоя. Пульсации давления на поверхности цилиндра достигают максимальных значений в предотрывной зоне. Турбулизация набегающего потока или повышение шероховатости поверхности цилиндра стабилизируют положение точек отрыва, обеспечивая более симметричное обтекание цилиндра. Рис. 13, библиогр. 11.