

# ИЗВЕСТИЯ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

СЕРИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

Год основания журнала 1957 Год основания серии 1963	Периодичность журнала 15 номеров в год Периодичность серии 3 номера в год	№ 3(318) вып. 1	Февраль 1980
--	--	--------------------	-----------------

## СОДЕРЖАНИЕ

### ПРИКЛАДНАЯ ГАЗО- И РЕОДИНАМИКА

В. А. Владимиров, В. Ф. Тарасов. Формирование вихревых колец	3
Д. Н. Горелов. К выбору оптимального закона колебаний крыла, выполняющего роль движителя	12
А. Л. Сурис. Распространение струи в поперечном сносящем потоке	18
В. И. Багрянцев, В. И. Кисельх. Нарушение разделения мелких частиц в вихревой камере	23
С. И. Лежнин. Волны конечной амплитуды при расслоенном режиме течения парожидкостной среды	30
М. А. Султанов. О гидрогазодинамическом характере формирования и развития структуры сверхзвукового факела при истечении потока из цилиндрического отверстия	35
А. М. Блохин, Е. И. Роменский. Влияние свойств предельного стационарного решения на его установление	44

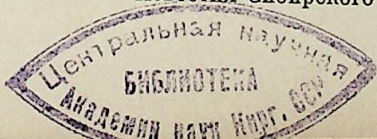
### НИЗКОТЕМПЕРАТУРНАЯ ПЛАЗМА

Б. И. Девятов, М. Ф. Жуков, В. И. Назарук. Множественное моделирование пульсаций дуги методом Монте-Карло	51
Б. И. Девятов, М. Ф. Жуков, С. М. Хайтман. Постоянная времени дуги, инерционность процесса и линейная модель динамики плазмы	57
В. С. Перегудов, Б. А. Урюков. Область устойчивой работы плазматрона большой длины	71
С. И. Борискин, Б. И. Девятов, В. Ф. Левченко. Научно-инженерный подход к проблеме моделирования и анализа динамики плазматрона как технологического объекта. I	74

### ТЕРМОДИНАМИКА И ТЕПЛОБМЕН

В. А. Лебедев. Применение зонального метода к теплофизическому расчету излучающей системы с зеркальными поверхностями	89
Н. Н. Пономарев, И. А. Рубцов. Радиационно-кондуктивный теплообмен в плоском слое рассеивающей среды	92
Ю. П. Гупало, А. Д. Полянин, П. А. Прядкин, Ю. С. Рязанцев. О нестационарном теплообмене частицы, движущейся с переменной скоростью в идеальной жидкости	100
С. В. Соловьев. Расчет температурного поля проводов с покрытием при радиационно-конвективном нагреве	103
В. И. Паасонен. Моделирование тепловых процессов в неоднородных конструкциях с источниками тепла	108
Ю. А. Пшеничнов. К расчету течения капельной жидкости с переменной вязкостью в термическом начальном участке плоского канала	113
В. В. Олейников, В. А. Сапожников. О задаче распределения требований по надежности между элементами сложной системы	117
В. И. Потапов, С. Г. Братцев. О вероятности безотказной работы и среднем времени «жизни» избыточных структур с адаптивными восстанавливающими органами	124
Ю. К. Горбунов. Поперечные активно-индуктивные волновые параметры обмоток электрических машин	135
О. Н. Веселовский. Цилиндрический линейный асинхронный двигатель и его аналоговая модель	138

© Издательство «Наука»  
 Известия Сибирского отделения АН СССР, 1980 г.



ИЗВЕСТИЯ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

Главный редактор журнала чл.-кор. *М. Ф. Жуков*

Заместитель главного редактора чл.-кор. *В. Г. Дулов*

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ СЕРИИ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

Ответственный редактор серии чл.-кор. *М. Ф. Жуков*

Чл.-кор. *О. Ф. Васильев*, д-р техн. наук *Б. Н. Деятов*, чл.-кор.  
*В. Г. Дулов*, чл.-кор. *Н. А. Желухин* (зам. ответственного редактора),  
д-р техн. наук *В. Е. Накоряков*, д-р техн. наук *Н. А. Рубцов* (ответствен-  
ный секретарь серии), д-р техн. наук *Б. А. Урюков*, д-р техн. наук  
*В. К. Щербаков*

Адрес редакции: 630099, Новосибирск, 99, Советская, 18, комн. 331.  
Тел. 22-00-44

Редактор *Р. П. Ефимова*  
Художественный редактор *Э. С. Филонычева*  
Технический редактор *Н. М. Бурлаченко*  
Корректоры *С. В. Блинова*, *Е. Н. Зимица*

Сдано в набор 23.11.79. Подписано к печати 14.02.80. МН-05222. Формат 70×108<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Высокая пе-  
чать. Усл.-печ. л. 13,3. Уч.-изд. л. 13,4. Тираж 1902 экз. Заказ № 754.

Издательство «Наука», Сибирское отделение. 630099, Новосибирск, 99, Советская, 18.  
4-я типография изд-ва «Наука», 630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25.

В. А. ВЛАДИМИРОВ, В. Ф. ТАРАСОВ

ФОРМИРОВАНИЕ ВИХРЕВЫХ КОЛЕЦ

ВВЕДЕНИЕ

Одной из важных задач в изучении кольцевых вихрей является выяснение связи между параметрами вихревого кольца и устройства, из которого оно получается (генератора). Этот вопрос привлекает в последнее время большое внимание.

В работе [1] предлагается модель формирования вихревого кольца, получаемого импульсным движением диска в жидкости с последующим его выдергиванием. Модель основана на законах сохранения вихревого импульса [2], энергии и циркуляции. Однако вихревые кольца обычно получают при помощи генератора совсем другого типа. Это устройство представляет собой результат с отверстием, из которого при помощи поршня выталкивается некоторый объем жидкости. Процесс формирования вихря в такой постановке впервые рассмотрен в [3]. Основой для построения модели также являлись законы сохранения. Экспериментальное изучение связей между параметрами генератора и получаемого из него вихревого кольца проведено в работе [4]. Из зарубежных работ, опубликованных в последнее время, следует отметить [5, 6]. В [5] исследуется модельная задача формирования вихревого кольца из конечного отрезка цилиндрической вихревой пелены в неограниченной жидкости. При этом генератор отсутствует и задача сильно упрощается. Однако решение задачи в такой постановке дает только грубую оценку параметров вихревого кольца и не описывает реальный процесс его формирования вблизи стенок генератора.

В настоящей работе излагаются результаты экспериментов по исследованию процесса формирования вихревых колец. Предлагается математическая модель этого процесса, основанная на использовании законов сохранения и некоторых дополнительных соображений. Приводится сравнение теории с экспериментом и обсуждаются физические следствия полученных результатов. Предлагаемая математическая модель процесса является развитием работы [3].

1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Рассматривается формирование вихревого кольца при помощи генератора, состоящего из прямой тонкостенной круглой трубы и поршня, которым из трубы выталкивается заданный объем жидкости. При этом на острой кромке трубы происходит отрыв пограничного слоя, который сразу же начинает сворачиваться в спираль, постепенно удаляющуюся от среза трубы. Эта спираль, являясь зоной концентрированной завихренности, представляет собой основу будущего ядра вихревого кольца. На рис. 1 изображено расположение пограничного слоя, трубы и поршня в сечении потока плоскостью, проходящей через ось симметрии. С целью изучения процесса формирования поставлен ряд экспериментов, в которых визуализация потока достигалась нанесением полосочки краски на

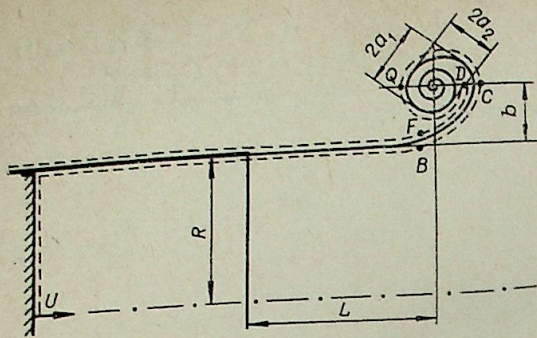


Рис. 1.

мирования кольца, являются скорость движения поршня  $V(t)$ , радиус трубы  $R$ , коэффициент кинематической вязкости  $\nu$ , полная длина вытолкнутой струи (ход поршня)  $l_0$ .

Скорость движения поршня  $V(t)$  связана с текущей длиной вытолкнутой струи  $l(t)$  так, что  $V(t) = dl/dt$ . Для определения закона движения поршня в его центре закреплялся тонкий стержень, за концом которого можно было следить одновременно с наблюдениями за спиралью (см. рис. 2).

В целях упрощения как постановки экспериментов, так и построения теоретической модели течения выбран равномерный режим движения поршня. Зависимость пути, пройденного поршнем, от времени  $l(t)$  в безразмерных координатах приведена на рис. 3.

Важным безразмерным параметром, характеризующим течение, является число Рейнольдса  $Re = UR/\nu$ . В наших опытах оно изменялось от  $3,5 \cdot 10^4$  до  $4,6 \cdot 10^5$ . При таких  $Re$  пограничный слой является тонким, спираль сворачивается плотно, образуя вихревое кольцо с тонким ядром завихренности.

Данные проведенных экспериментов сведены в таблицу. В левом столбце обозначения соответствуют данному эксперименту на графиках. Изменение  $\nu$  достигалось изменением температуры воды.

В этих экспериментах измерялись следующие геометрические параметры: 1)  $l(t)$  — длина вытолкнутой струи, 2)  $L(t)$  — путь, пройденный формируемым кольцом (рис. 1), определенный как расстояние от среза трубы до линии центров спирали, 3)  $b(t) = R_0(t) - R$ , где  $R_0(t)$  — радиус формируемого кольца, определенный как расстояние от оси симметрии до центра спирали, 4) радиус сечения спирали  $a(t) = \frac{a_1(t) + a_2(t)}{2}$  (рис. 1).

Величины  $L(t)$  и  $b(t)$  определяются по кинограммам достаточно точно. Ошибки в их измерении много меньше разброса этих величин, обусловленного различными случайными факторами, например, небольшими

внутреннюю поверхность трубы вблизи ее среза. Сворачивание в спираль подкрашенного таким образом слоя жидкости фиксировалось на кинолентку. Съемка осуществлялась кинокамерой Pentaxet-35 с частотой 1000 к/с. Опыты проводились в воде. Типичная кинограмма процесса формирования кольца приведена на рис. 2.

Основными параметрами, определяющими процесс фор-

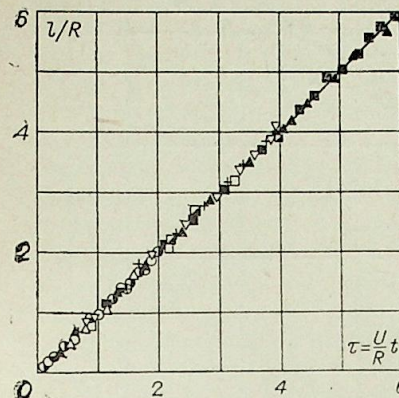


Рис. 3.

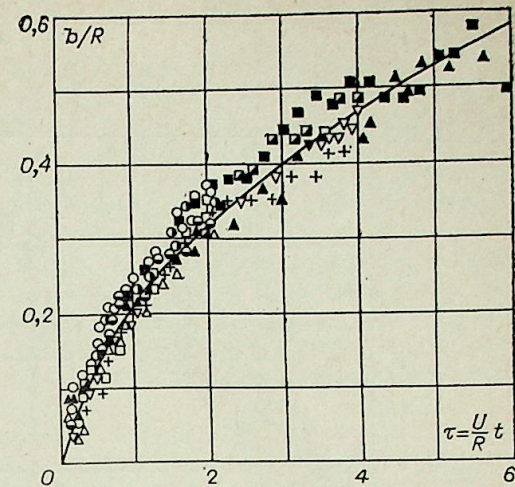


Рис. 4.

изменениями в начальных и граничных условиях. Последнее в особенности справедливо для  $a(t)$ . Эта условная величина, малая по сравнению с  $R$ , зависит от поведения свободного пограничного слоя (слоя смешения) на границе струи. Этот слой, как известно, является неустойчивым. Экспериментальные зависимости  $L(t)$ ,  $b(t)$ ,  $a(t)$ , представленные на рис. 4—6, приведены в безразмерных координатах.

Для построения модели течения наиболее важны следующие качественные результаты экспериментов: а) величины  $a/R$  и  $b/R$  являются ма-

	$R$ , см	$l_0$ , см	$U$ , см/с	$Re$		$R$ , см	$l_0$ , см	$U$ , см/с	$Re$
$\Delta$	1,75	3,5	200	$3,5 \cdot 10^4$	$\blacksquare$	1,75	10,5	400	$7 \cdot 10^4$
$\nabla$	1,75	7,0	200	$3,5 \cdot 10^4$	$+$	3,0	12	515	$1,85 \cdot 10^5$
$\blacktriangle$	1,75	10,5	200	$3,5 \cdot 10^4$	$\circ$	5	10	200	$1 \cdot 10^5$
$\square$	1,75	3,5	390	$6,82 \cdot 10^4$	$\ominus$	5	10	400	$2 \cdot 10^5$
$\blacksquare$	1,75	7,0	400	$7 \cdot 10^4$	$\oplus$	5	10	400	$4,6 \cdot 10^5$

лыми на протяжении всего процесса формирования; б) во время движения поршня граница струи от среза трубы до некоторой точки  $B$  вблизи спирали (рис. 1) остается параллельной стенкам трубы. Это утверждение справедливо при  $t > R/U$ ; в) измеренные величины  $L(t)$  и  $b(t)$  не зависят от  $Re$ ,  $a(t)$  слабо зависит от  $Re$ ; г) неустойчивости за время движения поршня (при выбранных  $l_0$ ) развиваются слабо.

## 2. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ЯВЛЕНИЯ

Таким образом, в задаче имеются два параметра малости  $a/R$  (или  $b/R$ ) и  $1/Re$ . Наше рассмотрение будет основано на представлении решения в виде ряда по  $a/R$ , причем будут удерживаться только главные члены соответствующих разложений. Кроме того, будем пренебрегать членами порядка  $Re^{-1/2}$ , что соответствует пренебрежению толщинами пограничных слоев. Из п. 1 следует, что в нашей задаче завихренность сконцентрирована на четырех участках (рис. 1): а) пограничный слой на стенках трубы; б) прямолинейный участок свободного пограничного слоя (слоя смешения) от среза трубы до точки  $B$ ; в) криволинейный участок  $BC$ ; г) область внутри замкнутой кривой  $CQDC$ , содержащая

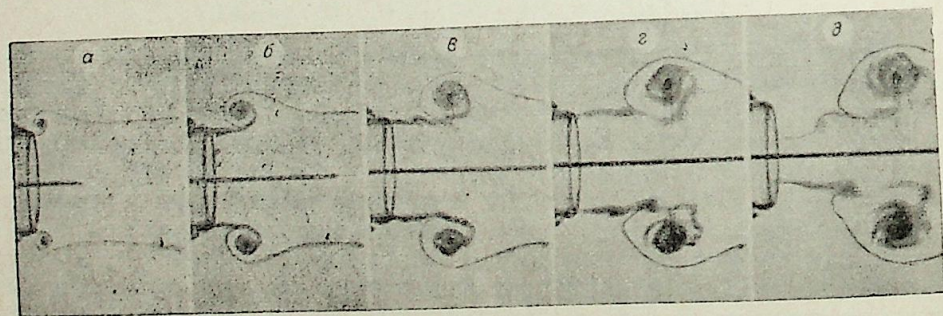


Рис. 2.

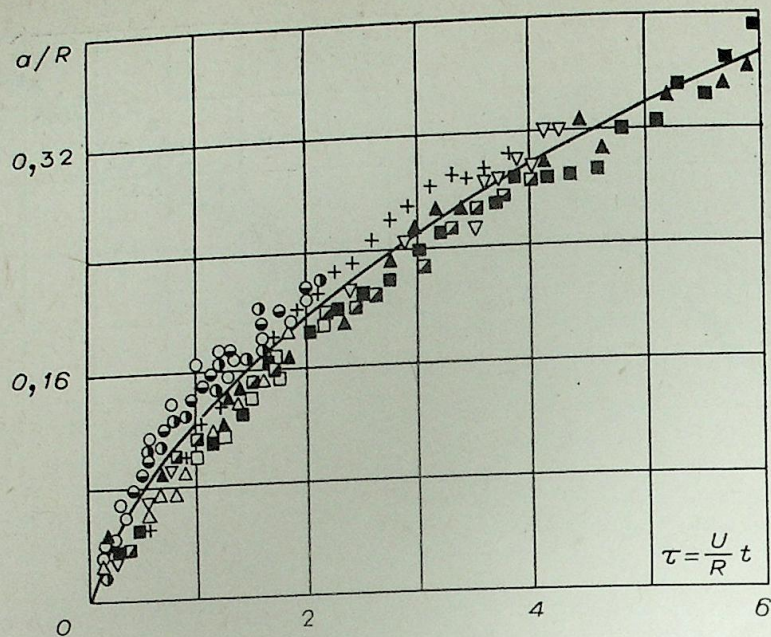


Рис. 5.

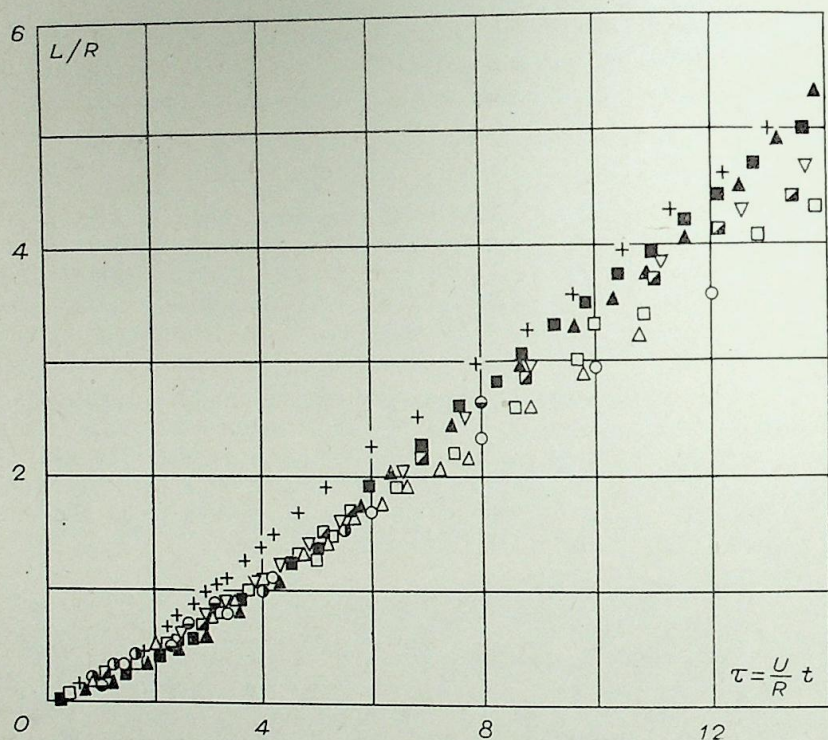


Рис. 6.

часть пограничного слоя, свернувшуюся в спираль. Эту область мы называем ядром формируемого вихревого кольца.

Во всем остальном пространстве течение можно считать потенциальным.

### 3. О ПРИПОРШНЕВОМ РАЙОНЕ ТЕЧЕНИЯ

В связи с последним утверждением может возникнуть вопрос о характере течения около поршня, которое появляется из-за наличия угловых точек на поршне. Для удобства рассмотрим течение в системе координат, связанной с поршнем. После начала движения на стенках трубы, скорость которых  $U$ , образуется тонкий пограничный слой, вдоль которого переносится некоторое количество жидкости. В угловой точке этот поток поворачивает и начинает течь вдоль поршня, образуя тонкую струю жидкости, сходящуюся к оси симметрии. Эта струя затухает посредством развития неустойчивостей, действия вязкости и поля давления. Потенциальность течения в припоршневом районе нарушается. Из сказанного следует, что толщина этой области порядка  $Re^{-1/2}$ , поэтому ею пренебрегаем и принимаем, что вплоть до поршня существует потенциальный поток.

Принятое приближение аналогично рассмотрению в рамках модели идеальной жидкости, в которой особенностей вблизи поршня вообще не возникает. В то же время стекание вихревой пелены с кромки трубы и ее сворачивание в спираль может рассматриваться и для идеальной жидкости.

Будем считать, что скорость жидкости на поршне нормальна к нему. Это предположение справедливо, если поршень находится достаточно далеко от среза трубы. Практически достаточно удаления на несколько радиусов  $R$ , поскольку известно, что неоднородности потока в трубе очень быстро (экспоненциально) затухают с расстоянием вдоль оси трубы. Для доказательства достаточно рассмотреть соответствующую функцию Грина.

### 4. ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

Из закона сохранения вихревого импульса  $\vec{P}$  и справедливости в зоне потенциальности течения интеграла Коши — Лагранжа будет получена связь между циркуляцией формируемого вихревого кольца и его радиусом. Для упрощения будем считать жидкость неограниченной на бесконечности, так что единственными ее границами являются стенки генератора. Понятие вихревого импульса для течений жидкости, заполняющей все пространство, введено в [2]. В нашем случае, поскольку присутствуют стенки генератора, необходимо пользоваться обобщением этой величины [7]. Пусть вся завихренность сосредоточена в области  $\Omega$ , вне  $\Omega$  течение потенциально. Тогда вихревой импульс преобразуется к виду [7]

$$\vec{p} = \int_{\Omega} \vec{v} dV - \int_{\partial\Omega} \varphi \vec{n} dS. \quad (1)$$

Здесь  $\partial\Omega$  — граница  $\Omega$ ,  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$  — поле скорости,  $\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$  — потенциал течения вне  $\Omega$ ,  $\vec{n}$  — внешняя нормаль к  $\partial\Omega$ .

В качестве  $\partial\Omega$  выбираем поверхность, сечение которой плоскостью, проходящей через ось симметрии течения  $z$ , обозначено на рис. 1 штриховой линией. Единственной ненулевой компонентой  $\vec{P}$  является  $P_z$ . Можно показать, что первые два члена в представлении  $P_z$  в виде ряда по степеням  $a/R$  и  $b/R$  имеют вид

$$P_z \approx -\varphi_1 S + 2\pi R b \Gamma. \quad (2)$$

Здесь  $\varphi_1$  — значение потенциала течения на поршне, вычисленное при условии  $\varphi(\vec{r}, t) \rightarrow 0$  при  $|\vec{r}| \rightarrow \infty$ .  $S$  — площадь поршня,  $\Gamma$  — циркуляция вокруг ядра (см. п. 2). Отброшенные члены имеют порядок  $(b/R)^2$  и выше.

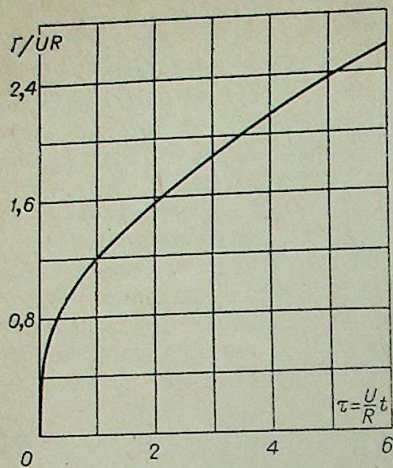


Рис. 7.

Величина  $P_z$ , согласно [7], удовлетворяет динамическому уравнению

$$\frac{dP_z}{dt} = - \int \sigma_{zk} n_k dS; \quad (3)$$

$(k = 1, 2, 3).$

Здесь  $\sigma_{zk}$  — компоненты тензора напряжений. Интеграл берется по границам жидкости (стенкам генератора). Переписывая (3) с нашей точностью, имеем

$$dP_z/dt \approx \Delta p S. \quad (4)$$

Через  $\Delta p$  обозначена разность давлений на поршне и на бесконечности.

Для величины  $\varphi_1$  в (2) из уравнения Коши — Лагранжа получаем соотношение

$$d\varphi_1/dt + \Delta p = U^2/2. \quad (5)$$

Используя (2) и (5), из (4) получаем

$$b\Gamma \approx U^2 R t / 4. \quad (6)$$

Поскольку  $b = b(t)$  просто и надежно определяется из эксперимента, из (6) находится циркуляция вокруг ядра  $\Gamma(t)$ , которая является наиболее важным параметром формируемого кольцевого вихря (см. рис. 7).

### 5. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Для получения более полного аналитического описания явления рассмотрим закон сохранения энергии  $E$ . Для энергии уравнения, аналогичные (1) и (4), имеют вид

$$dE/dt = \Delta p S U, \quad (7)$$

$$E = - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} n_i dS + \frac{1}{2} \int_{\Omega} v^2 dV. \quad (8)$$

Нетрудно показать, что основной член в представлении поверхностного интеграла в (8) в виде ряда равен  $-\frac{1}{2} \varphi_1 U S$ . Предполагая, что поле скорости (связанное с завихренностью в ядре) аппроксимируется некоторой функцией, зависящей только от расстояния  $r$  до центра ядра, имеем

$$\frac{1}{2} \int v^2 dV \approx \frac{R}{2} \int_0^a \frac{\Gamma^2(r)}{r} dr.$$

$\Gamma(r)$  — распределение циркуляции в ядре.

Для вычисления последнего интеграла необходимы сведения о законе сворачивания спирали. Пусть  $\Gamma(r, t) = \Gamma_0(t)(r/a)^n$ . Используя это представление, получаем

$$E \approx - \frac{1}{2} \varphi_1 U S + \frac{R \Gamma^2}{4n}. \quad (9)$$

Подстановка (9) в (7) с использованием (5) дает

$$d\Gamma^2/dt = 2\pi n U R (\Delta p + U^2/2).$$

В это уравнение входит неизвестная функция  $\Delta p(t)$ . Однако из простых соображений следует, что в наших экспериментах  $\Delta p \ll U^2$  для  $t > R/U$ . Действительно, в противном случае мы не имели бы прямолинейного участка границы струи, поскольку у среза трубы возникали бы большие поперечные градиенты давления.

Условие  $\Delta p = 0$  можно получить для  $t > R/U$  также из интеграла Коши — Лагранжа. Для этого надо рассмотреть значения этого интеграла в двух близких точках, лежащих по разные стороны стенки трубы достаточно далеко от ее среза. В этом случае необходимо требовать выполнения условия независимости от времени скорости на внутренней стенке трубы (вне погранслоя). Таким образом, при  $t > t_0 = R/U$  имеем

$$\Gamma(t) = [\pi n U^3 R (t - t_0) + \Gamma_0^2]^{1/2}. \quad (10)$$

Постоянная  $\Gamma_0$  равна циркуляции вихревого кольца в момент  $t = t_0$ . Теперь из (6) и (10) получаем аналитическую зависимость для  $b(t)$ , которую можно сравнивать с экспериментом

$$b(t) = U^2 R t / 4 [\pi n U^3 R (t - t_0) + \Gamma_0^2]^{1/2}. \quad (11)$$

Наилучшее согласие с экспериментом наблюдается при  $n = 1/3$  (сплошная линия на рис. 5). Но этому факту нельзя придавать большого значения, поскольку отброшенные члены в законах сохранения позволяют изменять  $n$  в весьма широких пределах (от 1/4 до 1/2), сохраняя хорошее согласие теории с экспериментом.

### 6. АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ

Поскольку при  $t < t_0$  величину  $\Delta p$  определить не удастся, то для получения аналитического вида  $\Gamma(t)$  и  $b(t)$  необходимо привлечь дополнительные соображения.

Естественно ожидать, что на начальной стадии формирования кольца течение вблизи кромки трубы будет автомодельным, определяясь единственной величиной — коэффициентом в главном члене представления потенциала течения [6]. Эта величина для случая бесконечно тонких стенок трубы имеет размерность  $\text{см}^{3/2}/\text{с}$ . Если при  $t < t_0$  имеет место автомодельный режим, то должны выполняться соотношения

$$a = a_1 t^{2/3}, \quad b = b_1 t^{2/3}, \quad \Gamma = \gamma_1 t^{2/3}, \quad (12)$$

$$L = L_1 t^{2/3}. \quad (13)$$

Проверка показала, что соотношения (12) для  $a$  и  $b$  согласуются с экспериментом, в то время как (13) не выполняется. Последнее свидетельствует о том, что в рассматриваемой постановке задача не является автомодельной. Однако эту трудность можно преодолеть при помощи перехода к движущейся системе координат. Для выяснения смысла такого перехода рассмотрим плоский аналог нашей задачи. Он хорош тем, что в этом случае существует точное решение задачи о потенциальном истечении жидкости из щели [8], и мы можем получить представление поля течения вблизи кромки щели в виде ряда. Ряд для поля скорости в терминах комплексных величин потенциала  $W$  и пространственной переменной  $z$  выглядит так:

$$\frac{dW}{dz} = u - iv = U \left[ - \frac{iA}{\sqrt{z}} + B + O(\sqrt{z}) \right], \quad (14)$$

$$A = - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{d}{\pi}}; \quad B = \frac{1}{3}.$$

Здесь  $u + iv$  — комплексная скорость,  $u$  параллельна оси симметрии течения,  $v$  — перпендикулярна;  $U$  — скорость жидкости в щели на

бесконечности,  $d$  — ширина щели. Начало координат  $z = 0$  помещено на кромку одной из стенок щели.

Из (14) видно, что следующий член ряда, после основного члена с особенностью, представляет собой однородный поток. Смысл этого потока проявляется, если вспомнить, что каждая стенка щели может быть рассмотрена в виде эквивалентной вихревой пелены. В такой интерпретации постоянный поток является главным членом в представлении поля скоростей, связанного с одной вихревой пеленой вблизи кромки другой пелены.

Рассматривая процесс формирования плоской вихревой пары, можно сказать, что каждая спираль, в дополнение к самоиндуцированному движению, будет сноситься вдоль оси симметрии течения со скоростью  $U/3$ . Автомодельность не будет нарушаться, если следующие из (13) скорости смещения спирали будут значительно превышать  $U/3$ . Автомодельный режим нарушится спустя некоторое время, когда станет  $U/3 > (2L_1/3)t^{-1/3}$ . Однако, если перейти в систему координат, движущуюся вдоль оси симметрии со скоростью  $U/3$ , то автомодельность будет нарушаться уже следующим членом (14). Поэтому она будет существовать значительно дольше, чем в покоящейся системе координат.

Аналогичное рассмотрение может быть проведено для задачи формирования вихревого кольца. В этом случае в постоянный член  $B$  выражения типа (14) внесет вклад также самоиндуцированная скорость спирали, обусловленная ее кривизной [9]. Определение  $B$  из теоретических соображений является сложной задачей. Хорошее согласие с опытными данными дает  $B = 1/2$ .\*

Определение из опыта величин  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $\gamma_1$  не является константами. Справедливо представление

$$a_1 = a_0(U^2R)^{1/3}, \quad b_1 = b_0(U^2R)^{1/3}, \quad \gamma_1 = \gamma_0(U^2R)^{2/3} \quad (15)$$

с безразмерными величинами  $a_0 = 0,125$ ,  $b_0 = 0,21$ ,  $\gamma_0 = 1,2$ .

Таким образом, для  $b(t)$ ,  $\Gamma(t)$  имеются представления (6), (10), (11), (12), (15) на всем промежутке формирования вплоть до остановки поршня. Полученные аналитические зависимости приведены на рис. 4 и 7 (сплошные линии). При  $t < t_0$  их вид дается автомодельными законами (12), (15), при  $t > t_0$  формулами (10), (11). Для  $a(t)$  на рис. 5 при  $t < t_0$  нанесена автомодельная зависимость (12), (15), при  $t > t_0$  — кривая, описываемая эмпирической формулой  $a(t) = (2/3b)(t) - 0,015R$ .

## 7. ТЕЧЕНИЕ ПОСЛЕ ОСТАНОВКИ ПОРШНЯ

Для получения более полного описания процесса формирования вихревого кольца необходимо выяснить, как влияет на вычисленные нами значения  $a$ ,  $b$ ,  $\Gamma$  в момент остановки поршня переходный режим течения после остановки поршня. Основой эволюции кольца на этом этапе является следующий процесс.

Струя, соединяющая срез трубы с вихревым кольцом, под действием поля давлений сжимается (рис. 2,  $\partial$ ). В результате этого, оставшаяся на границе струи часть пограничного слоя, отходит от ядра и вместе с частью сжимающейся струи входит в атмосферу кольцевого вихря. Вследствие этого размер ядра  $a$  и циркуляция вокруг него  $\Gamma$  остаются практически теми же, что и в момент остановки поршня.

Завихренность, попавшая в атмосферу кольца, по-видимому, обуславливает турбулизацию течения и интенсивно теряется из атмосферы в результате процессов турбулентного обмена.

Радиус кольца  $R + b$  во время переходного процесса несколько уменьшается при короткой длине вытолкнутой струи  $l_0 \leq 2R$ . Это также связано с действием возникающего в момент остановки поршня поля

\* Этот результат принадлежит Д. Г. Ахметову.

давлений. При  $l_0 > 2R$  после остановки поршня кольцо движется практически без изменения радиуса.

Получившееся после переходного режима вихревое кольцо можно рассматривать как начальное условие для рассмотрения турбулентных вихревых колец [3, 10, 11].

Важной величиной, для которой возможно сравнение теории с экспериментом, является скорость образовавшегося кольца после того, как движение поршня прекратилось и кольцо отошло на достаточное расстояние (порядка нескольких  $R$ ) от среза трубы.

При этом для скорости кольца  $W$  справедливо представление [12]

$$W = \frac{\Gamma}{2\pi R_0} \left[ \ln \frac{8R_0}{a} - \frac{1}{2} + \int_0^a \left( \frac{\Gamma(r)}{\Gamma} \right)^2 \frac{dr}{r} \right] + 0 \left[ \frac{a}{R_0} \ln \frac{a}{R_0} \right]^2.$$

Здесь  $\Gamma$  — циркуляция вокруг ядра завихренности,  $\Gamma(r)$  — та же, что в пункте 5;  $R_0$  — радиус кольца;  $a$  — радиус сечения ядра.

Такое сравнение было проведено. Оно показало, что (6) дает примерно в полтора раза завышенные значения  $\Gamma$ . При оценке этого факта надо учитывать следующее. Предыдущие модели [1, 3, 5] формирования вихревых колец содержат большое количество постоянных, которые можно определить только из опыта и поэтому дают только качественную картину явления. В настоящей работе количество таких постоянных сведено до минимума. Так, в (6) их вообще нет. Одновременно оценивается точность модели. Относительная величина отброшенных при получении (6) членов порядка  $b/R$ . Для наших экспериментов это дает точность 20—40%. Кроме того, мы не учли, что импульс «отбирается» от течения при остановке поршня.

Приведенная низкая точность не является недостатком только предлагаемой модели, она типична для всей теории вихревых колец с тонкими ядрами [2, 12]. Более точное описание, учитывающее следующие члены в разложениях, требует привлечения гораздо более детальной информации о виде потока и выходит за рамки настоящей работы.

Авторы благодарны Б. А. Луговцову за внимание к работе и полезные обсуждения.

Институт гидродинамики  
СО АН СССР,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
10/1 1979

## ЛИТЕРАТУРА

1. Taylor G. I. Formation of a vortex ring by giving an impulse to a circular disc and then dissolving it away.— J. Appl. Phys. 1953, v. 24, p. 104. The scientific papers of Sir Geoffrey Ingram Taylor v. 4. Cambridge Univ. Press, 1971.
2. Ламб Г. Гидродинамика. М., ОГИЗ, 1947.
3. Луговцов Б. А. Турбулентные вихревые кольца. Докт. дис. Новосибирск, 1973.
4. Тарасов В. Ф. Оценка некоторых параметров турбулентного вихревого кольца.— В кн.: Динамика сплошной среды, вып. 14. Новосибирск, 1973.
5. Saffman P. G. On the formation of vortex rings.— Stud. Appl. Math., 1975, v. 54, N 3.
6. Saffman P. G. The number of waves of unstable vortex rings.— J. Fluid Mech., 1978, v. 84, p. 4.
7. Владимиров В. А. О вихревом импульсе течений несжимаемой жидкости.— ПМТФ, 1977, № 6.
8. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Наука, 1973.
9. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М., Мир, 1973.
10. Луговцов Б. А. О движении турбулентного вихревого кольца и переносе им пассивной примеси.— В кн.: Некоторые проблемы математики и механики. Л., Наука, 1970.
11. Maxworthy T. Turbulent vortex rings.— J. Fluid Mech., 1974, v. 64, p. 2.
12. Fraenkel L. E. Examples of steady vortex rings of small cross-section in an ideal fluid.— J. Fluid Mech., 1972, v. 51, p. 1.

Д. Н. ГОРЕЛОВ

К ВЫБОРУ  
ОПТИМАЛЬНОГО ЗАКОНА КОЛЕБАНИЙ КРЫЛА,  
ВЫПОЛНЯЮЩЕГО РОЛЬ ДВИЖИТЕЛЯ

Проблема создания силы тяги телом, деформирующимся в жидкости, давно привлекает внимание ученых. Для объяснения механизма образования силы тяги предложено несколько моделей взаимодействия деформируемого тела с жидкостью [1—5]. Наиболее полно исследована модель плоского нестационарного движения безграничной несжимаемой идеальной жидкости около тонкого слабо изогнутого профиля [4—8]. Результаты расчета силы тяги и КПД колеблющегося крыла на основе этой модели хорошо совпадают с соответствующими экспериментальными данными [9].

Одна из главных задач теории — определение такого закона деформации крыла, при котором применение крыла в качестве движителя оказывается наиболее эффективным. Под эффективностью понимают обычно способность движителя развивать высокую тягу при достаточно высоком КПД. Неопределенность понятия эффективности требует, однако, выработки более точного критерия для решения задачи оптимизации закона деформации крыла. Наиболее естественным критерием является, видимо, требование создания максимальной средней силы тяги при деформации крыла в некотором выбранном классе возможных деформаций [10].

В настоящей работе на основе линейной теории определены сила тяги и КПД крыла бесконечного размаха в потоке идеальной несжимаемой жидкости для произвольного закона его деформации, получены соответствующие асимптотические формулы для режимов течения при больших и малых значениях числа Струхала, выявлены законы колебаний крыла, создающие максимальную среднюю силу тяги для некоторых классов возможных деформаций.

1. Рассмотрим нестационарное потенциальное течение несжимаемой жидкости около колеблющегося профиля в предположениях линейной теории тонкого крыла [4, 5]. Пусть  $Oxy$  — система координат, жестко связанная с профилем в его среднем положении (см. рисунок),  $V$  — скорость набегающего невозмущенного потока,  $\varphi(x, y, t)$  — потенциал скорости;  $w(x, t)$  — перемещение точек средней линии профиля вдоль оси  $Oy$ ;  $b$  — хорда профиля,  $t$  — время. Предположим, что профиль колеблется по некоторому заданному гармоническому закону с круговой частотой  $\omega$ . Тогда

$$w(x, t) = \text{Re} \{F(x)e^{i\omega t}\}, \quad \varphi(x, y, t) = Vx + \text{Re} \{\Phi(x, y)e^{i\omega t}\}, \quad (1)$$

где  $F$  — заданная, а  $\Phi$  — искомая комплексные функции.

Краевая задача для функции  $\Phi$  формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi_{xx} + \Phi_{yy} &= 0 \text{ вне разреза } y=0, \quad 0 \leq x < \infty; \\ \Phi_y &= Vf(x) = i\omega F + VF_x \text{ при } y=0, \quad 0 \leq x \leq b; \end{aligned}$$

$$\Phi_x + i\omega\Phi = 0 \text{ при } y=0, \quad b < x < \infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \nabla\Phi = 0$$

Кроме того, функция  $\Phi$  должна удовлетворять постулату Жуковского.

Решение указанной краевой задачи хорошо известно. Сила тяги на единицу длины крыла  $R_T$  определяется путем проектирования на отрицательное направление оси  $Ox$  перепада гидродинамического давления  $\Delta p(x, t)$  в точках профиля и подсосывающей силы  $Q(t)$ , действующей со стороны жидкости на переднюю кромку профиля (пластины). В рамках линейной теории

$$R_T = -Q + \int_0^b \Delta p w_x dx. \quad (2)$$

Мощность, затрачиваемая на поддержание колебаний крыла, равна

$$N_{\text{зат}} = - \int_0^b \Delta p w_t dx, \quad (3)$$

а полезная мощность при движении крыла с постоянной скоростью  $V$  составляет

$$N_{\text{пол}} = VR_T. \quad (4)$$

Коэффициент полезного действия (КПД) движителя

$$\eta = \bar{N}_{\text{пол}} / \bar{N}_{\text{зат}}, \quad (5)$$

где чертой обозначены соответствующие средние величины за период колебаний крыла  $T = 2\pi/\omega$ .

Перейдем к непосредственному вычислению величин, входящих в формулы (2)—(5). По определению,

$$w_x = \text{Re} \{F_x e^{i\omega t}\}, \quad w_t = \text{Re} \{i\omega F e^{i\omega t}\}. \quad (6)$$

Функцию  $F(x)$  удобно представить рядом Фурье вида

$$F(x) = c \left[ \frac{\delta_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \cos n\eta \right], \quad (7)$$

где  $c = b/2$ ,  $x/c = 1 - \cos \eta$ .

Перепад давления  $\Delta p$  выражается через функцию  $\Phi$  с помощью интеграла Коши — Лагранжа и может быть записан в виде [5]

$$\Delta p(x, t) = -2\rho V^2 \text{Re} \{P(x, +0)e^{i\omega t}\}, \quad (8)$$

$$P(x, +0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[ \frac{\cos n\eta}{\sin \eta} + \frac{ik}{n} \sin n\eta \right] + \frac{1}{\sin \eta} [C_2 - C_1 \cos \eta].$$

Здесь  $k = \omega c/V$  — число Струхала,

$$a_n = (q_{n-1} - q_{n+1})/2,$$

$$C_1 = [1 - C(k)] \frac{q_0 - q_1}{2}, \quad C_2 = C(k) \frac{q_0 - q_1}{2}, \quad (9)$$

где  $C(k)$  — функция Теодорсена, а коэффициенты  $q_n$  — коэффициенты Фурье для функции  $f(x)$ :

$$f(x) = \frac{q_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} q_n \cos n\eta.$$

Отметим, что коэффициенты  $\delta_n$  и  $q_n$  связаны между собой соотношениями

$$q_{2m} = ik\delta_{2m} - 2 \sum_{r=m}^{\infty} (2r+1) \delta_{2r+1}, \quad (m=0, 1, \dots) \quad (10)$$

$$q_{2m+1} = ik\delta_{2m+1} - 2 \sum_{r=m}^{\infty} (2r+2) \delta_{2r+2}.$$

Что касается подсосывающей силы, то она определяется формулой

$$Q(t) = \frac{\pi}{8} \rho V^2 b A^2(t),$$

$$A(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \{ [q_1 + C(k)(q_0 - q_1)] e^{i\omega t} \}. \quad (11)$$

Подставив выражения (6)–(11) в формулы (2), (3) и проделав довольно громоздкие вычисления, получим окончательно следующие выражения для средних значений силы тяги и затраченной мощности:

$$\bar{R}_T = \frac{\pi}{2} \rho V^2 c [k(\delta_1'' C_1' - \delta_0'' C_2'' - \delta_1' C_1'' + \delta_0' C_2'') - 2(C_1' C_2' + C_1'' C_2'')], \quad (12)$$

$$\bar{N}_{\text{зат}} = \frac{\pi}{4} \rho V^3 c k [\delta_1''(q_0' - q_1') - \delta_1'(q_0'' - q_1'') + 2C_2''(\delta_0' + \delta_1') - 2C_2'(\delta_0'' + \delta_1'')]. \quad (13)$$

Здесь одним и двумя штрихами обозначены вещественные и мнимые части соответствующих величин. Формулы (12), (13) имеют место для произвольного закона деформаций крыла, удовлетворяющего предположениям линейной теории, и соответствуют аналогичным формулам, полученным иным путем Т. Ву [6] и Ж. Сикманом [8].

2. Перейдем к выводу асимптотических формул для  $\bar{R}_T$  и  $\bar{N}_{\text{зат}}$  при малых и больших значениях числа Струхала.

Случай  $k \ll 1$ . В этом случае функция Теодорсена имеет вид

$$C(k) = 1 - \frac{\pi k}{2} + ik \left( \ln \frac{k}{2} + \gamma \right) + O(k^2 \ln k), \quad (14)$$

где  $\gamma$  — постоянная Эйлера. Следует рассматривать две возможности:  $F_x \equiv 0$  и  $F_x \neq 0$ .

Предположим сначала, что  $F_x \equiv 0$  (профиль совершает чисто поступательные колебания вдоль оси  $Oy$ ). Тогда  $q_0 = ik\delta_0$ ,  $q_n = \delta_n = 0$  при  $n \geq 1$  и формулы (12), (13) принимают вид

$$\bar{R}_T = \frac{\pi}{4} \rho c (Vk)^2 |\delta_0|^2 + O(k^3 \ln k), \quad \bar{N}_{\text{зат}} = VR_T + O(k^3 \ln k). \quad (15)$$

Отметим, что  $Vk = \omega c$ . Следовательно, при чисто поступательных колебаниях на режимах  $k \ll 1$  средняя сила тяги колеблющегося профиля в первом приближении не зависит от скорости  $V$  и пропорциональна квадрату частоты и амплитуды колебаний, а КПД движителя  $\eta = 1$ . Этот результат согласуется с данными работ [4, 5].

Предположим теперь, что  $F_x \neq 0$ . Оценим порядок величин  $\delta_n$ ,  $q_n$ , которые являются коэффициентами Фурье функций  $F/c$  и  $f = (ik/c)F + F_x$  соответственно. В первом приближении  $f = F_x$ . Отсюда следует, что  $\delta_n$ ,  $q_n$  — величины одного порядка малости. Принимая теперь во внимание формулы (9), (14), получим

$$\bar{R}_T = \frac{\pi}{4} \rho V^2 c k \left[ \delta_0'(q_0'' - q_1'') - \delta_0''(q_0' - q_1') - \frac{\pi}{2} |q_0 - q_1|^2 \right] + O(k^2 \ln k), \quad (16)$$

$$\bar{N}_{\text{зат}} = \frac{\pi}{4} \rho V^3 c k [\delta_0'(q_0'' - q_1'') - \delta_0''(q_0' - q_1')] + O(k^2 \ln k), \quad (17)$$

$$\eta = 1 - \frac{\pi}{2} \frac{|q_0 - q_1|^2}{\delta_0'(q_0'' - q_1'') - \delta_0''(q_0' - q_1')} + O(k \ln k). \quad (18)$$

Учитывая  $V^2 k = V\omega c$ , приходим к выводу, что в общем случае деформации крыла ( $F_x \neq 0$ ) средняя сила тяги, создаваемая колеблющимся крылом на режимах  $k \ll 1$ , в первом приближении линейно зависит от скорости потока  $V$ , частоты  $\omega$  и квадратично — от амплитуды колебаний. В частном случае поступательно-крутильных колебаний формулы (16)–(18) были получены автором в [10].

Случай  $k \gg 1$ . Функция Теодорсена при  $k \gg 1$  имеет вид

$$C(k) = \frac{1}{2} - \frac{i}{8k} + O(k^{-2}). \quad (19)$$

Из (9), (10) и (19) следует, что в первом приближении  $q_n = ik\delta_n$ ,  $C_1 = C_2 = ik(\delta_0 - \delta_1)/4$ . Формулы (12), (13) преобразуются:

$$\bar{R}_T = \frac{\pi}{16} \rho c (Vk)^2 |\delta_0 - \delta_1|^2 + O(k), \quad \bar{N}_{\text{зат}} = 2V\bar{R}_T + O(k). \quad (20)$$

Отсюда вытекает, что КПД движителя равен

$$\eta = \frac{1}{2} + O(k^{-1}) \quad (21)$$

независимо от закона деформаций крыла.

Из формулы (20) следует, что при колебаниях крыла на режимах  $k \gg 1$  средняя сила тяги в первом приближении не зависит от скорости потока  $V$  и пропорциональна квадрату частоты и амплитуды колебаний. Этот вывод согласуется с результатами работ [6, 8]. Отметим, однако, что асимптотические формулы для  $\bar{R}_T$  при  $k \ll 1$  и  $k \gg 1$ , полученные в [6] и приведенные без изменения в [8], ошибочны.

3. Применим асимптотические формулы (16), (20) для поиска оптимальных законов колебаний крыла на режимах движения с числами Струхала  $k \ll 1$  и  $k \gg 1$ .

Задача состоит в том, чтобы определить закон колебаний крыла, принадлежащий рассматриваемому классу возможных деформаций, при котором средняя сила тяги  $\bar{R}_T$  достигает максимума при условии

$$\max |w(x, t)| = a = \text{const} \quad (x \in [0, b]). \quad (22)$$

Рассмотрим три класса возможных деформаций: поступательно-крутильные колебания жесткого профиля, деформация профиля по закону «бегущей волны» с постоянной амплитудой и произвольная малая деформация профиля.

Для первого класса перемещение точек профиля вдоль оси  $Oy$  следующее:

$$w(x, t) = y_0 \cos(\omega t + \mu) + (x_0 - x)\alpha_0 \cos \omega t, \quad (23)$$

где  $y_0$ ,  $\alpha_0$  — амплитуды поступательных и крутильных колебаний;  $\mu$  — сдвиг фазы;  $x_0$  — расстояние от передней кромки до оси вращения профиля. Функция  $F(x)$  определяется формулой

$$F(x) = \alpha_0 c \left[ \chi e^{i\mu} - 2 \left( \frac{x}{b} - \frac{x_0}{b} \right) \right], \quad \chi = y_0 / c\alpha_0,$$

а коэффициенты  $\delta_n$ ,  $q_n$  равны

$$\delta_0 = 2\alpha_0 \left[ \chi e^{i\mu} + 1 - 2 \frac{x_0}{b} \right], \quad \delta_1 = \alpha_0,$$

$$q_0 = 2\alpha_0 \left[ -1 + ik \left( \chi e^{i\mu} - 1 + 2 \frac{x_0}{b} \right) \right], \quad q_1 = ik\alpha_0,$$

$$\delta_n = q_n = 0 \quad \text{при } n \geq 2.$$

В работе [10] показано, что для этого класса возможных деформаций в случае  $k \ll 1$  оптимальным будет закон поступательно-крутильных колебаний профиля со сдвигом фазы  $\mu = \pi/2$  и некоторым определенным отношением амплитуд  $\lambda$ , а для случая  $k \gg 1$  — поступательные колебания профиля вдоль оси  $Oy$ .

При деформации профиля по закону «бегущей волны»

$$w(x, t) = a \cos(\omega t - \lambda x/c) \quad (\lambda = \text{const} \geq 0). \quad (24)$$

Для этого класса возможных деформаций  $|w| = a$ ,

$$\delta_n = 2a/ci^n e^{-i\lambda} J_n(\lambda), \quad q_n = i(k - \lambda)\delta_n \quad (n = 0, 1, \dots)$$

и формулы (16), (20) принимают соответственно вид

$$\bar{R}_\tau = \pi \rho V^2 c k (a/c)^2 (k - \lambda) \left\{ J_0^2(\lambda) - (k - \lambda) \frac{\pi}{2} [J_0^2(\lambda) + J_1^2(\lambda)] \right\}, \quad (25)$$

$$\bar{R}_\tau = \frac{\pi}{4} \rho c (Vka/c)^2 [J_0^2(\lambda) + J_1^2(\lambda)]. \quad (26)$$

Из (25) следует, что при  $k \ll 1$  средняя сила тяги  $\bar{R}_\tau \leq 0$ , если  $k \leq \lambda$  (колеблющийся профиль создает только силу сопротивления). Этот вывод согласуется с результатами расчета в работе [8]. В случае  $\lambda < k \ll 1$  деформация профиля по закону «бегущей волны» с постоянной амплитудой создает силу тяги, максимум которой достигается при  $\lambda = 0$ , т. е. при чисто поступательных колебаниях профиля вдоль оси  $Oy$ . При этом

$$\max \bar{R}_\tau = \pi \rho c (a\omega)^2,$$

что совпадает с формулой (15) при  $\delta_0 = 2a/c$ .

В случае  $k \gg 1$  колеблющийся профиль согласно формуле (26) развивает силу тяги при всех значениях параметра  $\lambda$ .  $\max \bar{R}_\tau$  достигается снова при  $\lambda = 0$ , но средняя сила тяги оказывается при этом в четыре раза меньше, чем на режиме движения с  $k \ll 1$ . Последнее объясняется влиянием вихревого следа.

Следует отметить, что наиболее полное теоретическое исследование пропульсивных характеристик профиля, колеблющегося по закону «бегущей волны» с переменной амплитудой, содержится в [6—8]. Частный случай колебаний профиля с постоянной амплитудой рассмотрен в [11]. Однако полученные там результаты не согласуются с [6—8] и выводами настоящей работы.

Перейдем к рассмотрению произвольной деформации профиля, ограничиваясь случаем  $k \gg 1$ . Покажем, что среди всех возможных законов колебаний упругого крыла, удовлетворяющих условию (22), наибольшую среднюю силу тяги развивает жесткое крыло, совершающее чисто поступательные колебания.

Действительно, в соответствии с формулой (20) при произвольных колебаниях на режиме  $k \gg 1$  профиль (единица длины крыла) развивает среднюю силу тяги

$$\bar{R}_\tau = \frac{\pi}{16} \rho c^3 \omega^3 |\delta_0 - \delta_1|^2.$$

По определению

$$|\delta_0 - \delta_1| = \frac{2}{\pi c} \left| \int_0^\pi F(x) (1 - \cos \eta) d\eta \right|, \quad x = c(1 - \cos \eta).$$

Если теперь учесть, что  $1 - \cos \eta \geq 0$ , а  $|F(x)| \leq a$ , согласно условию (22), то

$$|\delta_0 - \delta_1| \leq \frac{2a}{\pi c} \int_0^\pi (1 - \cos \eta) d\eta = 2a/c.$$

Однако  $2a/c = |\delta_{0*}|$ , где  $\delta_{0*}$  — коэффициент Фурье для функции  $F(x) = a$  (закон чисто поступательных колебаний). Следовательно,  $|\delta_0 - \delta_1| \leq |\delta_{0*}|$ , что доказывает наше утверждение.

Таким образом, при  $k \gg 1$  поступательные колебания жесткого крыла оказываются наиболее эффективными.

Институт гидродинамики  
СО АН СССР,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
10/1 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Лаврентьев М. М. Об одном принципе создания тяговой силы для движения. — ПМТФ, 1962, № 4.
2. Lighthill M. J. Note on the swimming of slender fish. — J. Fluid Mech., 1960, v. 9, № 2.
3. Логвинович Г. В. Гидродинамика течений со свободными границами. Киев, Наукова думка, 1969.
4. Некрасов А. А. Теория крыла в нестационарном потоке. М., Изд-во АН СССР, 1947.
5. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., Наука, 1966.
6. Wu T. Y. Swimming of a waving plate. — J. Fluid Mech., 1961, v. 10, № 3.
7. Wu T. Y. Hydromechanics of swimming propulsion. — J. Fluid Mech., 1971, v. 46, № 2, 3.
8. Siekmann I. Theoretical studies of sea animal locomotion. — Ing. Archiv, 1962, Bd. 31, № 3; 1963, Bd. 32, № 1.
9. Kelly H. R., Rentz A. W., Siekmann I. Experimental studies on the motion of a flexible hydrofoil. — J. Fluid Mech., 1964, v. 19, № 1.
10. Горелов Д. Н. Об эффективности машущего крыла как движителя. — Бюллетень, 1976, № 10.
11. Ерошин В. А. Возникновение тянущей силы при движении деформируемого профиля. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 3.

А. Л. СУРИС

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СТРУИ  
В ПОПЕРЕЧНОМ СНОСЯЩЕМ ПОТОКЕ

В плазмохимических реакторах в большинстве случаев смешение исходных реагентов осуществляют путем ввода струй сырья в сносящий плазменный поток. При этом для расчета реактора представляет интерес определение траектории струи.

Рассмотрим модель распространения струи в поперечном потоке. Уравнения сохранения потока импульса струи в проекции на оси  $x$  и  $y$  (рис. 1) можно записать соответственно в следующем виде [4]:

$$\frac{dx}{dt} = w \cos \varphi = \frac{1}{\rho w s_n} \left[ \frac{1}{2} C_x \rho_1 w_1^2 F + \rho_2 w_2^2 s_{n_2} \cos \varphi_0 \right]; \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = w \sin \varphi = \frac{\rho_2 w_2^2 s_{n_2}}{\rho w s_n} \sin \varphi_0, \quad (2)$$

где  $w, w_2, \rho_1, \rho_2$  — скорость и плотность в произвольном и начальном сечении струи;  $w_1, \rho_1$  — скорость и плотность сносящего потока;  $\varphi_1, \varphi_0$  — угол наклона оси струи в произвольном и начальном сечении;  $s_n, s_{n_2}$  — текущее и начальное поперечное сечение струи;  $F$  — площадь проекции струи на плоскость, перпендикулярную потоку;  $C_x$  — коэффициент аэродинамического сопротивления струи.

Из (1) и (2) получим уравнение траектории струи в сносящем потоке

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{dx}{dy} = 2 C_x F \frac{q}{\pi d_2^2 \sin \varphi_0}; \quad (3)$$

где

$$\bar{x} = x/d_2; \quad \bar{y} = y/d_2; \quad q = (\rho_1 w_1^2)/(\rho_2 w_2^2). \quad (4)$$

Из (3) видно, что основными параметрами, оказывающими влияние на процесс распространения струи в сносящем потоке, являются начальный угол ввода струи, гидродинамический параметр и коэффициент аэродинамического сопротивления  $C_x$ . Считая, что проекция струи  $F$  представляет собой равнобокую трапецию, а также принимая во внимание, что ширина струи  $b$  нарастает пропорционально расстоянию от источника  $l$ , получим

$$F = \frac{1}{2} (d_2 + b) y = \frac{1}{2} (d_2 + C_1 l) y, \quad (5)$$

где текущая длина струи

$$\bar{l} = l/d_2 = \int_0^{\bar{y}} \frac{d\bar{y}}{\sin \varphi}. \quad (6)$$

Рис. 1. Схема распространения струи в сносящем потоке.

Разлагая  $\bar{l}$  в ряд Тейлора по степеням  $\bar{y}$  с учетом (3), ограничиваясь полиномом второй сте-

пени и подставляя в (5) и (3), после интегрирования получим (при начальном условии  $\bar{y}(0) = 0$ )

$$\bar{x} = \bar{y} \operatorname{ctg} \varphi_0 + \left[ \bar{y}^2 + C_1 \left( \frac{\bar{y}^3}{3 \sin \varphi_0} + \frac{q}{4\pi} \operatorname{ctg} \varphi_0 C_x \bar{y}^4 \right) \right] \frac{q C_x}{\pi \sin \varphi_0}. \quad (7)$$

Принимая, согласно работе [3],

$$C_1 = 1,7q^{0,2} \quad (8)$$

и сравнивая (7) с экспериментальными данными различных авторов, получим для процесса распространения струи в безграничном сносящем потоке (при  $\rho_2 = \rho_1$ )

$$C_x = 3,12q^{0,1}. \quad (9)$$

Подставляя (8), (9) в (7), получим для изотермических условий в безграничном потоке следующее уравнение траектории струи:

$$\bar{x} = \bar{y} \operatorname{ctg} \varphi_0 + \left[ \bar{y}^2 + 1,7q^{0,2} \left( \frac{\bar{y}^3}{3 \sin \varphi_0} + \frac{3,12q^{1,1}}{4\pi} \operatorname{ctg} \varphi_0 \bar{y}^4 \right) \right] 3,12q^{1,1}/(\pi \sin \varphi_0). \quad (10)$$

На рис. 2 представлено сравнение экспериментальных данных [1, 2] с зависимостью (10). Как видно из рисунка, совпадение расчетных и экспериментальных данных вполне удовлетворительное в широком диапазоне изменения параметров  $q$  и  $\varphi_0$ .

Зная координаты оси  $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ , можно определить траекторию переднего фронта струи  $(\bar{x}_\phi, \bar{y}_\phi)$  при  $\varphi_0 = \pi/2$  согласно данным [3]

$$\bar{x}_\phi = \bar{x}_0^{0,8} \frac{1}{1,4 \left( \frac{1}{q} + 2 \right) q^{0,8}} - 0,5. \quad (11)$$

В работе [5] было проведено экспериментальное исследование распространения струи сырья в поперечном плазменном потоке.

В качестве плазмообразующего газа использовались различные смеси кислорода и азота, а поперечно-вдуваемые в реактор струи представляли собой различные углеводороды (метан, пропан, бутан). Исследовалась траектория переднего фронта струи при различных тепловых эффектах, протекающих в струе химических реакций (горения, конверсии, пиролиза), разных геотермических соотношений смесителя в различных режимах параметров.

Проведенные исследования показали, что траектория струи зависит в данном случае не только от гидродинамического параметра  $q$ , но и от

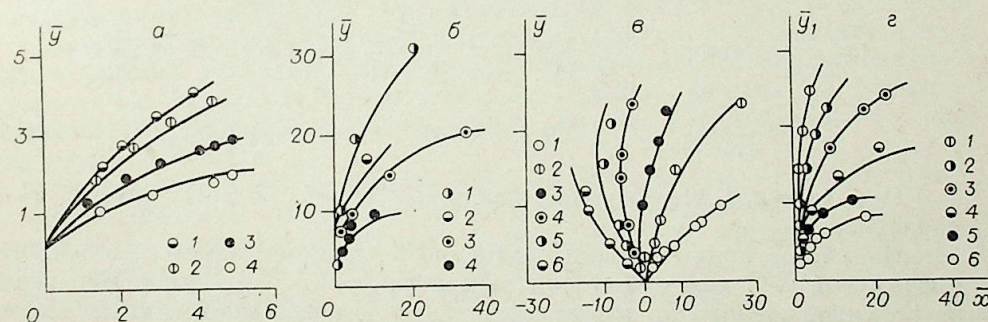


Рис. 2. Сравнение формулы (13) с экспериментальными данными различных авторов. а — данные [2],  $\varphi_0 = 60^\circ$ ,  $q$ : 1 — 0,04, 2 — 0,0625, 3 — 0,156, 4 — 0,4; б —  $d_2 = 10$  мм,  $\varphi_0 = \pi/2$ ,  $q$ : 1 — 0,005, 2 — 0,01, 3 — 0,02, 4 — 0,04; в —  $q = 0,005$ ,  $\varphi_0$ : 1 —  $30^\circ$ , 2 —  $60^\circ$ , 3 —  $90^\circ$ , 4 —  $120^\circ$ , 5 —  $135^\circ$ , 6 —  $150^\circ$ ; г —  $d_2 = 20$  мм,  $\varphi_0 = \pi/2$ ,  $q$ : 1 — 0,0025, 2 — 0,05, 3 — 0,01, 4 — 0,02, 5 — 0,04, 6 — 0,08; б, в, г — данные [1].

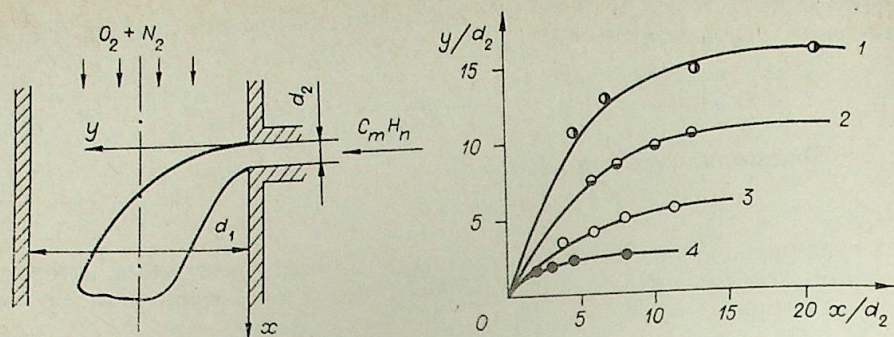


Рис. 3. Сравнение формулы (14) с экспериментальными данными [5].

№ кривой	$\rho_1/\rho_2$	$w_1/w_2$	$K_{эн}$	$d_2/d_1$
1 (C <sub>2</sub> H <sub>2</sub> )	0,131	0,994	1,86	0,048
2 (C <sub>2</sub> H <sub>4</sub> )	0,085	2,16	4,08	0,048
3 (C <sub>2</sub> H <sub>10</sub> )	0,065	5,12	1,03	0,144
4 (CH <sub>4</sub> )	0,23	7,84	4,16	0,144

соотношения плотностей  $\rho_1/\rho_2$  диаметров  $d_1/d_2$  (рис. 3) и теплового эффекта химической реакции ( $K_{эн}$  [6]).

Обработывая экспериментальные данные [5] методом наименьших квадратов в соответствии с зависимостями (7), (8), (11) и учитывая особенности распространения химически реагирующей струи в поперечном ограниченном сносящем потоке, получим для коэффициента аэродинамического сопротивления струи в этом случае выражение

$$C_x = 0,81 \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{0,05} \left( \frac{w_1}{w_2} \right)^{-0,02} \left( 1 + \frac{d_2}{d_1} \right)^{10} \exp \left( -\frac{0,03}{K_{эн}} \right), \quad (12)$$

где  $K_{эн}$  — энергетический критерий [6], представляющий отношение мощности потока плазмы к мощности, необходимой для полного превращения исходного сырья в целевые продукты при стандартной температуре.

Уравнение (7), в котором величина  $C_1$  определяется из (8), а  $C_x$  — из (12), представляет собой уравнение траектории оси струи в сносящем плазменном потоке в канале реактора

$$\bar{x} = \bar{y} \operatorname{ctg} \varphi_0 + \left[ \bar{y}^2 + 1,7q^{0,2} \left( \frac{\bar{y}^3}{3 \sin \varphi_0} + \frac{q}{4\pi} \operatorname{ctg} \varphi_0 C_x \bar{y}^4 \right) \right] \frac{C_x q}{\pi \sin \varphi_0}. \quad (13)$$

Для оценки траектории переднего фронта струи при различных углах ввода  $\varphi_0$  формулу (11) можно модернизировать, добавляя в качестве слагаемого в правой части  $\bar{y} \operatorname{ctg} \varphi_0$ . Тогда, подставляя (13) в (11) с учетом (12), получим траекторию фронта струи в сносящем плазменном потоке в виде

$$\bar{x}_\Phi = \left\{ \bar{y}_\Phi \operatorname{ctg} \varphi_0 + \left[ \bar{y}_\Phi^2 + 1,7q^{0,2} \left( \frac{\bar{y}_\Phi^3}{3 \sin \varphi_0} + \frac{q}{4\pi} \operatorname{ctg} \varphi_0 C_x \bar{y}_\Phi^4 \right) \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{C_x q}{\pi \sin \varphi_0} \right\}^{0,8} / [(1,4/q + 2,8) q^{0,8}] - 0,5 + \bar{y}_\Phi \operatorname{ctg} \varphi_0. \quad (14)$$

При  $\varphi_0 = \pi/2$  эта формула является точной, а при других  $\varphi_0$  — оценочной.

На рис. 3 представлено сравнение экспериментальных данных [5] с формулой (14) для траектории переднего фронта ( $\varphi_0 = \pi/2$ ). Как видно из рисунка, совпадение расчетных и экспериментальных данных вполне удовлетворительное.

На рис. 4 представлено сравнение полученных расчетных зависимостей для траекторий оси (формула 13), а также переднего фронта (формула 14) химически реагирующей струи в ограниченном сносящем высо-

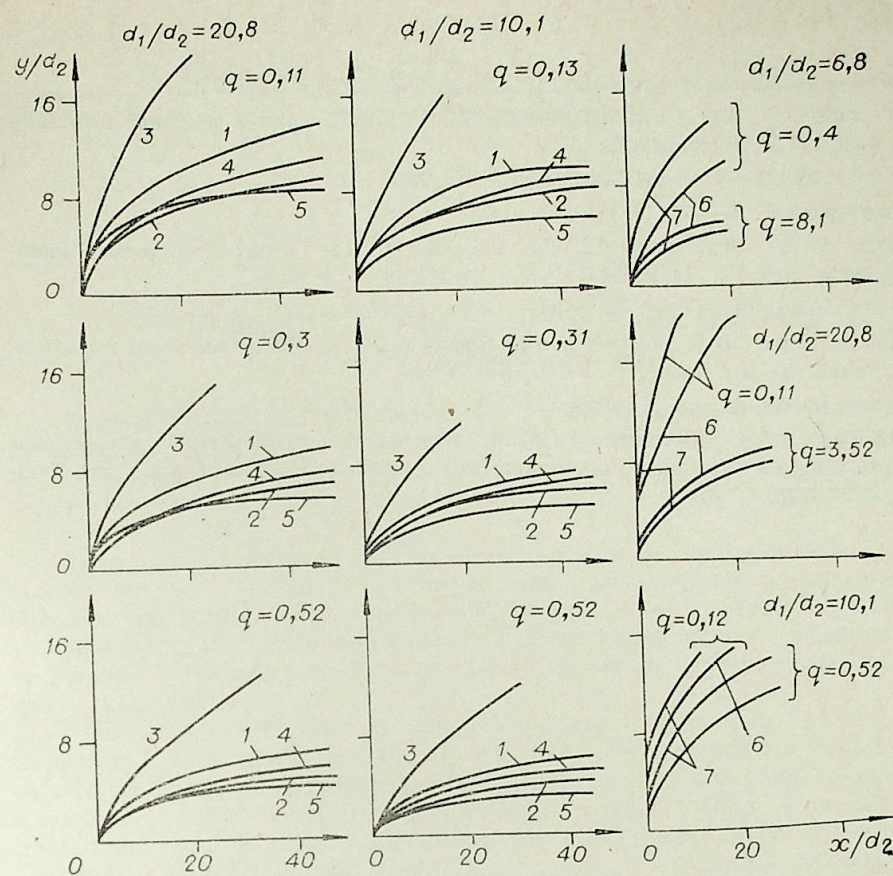


Рис. 4. Сравнение различных методик расчета траектории струи. Траектория оси струи: 1 — формула (13); 2 — [1]; 3 — [8]; 4 — [2]; 5 — [9]; траектория переднего фронта струи: 6 — формула (14); 7 — [7].

котемпературном потоке с методиками расчета, предложенными в работах [1, 2, 7, 8].

Как видно из рис. 4, траектория оси струи, рассчитанная по формуле (13), наиболее близка к траектории, рассчитанной по формуле Г. С. Шандорова [2]. Однако при малых значениях гидродинамического параметра отличие данных [2] от наших результатов существенное.

Из рис. 4 также видно, что струя, распространяющаяся в сносящем потоке меньшей плотности, является более дальнобойной (при тех же значениях  $q$ ). Это означает, что построение расчетных формул для траектории струи с использованием лишь одного параметра  $q$  (как это делается в работах различных авторов) нецелесообразно. Необходимо учитывать также отношение плотностей  $\rho_1/\rho_2$ . Отличие данных [8] от наших результатов объясняется, по-видимому, тем, что они получены для прямоугольного канала.

Экспериментальные данные [7] для траектории переднего фронта струи в сносящем плазменном потоке при малых значениях гидродинамического параметра  $q$  существенно отличаются от наших результатов в связи с тем, что они получены не в ограниченном потоке, а при истечении струи низкотемпературной плазмы в свободное пространство. При больших же значениях параметра  $q$  совпадение наших данных с данными [7] удовлетворительное.

ЛИТЕРАТУРА

1. Визель Я. М., Мостинский И. Л.— ИФЖ, 1965, т. VIII, № 2.
2. Палатник И. Б., Тамирбаев Д. Ж.— В кн.: Теория и практика сжигания газа, вып. IV. Л., Недра, 1968.
3. Иванов Ю. В.— Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 8, с. 37.
4. Шандоров Г. С.— ЖТФ, 1957, 27, вып. 1.
5. Сурис А. Л., Флапкин Е. В., Шорин С. Н.— В кн.: Химическое машиностроение, вып. IV. М., 1975.
6. Сурис А. Л., Шорин С. Н.— ХВЭ, 1975, т. 5, № 3.
7. Добринский Э. К. и др.— В кн.: Физика, техника и применение низкотемпературной плазмы. Алма-Ата, КПИ, 1970. 504 с.
8. Овсянников А. А., Полак Л. С. и др.— ТОХТ, 1971, т. 5, № 6.
9. Пеньков В. И. Исследование процесса смешения струи газа с поперечным потоком воздуха в условиях смесителей газогорелочных устройств. Канд. дис. Ташкент, ТПИ, 1973.

ИЗВЕСТИЯ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ  
АКАДЕМИИ НАУК СССР

№ 3, вып. 1

СЕРИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

1980

УДК 6.21.928.93

В. И. БАГРЯНЦЕВ; В. И. КИСЛЫХ

НАРУШЕНИЕ РАЗДЕЛЕНИЯ МЕЛКИХ ЧАСТИЦ  
В ВИХРЕВОЙ КАМЕРЕ

В работе приводятся результаты экспериментального исследования процесса центробежного отделения частиц от потока газа в вихревой камере. Рассмотрено образование полученных в опытах цилиндрических поверхностей с высокой концентрацией твердой фазы в приосевой зоне вихревой камеры.

При определенных условиях мелкие частицы, находящиеся в вихревой камере, не выносятся на стенку, хотя и реализуются большие центробежные ускорения, а накапливаются внутри объема, образуя устойчивые конфигурации, и если прекратить подачу дисперсного материала, то оставшиеся частицы конденсированной фазы будут удерживаться там длительное время.

Известны [1] случаи экспериментального наблюдения ухудшения и нарушения сепарации частиц. Предлагаемые объяснения в основном касаются параметров, связанных либо с несферической формой частиц, либо с особыми условиями их поведения (вращение, повторный захват турбулентными пульсациями, отклонение от закона Стокса во вращающихся потоках и т. д.). Единой точки зрения на это явление не существует из-за недостатка опытных данных, получение которых сильно ограничено исследованиями закрученного течения зондовыми методами.

Оборудование. Методика эксперимента. Эксперименты проводились на установке, схема которой приведена на рис. 1. Вихревая камера представляла собой цилиндрическую стеклянную трубу 1, диаметром 160 мм и длиной до 5 калибров, закрытую с торцов плоскими торцевыми крышками 2. По периферии верхней торцевой крышки был расположен завихритель воздуха 3, в центре крышки имела выхлопное отверстие. Установка включала в себя также генератор дыма 4, осветитель 5, фотоприемник 6, преобразователь напряжения в частоту 7, частотомер 8, цифронечающее устройство 9, батарейный манометр 10.

Опыты проводились по следующей методике. Воздух через завихритель 2 вводился в объем вихревой камеры, а выводился через щели на периферии нижней торцевой крышки и через выхлопное отверстие в верхней торцевой крышке. Дым в камеру из генератора 4 через отверстие в нижней торцевой крышке периодически вводился в приосевую зону закрученного потока воздуха. Вихревая камера по диаметру просвечивалась коллимированным лучом света от осветителя 5.

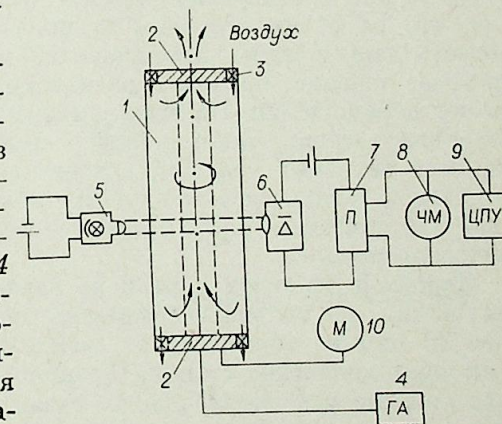


Рис. 1. Схема экспериментальной установки.

После прекращения подачи дыма из генератора 4, в вихревой камере устанавливалось стационарное движение закрученного потока газа и в этот период проводились измерения. В экспериментах измерялись расход воздуха через завихритель, расход воздуха через выхлопное отверстие в верхней торцевой крышке камеры, распределение давления по радиусу камеры на нижней торцевой крышке, изменение во времени средней концентрации примеси, удерживаемой в приосевой зоне вихревой камеры.

Поток запылялся в основном частицами сигаретного дыма сферической формы диаметром до 3 мкм. Иногда вводился дым, состоящий из частиц хлористого аммония примерно такого же размера, но с прямоугольной формой частиц. Использовались также полидисперсные смеси частиц кварцевого песка, сажи, алюминия. Частицы подавались как в приосевую зону потока через отверстия во входном торце, так и с основным потоком через направляющий аппарат. Структура образований из дымовых частиц исследовалась при помощи макрофотографии и киносъемки со скоростью 600 кадров в секунду. Размеры и форма частиц изучались при помощи микроскопа. В выходном сечении в приосевой области частицы улавливались на стеклянную пластинку, смоченную вязким веществом, с целью анализа полученного образца под микроскопом. В течение опыта регистрировалось изменение концентрации взвеси в камере после подачи порции дыма. По уменьшению интенсивности светового луча, проходящего через запыленную среду, определялась относительная концентрация взвеси (закон Бугера — Ламберта). Сигнал с фотоприемника преобразовывался в цифровой код и записывался на пишущую машинку. Так как концентрация дыма в начале опыта  $c_*$  максимальна и постоянно уменьшается, то для определения времени нахождения частиц в камере отношение  $c(\tau)/c_*$  служило весовой функцией, т. е.

$$\tau = \int_0^{\infty} c(\tau)/c_* d\tau. \quad (1)$$

Измерения давления по торцам камеры позволяли без нарушения картины течения найти поле окружной скорости, исходя из условия равновесия для закрученного течения,

$$1/\rho \frac{\partial p}{\partial r} = v_\phi^2/r. \quad (2)$$

Основные результаты. Явление нарушения центробежного разделения аэрозоля характеризуется появлением коаксиальных дымовых цилиндров, параллельных оси вращения потока, диаметры которых больше диаметра выходного отверстия, а высота примерно равна длине камеры. На рис. 2 изображен участок дымовой картины. Киносъемка показала, что по обеим сторонам внешнего дымового цилиндра аксиальная скорость частиц имеет противоположное направление, т. е. реализуется сдвиговое течение, причем в радиальном направлении частицы не испытывают перемещения. На внешнем дымовом цилиндре иногда образуются вторичные течения, напоминающие вихревые кольца. Вихревые образования типа вихревых колец не всегда присутствуют на поверхности дымового столба. Вихревые кольца могут покоиться (такое состояние неустойчиво) или двигаться вдоль цилиндрической поверхности дымового столба вверх или вниз.

Характер дымовых картин не зависел от сорта используемых в работе частиц, но сильно сказывалось влияние диаметра частиц. Частицы более 20 мкм не образовывали скопления внутри камеры, а выносились на ее цилиндрические стенки. Фракционный состав дымового столба изучался по выносу из центрального выходного отверстия. При исследовании состава частиц в камеру подавалась навеска из кварцевого песка с диаметром частиц 0 ÷ 60 мкм. Отбор проб осуществлялся после того, как крупные частицы выделялись из дымового столба, а мелкие образовыва-

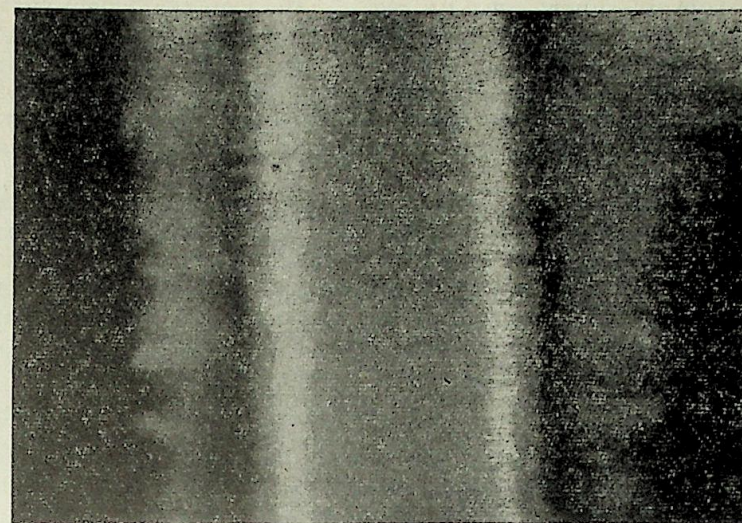


Рис. 2. Дымовые цилиндры в вихре.

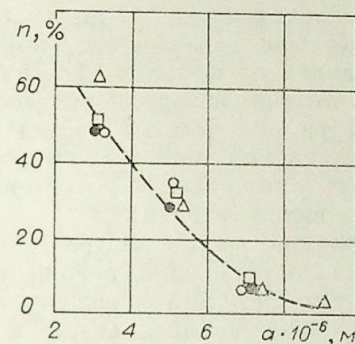


Рис. 3. Частицы, выносимые из центрального выходного отверстия.

Отбор пробы через — 10 (○), 20 (△), 30 (□), 35 (●) с.

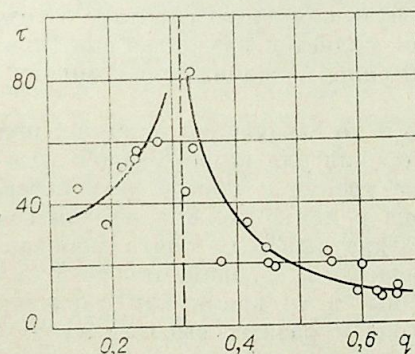


Рис. 5. Зависимость безразмерного времени нахождения  $\tau$  частиц в дымовом столбе от отношения расходов  $q$ .

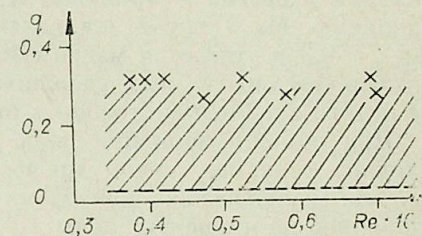


Рис. 4. Область существования дымовых цилиндров в вихревой камере.

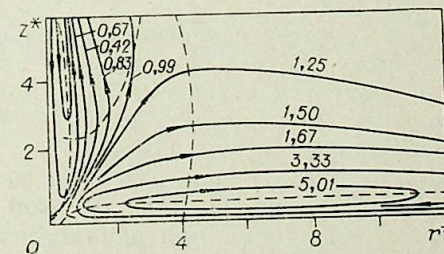


Рис. 6. Картина линий тока в вихревой камере [2].

ли в присоевой зоне стационарно вращающийся дымовой цилиндр. Результаты измерений приведены на рис. 3. Из рисунка видно, что дисперсный состав фракции, удерживаемый в дымовом столбе, не зависит от времени. Так как в камере присутствуют только те частицы, которые образуют дымовые скопления, то через центральное выходное отверстие при данном режиме выносятся частицы, принадлежащие дымовому столбу, т. е. в присоевой зоне вихря в основном удерживаются частицы размером до 5 мкм.

На образование дымовых цилиндров существенное влияние оказывают расходные характеристики:  $q = Q_*/Q$  — отношение расхода воздуха через центральное выходное отверстие к полному расходу через камеру, а также величина общего расхода через аппарат. На рис. 4 нанесена область существования дымовых конфигураций. По оси абсцисс отложено число  $Re$ , построенное по расходу воздуха через камеру и по ее диаметру. Из рис. 4 видно, что в окрестности  $q \sim 0$  не существует дымовых конфигураций. В этом случае реализуется режим течения без стока воздуха в присоевую зону.

Точно определить границу образования дымовых цилиндров по величине  $q$  не удалось из-за большого разброса точек. По числу  $Re$  диапазон существования области образования дымовых столбов невелик. Вероятно, это связано с тем, что центробежное ускорение изменяется как квадрат расхода, в то время как сила, от которой зависит формирование дымового столба, изменяется слабее с изменением расхода.

Параметр  $q$  существенно влияет на время нахождения частиц в камере (рис. 5). На рис. 5 по оси ординат отложено характерное время удержания частиц в дымовом столбе, рассчитанное по формуле (1). Эта величина отнесена к промежутку времени, в течение которого частицы находились бы в трубе эквивалентного диаметра при том же расходе. При  $q = 0,3$  достигается максимум времени нахождения частиц в камере. В отдельных опытах дым удерживался в камере до получаса, т. е. состояние потока с дымовым столбом в присоевой зоне вихря устойчиво.

При помощи вариации доли расхода  $q$ , идущего через центральное выходное сечение, можно проверить справедливость предположения о том, что равновесная поверхность существует в результате равенства радиальной компоненты силы Стокса и центробежной силы, действующих на частицу. С изменением  $q$  скорость газа через дымовую поверхность изменяется пропорционально  $q$ , в то время как центробежное ускорение изменяется как  $q^2$ , поэтому для частиц узкой фракции изменение доли расхода через центр привело бы к смещению поверхности равновесия. Из опытов видно, что для фиксированной геометрии камеры поверхности равновесия всегда находятся в строго фиксированном положении и не зависят от  $q$ . Поэтому можно подвергнуть сомнению гипотезу о том, что причиной образования дымовых столбов является равенство сил (противоположно направленных) центробежной силы и радиальной компоненты силы Стокса.

Эта гипотеза неудовлетворительна еще и по следующей причине: при одинаковом расходе воздуха величина ускорения для камер разной высоты не меняется с точностью до потерь на трение о стенки устройства, в то время как скорость радиального стока в центр должна изменяться с изменением высоты камеры. Так как сигаретный дым почти монодисперсный, то нарушение равенства центробежных и аэродинамических сил привело бы к нарушению дымовой картины, в то время как характер дымовых скоплений при одинаковом расходе и разных высотах камеры оставался неизменным. В опытах продольный размер камеры изменялся в пределах  $0,05 \div 0,5$  м.

Известно, что трехмерное течение в вихревой камере имеет области с высокими градиентами скорости: это — слои жидкости, прилегающие к стенкам, и граница ядра вихря. Особенно наглядно это иллюстрируется

экспериментальными данными работы [2]. На рис. 6 изображена картина линий тока, взятая из цитируемой работы. По оси ординат отложено безразмерное расстояние от торцевой плоскости, по оси абсцисс — текущий безразмерный радиус. В присоевой зоне расположен кольцевой вихрь, вытянутый вдоль оси симметрии. В торцевой области кольцевой вихрь прилегает к плоскости торца и вытянут в радиальном направлении. Из-за малого поперечного размера вихрей градиенты скорости поперек вихря достигают больших значений.

Вблизи границы ядра вихря расположены максимумы градиентов осевой, радиальной и тангенциальной компонент скорости. Поэтому можно предположить, что на движение мелких частиц в областях вихря с высокими градиентами скорости и, следовательно, на возникновение дымовых столбов в присоевой зоне оказывает существенное влияние сила, появлению которой обусловлено градиентом скорости. Сила, действующая на частицу и вызванная градиентом скорости, получила в литературе название боковой или подъемной силы.

Подъемная сила. Для проверки выдвинутого предположения о влиянии подъемной силы на формирование дымовых цилиндров в вихре необходимы данные по величине подъемной силы. При анализе работ [3, 4] оказалось, что полученные теоретические соотношения сильно отличаются друг от друга даже качественно. В формуле Сафмена [3]

$$F = k\mu V (dv_x/dy)^{1/2} a^2 / \nu^{1/2} \quad (3)$$

величина подъемной силы пропорциональна квадрату радиуса частицы и зависит от вязкости, в то время как в формулу Слезкина и Шустова [4]

$$\vec{F} = ka^3 [\vec{V} \text{ rot } \vec{v}] \quad (4)$$

радиус частицы входит в кубе и подъемная сила не зависит от вязкости. Опубликованными экспериментальными исследованиями также нельзя воспользоваться, так как результаты были получены для частиц с диаметром порядка 1 мм и зависят от многих функциональных параметров. Поэтому невозможно перенести данные работы [5] на случай очень мелких частиц. С целью определения величины подъемной силы для частиц дыма было проведено экспериментальное исследование. Рабочий участок установки был выполнен из оргстекла в виде плоского канала с размерами  $6 \times 40 \times 1000$  мм; в опытах использовались частицы твердого хлористого аммония диаметром до 3 мкм. Расход воздуха подбирался так, чтобы течение в канале было ламинарным, т. е. среднерасходная скорость не превосходила 0,7 м/с. В опытах она измерялась в пределах 0,05—0,5 м/с. Опыты проводились при двух положениях канала: 1) направление потока противоположно направлению вектора силы тяжести; 2) направления совпадают.

Эксперименты проводились по следующей методике. При заданном расходе воздуха и положении канала на вход его подавалась смесь воздуха и дыма хлористого аммония. Рабочий участок канала с частицами фотографировался. Негатив фотометрировался на микрофотометре МФ-4, и по коэффициенту пропускания определялась концентрация частиц (таким образом измерялась только относительная запыленность потока).

Полученные в экспериментах значения безразмерной концентрации приведены на рис. 7. На рисунке по оси ординат отложено значение концентрации, отнесенное к ее значению в центре канала. По оси абсцисс — расстояние от центра канала, отнесенное к его полуширине. Из рис. 7 видно, что если направление движения аэрозоля противоположно направлению вектора силы тяжести, т. е. частицы под действием силы тяжести отстают от потока, то их концентрация максимальна в центре канала (точки 2 на рис. 7).

В противном случае, т. е. когда направление движения аэрозоля совпадает с направлением силы тяжести и, следовательно, частицы обгоняют

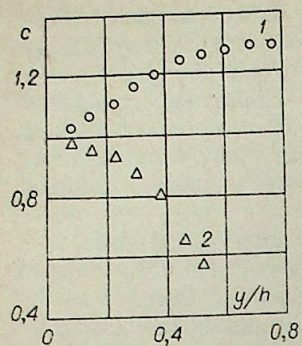


Рис. 7. Распределение концентрации частиц по полуширине канала.

1 — частицы опережают поток;  
2 — частицы отстают от потока.

ют поток газа, концентрация частиц максимальна у стенок канала (точки 1 на рис. 7).

Эксперименты показали, что миграция частиц совпадает с направлением векторного произведения.

$$w_y \sim [\vec{V} \text{ rot } \vec{v}]$$

Миграция частиц в направлении, перпендикулярном оси канала, наблюдалась во всем исследуемом диапазоне скоростей потока (0,05—0,5 м/с), причем скорость миграции частиц существенно зависела от концентрации дыма на входе. С увеличением концентрации частиц на входе в канал разделение аэрозоля ухудшается и при  $c > c^*$  нарушается совсем. Вероятно, это связано с коллективным взаимодействием частиц.

Скорость миграции частиц оценивалась по результатам опытов из следующих соображений. Пусть расстояние от начала разделения (расстояние отсчитывалось от входа в канал) до образования зоны высокой концентрации частиц равно  $l$ , тогда частица пройдет это расстояние за время  $\tau = l/v_x$ . Ее скорость в поперечном направлении оценивается соотношением  $w_y = (h - b)/\tau = [(h - b)/l]v_x$ , где  $h$  — полуширина канала;  $b$  — полуширина зоны высокой концентрации частиц. Для того чтобы оценить скорость миграции по известным формулам, запишем баланс сил в направлении поперек линии тока:

$$\left. \begin{aligned} k\mu V (dv_x/dy)^{1/2} a^2/v^{1/2} \\ ka^3 [\vec{V} \text{ rot } \vec{v}] \end{aligned} \right\} F = 6\pi\mu a w_y \quad (6)$$

(для мелкой частицы ускорением можно пренебречь). Скорость миграции частиц, по данным наших опытов,  $w_y = 10^{-3}$  м/с, что по порядку величины соответствует силе в десятки ускорений силы тяжести; по формулам (3) и (6) значение  $w_y = 10^{-5}$  м/с; по формулам (4) и (6)  $w_y = 10^{-6}$  м/с, т. е. измеренная в опытах скорость миграции частиц на 2—3 порядка выше предсказанной теоретическими формулами.

Полученные в экспериментах результаты и проведенные оценки величины подъемной силы позволяют предположить, что подъемная сила может оказать существенное влияние на поведение мелких частиц в приосевой зоне.

В работе приняты следующие обозначения:  $\vec{v}$  — скорость течения газа;  $r, \varphi, z$  — цилиндрические координаты;  $x, y, z$  — декартовы координаты;  $q$  — отношение расхода газа через центральное выходное сечение к полному расходу;  $\vec{V}$  — относительная скорость движения частицы и газа;  $\mu, \nu$  — динамическая и кинематическая вязкости потока;  $a$  — диаметр частицы;  $\vec{F}$  — подъемная сила;  $\vec{w}$  — скорость частицы;  $\tau$  — текущее время;  $\alpha$  — коэффициент Стокса;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $k$  — коэффициент пропорциональности в выражении для подъемной силы.

Авторы выражают благодарность С. С. Кутателадзе за ценные советы при выполнении и обсуждении результатов работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Хазингер С. Предел центробежного разделения частиц в свободном вихре. — РТнК, 1971, 9, 4.
2. Wan C. A., Chang C. C. Measurement of the velocity field in a simulated Tornado — Like Vortex Using a Three — Dimensional velocity Probl. — J. of Atmospheric science, 1972, v. 29, N 1.
3. Сафмен П. Г. Подъемная сила малой сферы при медленном течении сдвига. — Механика, 1966, 1.
4. Слезкин Н. А., Шустов С. Н. Об устойчивости движения взвешенной частицы в ламинарном потоке. — ДАН СССР, 1954, 96, 5.
5. Джеффри Р., Пирсон Дж. Движение частиц в ламинарном потоке в вертикальной трубе. — Механика, 1966, 1.

С. И. ЛЕЖНИН

ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ  
ПРИ РАССЛОЕННОМ РЕЖИМЕ ТЕЧЕНИЯ  
ПАРОЖИДКОСТНОЙ СРЕДЫ

Распространение возмущений в среде, представляющей собой смесь жидкости с пузырьками пара, исследовалось многими авторами [1—7]. В работах [8—10] проведен линейный анализ акустики парожидкостной среды при дисперсно-кольцевом режиме течения. Цель настоящего исследования — получение эволюционного уравнения, описывающего распространение волн конечной амплитуды в среде, находящейся в расслоенном режиме, с учетом межфазового трения и теплообмена.

Рассмотрим течение парожидкостной среды в плоском канале (рис. 1). В силу симметрии достаточно рассмотреть половину канала по сечению с толщиной жидкой пленки  $\delta$  и паровой прослойки  $h$ , причем  $\delta + h = R = \text{const}$ .

Основные предположения, в рамках которых строится эволюционное уравнение, таковы: 1) «опорное» течение в канале отсутствует; 2) характерная длина волны больше ширины канала  $\lambda C/\omega > 2R$ ; 3) возникающие в процессе распространения волны гидродинамические и тепловые пограничные слои не успевают «прорасти»:  $\sqrt{(v_l/\omega)} \ll \delta$ ;  $\sqrt{(v_v/\omega)} \ll h$ ;  $\sqrt{(a_l/\omega)} \ll \delta$ ;  $\sqrt{(a_v/\omega)} \ll h$ , профили скорости в жидкости и паре можно считать ударными.

Хотя второе условие ограничивает частоту рассматриваемых возмущений сверху, а третье — снизу при реальных

параметрах течения  $R < 0,5$  м,  $\delta > 10^{-3}$  м имеем допустимый интервал частот:  $1 \text{ Гц} < \omega < 1500 \text{ Гц}$ .

Проделав стандартные операции усреднения для уравнений пограничного слоя жидкости и пара с учетом принятых предположений,

$$\bar{\rho}_l = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \rho_l dy, \quad \bar{\rho}_v = \frac{1}{h} \int_0^R \rho_v dy, \quad \bar{u}_l = \frac{\frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \rho_l u_l dy}{\bar{\rho}_l}, \quad (1)$$

$$\bar{u}_v = \frac{\frac{1}{h} \int_0^R \rho_v u_v dy}{\bar{\rho}_v}, \quad (\bar{u}_l^2) = (\bar{u}_l)^2, \quad (\bar{u}_v^2) = (\bar{u}_l)^2,$$

$$p_l(x, t) = p_v(x, t) = p(x, t),$$

получим исходную систему уравнений, описывающих нестационарное течение такой смеси:

$$\begin{aligned} \partial \bar{u}_v / \partial t + \bar{u}_v \partial \bar{u}_v / \partial x + (1/\bar{\rho}_v) \partial p / \partial x &= -\tau_v / \bar{\rho}_v, \\ \partial \bar{u}_l / \partial t + \bar{u}_l \partial \bar{u}_l / \partial x + (1/\bar{\rho}_l) \partial p / \partial x &= -\tau_l / \bar{\rho}_l, \\ \partial(\bar{\rho}_l \delta) / \partial t + \partial(\bar{\rho}_l \delta \bar{u}_l) / \partial x &= -g, \\ \partial(\bar{\rho}_v h) / \partial t + \partial(\bar{\rho}_v h \bar{u}_v) / \partial x &= g, \\ h + \delta &= R, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $g$  — плотность потока массы между пленкой жидкости и пара, а  $\tau_v$  и  $\tau_l$  — силы вязкого трения, действующие на паровую прослойку и жидкую пленку соответственно.

Линейный акустический анализ системы (2) при отсутствии трения и массообмена приводит к выражению для скорости распространения продольных длинноволновых возмущений в смеси [8]:

$$C_0^2 = C_v^2 \left[ \frac{1 + (\delta \rho_v) / (h \rho_l)}{1 + (\delta \rho_v C_v^2) / (h \rho_l C_l^2)} \right], \quad (3)$$

где  $C_v$  и  $C_l$  — скорости звука в паровом ядре и жидкой пленке соответственно. Зависимость  $C_0^2$  от  $(\delta \rho_v) / (h \rho_l)$  приведена на рис. 2. В дальнейшем для упрощения выкладок жидкость считаем несжимаемой. Учет сжимаемости пленки, как показано в [8], приведет при условиях, далеких от критических, к незначительному изменению величины скорости звука и коэффициентов в искомом эволюционном уравнении.

Для замыкания системы (2) величины  $\tau_v$  и  $\tau_l$  определяем из решения линейных уравнений нестационарного пограничного слоя [1] с учетом условий  $\sqrt{(v_v/\omega)} \ll h$ ,  $\rho_v \ll \rho_l$ . Значение  $g$  находим из уравнения теплового баланса при рассмотрении фазового перехода на границе пленка жидкости — паровая прослойка, причем считаем, что температура межфазовой границы «следит» за давлением согласно равновесному уравнению Клайперона — Клаузиуса и что  $\sqrt{(a_l/\omega)} \ll \delta$ ;  $\lambda_v \ll \lambda_l$ :

$$\begin{aligned} \tau_v &= (\mu_v/h) \int_0^t dt' (\partial \bar{u}_v / \partial t') / [\sqrt{\pi v_v (t-t')}], \\ \tau_l &= -(\mu_v/\delta) \int_0^t dt' (\partial \bar{u}_v / \partial t') / [\sqrt{\pi v_v (t-t')}], \\ g &= -(\lambda_l/L) \int_0^t dt' (\partial T_s / \partial t') / [\sqrt{\pi a_l (t-t')}]. \end{aligned} \quad (4)$$

Из полученной замкнутой системы нелинейных уравнений (2), (4) построим приближенное эволюционное уравнение, описывающее распространение возмущений конечной амплитуды в парожидкостной среде при расслоенном режиме течения.

Для получения такого уравнения воспользуемся методом «многих масштабов» [11, 12]. Этот метод позволяет свести систему уравнений, зависящих от нескольких малых параметров, к одному уравнению, решение которого остается справедливым для больших времен. Далее следуем методике, предложенной Лейбовичем и Сибассом (13). Введем безразмерные переменные и параметры:

$$x \rightarrow xd, \quad t \rightarrow (d/C_0) t, \quad \bar{u}_v \rightarrow u_v C_0, \quad \bar{u}_l \rightarrow \beta C_0 u_l,$$

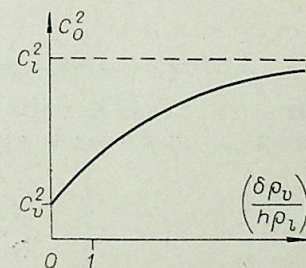


Рис. 2.

$$\rho_v \rightarrow \rho_{v0}\rho_v, \quad h \rightarrow h_0h, \quad \delta \rightarrow \delta_0\delta, \quad C_v \rightarrow C_{v0}C_v, \quad (5)$$

$$\alpha = \delta_0/h_0, \quad \beta = \rho_{v0}/\rho_{l0}, \quad \eta_v = \sqrt{(v_0 d)/(C_0 h^2)}, \quad \eta_l = \sqrt{(a_1 d)/(C_0 \delta^2)}.$$

После диагонализации систем (2) и (4) запишем в виде

$$\partial \vec{u}_i / \partial t + B(\vec{u}) \partial \vec{u}_i / \partial x = \eta_v \vec{D}(\vec{u}) + \eta_l \vec{D}(\vec{u}), \quad (6)$$

где

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_v \\ u_l \\ \delta \\ \rho_v \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} u_v & 0 & 0 & C_{v0}^2 C_v^2 / C_0^2 \rho_v \\ 0 & \beta u_l & 0 & C_{v0}^2 C_v^2 / C_0^2 \\ 0 & \beta \delta & \beta u_l & 0 \\ \rho_v & \alpha \beta \rho_v \delta / h & \alpha \rho_v (\beta u_l - u_v) / h & u_v \end{pmatrix}; \quad (7)$$

$$\vec{D}_v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \int_0^t \frac{dt' (\partial u_v / \partial t')}{\sqrt{\pi(t-t')}}; \quad \vec{D}_l = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ (\alpha-1)\alpha/\beta \end{pmatrix} \left( \frac{C_v^2}{L} \right) \left( \frac{c_p T}{L} \right) \int_0^t \frac{dt' (\partial \rho_v / \partial t')}{\sqrt{\pi(t-t')}};$$

причем  $\eta_v, \eta_l$  — малые параметры.

В дальнейшем примем, что возмущение скорости, толщины пленки, плотности имеют некоторый порядок малости  $\varepsilon$ . Разложим  $\vec{u}, B, \vec{D}$  в ряд Тейлора

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \varepsilon \vec{u}_1 + \varepsilon^2 \vec{u}_2 + \varepsilon \eta_v \vec{u}_3 + \varepsilon \eta_l \vec{u}_4 + \dots$$

$$B(\vec{u}) = B_0(\vec{u}_0) + \varepsilon B_1(\vec{u}_0, \vec{u}_1) + \dots \quad (8)$$

$$\vec{D}_v(\vec{u}) = \varepsilon \vec{\Delta}_v(\vec{u}_0, \vec{u}_1) + \dots \quad \vec{D}_l = \varepsilon \vec{\Delta}_l(\vec{u}_0, \vec{u}_1) + \dots,$$

где

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & C_{v0}^2 / C_0^2 \\ 0 & 0 & 0 & C_{v0}^2 / C_0^2 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 1 & \alpha \beta & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} u_{v1} & 0 & 0 & (\gamma-2)\rho_{v1}C_{v0}^2/C_0^2 \\ 0 & \beta u_{l1} & 0 & (\gamma-1)\rho_{v1}C_{v0}^2/C_0^2 \\ 0 & \beta \delta_1 & \beta u_{l1} & 0 \\ \rho_{v1} & \alpha \beta [\rho_{v1} + \delta_1(1-\alpha)] & \alpha(\beta u_{l1} - u_{v1}) & u_{v1} \end{pmatrix};$$

$$\vec{\Delta}_v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \int_0^t \frac{dt' (\partial u_{v1} / \partial t')}{\sqrt{\pi(t-t')}}; \quad \vec{\Delta}_l = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ (\alpha-1)\alpha/\beta \end{pmatrix} \left( \frac{C_v^2}{L} \right) \left( \frac{c_p T}{L} \right) \int_0^t \frac{dt' (\partial \rho_{v1} / \partial t')}{\sqrt{\pi(t-t')}}. \quad (9)$$

Подставив (8) в (6) и приравняв члены при соответствующих степенях малых параметров, получим  $\vec{u}_1 = \vec{r}_i U(x - \xi_i t)$ , где  $\vec{r}_i$  и  $\xi_i$  — собственные вектор-столбцы и собственные значения матрицы  $B_0$ , т. е.

$$B_0 \vec{r}_i = \xi_i \vec{r}_i. \quad (10)$$

Мы рассматриваем асимптотическое поведение одной моды  $\xi = 1$ . В этом случае для нашей системы получаем  $\vec{n} = (1, \alpha\beta, 0, 1)$  — собственный вектор-строка матрицы  $B_0$ ;

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \beta \\ 1 + \alpha\beta \end{bmatrix}; \quad u_{v1} = u_{l1} = U; \quad \delta_1 = \beta U; \quad \rho_{v1} = (1 + \alpha\beta)U;$$

$C_0^2 = C_{v0}^2(1 + \alpha\beta)$ , что согласуется с формулой (3), если в ней  $C_i^2$  устремить к  $\infty$ .

Далее, вводя для каждого малого параметра свое «медленное» время, получим в системе отсчета, движущейся со скоростью  $C_0$ , следующее уравнение:

$$(\vec{n} \vec{r}) \partial U / \partial t + \varepsilon \vec{n} B_1 \vec{r} \partial U / \partial x = \vec{n} (\eta_v \vec{\Delta}_v + \eta_l \vec{\Delta}_l) \quad (11)$$

Для нашей конкретной системы это уравнение примет вид

$$\partial U / \partial t + \varepsilon \left[ \frac{\gamma+1}{2} + \alpha\beta \frac{(\gamma-1)}{2} \right] U \partial U / \partial x = -\kappa \int_0^t \frac{dt' (\partial U / \partial t')}{\sqrt{\pi(t-t')}}}, \quad (12)$$

где

$$\kappa = \eta_v(1-\beta)/2(1+\alpha\beta) + \eta_l(1-\alpha)/2\beta. \quad (13)$$

Решение искомого эволюционного уравнения (12) будет адекватным и при больших временах ( $t \sim O(\varepsilon^{-1} + \kappa^{-1})$ ).

Исследование уравнения (12), в частности его дисперсионный анализ, показывает, что дисперсия и диссипация определяются интегральным членом в правой части уравнения. При условиях, далеких от критических ( $\beta \ll 1$ ), дисперсия и диссипация волн, как видно из (13), существенно зависят от коэффициентов вязкости пара и температуропроводности жидкости. Уравнение, подобное (12), ранее встречалось в [14] при рассмотрении распространения возмущений в жидкости с диспергированным паром. Для него решалась задача типа Коши в линеаризованном случае, причем в качестве начального условия бралась «ступенька». Эта «ступенька» согласно полученному там решению двигалась со скоростью звука и сильно расплывалась.

Интегральный член в правой части (12) характерен для эволюционных уравнений при описании распространения «высокочастотных», в смысле предположения (3), возмущений в двухфазных средах. Дополнительный анализ показывает, что для уравнения (12) стационарных решений типа ударных или уединенных волн не существует.

## ВЫВОДЫ

В работе получено эволюционное уравнение, описывающее распространение длинноволновых возмущений в парожидкостной среде при расщепленном режиме течения в канале. Решение этого нелинейного уравнения остается справедливым при больших временах ( $t \sim O(\varepsilon^{-1} + \kappa^{-1})$ ).

Автор благодарит В. Е. Накорякова за постановку задачи и постоянное внимание к работе, И. Р. Шрейбера за ценные замечания и полезные обсуждения.

Институт теплофизики  
СО АН СССР,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
15/1 1979

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
2. Виглин А. И. Распространение колебаний в двухфазной системе жидкость — пар. — ЖТФ, 1938, т. VIII, № 3, 4.
3. Авдонин В. И., Новиков И. И. Скорость звука на кривой фазового равновесия пар — жидкость. Скорость звука в насыщенном водяном паре. — ПМТФ, 1960, № 1.
4. Grammel G. T. Sound waves in water containing vapor bubbles. — J. Appl. Phys., 1962, v. 33, N 5.

5. Губайдуллин А. А., Ивандаев А. И., Нигматуллин Р. И. Нестационарные волны в жидкости с пузырьками газа.— Докл. АН СССР, 1976, т. 226, № 6.
6. Акуличев В. А. Ультразвуковые волны в жидкостях с паровыми пузырьками.— Акуст. журн., 1975, т. XXI, № 3.
7. Накоряков В. Е., Соболев В. В., Шрейбер И. Р. Волны конечной амплитуды в двухфазных системах.— В кн.: Волновые процессы в двухфазных системах. Новосибирск, 1975.
8. Лежнин С. И. Акустика дисперсно-кольцевого режима течения парожидкостной среды.— В кн.: Исследование сложного теплообмена. Новосибирск, 1978.
9. Grolmes M. A., Fauske H. K. Propagation characteristics of compression and rarefaction pressure pulses in one-component vapor-liquid mixtures.— Nucl. Engin. Design., 1969, N 11.
10. Ardron K. H., Duffey R. B. Acoustic wave propagation in a flowing liquid-vapor mixture.— Inter. J. Multiphase Flow., 1978, v. 4, N 3.
11. Taniuti T., Wei C.—C. Reductive perturbation method in nonlinear wave propagation.— J. Phys. Soc. Japan, 1968, N 24.
12. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М., Мир, 1971.
13. Лейбович С., Сибасс А. Р. Примеры диссипативных и диспергирующих систем, описываемых уравнениями Бюргерса и Кортевега-де Вриза.— В кн.: Нелинейные волны. М., Мир, 1977.
14. Накоряков В. Е., Шрейбер И. Р. Модель распространения возмущений в парожидкостной среде.— ТВТ, 1979, т. 17, № 4.

М. А. СУЛТАНОВ

**О ГИДРОГАЗОДИНАМИЧЕСКОМ ХАРАКТЕРЕ  
ФОРМИРОВАНИЯ И РАЗВИТИЯ СТРУКТУРЫ  
СВЕРХЗВУКОВОГО ФАКЕЛА ПРИ ИСТЕЧЕНИИ ПОТОКА  
ИЗ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ОТВЕРСТИЯ**

Вопрос исследования физических свойств сверхзвукового плазменного факела (СПФ) до сих пор не потерял свою актуальность. Он неразрывно связан с газогидродинамическими процессами истечения плазменного потока из сверхзвукового сопла, с образованием сильных ударных волн (УВ), перспективами развития источников света высокой яркости; знание структуры СПФ позволяет управлять плазменным потоком, изменяя полярность и материал электродов, процессами его ускорения при выбросе из сверхзвукового сопла (см. [1] и др.).

Заметим, что некоторые физические характеристики СПФ и его диагностика проводились рядом авторов. Однако систематическому исследованию структуры и диагностики СПФ в условиях мощного импульсного разряда (МИР) в литературе посвящено незначительное количество работ. В работах [2—5] затронутый вопрос рассматривается для других видов источника в несколько ином аспекте.

В [6] отмечалась независимость структуры СПФ от полярности электродов при низких значениях емкости и напряжения батареи импульсных конденсаторов; в [7] исследовалась структура СПФ более 40 режимов в зависимости от изменения емкости и напряжения, разрядного контура, изменения диаметра выхлопного отверстия разрядной камеры. Как выяснилось, при изменении энергетических параметров на структуру СПФ сильное влияние оказывают полярность и атомный вес материала электродов.

В связи с этим в данной работе исследовалась структура СПФ, определялись основные его параметры, характеры истечения из сопла разрядной камеры и др.

В работе описываются результаты исследований при  $C = 200 \div 600$  мкФ,  $U = 2$  и  $3$  кВ; индуктивность разрядного контура составляла  $1 \div 1,5$  мкГн. Структура СПФ изучалась методом оптической хронографии на камере СФР в вариантах непрерывной фоторазвертки и покадровой съемки. Спектроскопические исследования проводились как вдоль струи, так и по поперечному сечению. Измерения параметров факела проводились за фронтом УВ, в зоне скачка уплотнения и за ним. Применялась разрядная камера, принципиальная схема которой приведена в [7].

Качественные и количественные исследования структуры СПФ позволили обнаружить ряд особенностей, в частности наличие двух темных пространств в первом полупериоде тока, образование двух так называемых «оболочек» («бочек»), двух УВ при набегании СПФ на твердую преграду из стекла и оргстекла и др. Для иллюстрации на рис. 1 приведены типичные фоторазвертки СПФ при  $C = 200$  мкФ,  $U = 3$  кВ. На рис. 1, а, б заметно существенное различие в структуре факела, состоящее из двух

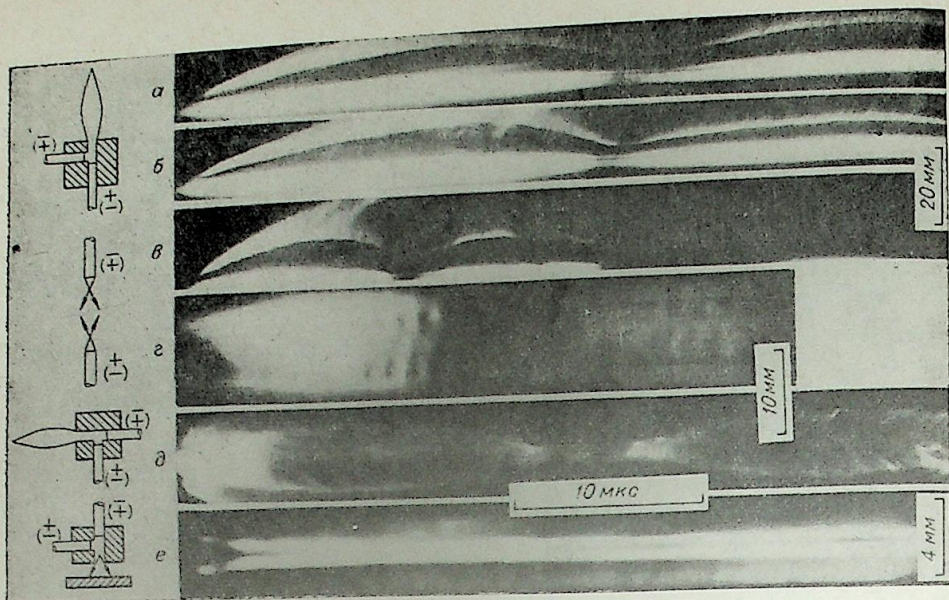


Рис. 1. Временные развертки СПФ и разряда при  $C=200$  мкф,  $U=3$  кВ.  
 а — в — по продольному, д — поперечному сечениям факела, г — разряд между двумя открытыми электродами, е — скачки уплотнения на поверхности мишени, образующиеся при набегаии СПФ.

зон: темного пространства и интенсивного свечения с резкой границей при переходе через фронт УВ; наблюдается некоторое повышение интенсивности излучения за срезом сопла при выходе потока из разрядной камеры. Видно, что временная развертка излучения состоит как бы из двух полупериодов. Однако в действительности она представляет собой структуру СПФ при первом полупериоде тока. При выбросе СПФ из цилиндрического отверстия регистрируются два темных пространства с непрерывным переходом первого скачка уплотнения во второй. Максимальная высота первого темного пространства составляет 16 мм, второго — 12,5 мм, но равна по длительности. Первое темное пространство на скачке уплотнения в отличие от второго имеет изогнутую форму и остается почти параллельным поверхности разрядной камеры. На фоторазвертке для обоих темных пространств регистрируется один фронт УВ, который в начале развертки более интенсивен, и с удалением от среза разрядной камеры со скоростью  $\sim 1$  км/с его излучение постепенно затухает.

Размеры темных пространств изменяются при перемене полярности и материала электродов. Например, если горизонтальным электродом в разрядной камере служит медь-катод, вертикальным — алюминий-анод (см. рис. 1, а), то в случае горизонтального электрода — алюминий-катод, вертикального — медь-анод (см. рис. 1, б) различие в размерах темных пространств составляет как 1:1,8.

Как показали исследования, второе темное пространство не является вторым полупериодом тока. Для убедительности были предприняты следующие опыты: при небольших скоростях вращения зеркала СФР фотографировался единственный факел и разряд между электродами (см. рис. 1, в, г). При этом второй полупериод тока с весьма слабым скачком уплотнения регистрируется через  $\sim 12$  мкс после окончания первого полупериода, интенсивность которого значительно слабее интенсивности первого полупериода; высота темного пространства составляет 1/3 высоты темного пространства первого полупериода и т. д. Сказанное хорошо иллюстрирует также временная фоторазвертка разряда между открытыми электродами (см. рис. 1, е).

Интерес представляет и структура факела в поперечном сечении. Из рис. 1, д видно, что в зоне скачка уплотнения имеют место две «оболочки» с резкими границами. В отличие от фотограмм, полученных по продольному сечению факела, указанные оболочки различаются между собой по интенсивности, продолжительности и размерам. Процесс образования второй «оболочки», как и ранее, носит непрерывный характер. Заметно, что в начальные стадии разряда на фотопленке регистрируются слабые фронты свечения УВ, которые затухают практически за время существования первой «оболочки». В первые моменты импульса внутри «оболочки» наблюдается сильное свечение, затем ее интенсивность резко падает и несколько усиливается в конечной стадии; аналогичный процесс наблюдается и во второй «оболочке».

Важной особенностью структуры факела по поперечному сечению является ее неоднородность, например, образование «оболочки» в виде чечевицы диаметром  $\sim 15$  мм, ограниченная сверху скачком уплотнения (на фоторазвертке в виде пучков), а с боков сферическими ударными волнами. Внутри «оболочки» заметна сильная турбулизация потока, четко видны отдельные сгустки плазмы, интенсивность которых меняется от точки к точке, в особенности на границе сферических УВ.

Эксперименты показали, что при набегаии рассмотренного сверхзвукового плазменного факела на твердую преграду на поверхности в отличие от работ [8, 9] и других образуется двойной скачок уплотнения, разделенный воздушной прослойкой (см. рис. 1, е), однако выяснение природы этих скачков уплотнения не входит в задачу настоящей работы.

Значительная информация по формированию структуры факела и динамики его развития была получена методом покадровой развертки. На рис. 2, а — з показаны кадры, снятые при режиме, соответствующем рис. 1. Первые черты кадра относятся к начальной стадии первого темного пространства, остальные — второго.

Динамику развития структуры СПФ по приведенным кадрам можно представить так. После 5 мкс от начала разряда образуется картина, представленная в виде первого кадра; заметно образование прямого скачка уплотнения с относительно резкой границей и криволинейными скачками уплотнения. Еще через 5 мкс структура факела имеет вид рис. 2, б, где происходит заметное удаление от среза камеры как прямого скачка уплотнения, так и криволинейных УВ по радиальным направлениям. За прямым скачком уплотнения факел принимает форму «коробы» (см. рис. 2, в). Однако несколько иная структура наблюдается в последующей УВ (рис. 2, д — з): «бочка» принимает продолговатую форму и за скачком уплотнения факел вытягивается вверх. В данном случае происходит формирование второй «бочки» под первой (см. рис. 2, е, ж).

Исследования показывают, что при увеличении мощности разряда, его энергетических характеристик происходят изменения в структуре СПФ. Например, при  $C=400$  мкФ,  $U=3$  кВ в структуре факела можно заметить картины, представленные на рис. 2, и — м, на которых помимо основной «оболочки» формируется еще и вторая оболочка с повторением аналогичных газодинамических процессов. Скорость расширения внешней «оболочки» на одном из приведенных кадров составляет соответственно 4,8 и 3,7 км/с. В них проявляется следующее характерное явление: после удаления первой УВ с образованием «оболочки» на некотором расстоянии она практически останавливается и внутри нее начинает образовываться вторая «оболочка», которая передвигается в направлении первого скачка. При дальнейшем повышении мощности разряда картина имеет вид, представленный на рис. 2, м — о. На рис. 2, м видны две зоны скачка, удаленные от среза разрядной камеры на различные расстояния; однако на рис. 2, н верхний скачок распадается, а нижний расширяется. При более мощном режиме разряда происходит образование «бочки» с резким прямым скачком уплотнения сверху, который восстанавливается практически на равном расстоянии от среза разрядной камеры (см. рис. 2, о).

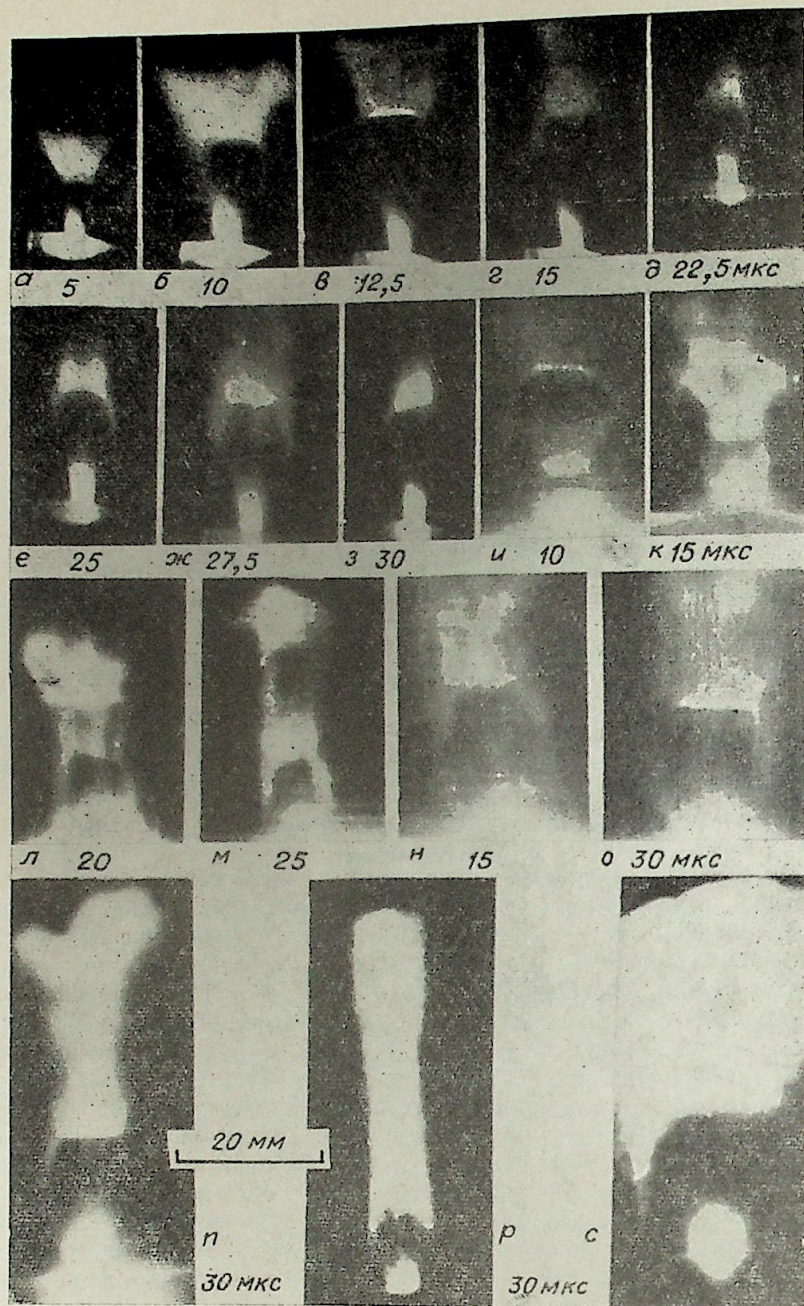


Рис. 2. Кадровые развертки СПФ.

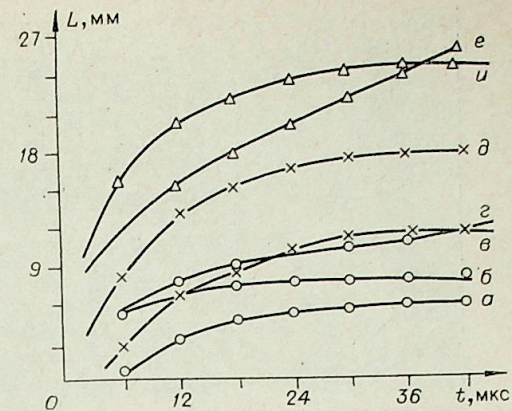
а — з — при  $C=200$  мкФ,  $U=3$  кВ, и — о —  $C=300$  мкФ,  $U=3$  кВ, н — с —  $C=600$  мкФ,  $U=3$  кВ; р, с — кадры лазерного факела, заимствованные из [1]. Цифры под кадрами указывают время разряда.

При  $C=400, 600$  мкФ,  $U=3$  кВ факел состоит из одной «бочки», а за прямым скачком уплотнения происходит образование продолговатой зоны свечения (см. рис. 2, н). В структуре факела на отдельных кадрах возможно образование трех и более «бочек» и т. д.

По кадрам скоростной развертки можно определить скорости движения как 1-го, так и 2-го скачка уплотнения. На рис. 3 показаны графики зависимости УВ от среза сопла за время импульса. Видно, что длина темного пространства в зависимости от режима разрядного контура (линии

Рис. 3. Графики изменения длины темного пространства от времени импульса.

Первая оболочка: а —  $C=200$  мкФ; б —  $C=300$  мкФ,  $U=3$  кВ; в —  $C=200$  мкФ,  $U=2$  кВ; д —  $C=400$  мкФ,  $U=3$  кВ; и —  $C=600$  мкФ,  $U=3$  кВ; вторая оболочка: з —  $C=400$  мкФ,  $U=2$  кВ; е —  $C=600$  мкФ,  $U=3$  кВ.



а, б, в, д, и) и наличия второй «оболочки» (линии з, е), т. е. в начальные моменты разряда УВ двигаются с большой скоростью. Однако для вторых «оболочек» графики имеют прямую зависимость, в особенности при больших режимах разрядного контура (см. рис. 3, е).

Тщательный анализ кадровых разверток СПФ приводит к мысли, что между структурой плазменного и лазерного факелов в условиях сверхзвукового истечения и при определенных режимах источников излучения существует некоторая аналогия. Для убедительности и сравнения на рис. 2, р, с показаны фотографии лазерного факела, заимствованные из [10]. При сравнении этих фотографий с предыдущими кадрами можно заметить весьма сходную структуру.

Описанная выше структура СПФ также исследовалась спектроскопическими методами, которые подтвердили те особенности, которые были обнаружены методом оптической хронографии. В качестве примера на рис. 4 показаны участки спектра по продольному сечению СПФ. Анализ этих спектрограмм показывает на неоднородное свечение плазмы вдоль оси факела, которое характеризует наличие зон уплотнения и разрежения. В спектре регистрируются один или два скачка уплотнения, которые перемещаются вдоль оси факела в зависимости от полярности и материала электродов. Усиление интенсивности спектральных линий и уширение контуров происходит на скачках уплотнения и у среза сопла. Линии нейтральных атомов с меньшими энергиями ионизации регистрируются в поглощении, причем величина провала контура меняется с изменением условий эксперимента; усиление интенсивности линий ионов и уширение их контуров происходит на скачках уплотнения. Спектрограммы по своему характеру и природе напоминают спектры, полученные при взаимодействии излучения ОКГ с поверхностью алюминия [10].

На приведенных спектрограммах видно, что линии нейтральных атомов возбуждаются по всей высоте факела, начиная от среза разрядной камеры; однако линии ионов, в особенности с высокими энергиями верхних уровней, возбуждаются только при выходе из зарядной камеры и в зоне скачка уплотнения; в остальных участках спектра наблюдается провал интенсивности.

Когда в качестве вертикального электрода служит алюминий, в спектре происходит увеличение интенсивности как континуума, так и отдельных линий: в случае медного электрода, наоборот, интенсивность излучения падает.

Исследования показывают, что на фронте УВ в спектре СПФ наблюдается следующая картина: если интенсивность одной линии усиливается в одном спектре, то на другом она падает, или же та или иная спектральная линия регистрируется в одном спектре, а на другом исчезает и т. д. Для наглядности на рис. 5, а, б показаны графики распределения интенсивности линий Al II 3586 и Cu I 4539,7 Å вдоль оси струи, из которых

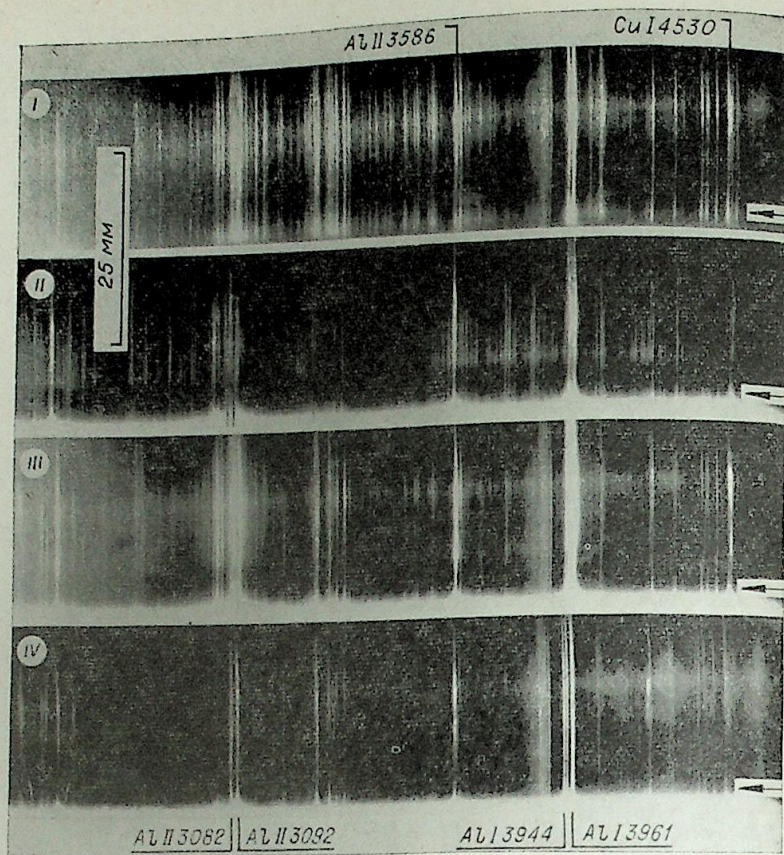


Рис. 4. Спектрограммы СПФ.

I — Al (анод) — горизонтальный, Cu (катод) — вертикальный; II — Cu (катод) — вертикальный, Al (анод) — горизонтальный; III — Cu (катод) — горизонтальный, Al (анод) — вертикальный; IV — Cu (анод) — горизонтальный, Al (катод) — вертикальный.

видно, что интенсивность линий сильно зависит от условий эксперимента. Например, если для спектра I в графике рис. 5, а относительно резкий максимум интенсивности наблюдается у сопла разрядной камеры, а второй максимум образуется на расстоянии  $\sim 12$  мм, то на II спектре эта линия имеет максимум на удалении 15 мм, и он несколько более растянут, чем первый; однако на спектрах III и IV заметно образование двух максимумов на различном удалении от поверхности разрядной камеры.

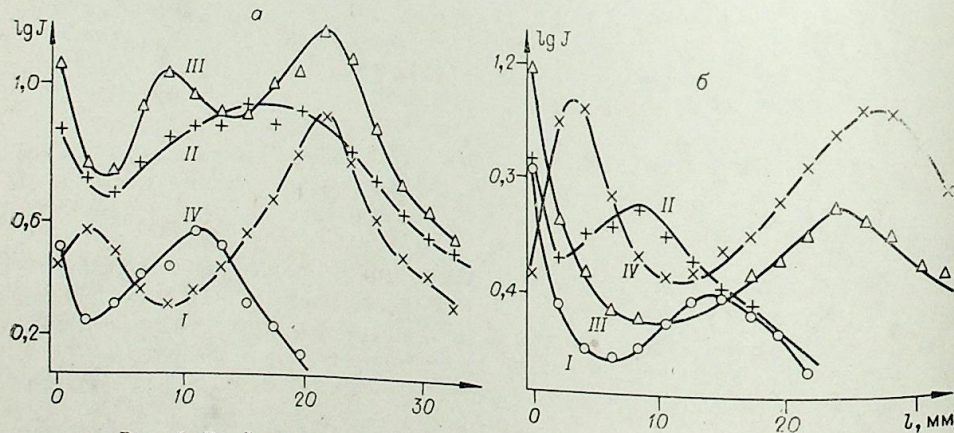


Рис. 5. Графики распределения интенсивности по высоте факела.

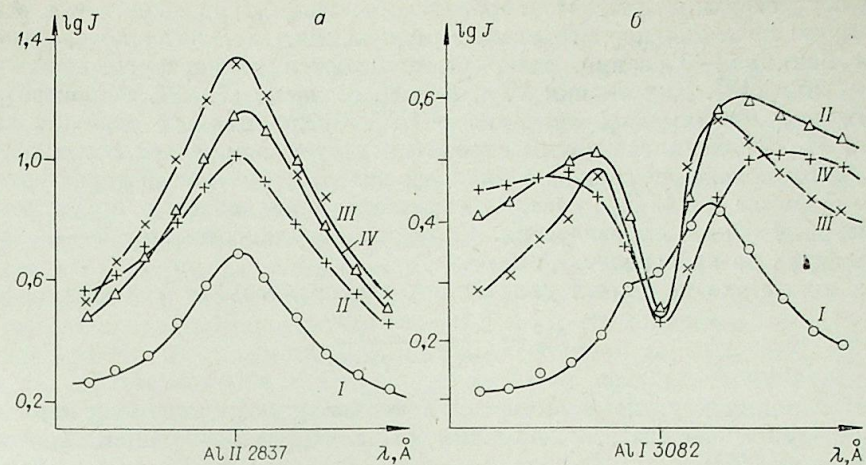


Рис. 6. Контуры линий.

На рис. 5, 6 линия Al II 2837 (а) и Al I 3082 Å (б).

Для линий нейтральных атомов распределение интенсивности отлично от распределения интенсивности линий ионов, в частности усиление интенсивности линий у среза сопла, уменьшение ее на скачке уплотнения (линия I) или же образование скачка уплотнения вблизи поверхности вместо растянутого максимума (линия II), образование двух максимумов (линия IV) и т. д.

Аналогичную картину можно проследить также по изменению интенсивностей контуров спектральных линий ионов и нейтральных атомов. Для иллюстрации на рис. 6 приведены графики изменения интенсивностей по контуру линий Cu I 3274 и Al II 2837 Å на скачках уплотнения. Видно, что линии ионов и атомов на скачке уплотнения в зависимости от полярности и атомного веса ведут себя по-разному: в частности, увеличивается интенсивность непрерывного фона, уширяются контуры линий ионов, а в некоторых случаях происходит смещение максимума интенсивности в сторону длинноволновой области спектра.

В работе проводились количественные измерения основных параметров факела. Для определения электронной концентрации использовались формула и табличные данные из [11]. Методом относительных интенсивностей линий по характерным линиям ионов (Cu II 2713,5 и Al II 2816,2 Å) было определено распределение температуры по различным сечениям СПФ. Результаты измерений приведены на рис. 7, где видно, что наибольшая температура имеет место в зоне скачка уплотнения и при выходе потока из отверстия разрядной камеры.

Полученные экспериментальные результаты предположительно можно объяснить следующим образом. В условиях МИР в разрядной камере газ быстро нагревается и расширяется со сверхзвуковой скоростью, одновременно происходит увеличение давления. При выходе факела из отверстия разрядной камеры благодаря

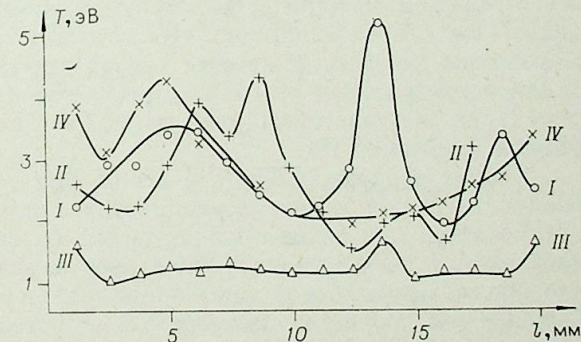


Рис. 7. Графики распределения температуры по продольному сечению факела.

На рис. 5—7 римские цифры указывают на порядок спектрограмм, приведенных на рис. 4.

процессу сверхкритического перепада давления происходит ускорение потока до границы первого скачка уплотнения, где, согласно соотношениям Ренкина — Гюгонио, резко увеличиваются температура, плотность и давление [12]. Для оценки  $T$ ,  $\rho$ ,  $P$  и  $M$ , согласно [7, 13], за показатель адиабаты  $\gamma$  принималось значение  $\sim 1,25$ . Число Маха до скачка уплотнения  $M_1$  определялось двумя способами: путем измерения скорости поступления потока из сопла по наклону полос (струй) на фоторазвертках и по формуле из [14] с известной длиной периодической структуры и диаметра выхлопного отверстия. Скорость струи составляет 8–10, скорость звука не превышает 1,5 км/с.

Число Маха на скачке уплотнения определялось по формуле из [15]

$$M_2^2 = \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}$$

Изменения других параметров на скачке уплотнения, рассчитанные по гидродинамическим соотношениям, выраженные через  $M_1$  и  $M_2$ , определялись из [16]:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{M_2^2}{M_1^2} \left( \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right),$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2},$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_1^2 (1 + \gamma M_2^2)}{M_2^2 (1 + \gamma M_1^2)}$$

О наличии высокого давления на скачке уплотнения также свидетельствует смещение максимума спектральных линий; по величине смещения определялась температура СПФ по методу, предложенному в [17].

О причинах возникновения двух ударных волн в структуре СПФ при указанном режиме разрядного контура можно допустить следующий возможный вариант. При повышении мощности разряда возрастает длина темного пространства и в струе не успевает формироваться второй скачок уплотнения. Это, по-видимому, связано с тем, что в конце первого полупериода тока передний фронт свечения УВ удаляется от среза сопла на расстояние меньше того, на котором должна была регистрироваться вторая яркая область. Из рис. 2 видно, что формирование первого скачка уплотнения, когда оно отходит от среза сопла на достаточно большое удаление и становится несколько стационарным, происходит образование и передвижение второго скачка (второй «оболочки»), который в начальные моменты импульса передвигается с большей скоростью, чем первый; возможно, это связано с различием вне скачка уплотнения и геометрией расположения электродов в разрядной камере. Кроме того, оно, возможно, с тем обстоятельством, что данный режим разрядного контура и параметры разрядной камеры соответствуют такому газодинамическому и энергетическому режиму, при котором формируется наблюдаемая структура и неизвестный нам пока коэффициент сверхкритического перепада давления [18].

Таким образом, СПФ при некоторых режимах разряда повышенной мощности также имеет периодическую структуру. Однако она не может образоваться при более мощных режимах, так как образованная УВ успевает отойти на соответствующее расстояние от среза сопла. Это значит, что время, необходимое для формирования всей структуры факела, будет больше, чем скорость удаления УВ от среза разрядной камеры. Следовательно, при увеличении или уменьшении энергетических параметров разряда будут уменьшаться параметры факела и наблюдается изменение структуры. Это можно объяснить, например, образованием «короны» и второго скачка уплотнения на рис. 2, а — з.

В начальные стадии формирования структуры среда над СПФ является неоднородной, т. е. происходит уплотнение холодных слоев атмосферы. С истечением времени происходит увеличение скорости и преимущественный унос энергии в том направлении, где плотность среды меньше [12], [18], т. е. в прогретой зоне, которая образуется после удаления первого скачка уплотнения от среза зарядной камеры.

Как показали спектроскопические исследования СПФ, в его структуре большое влияние оказывает изменение как полярности, так и атомного веса материала электродов. Это различие можно объяснить также различием в скоростях поступления плазменных факелов с соответствующим, что при отрицательной полярности электрода наблюдается заметное поражение его поверхности, что приводит к значительному выбросу вещества. При включении электрода катодом происходит более интенсивное его разрушение, сопровождающееся поверхностными выбросами ступков плазмы, особенно когда электрод расположен вертикально в разрядной камере. Вследствие более интенсивного разрушения его поверхности в плазменную струю поступает большее количество вещества, чем при положительной полярности. Увеличение содержания числа частиц в струе приводит к уменьшению ее скорости. То, что отрицательный электрод разрушается более интенсивно, можно объяснить различием в величине плотности тока, а также в тепловых потоках.

Институт химии АН ТаджССР,  
Душанбе

Поступила в редакцию  
24/VI 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Султанов М. А. Тр. VII Европейской конф. по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу, ч. 1. Лозанна, 1975, с. 177.
2. Покровская Л. М.— В кн.: Итоги науч. конф. Казанского ун-та 1962 г. Казань, 1963, с. 32.
3. Гречихин Л. И., Минько Л. Я.— ПМТФ, 1965, № 3, с. 74.
4. Минько Л. Я. Получение и исследования импульсных плазменных потоков. /Под ред. М. А. Ельяшевича. Минск, Наука и техника, 1970.
5. Льюис, Карлсон.— Ракетная техника и космонавтика, 1964, № 4, с. 239.
6. Султанов М. А. Канд. дис. Минск, 1965.
7. Султанов М. А.— ЖТФ, 1974, 44, с. 759.
8. Султанов М. А. и др. Тр. IX Междунар. конф. по явлениям в ионизированных газах. Бухарест, 1969, с. 123.
9. Агеев В. А., Султанов М. А.— ТВТ, 1973, 11, 498; 1974, 12, 17.
10. Батанов В. А., Богатырев В. А., Суходрев Н. К., Федоров В. Б.— ЖЭТФ, 1973, 64, 825.
11. Гримм Г. Спектроскопия плазмы. М., Атомиздат, 1969.
12. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., Наука, 1966.
13. Таблицы термодинамических функций воздуха. /Под ред. А. С. Предводителя. М., Изд. АН СССР. 1957.
14. Бай Ши-И. Теория струй. М., ИЛ, 1960.
15. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.
16. Рахматуллин Х. А., Сагомоян А. Я., Бунимович А. И., Зверев И. Н. Газовая динамика. М., Высшая школа, 1965.
17. Sultanov M. A. US National Bureau of Standards. Washington, 1974, 232.
18. Компанеев А. С.— Докл. АН СССР, 1960, 130, 1001.

А. М. БЛОХИН, Е. И. РОМЕНСКИЙ

ВЛИЯНИЕ СВОЙСТВ  
ПРЕДЕЛЬНОГО СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ  
НА ЕГО УСТАНОВЛЕНИЕ

Успешное применение метода установления для расчета стационарных течений газа зависит от устойчивости предельного стационарного решения (п. с. р.) относительно малых возмущений [1, 2]. Естественно, что проверить устойчивость стационарного решения в общем случае не удается, так как структура стационарных решений уравнений газовой

динамики не изучена еще достаточно хорошо. Поэтому в работе [3] исследование устойчивости проводится на примере простейшего стационарного решения уравнений газовой динамики — стационарного обтекания кругового конуса сверхзвуковым потоком газа под нулевым углом атаки [4] (рис. 1).

В работе [3] изучаются уравнения для малых возмущений, которые получены линеаризацией уравнений газовой динамики относительно основного решения (п. с. р.). Линеаризации подвергаются также граничные условия на

поверхности конуса и на ударной волне. Окончательно формулируется следующая смешанная задача при  $t > 0$ ,  $0 \leq s \leq 1$  для линейной системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + D(s) \cdot \frac{\partial Y}{\partial s} + A(s) \cdot Y = 0, \quad (1)$$

где

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_4 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & a_2 & a_3 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & c_4 \\ b_1 & b_2 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

с краевыми условиями при  $s = 0$ :

$$y_2(t, 0) = y_3(t, 0), \quad (2)$$

и при  $s = 1$ :

$$\frac{dy_1(t, 1)}{dt} + \mu \cdot y_1(t, 1) + \nu \cdot y_3(t, 1) = 0, \quad (3)$$

$$y_2(t, 1) = \nu_1 \cdot y_1(t, 1) - \nu_2 \cdot y_3(t, 1),$$

$$y_4(t, 1) = d_1 \cdot y_1(t, 1) + d_2 \cdot y_2(t, 1) + d_3 \cdot y_3(t, 1);$$

и с начальными данными при  $t = 0$ .

Коэффициенты матриц  $D$ ,  $A$  и коэффициенты  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ ,  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$  определяются через известное п. с. р. (см. рис. 1).

П. с. р. удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений [4]:

$$\frac{d\hat{u}}{ds} = \hat{\varepsilon} \cdot \hat{v}, \quad (4)$$

$$\frac{d\hat{v}}{ds} = -\hat{\varepsilon} \cdot \left( \hat{u} + \frac{\hat{u} + \hat{v} \cdot \text{ctg} \Theta}{1 - \hat{v}^2/a^2} \right),$$

с краевыми условиями при  $s = 0$ :

$$\hat{v}(0) = 0, \quad (5)$$

и при  $s = 1$ :

$$\hat{v}(1) = -\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \cdot \text{ctg} \hat{\Theta}_w \cdot \frac{1 - \hat{u}^2(1)}{\hat{u}(1)}. \quad (6)$$

Здесь  $\hat{\varepsilon} = \hat{\Theta}_w - \Theta_b$ ,  $\Theta = \Theta_b + s \cdot \hat{\varepsilon}$ ,  $\hat{a}^2 = \frac{\gamma - 1}{2} \cdot (1 - \hat{u}^2 - \hat{v}^2)$ ,  $\gamma$  — показате-

ль адиабаты;  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$  — составляющие вектора скорости вдоль и поперек радиуса (см. рис. 1). Как известно [4], для данного числа Маха набегающего потока  $M_\infty$  ( $M_\infty > 1$ ) существует такой угол  $\Theta_m(M_\infty)$ , что если  $\Theta_b < \Theta_m(M_\infty)$ , то возможны два решения задачи об обтекании конуса сверхзвуковым потоком газа: п. с. р. со слабой ударной волной (течение газа после ударной волны — сверхзвуковое) и п. с. р. с сильной ударной волной (течение газа после ударной волны — дозвуковое). При  $\Theta_b = \Theta_m(M_\infty)$  существует только одно решение задачи об обтекании конуса сверхзвуковым потоком. При  $\Theta_b > \Theta_m(M_\infty)$  головной скачок уплотнения отходит от конуса.

В [3] с помощью техники интегралов энергии установлено, что п. с. р. со слабой ударной волной (течение газа за ударной волной сверхзвуковое) устойчиво по отношению к малым возмущениям, т. е. получена оценка

$$I(t) \leq I(0) \cdot \exp(\sigma \cdot t), \quad (7)$$

где

$$I(t) = \int_0^1 (Y, Y) ds + K \cdot y_1^2(t, 1);$$

$K > 0$ ,  $\sigma < 0$  — некоторые константы.

В том случае, когда п. с. р. со слабой ударной волной соответствует околозвуковому обтеканию конуса ( $1 < M_\infty < 2$ ), либо когда для п. с. р. со слабой ударной волной за ударной волной смешанное или полностью дозвуковое течение газа оценка (7) уже не выполняется, хотя смешанная задача (1), (2), (3) остается корректной.

Вопрос об устойчивости п. с. р. в [3] рассматривается также на основе изучения спектра оператора  $L = -D(s) \cdot \frac{d}{ds} - A(s)$ . Очевидно, что необходимым условием устойчивости п. с. р. является выполнение для всех собственных значений  $\lambda$  оператора  $L$  неравенства

$$\text{Re} \lambda < 0. \quad (8)$$

В настоящей работе продолжается изучение спектральной задачи, возникающей из (1), (2), (3):

$$Lz = \lambda z, \quad Q \cdot z(0) = 0, \quad R \cdot z(1) = 0, \quad (9)$$

где  $Q$ ,  $R$  — прямоугольные матрицы.

Затем проверяется выполнение необходимого условия устойчивости п. с. р. (8) в случае, когда п. с. р. со слабой ударной волной соответству-

ет околзвучковому обтеканию конуса, либо когда за слабой ударной волной смешанное течение газа. Наконец, показано, что условие (8) нарушается, когда мы исследуем вопрос об устойчивости п. с. р. с сильной ударной волной. Далее вопрос об установлении п. с. р. рассматривается на разностном уровне. Для этого с помощью схемы Мак Кормака [5] находится разностное решение задачи (1)–(3) и выясняется поведение этого решения при больших  $t = n \cdot \tau$ .

#### АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ (9) ПРИ $s \rightarrow 0$

Решение системы (1) имеет особенность при  $s \rightarrow 0$ , так как коэффициент  $\mu_1(s) \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow 0$  [3]. При численном решении спектральной задачи (9) граничное условие  $z_2(0) = z_3(0)$  заменяется на  $z_2(\delta) = z_3(\delta)$ , где  $\delta > 0$  — малая величина [3]. Возникает вопрос, как влияет это снесение граничного условия на отличие от точного решения спектральной задачи. Для выяснения этого вопроса найдем асимптотику решения спектральной задачи (9) при  $s \rightarrow 0$ , полагая, что  $\lambda$  уже определено.

Разложим все коэффициенты матриц  $D, A$  в ряд по степеням  $s$  в окрестности  $s = 0$ . Нам понадобятся только нулевые и первые члены этих разложений. Заметим, что  $a_2^0 = a_3^0 = c_4^0 = b_4^0 = \mu_1^0 = 0$ ,  $\mu_1^1 = -2\hat{u}(0)$ ,  $\mu_2^0 = -\hat{a}(0)/\hat{\epsilon}$ ,  $\mu_3^0 = -\mu_2^0$ ,  $c_1^0 = b_1^0 = 1/f_2(0)$ ,  $a_2^1 = -2\hat{a}(0) \cdot \hat{u}(0) \cdot \hat{\epsilon} \cdot f_2(0)$ ,  $a_3^1 = -a_2^1$ ,  $c_3^0 = 0,5 \cdot [\hat{u}(0) + \hat{a}(0) \cdot \text{ctg } \Theta_b]$ ,  $c_4^1 = \hat{u}^2(0) \cdot \hat{\epsilon} / [\hat{a}(0) \cdot f_2(0)]$ ,  $b_4^1 = -c_4^1$ ,  $b_2^0 = 0,5 \cdot [\hat{u}(0) - \hat{a}(0) \text{ctg } \Theta_b]$  [3].

Тогда система (9) имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda z_1 + (\mu_1^1 \cdot s + \dots) \frac{dz_1}{ds} + (a_2^1 \cdot s + \dots) z_2 + (a_3^1 \cdot s + \dots) z_3 &= 0, \\ \lambda z_2 + (\mu_2^0 + \dots) \frac{dz_2}{ds} + (c_1^0 + \dots) z_1 + (c_3^0 + \dots) z_3 + (c_4^1 \cdot s + \dots) z_4 &= 0, \\ \lambda z_3 + (\mu_3^0 + \dots) \frac{dz_3}{ds} + (b_1^0 + \dots) z_1 + (b_2^0 + \dots) z_2 + (b_4^1 \cdot s + \dots) z_4 &= 0, \\ \lambda z_4 + (\mu_4^1 \cdot s + \dots) \frac{dz_4}{ds} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Будем искать решение системы (10) вида

$$z_i = \sum_{m=0}^{\infty} z_i^m \cdot s^{m+\alpha}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (11)$$

где  $\alpha$  подлежит определению. Подставляя ряды (11) в систему (10) и приводя коэффициенты рядов к одинаковым степеням  $s$ , получим систему

$$\begin{aligned} (\lambda z_1^0 + \mu_1^1 \alpha z_1^0) s^\alpha + \sum_{m=1}^{\infty} [\dots] \cdot s^{m+\alpha} &= 0, \\ \mu_2^0 \alpha z_2^0 s^{\alpha-1} + (\lambda z_2^0 + \mu_2^0 (1 + \alpha) z_2^1 + c_1^0 z_1^0 + c_3^0 z_3^0) s^\alpha + \sum_{m=1}^{\infty} [\dots] s^{m+\alpha} &= 0, \\ \mu_3^0 \alpha z_3^0 s^{\alpha-1} + (\lambda z_3^0 + \mu_3^0 (1 + \alpha) z_3^1 + b_1^0 z_1^0 + b_2^0 z_2^0) s^\alpha + \sum_{m=1}^{\infty} [\dots] s^{m+\alpha} &= 0, \\ (\lambda z_4^0 + \mu_4^1 \alpha z_4^0) s^\alpha + \sum_{m=1}^{\infty} [\dots] s^{m+\alpha} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Для получения формального решения нужно приравнять нулю коэффициенты полученных рядов при всех степенях  $s$ .

Приравнивая коэффициенты при  $s^{\alpha-1}$  и  $s^\alpha$ , получим соответственно

$$\begin{aligned} \mu_2^0 \alpha z_2^0 &= 0, \\ \mu_3^0 \alpha z_3^0 &= 0; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\lambda z_1^0 + \mu_1^1 \alpha z_1^0 = 0,$$

$$\lambda z_2^0 + \mu_2^0 (1 + \alpha) z_2^1 + c_1^0 z_1^0 + c_3^0 z_3^0 = 0, \quad (14)$$

$$\lambda z_3^0 + \mu_3^0 (1 + \alpha) z_3^1 + b_1^0 z_1^0 + b_2^0 z_2^0 = 0,$$

$$\lambda z_4^0 + \mu_4^1 \alpha z_4^0 = 0.$$

Из (13), (14) следует, что  $\alpha$  может принимать следующие значения:

$$\alpha = 0, \quad \alpha = -\lambda/\mu_1^1. \quad (15)$$

Рассмотрим сначала случай  $\alpha = 0$ . Из (14) получаем:

$$z_1^0 = z_4^0 = 0,$$

$$z_2^1 = -(\lambda p + c_3^0 q)/\mu_2^0, \quad z_3^1 = -(\lambda q + b_2^0 p)/\mu_3^0, \quad (16)$$

где  $p = z_2^0$ ,  $q = z_3^0$  — произвольные константы. Следовательно, решение при  $\alpha = 0$  имеет вид:

$$z_1 = \sum_{m=1}^{\infty} z_1^m s^m, \quad z_2 = p + z_2^1 \cdot s + \sum_{m=2}^{\infty} z_2^m s^m, \quad (17)$$

$$z_3 = q + z_3^1 \cdot s + \sum_{m=2}^{\infty} z_3^m s^m, \quad z_4 = \sum_{m=1}^{\infty} z_4^m s^m,$$

Обратимся теперь к случаю  $\alpha = -\lambda/\mu_1^1$ . Из (13) следует, что

$$\bar{z}_2^0 = \bar{z}_3^0 = 0, \quad (18)$$

а из (14) находим

$$\bar{z}_2^1 = -\frac{c_1^0 r}{\mu_2^0 (1 + \alpha)}, \quad \bar{z}_3^1 = -\frac{b_1^0 r}{\mu_3^0 (1 + \alpha)}, \quad (19)$$

где  $r = \bar{z}_1^0$  — произвольная константа.

Решение в этом случае принимает вид

$$\begin{aligned} z_1 &= r s^\alpha + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{z}_1^m s^{m+\alpha}, \\ z_2 &= \bar{z}_2^1 s^{1+\alpha} + \sum_{m=2}^{\infty} \bar{z}_2^m s^{m+\alpha}, \\ z_3 &= \bar{z}_3^1 s^{1+\alpha} + \sum_{m=2}^{\infty} \bar{z}_3^m s^{m+\alpha}, \\ z_4 &= \sum_{m=0}^{\infty} \bar{z}_4^m s^{m+\alpha}. \end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом, мы получили два формальных решения при  $\alpha = 0$  и  $\alpha = -\lambda/\mu_1^1$ . Асимптотическое решение при  $s \rightarrow 0$  можно искать в виде суммы двух полученных рядов (17) и (20). Удовлетворяя при  $s = 0$  граничному условию  $z_2(0) = z_3(0)$ , получаем для (17)  $p = q$ . Далее видим, что для ряда (20) граничное условие  $z_2(0) = z_3(0)$  будет удовлетворяться только в том случае, если  $(1 + \text{Re } \alpha) > 0$ ,  $\alpha = -\lambda/\mu_1^1$ . Это дает основание заключить, что собственные значения со слишком большой по модулю отрицательной вещественной частью, которые могут возникнуть при

численном решении спектральной задачи, не имеют отношения к спектральной задаче (9).

Итак, мы получили формальное решение при  $s \rightarrow 0$  в виде

$$\begin{aligned} z_1 &= r \cdot s^\alpha + \sum_{m=1}^{\infty} (\bar{z}_1^m \cdot s^{m+\alpha} + z_1^m \cdot s^m), \\ z_2 &= p + \bar{z}_2^1 \cdot s^{1+\alpha} + z_2^1 \cdot s + \sum_{m=2}^{\infty} (\bar{z}_2^m \cdot s^{m+\alpha} + z_2^m \cdot s^m), \\ z_3 &= p + \bar{z}_3^1 \cdot s^{1+\alpha} + z_3^1 \cdot s + \sum_{m=2}^{\infty} (\bar{z}_3^m \cdot s^{m+\alpha} + z_3^m \cdot s^m), \\ z_4 &= \sum_{m=0}^{\infty} z_4^m \cdot s^{m+\alpha} + \sum_{m=1}^{\infty} z_4^m s^m, \quad \alpha = -\lambda/\mu_1^1. \end{aligned} \quad (21)$$

Из формул (21) видно, что задание граничного условия  $z_2(\delta) = z_3(\delta)$  дает погрешность в граничном условии на величину

$$\frac{1}{1+\alpha} \cdot \left( \frac{b_1^0}{\mu_3^0} - \frac{c_1^0}{\mu_2^0} \right) r \delta^{1+\alpha}.$$

Эта погрешность ввиду устойчивости прогонки, применяемой при численном решении спектральной задачи (9) [3], не сильно влияет на решение, однако  $\delta$  следует выбирать как можно меньшим.

#### ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ (9) И СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ (1)–(3)

Рассмотрим теперь конкретные примеры численного решения спектральной задачи (9), когда п. с. р. со слабой ударной волной соответствует околосвуковому обтеканию конуса ( $1 < M_\infty < 2$ ). Отметим, что численный расчет околосвуковых стационарных течений газа очень важен с практической точки зрения и чрезвычайно сложен с точки зрения вычислительной [6].

Спектральная задача (9) решалась при следующих значениях параметров  $M_\infty$ ,  $\Theta_b$ :  $\Theta_b = 2^\circ$ ,  $1,02 \leq M_\infty \leq 2$ . При этом оказалось, что необходимое условие устойчивости п. с. р. (8) выполняется, однако при  $M_\infty \rightarrow 1$  самое правое вещественное собственное значение оператора  $L$  стремится к 0 (рис. 2). Аппроксимация оператора  $L$  разностным оператором  $L_h$  может привести к появлению в спектре последнего собственных чисел, лежащих в правой полуплоскости. В связи с этим разностные схемы, применяемые в методе установления, должны быть такими, чтобы спектральные характеристики операторов  $L$  и  $L_h$  были близки.

Для численного решения смешанной задачи (1)–(3) будем использовать схему Мак Кормака [5]. Систему (1) запишем в виде

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial (DY)}{\partial s} + \left[ A - \frac{dD}{ds} \right] \cdot Y = 0. \quad (22)$$

Тогда разностная схема запишется так:

$$\begin{aligned} Y_j^{(1)} &= Y_j^n - \frac{\tau}{h} \cdot (D_{j+1} \cdot Y_{j+1}^n - D_j Y_j^n) - \tau \cdot \left[ A - \frac{dD}{ds} \right]_j \cdot Y_j^n, \\ Y_j^{n+1} &= 0,5 \times \left\{ Y_j^n + Y_j^{(1)} - \frac{\tau}{h} \cdot (D_j Y_j^{(1)} - D_{j-1} \cdot Y_{j-1}^{(1)}) - \tau \cdot \left[ A - \frac{dD}{ds} \right]_j Y_j^{(1)} \right\}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$h = 1/N, \quad 0 < j < N, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$Y_j^n = Y(n\tau, jh), \quad D_j = D(jh) \text{ и т. д.}$$

При  $j = 0$  вместо (23) используем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} (y_1)_0^{(n+1)} &= (y_1)_0^n, \quad (y_4)_0^{n+1} = (y_4)_0^n, \\ (y_2)_0^{n+1} &= \left[ 1 + \frac{\tau}{h} (\mu_2)_0 \right] \cdot (y_2)_0^n - \frac{\tau}{h} \cdot (\mu_2)_0 \cdot (y_2)_1^n - \tau \cdot (c_1 y_1 + c_3 y_3 + c_4 \cdot y_4)_0^n, \\ (y_3)_0^{n+1} &= (y_3)_0^{n+1}, \end{aligned} \quad (24)$$

а при  $j = N$  вместо (23) получим

$$\begin{aligned} (y_3)_N^{n+1} &= \left[ 1 - \frac{\tau}{h} \cdot (\mu_3)_N \right] \cdot (y_3)_N^n + \frac{\tau}{h} (\mu_3)_N \cdot (y_3)_{N-1}^n - \tau \cdot (b_1 \cdot y_1 + b_2 \cdot y_2 + b_4 \cdot y_4)_N^n, \\ (y_1)_N^{n+1} &= (y_1)_N^n - \tau \times (\mu y_1 + \nu y_3)_N^n, \\ (y_2)_N^{n+1} &= (\nu_1 y_1 - \nu_2 y_3)_N^{n+1}, \\ (y_4)_N^{n+1} &= (d_1 y_1 + d_2 y_2 + d_3 y_3)_N^{n+1}. \end{aligned} \quad (25)$$

Шаги  $\tau$  и  $h$  подчинены условию Куранта

$$\frac{\tau}{h} \max_{0 \leq s < 1} |\mu_2| < 1. \quad (26)$$

В качестве начальных данных возьмем следующие константы:

$$\begin{aligned} y_2(0, s) &= y_3(0, s) = \chi = \text{const}, \\ y_1(0, s) &= \chi(1 + \nu_2)/\nu_1, \\ y_4(0, s) &= \chi(d_1 \times (1 + \nu_2)/\nu_1 + d_2 + d_3). \end{aligned} \quad (27)$$

Нетрудно видеть, что начальные данные выбраны так, что выполнены условия согласования (непрерывности) решения при  $t = 0$ ,  $s = 0$  и при  $t = 0$ ,  $s = 1$ . Тогда смешанная задача (1)–(3) имеет решение в широком смысле [7].

Обозначим через  $m$

$$m = \max_{0 \leq s < 1} \{ |y_2(0, s)|, |y_1(0, s)|, |y_4(0, s)| \}. \quad (28)$$

В процессе расчета будем вычислять величину  $m_1(n)$ :

$$m_1(n) = \max_{\substack{l < j < N \\ 0 < l < N}} \{ |y_1|, |y_2|, |y_3|, |y_4| \}_j^n. \quad (29)$$

Очевидно, что если при  $n \rightarrow \infty$   $m_1(n) \rightarrow 0$ , то имеет место сходимость процесса установления для данной разностной модели. Рассмотрим п. с. р. со слабой ударной волной при  $M_\infty = 1,02$ ,  $\Theta_b = 2^\circ$ ,  $m = 1,68$ . На рис. 3 кривая 1 изображает зависимость  $m_1$  от  $n$ , показывая, что околосвуковые течения газа чрезвычайно трудно рассчитывать методом установления. Уместно назвать п. с. р. со слабыми ударными волнами, соответствующими околосвуковому обтеканию конуса, слабоустойчивыми по отношению к малым возмущениям. На рис. 3 для примера проведена кривая 2 для п. с. р. со слабой ударной волной (течение газа за ударной волной сверхзвуковое) при  $M_\infty = 2,35$ ,  $\Theta_b = 15^\circ$ ,  $m =$

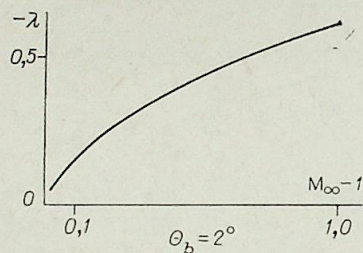


Рис. 2.

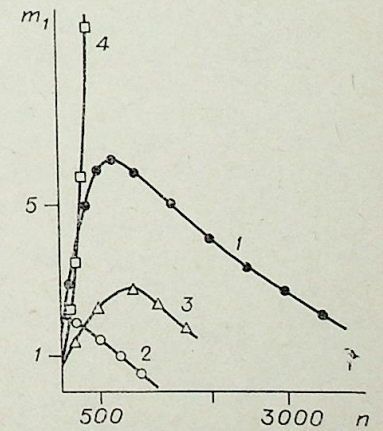


Рис. 3.

$= 0.2$ . Кривая  $10 \times m_1(n)$  для этого случая наглядно иллюстрирует быструю сходимость метода установления.

Остановимся теперь на случае п. с. р. со слабой ударной волной, когда за ударной волной смешанное или полностью дозвуковое течение газа. И в этом случае конкретные примеры численного решения спектральной задачи (9) говорят о том, что условие (8) выполняется. Однако если  $\Theta_b \rightarrow \Theta_m(M_\infty)$ , то вновь самое правое вещественное собственное значение стремится к 0, т. е. эти режимы также являются слабоустойчивыми по отношению к малым возмущениям п. с. р. Так, например, при  $M_\infty = 1,14$ ,  $\Theta_b = 15^\circ$  самое правое вещественное собственное значение оператора  $L$ , определяемое в результате решения спектральной задачи (9), находится в промежутке  $-0,1 < \lambda < -0,05$ . На рис. 3 кривая 3  $m_1(n)$  соответствует этому случаю ( $m = 0,796$ ).

Для п. с. р. с сильной ударной волной можно утверждать, что условие (8) не выполняется, т. е. такие режимы неустойчивы по отношению к малым возмущениям. Так, например, при  $M_\infty = 2,12$ ,  $\Theta_b = 15^\circ$  есть вещественное собственное значение  $\lambda = 0,32125$ , определяемое в результате решения спектральной задачи (9). На рис. 3 кривая 4  $0,1 \times m_1(n)$ , соответствующая этому случаю ( $m = 10,67$ ), показывает расходимость метода установления.

Таким образом, метод установления является эффективным при расчете устойчивых стационарных решений со слабыми ударными волнами (течение газа за ударной волной сверхзвуковое). Эффективность этого метода сильно падает при расчете стационарных околозвуковых течений газа.

Вычислительный центр  
СО АН СССР,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
12/II 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Любимов А. Н., Русанов В. В. Течения газа около тупых тел. М., Наука, 1970.
2. Русанов В. В., Шаракшанэ А. А. Нестационарные модели обтекания конических тел. М., Препринт ИИМ АН СССР, № 27, 1978.
3. Блохин А. М., Роменский Е. И. Устойчивость предельного стационарного решения при обтекании кругового конуса.— Изв. СО АН СССР, 1978, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.
4. Булах Б. М. Нелинейные конические течения газа. М., Наука, 1970.
5. Mac Cormack R. W. The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Cratering.— AIAA Paper 69—354, 1969, p. 1—7.
6. Krause E. Application of numerical techniques in fluid mechanics.— Aeron. J., 1974, v. 78, N 764, p. 337—354.
7. Рождественский Б. Л., Яценко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений. М., Наука, 1978.

Б. Н. ДЕВЯТОВ, М. Ф. ЖУКОВ, В. П. НАЗАРУК

## МНОЖЕСТВЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПУЛЬСАЦИЙ ДУГИ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Получение высокотемпературных потоков с помощью электрической дуги оправдано определенными преимуществами перед другими возможными способами нагрева газа. Вместе с тем при практической реализации электродуговых нагревателей возникает ряд научно-технических проблем, связанных главным образом с взаимодействием разряда с внешней средой, так как в большинстве плазмотронов дуга горит в условиях турбулентного течения газа. Анализ исследований в этой области указывает на двойственный характер взаимодействия столба дуги с турбулентным потоком, при котором существенно различается роль мелко- и крупномасштабных пульсаций [1].

Если мелкомасштабные пульсации приводят к интенсификации диффузии тепла, то влияние крупномасштабных пульсаций сказывается прежде всего на конвективных переносах столба дуги как целого. Кроме того, имеющиеся результаты измерения пространственной временной корреляционной функции, а также функции распределения вероятностей пространственной локализации [2, 3] указывают на существование режимов горения дуги с негауссовским характером распределения вероятности положения элемента столба дуги, что позволяет предположить наличие собственной магнитогидродинамической неустойчивости проводящего канала дуги на фоне турбулентных пульсаций газового потока. Трудности теоретического исследования подобных явлений, вызывающих деформацию столба дуги, связаны с исключительной сложностью уравнений динамики термической плазмы для криволинейных электрических дуг [4].

Все это составляет отдельные части общей актуальной проблемы теоретического и экспериментального исследования дуги в турбулентном потоке газа. К настоящему времени такие исследования [5] затруднены, и по этому поводу можно заметить следующее.

1. В отношении теоретических решений задач моделирования серьезные затруднения связаны со сложностью традиционных математических описаний, сочетающих уравнения газодинамики и электродинамики. Сложны при этом постановки задач идентификации. Это вызвано тем обстоятельством, что важную роль в рассматриваемых процессах играют локальные и глобальные взаимодействия макроскопических, достаточно крупномасштабных образований — «молей», что приводит к существенной дискретизации распределенного процесса. С последним связаны возможности развития вероятностных подходов в моделировании. Более того, анализ этих возможностей вызывает стремление вообще обойтись без непосредственного решения данных уравнений, заменяя их разыгрыванием некоторого случайного процесса с помощью метода Монте-Карло.

Рассматриваемые сложные явления в движении плазмы обладают, по крайней мере, двумя характерными особенностями.

Во-первых, эти процессы представляют собой совокупное развитие объектов — плазменного шнура и турбулентных молей потока, располо-

женных в некотором пространстве. Причем их развитие заключается в превращении и перемещении по пространству. Все эти локальные изменения происходят взаимосвязанно и приводят в итоге к глобальному развитию процесса, т. е. всего электродугового течения.

Во-вторых, этим процессам присуща случайная изменчивость, обусловленная многообразным распределенным влиянием, которое оказывает окружающий поток на пульсации дуги.

Развитие теоретической проработки проблемы турбулентной дуги связано с экспериментальными исследованиями.

2. В отношении постановок экспериментальных работ мы хотим отметить естественную трудность извлечения из опыта отдельных функциональных связей в наблюдаемом сложном процессе. Как правило, нельзя в достаточной мере освободиться от сопутствующих явлений, искажающих, затеняющих в эксперименте интересующие нас зависимости. При этом трудно оценить степень искажения.

Повышение точности эксперимента на основе прогресса в измерительной технике и введение автоматизации обработки данных на ЭВМ радикально повышают его возможности. Однако эти средства сами по себе не смогут преодолеть отмеченные затруднения в постановке эксперимента и последующем анализе его результатов. Эти трудности будут преодолены введением параллельных математических экспериментов на ЭВМ с помощью создания математической модели, способной к совершенствованию по мере накопления теоретических и экспериментальных данных. Далее мы рассмотрим основы построения таких моделей для исследования турбулентной дуги.

В данной статье рассмотрены основы нового комплексного подхода в методике исследований движений турбулентной дуги, который связан с организацией параллельных физических и математических экспериментов на основе вероятностного множественного моделирования.

Поскольку основой такой методики должна явиться модель, важно, чтобы в структуру ее формирования были заложены достаточно широкие возможности идентификации, использования теоретических и экспериментальных данных для последовательного приближения модели к реальным процессам. Предлагаемая методика по идее связана с принципами операционной игры. На основе поэтапно уточняющейся модели параллельно с постановкой опытов с помощью математического эксперимента на ЭВМ «проигрывается» прогноз для эксперимента. Этот прогноз свободен от неучтенных на данном этапе сопутствующих искажений. На очередном этапе физического эксперимента после сравнения его результатов с прогнозом на ЭВМ производят коррекцию модели, уточняя возможные прогнозы функциональных связей в процессе. Очевидно, при этом модель сама не является главной целью, а прежде всего должна служить средством в комплексном теоретико-экспериментальном исследовании.

Представляет интерес рассмотрение простых, но достаточно общих моделей, позволяющих выяснить влияние различных факторов на характер пространственных пульсаций столба дуги.

В работе [6] местоположение дуги связывается с координатами изотермы максимальной температуры, и предполагается, что движение дуги складывается из «скольжения» теплового облака и магнитогидродинамического движения проводящего газа. При этом для определения усредненного профиля распределения температуры и электрического поля по сечению турбулентного электродугового потока достаточно иметь функцию распределения вероятности координаты изотермы максимальной температуры, которая в общем случае является решением гиперболического уравнения диффузии с конечным временем распространения возмущения [7].

В этой связи возникает необходимость моделирования процесса перемещения дуги и проблема создания некоторой статистической модели

ее эволюции. В [8] рассмотрены возможные начальные постановки условий вероятностного моделирования дуговой плазмы, учитывающие пока лишь статистические свойства столба дуги как источника джоулева нагрева потока. Однако дальнейшие шаги по развитию таких вероятностных моделей связаны в конечном счете с решением уравнений (для плотности вероятности, энергии и т. д.). Развитие статистических методов связано с трудностями создания реалистичной и дееспособной модели, отражающей сильную зависимость распределенного процесса в соседних точках, нелинейность пространства, на котором определен вероятностный процесс, задание которого связано с рассмотрением множественных образований — турбулентных молей.

Идея данного множественного подхода к моделированию пространственных пульсаций состоит в том, что сначала выстраивается некоторый случайный процесс, отражающий физическую природу поведения столба дуги в турбулентном потоке, затем вместо непосредственного решения уравнений движения дуги многократно моделируется на ЭВМ найденный случайный процесс методом Монте-Карло, и по полученной таким образом статистике определяются интересующие нас величины.

Для определенности, так же как в [8], можно допустить, что выполняется гипотеза полного увлечения. Заметим, однако, что для нас это предположение не является принципиальным. В развитии методики моделирования будут «проходить» и другие, возможно более реалистичные допущения об условиях взаимодействия молей с плазменным шнуром. Более того, отмеченное обстоятельство будет предусмотрено в развитии возможностей множественного подхода в моделировании.

Итак, в данном варианте предположений мы можем считать, что движение элемента дуги складывается из движения вдоль оси со средней скоростью и хаотических пульсаций в поперечном направлении, а деформированную ось проводящего канала можно рассматривать как пространственно-временную случайную кривую [9].

Введем декартову систему координат в плоскости, перпендикулярной оси потока (рис. 1). Тогда положение дуги и ее перемещения в этом сечении могут быть описаны некоторым множеством  $K_t$  узлов решетки  $R_2$ , занятых проводящим каналом дуги, а возникновение и распад окружающих дугу турбулентных молей можно описать некоторым случайным множеством  $W_s(t)$ . При этом интересующие нас поперечные пульсации дуги заключаются в дискретном перемещении (блуждании) элемента столба дуги по узлам решетки, а их вероятностно-множественная модель может быть представлена одномерным процессом случайного перемещения. Выбор случайного множества в качестве основы построения модели продиктован потребностью в простом и достаточно полном описании развития пространственно распределенного процесса блуждания дуги. Понятие множества вполне удовлетворяет этим требованиям [10].

Рассмотрим основные идеи математического описания процесса перемещения дуги. Определим его как марковский множественный случайный процесс  $\{K_t, t \in T\}$ , обладающий следующим свойством: если известно значение случайного множества  $K_t$ , то  $K_s, s > t$  не зависит от значения  $K_u, u < t$ . Поэтому для такого определения достаточно иметь способ задания распределения случайного множества  $K_{t+1}$  по известному значению случайного множества  $K_t$ . В известном смысле [11], случайные множества малоудобны для аналитического исследования, в то время как их рекуррентное задание удобно при моделировании

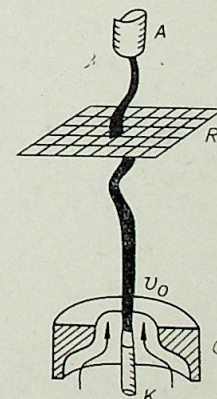


Рис. 1. Дуга в потоке газа.

методом Монте-Карло с использованием вычислительных машин. В этой связи процесс случайного перемещения можно определить в виде

$$K_{t+1} = \bigcup_{r \in K_t} W_r(t) \quad (1)$$

где  $W_r(t)$  — случайное множество локальных перемещений в окрестности узла  $r$  в момент времени  $t$ , характеризующее влияние турбулентных молекул на пульсации дуги. Множество задается вероятностью покрытия узлов решетки в единичной окрестности  $r \in D_r^1$ , т. е. для  $\forall r \in R_2$  и  $\forall x \in D_r^1$  заданы  $\pi_{W_r}(x) = P_r$ , причем  $\sum_{r \in D_r^1} \pi_{W_r}(x) = 1$ .

Тогда алгоритм статистического моделирования процесса (1), предназначенный для реализации на ЭВМ, отвечающий требованиям экономии машинной памяти и времени, состоит из последовательного ( $t = 0, 1, \dots, T$ ) моделирования случайного множества  $K_{t+1}$ , глобальное развитие которого является результатом его локальных изменений по уже известному  $K_t$  с учетом  $W_r$ .

Проиллюстрируем влияние вероятности покрытия  $P_r$  множества  $W_r(t)$  на характер движения элемента дуги. На рис. 2, а показана поверхность  $F(x, y, z) = 0$ ,  $z$ -проекция которой пропорциональна вероятности покрытия  $\pi_K(x)$  узлов решетки  $R_2$  множеством  $K = \bigcup_{t=1}^T K_t$ , характерная для равномерного случайного блуждания на плоскости. Для него распределение вероятностей, как функция положения и пройденного чис-

ла шагов, удовлетворяет разностному уравнению параболического типа [12]. Это позволяет построить численный алгоритм его решения методом Монте-Карло. В этом случае вероятности покрытия узлов решетки в единичной окрестности равны между собой  $P_r = 1/l$ , где  $l$  — число степеней свободы. Влияние турбулентных молекул на пульсации дуги, а также существование у нее некоторого равновесного положения приводят к нарушению этого условия. При множественном моделировании это ограничение снимается локальным подходом к процессу перемещения и оказывается возможным исследование эволюции дуги в общем случае неізотропного поля перемещений, информация о котором заложена во множестве  $W_r(t)$ . Отсюда естественным образом возникает проблема идентификации  $W_r(t)$  применительно к конкретным условиям горения дуги, которая в данном случае может быть решена при соответствующей постановке эксперимента. Это обстоятельство является одним из главных преимуществ данного множественного подхода в моделировании.

Как известно [13], идентификация представляет собой задачу, связанную с определением оператора преобразования входного сигнала на основе совместного изучения входного и выходного сигналов в математической модели рассматриваемого явления. В данном случае имеет место статистическая идентификация, т. е. идентификация модели со случайными входными и выходными сигналами, зависящая от ряда параметров, в число которых входят поле вероятностей перемещения, пространственный масштаб решетки и временной параметр. При этом цели идентификации можно добиться одновременным их изменением. Оптимальность оператора в общем случае определяется минимизацией среднего суммарного отклонения определенных числовых характеристик от соответствующих рассматриваемого явления.

В этой связи в работе [3] показана возможность использования метода оптоэлектронной регистрации дуги для вычисления функции распределения вероятности ее пространственной локализации, которая тождественна вероятности покрытия  $\pi_K(x)$ . Это позволяет сравнить результаты численного эксперимента на ЭВМ по приведенному алгоритму (1) с данными непосредственных измерений и найти более рациональную модель исследуемого явления.

Все сказанное о возможностях направленного развития модификаций модели хорошо прослеживается при последовательном рассмотрении рис. 2, а, б, в. Рис. 2, а представляет блуждание по квазиоднородному полю перемещений. На развитие процесса оказывают влияние некоторые локальные условия, наложенные на характер перемещений. Это приводит к некоторому слабому тяготению к оси потока. Степень такого тяготения легко можно регулировать на модели, изменяя некоторый локальный параметр (вероятность покрытия  $P_r$ ). Все эти возможности, по существу, связаны с множеством  $W_r$ . Дуга (модель) поставлена в такие условия, что она не может выйти за границы решетки и некоторым случайным образом пульсирует в окрестности оси потока, в результате чего моделируется функция распределения вероятности пространственной локализации дуги, которая может быть получена из эксперимента. Поскольку в эксперименте не было точно таких условий, которые моделировались и привели к рис. 2, а, были изменены локальные условия со стороны  $W_r$  с целью приблизить модель к реальности. Это видно на рис. 2, б, хотя здесь есть ярко выраженный максимум, но боковые лепестки еще явно выступают. Далее, более жесткие условия, наложенные на характер перемещений, позволили получить картину (см. рис. 2, в), имеющую аналогию, взятую из эксперимента в работе [3].

Данная иллюстрация отражает способность поэтапного развития модели по пути ее совершенствования. С другой стороны, она показывает возможности локального подхода к моделированию пульсации дуги так, что в ходе направленного развития модификаций модели вырисовывается

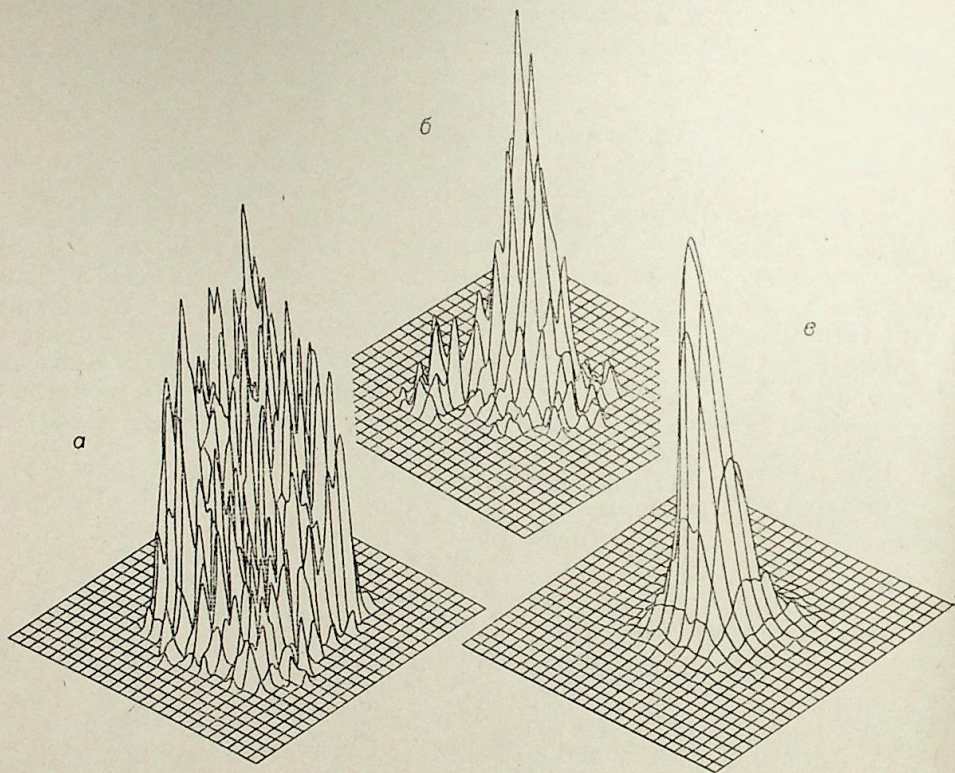


Рис. 2. Иллюстрация возможностей направленного развития модификации модели при воздействии изменениями со стороны условий локального взаимодействия. а — блуждание дуги по квазиоднородному полю перемещений, которое может быть связано с некоторыми условиями эксперимента; б — частичное приближение характеристики к реальному виду, соответствующему работе [3]; в — сильное воздействие изменением со стороны локальных условий, приводящее к функции распределения, аналогичной полученной из эксперимента [3].

некоторая физическая картина взаимодействия столба дуги со стабилизирующим его потоком. Этот подход опирается на математическую теорию случайных множественных процессов и позволяет естественным образом учесть как структуру турбулентного течения, так и случайный характер пульсаций дуги.

Рекуррентное задание множественного процесса позволяет исследовать случайные образования с громоздкими распределениями, используя минимум исходных данных, и учитывая лишь локальные множественные характеристики взаимодействия дуги с турбулентным потоком, что существенно при статистическом моделировании процесса на ЭВМ. При этом имеется возможность на основе результатов моделирования случайных множеств, «проигрывая» модели методом Монте-Карло, оценивать характеристики пульсаций дуги и сопоставлять их с полученными из эксперимента. Это дает необходимую информацию для выбора оптимальных условий постановки эксперимента и, в свою очередь, для дальнейшего развития модели.

Институт теплофизики  
СО АН СССР,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
12/VIII 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бененсон Д. М., Ризер И. А. Турбулентность в дуговом разряде переменного тока.— ТИИЭР, 1976, 64, № 9, с. 170—172.
2. Niemeyer L., Ragaller K. Development of turbulence by the interaction of gas flow with plasmas.— Z. Naturfor—Schung, 1973, Bd28a, N 8, p. 1281—1289.
3. Лебедев А. Д., Назарук В. И.— Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1976, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3, с. 50—57.
4. Урюков Б. А.— Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1975, № 3. Сер. техн. наук, вып. 1, с. 3—11.
5. Жуков М. Ф., Коротеев А. С., Урюков Б. А. Прикладная динамика термической плазмы. Новосибирск, Наука, 1975. 298 с.
6. Меккер Г. Причины движения и смещения дуги.— ТИИЭР, 1971, 59, № 4, с. 4—15.
7. Моини А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, Т. 1. М., Наука, 1965. 638 с.
8. Урюков Б. А.— Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1978, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3, с. 21—25.
9. Гороховский В. И., Урюков Б. А.— Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1973, № 3. Сер. техн. наук, вып. 1, с. 25—28.
10. Воробьев О. Ю., Девятков Б. Н.— Изв. Сиб. отд. АН СССР, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2, с. 101—105.
11. Воробьев О. Ю.— Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1977, № 3. Сер. техн. наук, вып. 1, с. 3—7.
12. Ермаков С. М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М., Наука, 1971. 327 с.
13. Баженов В. В., Воробьев О. Ю.— Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1976, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2, с. 95—100.

УДК 587.525.5

Б. Н. ДЕВЯТОВ, М. Ф. ЖУКОВ, С. М. ХАЙТМАН

### ПОСТОЯННАЯ ВРЕМЕНИ ДУГИ, ИНЕРЦИОННОСТЬ ПРОЦЕССА И ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ПЛАЗМЫ

В статье дается анализ источников затруднений, возникающих при использовании существующего понятия постоянной времени дуги при уточнении реальных условий ее функционирования. Отмечается принципиальный характер этих затруднений.

Целью работы является обоснование и дальнейшее развитие подходов, отражающих стремление к использованию представления о постоянной времени дуги и вообще характеристик инерционности процесса в моделях динамики. Поэтому здесь рассматривается естественное обобщение понятия постоянной времени дуги, как его инерционной характеристики. Показаны перспективы использования такого обобщения для моделирования и анализа динамических свойств плазмы.

Рассмотрим основные предпосылки использования в моделировании известного понятия [1, 2] постоянной времени дуги. Использование представления о постоянной времени, как удобной характеристики инерционных свойств объекта, в моделировании динамики давно широко используется в прикладных науках.

Постоянная времени во многих случаях являлась главным критерием формы разгонной характеристики процесса (основным параметром переходной функции, а значит и соответствующей передаточной функции). Как известно, каждая из указанных функций в отдельности однозначно характеризует данный процесс, и поэтому их использование является традиционным в самых различных областях прикладных наук. Понятие постоянной времени объекта также традиционно для различных технических наук, таких как электротехника, теплотехника, химическая технология, автоматика и другие.

Важное достоинство данной характеристики инерционности — большие возможности ее экспериментального исследования и одновременного согласованного проведения теоретических работ по созданию математических моделей. К настоящему времени уже имеется ряд квалифицированных разработок в этом направлении, содержащих интересные результаты по моделированию динамики дуги.

Понятие постоянной времени дуги впервые специально рассмотрено и использовано при исследованиях динамики процесса в работах М. Е. Заруди [3, 4]. Далее идея использования этой характеристики инерционности дуги в моделях динамики плазмы развивалась в работах М. Е. Заруди, О. Я. Новикова, В. М. Егорова, Б. А. Урюкова, Ю. Г. Ионова и др. [5—11]. Здесь можно видеть ряд интересных на наш взгляд подходов в преодолении возникающих трудностей использования величины постоянной времени дуги в математической модели динамики, учитывающей сложный комплекс процессов низкотемпературной плазмы.

Большим преимуществом идей метода является представление динамической характеристики в замкнутом виде, в виде простого аналитического

ского выражения (формулы) для передаточной функции и, соответственно, переходной функции, описывающей динамику. Поэтому достоинства в использовании такой модели во многих теоретических и практических важных задачах были бы очевидны, если бы удалось найти пути сохранения ее адекватности рассматриваемому процессу по мере постепенного приближения его к реальным условиям горения дуги в потоке газа. В этом плане понятно внимание к таким задачам со стороны специалистов по моделированию низкотемпературной плазмы.

Однако, как показали исследования, с повышением сложности рассматриваемых процессов в плазматроне быстро возрастают трудности в корректном использовании данного подхода к моделированию. В частности, даже учет такого элементарного условия процесса, как отличие от нуля скорости потока газа, приводит к тому, что постоянная времени  $T$  перестает быть однозначной характеристикой инерционности дуги [11]. Главная беда не в том, что она теряет свою однозначность, а в том, что возникает зависимость параметра оператора от частоты. Теряется возможность получения передаточной функции и величины постоянной времени, как главного элемента разгонной характеристики. Весь метод теряет свои перспективные возможности.

Основное значение первоначального понятия постоянной времени дуги (когда  $T = \text{const}$ ) было связано с разгонной характеристикой, а значит с передаточной функцией, дающей отклик объекта на ступенчатое возмущение, при котором хорошо наблюдать инерционность процесса.

В данном же случае, когда  $T$  становится функцией  $T(\omega)$ , она не может быть использована как постоянная времени ни в передаточной функции  $W(p)$ , ни в переходной характеристике. Следовательно в данном случае уже не определены аналитически сама передаточная и переходная функция. Для функций вида  $T(\omega)$  была бы неясна возможность сравнения, так как не определен смысл неравенства  $T_1(\omega) > T_2(\omega)$ . При этом теряется наглядный физический смысл, который был при  $T = \text{const}$ . Реакцию дуги на произвольно заданное возмущение в этом случае каждый раз нужно будет определять численно, обратным преобразованием Фурье после расчета трансформации всех составляющих гармоник.

Традиционное представление о величине постоянной времени всегда связано с предположением о возможности аппроксимации модели объекта аperiодическим звеном первого порядка  $W(p) = \frac{K}{Tp+1}$ . В частности, ранее рассматривались аппроксимации динамики дуги передаточной функцией вида

$$\frac{Tp+\eta}{Tp+1} \equiv \frac{\eta-1}{Tp+1} + 1. \quad (1)$$

Такое представление модели очень привлекательно своей простотой и выбрано оно самым удобным образом. Однако здесь условия адекватности процессу для такого простого инерционного звена первого порядка, разумеется, весьма жесткие. Известно, что практика использования простых моделей аналогичного типа в различных областях технических наук показала их ограниченные возможности и как правило неприменимость их для всех достаточно сложных процессов. Понятно, что такая проблема адекватности модели особо остро проявляется в задачах динамики плазмы ввиду исключительной сложности протекающих в ней процессов.

Заметим, что в данном случае речь идет о существенной, качественной сложности плазменного процесса. Это выходит за рамки простого усложнения модели путем повышения порядка дифференциального уравнения, когда уточняют процесс добавкой к системе еще одного или нескольких обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих неучтенные ранее свойства объекта, как объекта с сосредоточенными параметрами.

Дело в том, что простейшая модель (1) — типичная модель сосредоточенного процесса. Поэтому, если рассмотрение процесса остается в рамках сосредоточенных моделей, то с нарастанием порядка аппроксимируемой системы сравнительно медленно растут погрешности аппроксимации. Кроме того, по данной структуре легче видны пути постепенного повышения порядка аппроксимирующей модели для повышения ее точности.

Иначе обстоит дело в моделировании динамики плазмы. Очень важной особенностью в сложном процессе динамики плазмы является его распределенность. Известно, что фактически все процессы имеют пространственную распределенность и поэтому в целях повышения точности моделей почти во всех отраслях прикладных наук переходят к моделям с распределенными параметрами. Это приводит к математическому описанию процессов уравнениями в частных производных и далее — к развитию теории систем с распределенными параметрами.

Оказывается, что в динамике плазмы необходимость учета пространственной распределенности процессов диктуется не только стремлением к повышению точности (в количественном смысле), а в первую очередь — необходимостью качественно правильной характеристики условий сочетания взаимодействия в дуге двух видов процессов, электродинамического и гидродинамического характеров. Поскольку оба вида процессов сложны сами по себе, то понятно, насколько сильно могут отразиться на результате условия их сочетания. Условия пространственной распределенности дуги здесь являются решающими.

В статике эта распределенность столь существенно не сказывается (см. вольт-амперную статическую характеристику), хотя она тоже имеет большое значение, но в динамике это влияние распределенности гораздо больше (см. характеристики динамики дуги).

Отсюда понятно, что удачно выбранная простейшая форма дробно-рациональной функции (1) позволяла лишь незначительно учесть особенности динамики дуги. При этом естественно, что приближение к реальному процессу могло быть достигнуто ровно на столько, на сколько это позволяет данная простая аппроксимация звеном первого порядка. В работах [7, 11] были рассмотрены ограничения точности такой модели. Важный результат в этом отношении получен в статье [11]. В ней впервые специально поставлен вопрос о выяснении влияния пространственной распределенности на динамику плазмы и показано, что учет этого влияния в модели (1) не достаточен даже в том случае (а это радикально снижает требования), когда в итоге интересуются лишь интегральными по всей дуге характеристиками.

Дело в том, что основа такой модели — понятие постоянной времени, теряет свою однозначность и фактически не может выполнять свои функции. Неприятность, разумеется, не в самой потере однозначности. Такая ситуация естественна и поэтому неизбежна. Просто здесь необходимо совсем иначе, более удачно, распорядиться критериями этой неоднозначности так, чтобы сделать соответствующие обобщения работоспособными в математическом аппарате моделирования сложных систем.

Учет важнейших условий функционирования дуги, пространственной распределенности протекающих в ней процессов, приводит к рассмотрению уравнений в частных производных достаточно высокого порядка, возможно даже в сочетании с интегральными уравнениями. Однако, и в этих сложных условиях имеется возможность продолжить упомянутые выше направления работ, связанные с идеей использования достаточно простых передаточных функций, в которых в качестве параметров входят величины, характеризующие инерционные свойства дуги.

Для этих целей далее мы обобщим понятие постоянной времени дуги как инерционной характеристики объекта, введя инерционности различных порядков  $S_0, S_1, S_2, S_3 \dots$ . При этом будем соблюдать преимущество обобщения. А именно, для простейших условий, когда динамика

изображается системой первого порядка, инерционность  $S_1$  будет равна постоянной времени  $T$ . В случае более сложного описания процесса такой постоянной времени  $T$  вообще не существует и поэтому первая инерционность  $S_1$  будет являться ее естественным обобщением, т. е. представлять главную инерционную характеристику процесса. Следующие по порядку инерционности  $S_2, S_3$  и т. д. должны уточнять поведение разгонной характеристики. В первую очередь здесь имеет значение величина  $S_2$  дополняющая характеристику инерционности  $S_1$  ввиду ее неоднозначности. На этой основе далее будут даны равномерные аппроксимации точной передаточной функции процесса последовательностью простых дробно-рациональных выражений так, что по желанию можно будет остановиться на любом сколь угодно точном приближении, постепенно повышая его порядок, сохраняя однако простую стандартную структуру выражения. Важно сохранить связь понятия инерционности процесса с разгонной характеристикой, т. е. с переходной и передаточной функцией для заданной системы. Это важно потому, что разгонная характеристика однозначно соответствует импульсной переходной функции, которая является фундаментальной характеристикой решения систем.

В различных научных дисциплинах такую функцию называют по-разному. В математике, в теории операторов, ее называют ядром линейного интегрального оператора, в теории уравнений математической физики она называется функцией Грина или фундаментальным решением, в теории сплошных сред — это функция точечного источника или функция влияния.

Наша задача осложняется тем, что исходная, точная передаточная функция для распределенных систем трудно поддается исследованию, так как представляет собой трансцендентное выражение и является функцией пространственной координаты. Поэтому особое значение приобретает проблема аппроксимации ее дробно-рациональными функциями так, чтобы в пределе они приближались к данному трансцендентному выражению. Мы будем рассматривать именно такие аппроксимации, в которых удобно используются обобщенные инерционности дуги. В основу этих обобщений положены следующие определения.

Инерционностью данного процесса мы называем свойство противостоять возмущениям, направленным на резкое изменение его показателей.

Рассмотрим далее критерий инерционности процесса по аналогии с понятием величины постоянной времени (времени разгона) простого инерционного звена первого порядка, когда кривой переходного процесса является экспонента. Обобщим понятие величины постоянной времени, основываясь на том, что она характеризует инерционность процесса и численно равна площади, заключенной между экспонентой и прямой, соответствующей новому стационарному режиму.

Величиной инерционности или (сокращенно) инерционностью  $S_1$  процесса будем называть величину, численно равную площади, заключенной между кривой переходного процесса при ступенчатом возмущении, и прямой, соответствующей новому установившемуся режиму. Эта площадь  $S_1$  по координате  $\tau \in (0, \infty)$  может распределяться по-разному (рис. 1). Именно с этим связана неоднозначность первой инерционной характеристики  $S_1$ . Будем устранять эту неоднозначность дополнительной информацией. Введем функцию распределения инерционности  $S_1(\tau)$ , значение которой в точке  $\tau \in (0, \infty)$  равно части площади  $S_1$ , отсекаемой вертикальной прямой, соответствующей этому моменту времени  $\tau$  (рис. 2). При этом, очевидно,  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} S_1(\tau) = S_1$ , т. е.  $S_1$  представляет полную (всю) инерционность на интервале  $(0, \infty)$ . График функции распределения  $S_1(\tau)$  будет иметь вид (рис. 3).

Теперь величину площади  $S_2$ , ограниченную этой кривой  $S_1(\tau)$ , назовем инерционностью второго порядка.

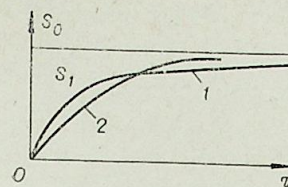


Рис. 1.

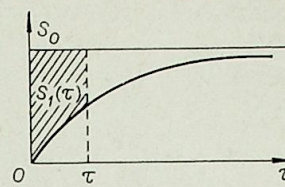


Рис. 2.

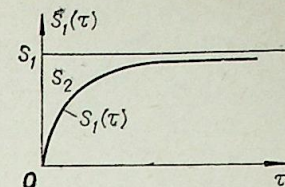


Рис. 3.

Следуя таким путем далее мы получаем всю последовательность величин инерционности различных порядков  $S_0, S_1, S_2, S_3, \dots$  в совокупности полностью и однозначно определяющую динамику данного процесса.

Видно, что такая конструкция обобщения характеристики инерционных свойств объекта естественна по своему физическому смыслу. С другой стороны очень важно, что по существу своего математического содержания такое обобщение приводит к использованию теории моментов [12], открывающей большие возможности в сложных математических задачах аппроксимации, в частности для трансцендентных передаточных функций распределенных в пространстве процессов (динамики плазмы). Метод моментов, понятие инерционностей используются при аппроксимации искомым характеристикам с помощью ортогональных или квазиортогональных разложений. Для аппроксимации передаточных функций применяются ряды Бурмана — Лагранжа, где также используются данные инерционные характеристики.

Связь обобщенных инерционностей со степенными моментами переходной функции выражается простым соотношением [13]

$$n! S_n = C_n, \quad C_n = \int_0^{\infty} \tau^n f'(\tau) d\tau.$$

Для конкретного нахождения инерционностей  $S_n$  можно использовать один из двух косвенных методов [13].

1. Расчет инерционности по найденной из уравнений процесса точной трансцендентной передаточной функции  $W(p)$ , если последняя определяется в общем виде. Тогда имеем

$$S_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d^n}{dp^n} W(p), \quad (1a)$$

т. е., величины инерционностей определяются из разложения передаточной функции в ряд Маклорена.

2. Последовательный расчет инерционностей  $S_0, S_1, S_2, S_3, \dots$  непосредственно по дифференциальным уравнениям для инерционностей, которые значительно проще основных уравнений процесса, так как являются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Они получаются из данных основных уравнений с частными производными простыми дифференциальными и алгебраическими преобразованиями в соответствии с формулой (1a).

Найденные обобщенные инерционности являются основой для построения аналитических выражений переходных процессов с помощью рядов Бурмана — Лагранжа.

Применением рядов Бурмана — Лагранжа трансцендентная передаточная функция, соответствующая распределенной модели динамики плазмы, может быть представлена дробно-рациональными выражениями [13]. При этом, используется разложение передаточной функции в ряд Бурмана — Лагранжа вида

$$W(p) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \left( \frac{p}{p+\lambda} \right)^n. \quad (2)$$

Коэффициенты  $d_n$  выражаются через величины инерционностей по формулам

$$d_n = \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^{n-m} C_{n-1}^m \lambda^{n-m} S_{n-m}, \quad C_{n-1}^m = \frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!},$$

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n-1}}{S_n}. \quad (2a)$$

При рассмотрении конечной суммы для приближенного представления  $W(p)$  величину  $\lambda$  можно принять равной  $\lambda \approx \frac{S_{n-1}}{S_n}$ .

Ряду (2) соответствует разложение в ряд переходной функции

$$f(\tau) = d_0 + e^{-\lambda\tau} \sum_{n=1}^{\infty} d_n L_{n-1}(\lambda\tau), \quad d_0 = S_0 = f(\infty), \quad (3)$$

где  $L_{n-1}(\lambda\tau)$  — полином Лагерра.

Таким образом, мы всегда имеем стандартное аналитическое выражение передаточной и переходной функций независимо от величины порядка уравнения с частными производными, описывающего динамику дуги. Инерционности  $S_n$  процесса являются обобщенными параметрами через которые приближенно выражается динамика процесса в принципе, с любой желаемой точностью. Для повышения точности просто следует увеличивать количество учитываемых членов разложений (2), (3), имеющих достаточно простую структуру.

В то же время можно пользоваться лишь несколькими первыми членами разложений, получая достаточно грубые приближения, но удобные своей простотой. Самое грубое приближение получается при учете лишь двух первых членов ряда (2). В этом случае формула приближения будет того же вида, что применялась ранее при использовании простейшего понятия постоянной времени. Сопоставим этот частный случай с общим видом предложенной аппроксимации. Для такого сопоставления удобно эти аппроксимации записать в виде

$$W(p) \approx R \frac{Tp + \eta}{Tp + 1} \equiv \bar{d}_0 + \bar{d}_1 \left( \frac{p}{p + \bar{\lambda}} \right), \quad (3a)$$

$$\text{где } \bar{d}_0 = R\eta, \quad \bar{d}_1 = R(1 - \eta), \quad \bar{\lambda} = \frac{1}{T},$$

$$W(p) = d_0 + d_1 \left( \frac{p}{p + \lambda} \right) + d_2 \left( \frac{p}{p + \lambda} \right)^2 + d_3 \left( \frac{p}{p + \lambda} \right)^3 + \dots \quad (4)$$

Заметим, что результат тождественного преобразования передаточной функции, данный в (3a), можно найти прямым ее разложением в ряд Бурмана — Лагранжа. В данном случае ряд конечный и будет состоять из двух членов.

При этом, используя косвенный метод нахождения инерционностей по формуле (1), находим

$$S_0 = R\eta, \quad S_1 = RT(\eta - 1), \quad S_2 = RT^2(\eta - 1), \quad S_n = RT^n(\eta - 1),$$

откуда определяем  $\lambda$  и  $d_n$ :

$$\lambda = \frac{S_1}{S_2} = \frac{S_{n-1}}{S_n} = \frac{1}{T}, \quad d_0 = S_0 = R\eta, \quad d_1 = -\lambda S_1 = R(1 - \eta),$$

$$d_n = 0 \text{ при } n \geq 2.$$

Отсюда разложение будет иметь вид

$$R \frac{Tp + \eta}{Tp + 1} = d_0 + d_1 \left( \frac{p}{p + \lambda} \right) = R\eta + R(1 - \eta) \left( \frac{p}{p + \frac{1}{T}} \right).$$

Это соответствует тождественному выражению (3a).

Естественно, что даже для этой простой аппроксимации (3a) возможно повышение ее точности с помощью другого более строго обоснованного выбора величин инерционностей  $S_0, S_1, S_2$ , а значит и коэффициентов  $d_n$  в соответствии с общей теорией. Как было указано ранее, эти величины, также как инерционности высших порядков, должны однозначно определяться по точным трансцендентным передаточным функциям процесса или непосредственно по основным уравнениям. Формула (4) радикально решает задачу приближения. Она не ограничивает возможности уточнения модели, так как позволяет учесть любое число найденных инерционностей.

С целью иллюстрации рассмотренного выше подхода к анализу линейных задач динамики плазмы рассмотрим далее дугу в свободном потоке газа.

Условия горения дуги и основные упрощающие допущения при составлении исходного математического описания приняты нами аналогичными как и в статье [11]. Ставится задача получения характеристик инерционности в динамике распределенных процессов в дуге при произвольной форме возмущающего воздействия по току. В этих условиях нам нужно найти приближенные передаточные и переходные функции для динамики переходных процессов по напряженности и энтальпии в аналитическом представлении в зависимости от координаты  $\xi$  по оси дуги.

Уравнения дуги в безграничном потоке газа с учетом динамики процесса имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \rho v r + u \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0,$$

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho v \frac{\partial h}{\partial r} + \rho u \frac{\partial h}{\partial z} = \sigma E^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\lambda}{C_p} \frac{\partial h}{\partial r} \right), \quad (5)$$

$$I = 2\pi E \int_0^{\delta} \sigma r dr,$$

где  $u$  — продольная скорость потока, постоянная во всем пространстве,  $\delta = \delta(z)$  — граница области газа, прогретого дугой. Все остальные обозначения обычные.

В первых двух уравнениях переходим к интегральным характеристикам по радиусу путем интегрирования от 0 до  $\delta$ . Принимая далее для области дуги параболическое распределение энтальпии

$$\frac{h - h_{\infty}}{h_m - h_{\infty}} = 1 - \left( \frac{r}{\delta} \right)^2,$$

преобразуя уравнение энергии, используя уравнение неразрывности и считая, что энтальпия на оси больше энтальпии свободного потока ( $h_m \gg h_{\infty}$ ), а также  $\rho h = \rho_{\infty} h_{\infty}$ , получим систему уравнений

$$\frac{\partial \delta^2}{\partial t} + u \frac{\partial \delta^2}{\partial z} = \frac{IE}{\pi \rho_{\infty} h_{\infty}}, \quad (6)$$

$$\rho_m \frac{\partial h_m}{\partial t} + \rho_m u \frac{\partial h_m}{\partial z} = \sigma_m E^2 - 4(h_m - h_{\infty}) \cdot \frac{\lambda_m}{C_{pm}} \cdot \frac{1}{\delta^2},$$

$$I = 2\pi E \delta^2 \sum(h_m),$$

$$\sum(h_m) = \frac{1}{2(h_m - h_{\infty})} \int_{h_{\infty}}^{h_m} \sigma dh.$$

Также как в [11] примем степенные зависимости коэффициентов переноса плазмы от энтальпии

$$\frac{\lambda}{C_p} = \frac{\lambda_{\infty}}{C_{p\infty}} \cdot \left( \frac{h}{h_{\infty}} \right)^k, \quad \sigma = \sigma_{\infty} \cdot \left( \frac{h}{h_{\infty}} \right)^c,$$

и в системе (6) перейдем к безразмерным параметрам

$$\varphi = \frac{\delta}{l}, \quad \xi = \frac{z}{l}, \quad \bar{h}_m = \frac{h_m}{h_\infty}, \quad \tau = \frac{ut}{l},$$

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_m}{\rho_\infty}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_\infty}, \quad \beta = E_l \sqrt{\frac{\sigma_\infty C_{p\infty}}{\lambda_\infty h_\infty}},$$

$$\alpha = \frac{I}{2\pi l} \sqrt{\frac{C_{p\infty}}{\sigma_\infty \lambda_\infty h_\infty}}, \quad l = \frac{\lambda_\infty}{C_{p\infty} \rho_\infty u}.$$

Тогда уравнения (6) в безразмерных координатах примет вид

$$\frac{\alpha}{\bar{\rho}} = \frac{\varphi^2}{2h_m} \int_1^{\bar{h}_m} \bar{\sigma} dh, \quad \frac{\partial \varphi^2}{\partial \tau} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial \xi} = 2\alpha\beta, \\ \bar{\rho}_m \frac{\partial \bar{h}_m}{\partial \tau} + \bar{\rho}_m \frac{\partial \bar{h}_m}{\partial \xi} = \bar{\sigma}\beta^2 - 4 \frac{\bar{h}_m}{\varphi^2} \frac{\bar{\lambda}_m}{C_{pm}}. \quad (7)$$

Начальные условия:  $\varphi(0) = 0, h_m(0) = \infty$ .

Для стационарного режима решения имеют вид степенной зависимости

$$\beta_0 = A_1 \xi^m, \quad \varphi_0^2 = A_2 \xi^{p_1}, \quad h_{m0} = A_3 \xi^q, \quad (8)$$

где постоянные  $m, p_1, q, A_1, A_2, A_3$  выражаются через  $k$  и  $c$  следующим образом

$$m = -\frac{1+k}{2(1+k)+c}, \quad p_1 = \frac{1+k+c}{2(1+k)+c}, \quad q = -\frac{1}{2(1+k)+c},$$

$$2\alpha_0 A_1 = p_1 A_2, \quad A_1^2 = (1+c) p_1 A_3^{-c}, \quad A_3^{2(1+k)+c} = \frac{\alpha_0^2}{4} \frac{1+c}{p_1} [(1+c) p_1 - q]^2.$$

Тогда уравнения (7) преобразуются к следующим

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\varphi^2 h_m^c}{2(c+1)}, \quad \frac{\partial \varphi^2}{\partial \tau} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial \xi} = 2\alpha\beta, \\ \frac{\partial h_m}{\partial \tau} + \frac{\partial h_m}{\partial \xi} = h_m^{c+1} \beta^2 - 4 \frac{h_m^{k+1}}{\varphi^2}. \quad (9)$$

Переходя к отклонениям, полагая

$$\bar{h}_m = \bar{h}_{m0} [1 + H(\xi, \tau)], \quad \varphi^2 = \varphi_0^2 [1 + \Delta(\xi, \tau)], \\ \beta = \beta_0 [1 + b(\xi, \tau)], \quad \alpha = \alpha_0 [1 + a(\tau)],$$

линеаризуем систему (9) около стационарного режима (8), получаем систему уравнений для малых отклонений

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} - \left( \frac{\partial b}{\partial \tau} + \frac{\partial b}{\partial \xi} \right) - c \left( \frac{\partial H}{\partial \tau} + \frac{\partial H}{\partial \xi} \right) = \frac{2p_1 b}{\xi} + \frac{c p_1 H}{\xi}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} + \frac{\partial H}{\partial \xi} = \frac{(1+c)p_1 - q}{\xi} a + \frac{(1+c)p_1 + q}{\xi} b + \frac{q(c+k+1) - (k+1)(c+1)p_1}{\xi} H.$$

Используем метод преобразования Лапласа — Карсона, принимая единичное ступенчатое возмущение по току  $a(\tau) = 1(\tau)$ , тогда  $\frac{\partial a}{\partial \tau} = \delta(t) - \delta$ -функция, и нулевые начальные условия  $H(\xi, 0) = 0, b(\xi, 0) = 0$ .

После преобразования Лапласа — Карсона получим систему неоднородных уравнений для изображений  $\bar{b}$  и  $\bar{H}$

$$\xi \left[ p \bar{H}(\xi, p) + \frac{d\bar{H}(\xi, p)}{d\xi} \right] = [(1+c)p_1 - q] + [(1+c)p_1 + q] \bar{b}(\xi, p) + \\ + [q(c+k+1) - (k+1)(c+1)p_1] \bar{H}(\xi, p), \quad (11) \\ \xi \left[ p \bar{b}(\xi, p) + \frac{d\bar{b}(\xi, p)}{d\xi} \right] = \xi p_1 - c [(1+c)p_1 - q] - \\ - [c(1+c)p_1 + cq + 2p_1] \bar{b}(\xi, p) - c [q(c+k+1) + \\ + p_1 - (k+1)(c+1)p_1] \bar{H}(\xi, p).$$

Или, взаимно исключая то  $\bar{H}$ , то  $\bar{b}$  можно получить два независимых уравнения для  $\bar{b}(\xi, p)$  и  $\bar{H}(\xi, p)$ :

$$\xi^2 \bar{b}'' + \xi \bar{b}' (2p\xi + N_1) + \bar{b} (p^2 \xi^2 + p\xi N_1 + N) = p^2 \xi^2 + p\xi M_1 - M, \quad (12)$$

$$\xi^2 \bar{H}'' + \xi \bar{H}' (2p\xi + N_1) + \bar{H} (p^2 \xi^2 + p\xi N_1 + N) = p\xi M_2 + M_3, \quad (13)$$

где  $N, N_1, M, M_1, M_2, M_3$  имеют выражения

$$N = \frac{(1+k+c)[1+(1+c)(1+k+c)]}{2(1+k)+c}, \quad M = \frac{c(1+k+c)[1+(1+c)(1+k+c)]}{[2(1+k)+c]^2},$$

$$M_1 = 1 + \frac{(1+c)[(1+k)^2 - c^2] + 1+k}{2(1+k)+c}, \quad M_2 = \frac{2(1+c)(1+k+c)}{2(k+1)+c},$$

$$N_1 = 2 + N, \quad M_3 = 2N.$$

Решения уравнений (12), (13) ищутся методом вариаций произвольных постоянных и будут иметь вид:

$$\bar{b}(\xi, p) = \frac{e^{-p\xi\xi^{-N}}}{1-N} \int_0^\xi e^{p\xi\xi^{N+1}} (p^2 \xi^2 + p\xi M_1 - M) d\xi - \\ - \frac{e^{-p\xi\xi^{-1}}}{1-N} [p e^{p\xi\xi^4} + (M_1 - 4) e^{p\xi\xi^3} - (3M_1 - 12 + M) \times \\ \times e^{p\xi} \left( \frac{\xi^2}{p} - \frac{2\xi}{p^2} + \frac{2}{p^3} \right) + \frac{2}{p^3} (3M_1 - 12 + M)], \quad (14)$$

$$\bar{H}(\xi, p) = \frac{1}{1-N} \left\{ e^{-p\xi\xi^{-N}} \int_0^\xi e^{p\xi\xi^{N+1}} (p\xi M_2 + M_3) d\xi - \right. \\ \left. - M_2 \xi^2 - (M_3 - 3M_2) \left( \frac{\xi}{p} - \frac{2}{p^2} + \frac{2\xi^{-1}}{p^3} \right) + \frac{2e^{-p\xi\xi^{-1}}}{p^3} (M_3 - 3M_2) \right\}. \quad (15)$$

Найденные формулы (14) и (15) выражают трансцендентные передаточные функции напряженности и энтальпии как функции параметров и координаты по оси дуги.

Определим теперь обобщенные динамические параметры дуги — инерционности процесса  $S_n$  с помощью представления передаточных функций (14, 15) рядом Маклорена. В данном случае это получается сразу после разложения  $e^{-p\xi}$  и  $e^{p\xi}$  по степеням  $p$ . Получим

$$\bar{b}(\xi, p) = \frac{1}{1-N} \left\{ M\xi^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{N+2} \right) + p\xi^3 \left( \frac{M_1 - M}{N+3} + \frac{M}{N+2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{M_1 - M}{4} - \frac{M}{3} \right) + p^2 \xi^4 \left( \frac{1 + M_1 - \frac{M}{2}}{N+4} - \frac{M_1 - M}{N+3} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{M}{2(N+2)} - \frac{1 + M_1 - \frac{M}{2}}{5} + \frac{M_1 - M}{4} + \frac{M}{6} \right) + \right. \\ \left. + p^3 \xi^5 \left( \frac{1 + \frac{M_1 - M}{2} - \frac{M}{6}}{N+5} - \frac{1 + M_1 - \frac{M}{2}}{N+4} + \frac{M_1 - M}{2(N+3)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{M}{2(N+2)} - \frac{1 + M_1 - \frac{M}{2}}{5} + \frac{M_1 - M}{4} + \frac{M}{6} \right) \right\}. \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{M}{6(N+2)} - \frac{1 + \frac{M_1}{2} - \frac{M}{6}}{6} + \frac{1 + M_1 - \frac{M}{2}}{5} - \\
& \left. - \frac{M_1 - M}{8} - \frac{M}{18} + \dots \right\}, \quad (16) \\
\bar{H}(\xi, p) = & \frac{1}{1-N} \left\{ M_3 \xi^2 \left( \frac{1}{N+2} - \frac{1}{3} \right) + p \xi^3 \left( \frac{M_2 + M_3}{N+3} - \right. \right. \\
& - \frac{M_3}{N+2} - \frac{M_2 + M_3}{4} + \frac{M_3}{3} \left. \right) + p^2 \xi^4 \left( \frac{M_2 + \frac{M_3}{2}}{N+4} - \right. \\
& - \frac{M_2 + M_3}{N+3} + \frac{M_3}{2(N+2)} - \frac{M_2 + \frac{M_3}{2}}{5} + \frac{M_2 + M_3}{4} - \\
& \left. - \frac{M_3}{6} \right) + p^3 \xi^5 \left( \frac{M_2 + \frac{M_3}{6}}{N+5} - \frac{M_2 + \frac{M_3}{2}}{N+4} + \right. \\
& + \frac{M_2 + M_3}{2(N+3)} - \frac{M_3}{6(N+2)} - \frac{M_2 + \frac{M_3}{3}}{12} + \frac{M_2 + \frac{M_3}{2}}{5} - \\
& \left. - \frac{M_2 + M_3}{8} + \frac{M_3}{18} \right) + \dots \left. \right\}. \quad (17)
\end{aligned}$$

Откуда по коэффициентам разложения Маклорена  $K_n$ , учитывая, что  $S_n = (-1)^n K_n$ , найдем для  $b(\tau)$  и  $H(\tau)$  обобщенные характеристики динамики — инерционности процесса в общем виде и любого порядка. В частности имеем:

Для  $b(\xi, \tau)$

$$\begin{aligned}
S_0 = & \frac{1}{1-N} M \xi^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{N+2} \right), \quad S_1 = \frac{1}{N-1} \xi^3 \left( \frac{M_1 - M}{N+3} + \right. \\
& \left. + \frac{M}{N+2} - \frac{M_1 - M}{4} - \frac{M}{3} \right), \\
S_2 = & \frac{1}{1-N} \xi^4 \left( \frac{1 - M_1 - \frac{M}{2}}{N+4} - \frac{M_1 - M}{N+3} - \frac{M}{2(N+2)} - \right. \\
& \left. - \frac{1 + M_1 - \frac{M}{2}}{5} + \frac{M_1 - M}{4} + \frac{M}{6} \right), \\
S_3 = & \frac{1}{N-1} \xi^5 \left( \frac{1 + \frac{M_1}{2} - \frac{M}{6}}{N+5} - \frac{1 + M_1 - \frac{M}{2}}{N+4} + \frac{M_1 - M}{2(N+3)} + \frac{M}{6(N+2)} - \right. \\
& \left. - \frac{1 + \frac{M_1}{2} - \frac{M}{6}}{6} + \frac{1 + M_1 - \frac{M}{2}}{5} - \frac{M_1 - M}{8} - \frac{M}{18} \right).
\end{aligned}$$

Для  $H(\xi, \tau)$

$$\begin{aligned}
S_0 = & \frac{1}{1-N} M_3 \xi^2 \left( \frac{1}{N+2} - \frac{1}{3} \right), \quad S_1 = \frac{1}{N-1} \xi^3 \left( \frac{M_2 + M_3}{N+3} - \right. \\
& \left. - \frac{M_3}{N+2} - \frac{M_2 + M_3}{4} - \frac{M_3}{3} \right), \\
S_2 = & \frac{1}{1-N} \xi^4 \left( \frac{M_2 + \frac{M_3}{2}}{N+4} - \frac{M_2 + M_3}{N+3} + \frac{M_3}{2(N+2)} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{M_2 + \frac{M_3}{2}}{5} + \frac{M_2 + M_3}{4} - \frac{M_3}{6} \left. \right), \\
S_3 = & \frac{1}{N-1} \xi^5 \left( \frac{M_2 + \frac{M_3}{6}}{N+5} - \frac{M_2 + \frac{M_3}{2}}{N+4} + \frac{M_2 + M_3}{2(N+3)} - \frac{M_3}{6(N+2)} - \right. \\
& \left. - \frac{M_2 + \frac{M_3}{3}}{12} + \frac{M_2 + \frac{M_3}{2}}{5} - \frac{M_2 + M_3}{8} + \frac{M_3}{18} \right).
\end{aligned}$$

Следующие общие выражения для  $S_4$  и т. д. определяются аналогично.

Найденные таким образом инерционности представляют полное решение всей задачи. Они однозначно характеризуют динамику данных процессов, дают возможность построить аналитические выражения для передаточных и переходных функций в соответствии с формулами (2) и (3).

$$\bar{b}(\xi, p) \approx \sum_{n=0}^h d_n \left( \frac{p}{p+\lambda} \right)^n, \quad b(\xi, \tau) \approx d_0 + e^{-\lambda\tau} \sum_{n=1}^h d_n L_{n-1}(\lambda\tau), \quad (18)$$

где  $d_n$  определяется по формуле (2а), а  $\lambda \approx \frac{S_{k-1}}{S_k}$ . Совершенно аналогичный вид имеют выражения для  $\bar{H}(\xi, p)$  и  $H(\xi, \tau)$ .

Учитывая простую в данном случае структуру зависимости инерционностей от координаты  $\xi$ , элементарными выкладками можно показать, что выражения (18) преобразуются к виду

$$\begin{aligned}
\bar{b}(\xi, p) & \approx \xi^2 \sum_{n=0}^h d_n^* \left( \frac{p}{p + \frac{\lambda^*}{\xi}} \right)^n, \\
b(\xi, \tau) & \approx \xi^2 \left[ d_0^* + e^{-\frac{\lambda^* \tau}{\xi}} \sum_{n=1}^h d_n^* L_{n-1} \left( \frac{\lambda^*}{\xi} \tau \right) \right],
\end{aligned}$$

где значком \* обозначены значения параметров в точке  $\xi = 1$ . Для  $H$  получаются аналогичные выражения.

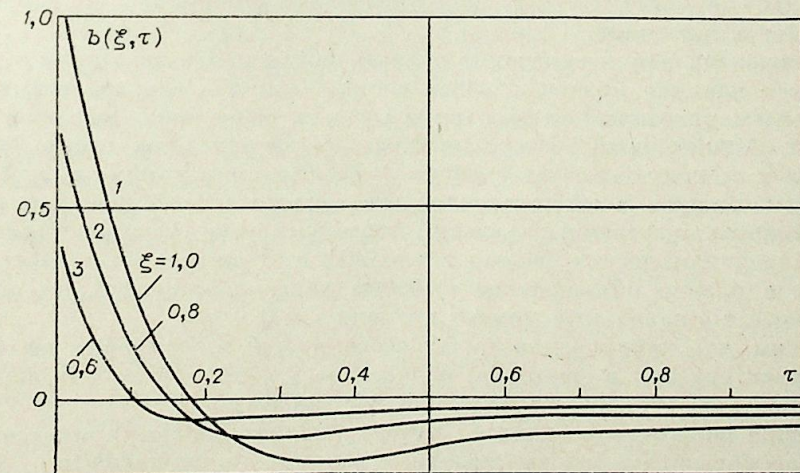


Рис. 4. Графики переходных функций  $b(\xi, \tau)$  при ступенчатом возмущении по току.

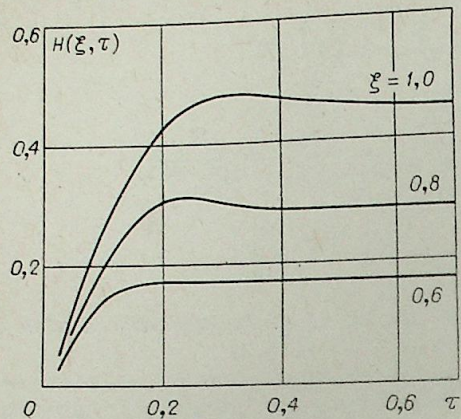


Рис. 5. Графики переходных функций  $H(\xi, \tau)$  при ступенчатом возмущении по току.

практически совпадают. На рис. 5 изображены графики переходных процессов, рассчитанные для  $H(\xi, \tau)$  по ее четвертой аппроксимации (с учетом инерционностей до четвертого порядка включительно). Здесь учет четвертой инерционности оказался целесообразным в основном для уточнения значения  $\lambda$ , так как последовательность инерционностей при переходе от  $S_2$  к  $S_3$  сменяла знак. Результат будет точнее при выборе  $\lambda$  ближе к пределу отношения  $\frac{S_{h-1}}{S_h}$ .

Заметим, что в начале переходного процесса (около  $\tau = 0$ ), где всегда должны больше сказываться погрешности приближений, легко можно найти точное значение  $f(0)$  по точной трансцендентной передаточной функции  $W(p)$  переходом к пределу  $f(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} W(p)$ .

В данном примере легко показать, что переходом к пределу при  $p \rightarrow \infty$  в выражениях (16, 17) получаем

$$b(\xi, 0) = \lim_{p \rightarrow \infty} \bar{b}(\xi, p) = \xi^2, \quad H(\xi, 0) = \lim_{p \rightarrow \infty} \bar{H}(\xi, p) = 0 \text{ независимо от } \xi.$$

Эти данные могут служить дополнительным уточнением полученных характеристик динамики.

Наблюдая на рис. 4 поведение характеристик при возрастании  $\tau$ , где сказывается влияние низкочастотных составляющих в спектре возмущения, замечаем некоторый выброс кривых вниз, более ярко выраженный при  $\xi = 1$ . Аналогичный эффект выброса характеристики вверх (т. е. здесь уже в сторону больших значений) наблюдаем в динамике  $H(\xi, \tau)$  на рис. 5. Очевидно, в обоих случаях это связано с особенностями пространственно-распределенных условий взаимодействия электродинамических и гидродинамических факторов в процессе. Этими же особенностями процессов в плазме объясняются выбросы характеристик  $b(\xi, \tau)$  вверх по оси ординат в начальный момент времени  $\tau = 0$ .

Заметим, что наличие некоторых особенностей в поведении динамических характеристик в некоторой области на низких частотах было, например, отмечено в экспериментальной части работы [7].

Большие возможности данного метода анализа динамики мы связываем с рассмотрением основы модели — величин инерционности. Выражение инерционности нулевого порядка  $S_0$  дает значение нового установившегося режима после ступенчатого возмущения. Инерционность первого порядка  $S_1$  (главная характеристика) может быть рассмотрена как

В соответствии с найденными решениями были проведены простые расчеты переходных процессов по полученным значениям инерционностей до третьего и четвертого порядка.

Результаты расчетов динамики  $b(\xi, \tau)$  по инерционностям до третьего порядка включительно представлены на рис. 4. Видна зависимость кривых от координаты по оси дуги. Расчетные характеристики следующего порядка приближения (при учете инерционности четвертого порядка  $S_4$ ) уже не приводят к существенным уточнениям по сравнению с предыдущими аппроксимациями. На рисунке данного масштаба они

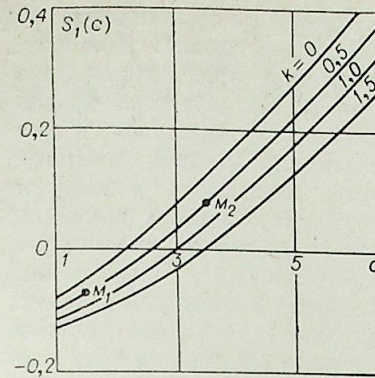


Рис. 6.

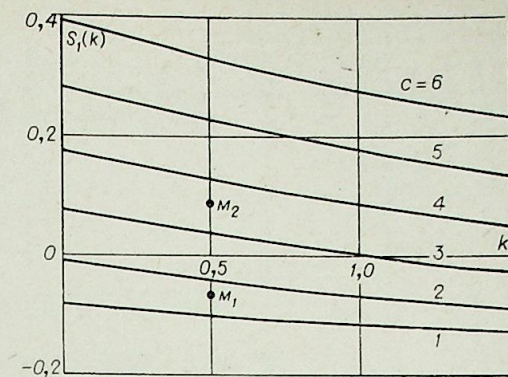


Рис. 7.

функция параметров дуги, в результате будут видны определяющие влияния их через  $S_1$  на развитие всей динамики. Проиллюстрируем возможность такого анализа на конкретном примере.

В нашем случае  $S_1$  при заданном  $\xi$  так же, как все остальные инерционности является функцией только двух параметров  $S_1 = S_1(k, c)$ . Это очень удобно, так как рассчитав для интересующей нас области значений  $k$  и  $c$  соответствующую поверхность  $S_1(k, c)$  мы получаем полную картину динамики в главном.

Вычисленные переходные процессы, представленные на рис. 4, соответствуют реальным условиям и значениям  $k = 0,5$ ,  $c = 1,5$ , которым соответствует точка  $M_1(0,5; 1,5)$  на поверхности  $S_1(k, c)$ . По данному выражению  $S_1(k, c)$  рассчитаем часть поверхности, содержащую эту точку, например в пределах  $(0 < k < 1,5)$ ,  $(1 < c < 6)$ . Графики сечений этой поверхности плоскостями  $k = \text{const}$  и  $c = \text{const}$  для  $b(1, \tau)$  изображены на рис. 6, 7.

Будем иметь в виду, что выброс характеристики  $b(1, \tau)$  вверх (см. рис. 4) около  $\tau = 0$  характеризуется соответствующей ему величиной части площади  $S_1$ , имеющей отрицательный знак, а выброс вниз — частью площади с положительным знаком. Тогда, анализируя общую картину семейства кривых на рис. 6, 7, можно заключить, что точка  $M_2(0,5; 3,5)$  на поверхности  $S_1(k, c)$  будет соответствовать переходному процессу  $b(1, \tau)$  с гипертрофированным выбросом вниз как бы за счет ограничения по площади верхнего выброса в связи с тем, что  $S_1(M_1) \approx -S_1(M_2)$ . Это соответствует физическому смыслу изменения соотношения величин параметров  $k, c$  и может быть подтверждено непосредственным расчетом по данной модели.

Заметим, далее, что модель удобна для частотного анализа динамики в ее изменении по пространственной координате дуги. Например, полагая в передаточной функции  $p = j\omega$ , далее легко рассчитать амплитудные частотные характеристики дуги, различая их по пространственной координате  $\xi$ . На рис. 8 приведены частотные зависимости для  $|\bar{b}(\xi, j\omega)|$ .

В предельных случаях здесь имеем  $|\bar{b}|_{\omega=0} = S_0(\xi) \neq 0$ ,  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |\bar{b}| \approx \sum_{n=0}^k d_n(\xi)$ .

По расчетным характеристикам, представленным на рисунке, хорошо видны сильные экстремальные зависимости от частоты в левой части спектра, а также большие изменения характера этой экстремальности по осевой координате дуги. Такие сильные внутренние зависимости (рис. 4, 5, 8) останутся скрытыми, если рассматривать процесс осредненным по пространственной координате.

В итоге можно сказать, что рассмотренный метод анализа динамики представляет развитие структурного подхода к моделированию низкотем-

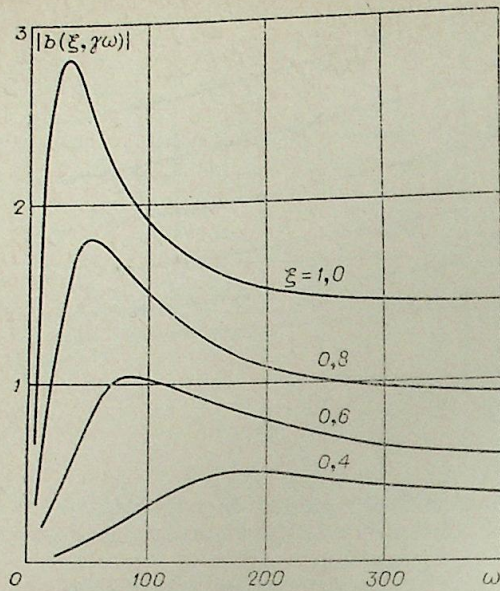


Рис. 8.

мы\*\* (практически для  $m=3$ ). В этом методе на конечном интервале и также обобщенное понятие инерционности дуги.

Институт теплофизики  
СО АН СССР,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
1/IX 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Жуков М. Ф., Коротеев А. С., Урюков Б. А. Прикладная динамика термической плазмы. Новосибирск, Наука, 1975. 298 с.
2. Новиков О. Я. Устойчивость электрической дуги. Л., Энергия, 1978. 159 с.
3. Заруди М. Е. Уравнение динамики дуги и динамические свойства дуги при малых возмущениях. — Труды ВЗЭТИ, 1965, вып. 29.
4. Заруди М. Е. Определение динамических параметров дуги в установках плазменного нагрева. — Труды ВНИИЭТО, 1967, вып. 2.
5. Заруди М. Е. К теории ствола нестационарной дуги. — В кн.: Физика, техника и применение низкотемпературной плазмы. Алма-Ата, 1970.
6. Заруди М. Е. — ЖТФ, 1971, XVI, вып. 4.
7. Камаев Ю. П., Цапенко В. Н., Уманский М. И., Егоров В. М., Бабенко Н. Г. Локальные частотные характеристики электрической дуги. — В кн.: Устойчивость горения электрической дуги. Новосибирск, 1973, с. 12—25.
8. Урюков Б. А. О динамической вольт-амперной характеристике плазматрона постоянного тока. — Тез. докл. V Всесоюз. конф. по генераторам низкотемпературной плазмы, ч. I. Новосибирск, Наука, 1972.
9. Перегудов В. С., Урюков Б. А. Динамическая вольт-амперная характеристика плазматрона постоянного тока (теория и эксперимент). — В кн.: Устойчивость горения электрической дуги. Новосибирск, 1973, с. 24—35.
10. Колонина Л. И., Урюков Б. А. Расчет постоянной времени электрической дуги в разных газах. — В кн.: Устойчивость горения электрической дуги. Новосибирск, 1973.
11. Урюков Б. А., Хайтман С. М. Динамическая характеристика дуги, находящейся в потоке газа. — Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1973, № 3. Сер. техн. наук, вып. 1.
12. Ахизер Н. И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с ней. М., Физматгиз, 1961, с. 310.
13. Девятков Б. Н., Демиденко Н. Д., Охорзин В. А. Динамика распределенных процессов в технологических аппаратах, распределенный контроль и управление. Красноярск, 1976, с. 308.

\* Основные идеи работы в кратком сообщении были доложены Б. Н. Девятковым на V Всесоюзной школе по плазмодинамике (Рига, 1978).

\*\* Такое обобщение развито первым из авторов данной статьи совместно с В. С. Перегудовым.

пературной плазмы как распределенного объекта\*. При этом, возмущения процессов в плазме могут быть заданы по граничным условиям (как в данном примере), либо по параметрам, входящим в коэффициенты уравнений, а также по каналам внешних промежуточных (боковых) воздействий [13]. Эти возмущения могут быть как сосредоточенными, так и распределенными по пространственной координате. Таким образом, в довольно общей постановке решаются линейные двумерные задачи динамики дуги.

Отсюда прямым обобщением получается самый общий метод аналитического представления решений многомерных линейных задач динамики плазмы.

УДК 537.525.1

В. С. ПЕРЕГУДОВ, Б. А. УРЮКОВ

### ОБЛАСТЬ УСТОЙЧИВОЙ РАБОТЫ ПЛАЗМОТРОНА БОЛЬШОЙ ДЛИНЫ

Условия устойчивой работы плазматрона определяются при исследовании электрической цепи с электрической дугой как элементом этой цепи, причём дугу необходимо описывать ее динамической вольт-амперной характеристикой (ВАХ) [1]. В работах по проблеме устойчивости горения дуги в плазматронах авторы используют динамические ВАХ, полученные для возмущений бесконечно большой длины волны (или для плазматронов малой длины). В действительности часто реализуются условия, когда длина волны возмущения сравнима с длиной плазматрона и проявляется влияние изменения параметров по длине дуги, стабилизированной стенкой канала [2, 3]. В силу сказанного представляет интерес определение критериев устойчивой работы плазматрона большой длины.

В данной статье в качестве примера рассматривается простая электрическая цепь с включенной в нее дугой (рис. 1). Динамическую ВАХ дуги, горящей в цилиндрическом канале при условиях пренебрежения радиальной составляющей скорости газа, влиянием сил трения и магнитным сжатием столба дуги (в случае, например, когда один конец канала плазматрона закрыт, а второй открыт), можно записать следующим образом (см. [2]):

$$Z = \frac{\eta + \omega^2 T^2}{1 + \omega^2 T^2} + \frac{(1 - \eta)(\kappa^2 - 1) \cdot \omega^2 T^2}{(1 + \omega^2 T^2)(1 + \kappa^2 \omega^2 T^2)} \cdot G_1 + i \left\{ \frac{\omega T(1 - \eta)}{1 + \omega^2 T^2} + \frac{\omega T(1 - \eta)(\kappa - 1)(1 - \kappa \omega^2 T^2)}{(1 + \omega^2 T^2)(1 + \kappa^2 \omega^2 T^2)} \cdot G_2 \right\} = Z_r + iZ_i. \quad (1)$$

Здесь

$$G_1 = \frac{A \operatorname{sh} 2\omega AL + B \sin 2\omega BL}{\omega L(A^2 + B^2)(\operatorname{ch} 2\omega AL + \cos 2\omega BL)},$$

$$G_2 = \frac{A \sin 2\omega BL - B \operatorname{sh} 2\omega AL}{\omega L(A^2 + B^2)(\operatorname{ch} 2\omega AL + \cos 2\omega BL)},$$

$$A, B = \left[ \frac{\kappa}{2(1 + \kappa^2 \omega^2 T^2)} \sqrt{(1 + \omega^2 T^2)(1 + \kappa^2 \omega^2 T^2)} \mp (1 + \kappa \omega^2 T^2) \right]^{1/2},$$

$$T = \frac{P^0 a^0 R C_{pw}}{4(\kappa - 1)(n + 1)\lambda_w h_m^0}, \quad C = \frac{h_m^0}{h_m^0 - h_w} - \frac{1}{\ln(h_m^0/h_w)},$$

где  $a^0 = \sqrt{\kappa P^0 / \rho^0}$  — скорость звука в невозмущенной плазме;  $\omega = \omega_p \cdot R/a_0$  — безразмерная круговая частота;  $\eta = \partial \ln U^0 / \partial \ln I^0$  — наклон ВАХ;  $\kappa = c_p/\tau_0$ ;  $n$  — показатель степени при аппроксимации электропроводности по формуле  $\sigma = \sigma_0(h/h_m - 1)^n$ ;  $L =$

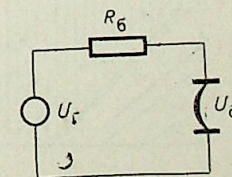


Рис. 1.

$= l/R$  — длина и  $R$  — радиус канала плазмотрона. Индекс 0 соответствует параметрам плазмы в невозмущенном состоянии, индекса  $w$  и  $m$  — параметрам на стенке и оси канала, остальные обозначения общепринятые. Малые возмущения имеют экспоненциальный вид:  $f = f_0 e^{i(\omega t + kx)}$ , где  $\omega$  — комплексная частота ( $\omega = \omega_r + i\omega_i$ ).

Очевидно, что при  $\omega_i < 0$  отклонения от стационарного состояния будут нарастать во времени (неустойчивый режим) и затухать для значений  $\omega_i > 0$ . Граница области устойчивой работы плазмотрона определяется условием

$$\omega_i = 0. \quad (2)$$

Для малых возмущений параметров цепи (см. рис. 1), полагая, что  $dU_r^0/dI^0 = 0$ , можно записать:  $Z = \frac{UI_0}{IU_0} = -R_6/R_d$  или  $Z = -K$ . Здесь  $U$ ,  $I$  — возмущения напряжения и тока дуги;  $U_r$  — напряжение источника питания;  $R_6$  — балластное сопротивление;  $R_d = U^0/I^0$ . Используя условие (2), находим

$$Z_r = -K, \quad (3)$$

$$Z_i = 0. \quad (4)$$

Из (4) можно найти  $\omega = \omega(L)$  и, подставив в (3), получить  $K = K(L, \eta)$  — зависимость, определяющую область устойчивой работы плазмотрона. Выражение  $\omega T = 0$  является корнем уравнения (4). При этом из (3) следует:  $K = -\eta$  — известный критерий Кауфмана [1], который легко получить из рассмотрения цепи с дугой в случае, когда динамическая ВАХ дуги совпадает со статической ВАХ. Другие корни уравнения (4) (при  $\omega T \neq 0$ ) получаются из решения уравнения

$$1 + \frac{(z-1) \cdot (1 - z\omega^2 T^2)}{1 + z^2 \omega^2 T^2} \cdot G_2 = 0, \quad (5)$$

Приведем (3) к виду

$$K + \eta = -(1 - \eta) \frac{\omega^2 T^2}{1 + \omega^2 T^2} \left( 1 + \frac{z^2 - 1}{1 + z^2 \omega^2 T^2} \cdot G_1 \right). \quad (6)$$

Из (6) видно, что зависимость  $K = K(\eta)$  — линейная. Кроме того, при  $\eta = 1$  для любых значений  $L$  и  $\omega$   $K = -\eta$ , т. е. все зависимости  $K(\eta, L)$  сходятся в точке  $\eta = 1, K = -1$ . Для построения зависимости  $K = K(\eta)$  при фиксированном  $L$  необходимо найти значение  $K$ , соответствующее какому-либо одному значению  $\eta$  (в работе взято  $\eta = -0,5$ ).

Уравнения (5), (6) решены численно для дуги в аргоне при температуре на оси  $10^4$  К. Корни уравнения (5) — парные. На рис. 2 представлена зависимость  $K$  от  $\eta$  для различных значений  $L$ . Область устойчивой работы плазмотрона располагается выше зависимости  $K = K(\eta)$  (для  $K = -\eta$  эта область заштрихована). Зависимость 1 соответствует

критерию Кауфмана; 2 —  $L = 100$ ; 3 —  $L = 1$ ; 4 —  $L = 10^{-2}$ , 5 —  $L = 10^{-4}$ . Вторые корни уравнения (5) дают величины  $K \rightarrow -1$ . Эти значения  $K$  не имеют физического смысла и поэтому на графике не показаны.

Результаты расчета показывают, что для возмущений с длиной волны  $\lambda \leq L$  область устойчивой работы плазмотрона расширяется, с уменьшением длины канала эта область растет. Полученные дан-

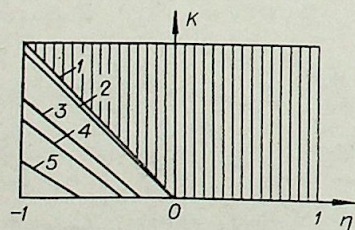


Рис. 2.

ные согласуются с известным фактом, заключающемся в том, что плазмотрон постоянного тока работает более устойчиво при наличии слабо-точного ВЧ-сопротивления.

Институт теплофизики,  
СО АН СССР,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
18/VI 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Жуков М. Ф., Коротеев А. С., Урюков Б. А. Прикладная динамика термической плазмы. Новосибирск, Наука, 1975.
2. Перегудов В. С., Урюков Б. А. Сопротивление дугового разряда по отношению к линейным возмущениям. — Изв. СО АН СССР, 1977, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.
3. Перегудов В. С., Урюков Б. А. Динамические свойства электрической дуги при линейных возмущениях конечной длины волны. — В кн.: Матер. VII Всесоюз. конф. по генераторам низкотемпературной плазмы, т. 2. Алма-Ата, 1977.

С. П. БОРИСКИН, Б. Н. ДЕВЯТОВ, В. Ф. ЛЕВЧЕНКО

НАУЧНО-ИНЖЕНЕРНЫЙ ПОДХОД  
К ПРОБЛЕМЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ  
И АНАЛИЗА ДИНАМИКИ ПЛАЗМОТРОНА  
КАК ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА\*. I

Из всех возможных способов нагрева реагирующих газов до плазменного состояния в настоящее время наиболее удобным в техническом приложении является электродуговой генератор плазмы — плазмотрон. Вещество в состоянии низкотемпературной плазмы может содержать диссоциированные, ионизированные и возбужденные частицы, обладающие повышенной реакционной способностью. Химически инертные компоненты при нормальных условиях не вступают в реакцию, но при переводе их в плазменное состояние становятся реакционноспособными.

Для промышленной технологии требуются плазмотроны мощностью несколько мегаватт, в которых электрическая дуга, находящаяся в продольном потоке газа и служащая для его нагрева, может быть значительной длины. В этом случае газ или смесь газа в плазмотроне наряду с нагревом претерпевают химические превращения. Экспериментально установлено наличие неустойчивости процессов в плазмотроне [1], которая, вероятно, вызвана колебаниями различной структуры газодинамических, химических и электрических параметров.

В данной статье мы рассмотрим некоторые принципиальные вопросы в развитии новой методики анализа динамики плазмотрона в технологическом аспекте, связанной с возможностью приближенных аналитических представлений передаточных и переходных характеристик аппарата как системы с распределенными параметрами. Таким образом, будет полностью определен структурный подход к моделированию динамики плазмотронов как технологических объектов.

Для описания динамики здесь используются обобщенные параметры — инерционности процесса, связанные с понятием постоянной времени.

Рассмотрим интересующий нас плазмотрон, который обычно имеет форму цилиндра, вероятно, по оси которого горит электрическая дуга. Относительно оси плазмотрона имеется круговая симметрия. В электрических дугах плазмотрона, продольно обдуваемых реагирующим потоком газа, направление электрического тока совпадает с направлением скорости газа. Реагирующий газ или смесь газов после входа в плазмотрон по мере его движения нагревается и вступает в химическое взаимодействие. Нагрев газа вызывает увеличение его скорости. Изменение скорости влияет на электрические параметры плазмотрона по длине, в частности изменяется напряженность электрического поля по длине дуги плазмотрона.

Такая взаимосвязанная сложная система включает химические, тепловые, газодинамические и электрические процессы. Задача математиче-

\* Основная идея работы была доложена в кратком сообщении одного из авторов данной статьи на V Всесоюзной школе по плазмохимии (Рига, 1978).

ского описания процесса в плазмотроне с физико-химическими превращениями возникла с созданием и разработкой мощных плазмотронов для технологических целей.

Когда исследования проводили на лабораторных плазмотронах мощностью от нескольких киловатт до нескольких десятков киловатт, в которых электрическая дуга по своей протяженности незначительна, то иногда полагали, что в плазмотроне идет только нагрев газа, а физико-химические превращения происходят за плазмотроном, в реакционном канале [2, 3]. В этом случае такие допущения были с технической точки зрения оправданы. В математическое описание включались упрощенные уравнения в статике для одномерного потока.

Математическое описание электрической дуги в плазмотроне в работе [4] представлено уравнениями электромагнитных явлений, уравнениями сохранения массы, количества движения и энергии в векторной форме. В этой же работе приводятся упрощения этих уравнений, исходя из физики явлений.

Математическое описание традиционных химических реакторов базировалось на использовании уравнений химической кинетики и теплового баланса [6]. Уравнения движения не рассматривались и полагалось, что скорость по длине аппарата остается постоянной величиной. Единственно, что в некоторых случаях в теории химических реакторов учитывалось пуйзелевское распределение скорости в химическом реакторе [7], которое оказывало влияние на выход целевого продукта. В целом же полное математическое описание процесса в плазмотроне с физико-химическими превращениями весьма сложно и нигде не рассмотрено.

Мы рассмотрим такое описание процессов в целом, однако с последовательными упрощениями на отдельных этапах преобразования модели. От общих уравнений в векторной форме для нестационарных условий переходим к уравнениям в цилиндрической системе координат с учетом геометрии плазмотрона и симметрии процесса относительно электрической дуги. В этих уравнениях содержатся четыре независимых переменных: три координаты и время. Путем интегрального осреднения эти уравнения сведены к двум независимым переменным: продольной координате и времени. Такое математическое описание процесса в плазмотроне в замкнутом виде в цилиндрической системе координат с учетом осреднения по координатам  $r$  и  $\varphi$  выражается системой дифференциальных уравнений в частных производных:

1. Уравнениями материального баланса по химическим компонентам

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_1}{\partial \tau} + v_z \frac{\partial C_1}{\partial z} &= D \frac{\partial^2 C_1}{\partial z^2} + R_1, \\ \frac{\partial C_2}{\partial \tau} + v_z \frac{\partial C_2}{\partial z} &= D \frac{\partial^2 C_2}{\partial z^2} + R_2, \\ &\dots \\ \frac{\partial C_k}{\partial \tau} + v_z \frac{\partial C_k}{\partial z} &= D \frac{\partial^2 C_k}{\partial z^2} + R_k. \end{aligned} \quad (1)$$

Зависимость  $R_j$  — скорости химической реакции в низкотемпературной плазме дана в работах [2, 5].

2. Уравнением теплового баланса

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial \tau} + \rho C_p V_z \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial \tau} - V_z \frac{\partial P}{\partial z} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \sum_{j=1}^k h_j R_j + EI - K\Phi(T - T_w). \quad (2)$$

3. Уравнением количества движения

$$\frac{\partial V_z}{\partial \tau} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}. \quad (3)$$

4. Уравнением неразрывности

$$F \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho F V_z) = 0. \quad (4)$$

При  $F = \text{const}$  значение  $F$  из уравнения (4) выпадает.

5. Уравнением состояния

$$P = \rho R_p T \sum_{j=1}^k \frac{C_j}{M_j}. \quad (5)$$

Обычно  $M_j = \text{const}$ .

6. Уравнением динамики дуги плазмотрона для малых возмущений.

$$\frac{\partial I}{\partial \tau} + V_z \frac{\partial I}{\partial z} + A_{I1} I = 0, \quad (6)$$

где

$$A_{I1} = \frac{R_0 + M_{\text{д}} - \varphi}{\theta (R_0 + R_{\text{д}} - \varphi)}, \quad \theta = \frac{1-x}{2} \tau_{\text{д}}, \quad x = \frac{d \ln U_0}{d \ln I_0},$$

$$M_{\text{д}} = \frac{dU_0}{dI_0}, \quad R_{\text{д}} = \frac{U_0}{I_0}, \quad \varphi = \frac{\partial U_{\text{дд}}}{\partial I_0}.$$

Величина  $\theta$  имеет размерность времени и непосредственно связана с постоянной времени дуги  $\tau_{\text{д}}$ , которая характеризует спад проводимости в момент отключения тока дуги. Расчет постоянной времени дуги дан в работе [8], результаты которого приближенно совпали с экспериментом [9].

В плазмотроне обычно числа Маха меньше единицы, и химически реагирующий газ не имеет разрыва в смысле газодинамики сверхзвуковых скоростей, и поэтому уравнение (4) может не рассматриваться совместно с системой уравнений (1)–(6).

Введем безразмерные величины, обозначая их чертой сверху:

$$\tau = \frac{l}{V_H} \bar{\tau}, \quad V_z = V_H \bar{V}_z, \quad T = T_H \bar{T}, \quad P = \rho V_H^2 \bar{P},$$

$$C_p = C_{pH} \bar{C}_p, \quad \rho = \rho_H \bar{\rho}, \quad R_j = R_{jH} \bar{R}_j, \quad C_j = C_{jH} \bar{C}_j,$$

$$D = D_H \bar{D}, \quad \lambda = \lambda_H \bar{\lambda}, \quad h_j = h_{jH} \bar{h}_j, \quad v = v_H \bar{v}, \quad (7)$$

$$z = l \bar{z}, \quad I = I_H \bar{I}, \quad U = U_H \bar{U} \quad \text{или} \quad E = E_H \bar{E},$$

$$M_j = M_{jH} \bar{M}_j.$$

Здесь  $V_H$  — характерная скорость выбирается из теоретических предположений или условия эксперимента.

Система уравнений (1)–(3), (5), (6) в безразмерных величинах будет иметь вид

$$\frac{\partial \bar{C}_j}{\partial \bar{\tau}} + \bar{V}_z \frac{\partial \bar{C}_j}{\partial \bar{z}} = K_D \bar{D} \frac{\partial^2 \bar{C}_j}{\partial \bar{z}^2} + K_{Rj} \bar{R}_j, \quad (1a)$$

$$\text{где } K_{Rj} = \frac{R_{jH} l}{V_H C_{jH}}, \quad K_D = \frac{D_H}{l V_H},$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{\tau}} + \bar{V}_z \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} - 2 \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{\tau}} - 2 \bar{V}_z \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{z}} = K_T \bar{a} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{z}^2} +$$

$$+ K_{hj} \frac{1}{\rho C_p} \sum_{j=1}^k \bar{h}_j \bar{R}_j + K_E \bar{E} \bar{I} \frac{1}{\rho C_p} + \frac{1}{\rho C_p} K_{\Phi} \bar{T}, \quad (2a)$$

$$\text{где } K_T = \frac{a_H}{l V_H}, \quad K_{hj} = \frac{(\sum h_{jH} R_{jH}) l}{\rho_H C_{pH} T_H V_H},$$

$$K_E = \frac{E_H I_H}{\rho_H C_{pH} T_H V_H}, \quad K_{\Phi} = \frac{K_{\Phi}}{\rho_H C_{pH}},$$

$$\frac{\partial \bar{V}_z}{\partial \bar{\tau}} + \bar{V}_z \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{z}} + K_v \bar{v} \frac{\partial^2 \bar{V}_z}{\partial \bar{z}^2}, \quad \text{где } K_v = \frac{v_H}{l V_H}. \quad (3a)$$

$$\bar{P} = K_p \bar{T} \sum_{j=1}^k \bar{C}_j, \quad (5a)$$

$$\text{где } K_p = \frac{R_p T_H}{V_H^2} \sum_{j=1}^k \frac{C_{jH}}{M_{jH}}, \quad M_j = M_{jH} \bar{M}_j,$$

$$\frac{\partial \bar{I}}{\partial \bar{\tau}} + \bar{V}_z \frac{\partial \bar{I}}{\partial \bar{z}} + K_I \bar{I} = 0, \quad (6a)$$

$$\text{где } K_I = \frac{A_{I1} l}{V_H}.$$

В плаздохимических процессах, в которых реагирующий газ нагревается в плазмотроне от электрической дуги, температура претерпевает значительные изменения по координатам и времени. Описание явлений переноса от температуры. Кроме того, нагрев газа по длине плазмотрона [10], связано с необходимостью учитывать зависимость коэффициентов переноса от температуры. Кроме того, нагрев газа по длине плазмотрона вызывает изменение скорости. В этих условиях уравнения (1a)–(3a), (5a), (6a) являются нелинейными.

Для анализа систем уравнений в частных производных (1a)–(3a), (5a), (6a), линеаризуемых их в окрестности стационарного режима, разлагаем нелинейные зависимости этих уравнений в ряд Тейлора [11], предполагая отклонения всех величин малыми.

Проведя линеаризацию для уравнений (1a), отбрасывая при этом размерный индекс-черту сверху, получим

$$\frac{\partial \Delta C_j}{\partial \tau} + V_z^* \frac{\partial \Delta C_j}{\partial z} + \left( \frac{\partial C_j}{\partial z} \right)^* \Delta V_z + V_z^* \left( \frac{\partial C_j}{\partial z} \right)^* + \Delta V_z \frac{\partial \Delta C_j}{\partial z} = K_D \Delta D \left( \frac{\partial^2 C_j}{\partial z^2} \right)^* +$$

$$+ K_D D^* \frac{\partial^2 \Delta C_j}{\partial z^2} + K_D \Delta D \frac{\partial^2 \Delta C_j}{\partial z^2} + K_D D^* \left( \frac{\partial^2 C_j}{\partial z^2} \right)^* + K_{Rj} \Delta R_j + K_{Rj} R_j^*,$$

$$\text{где } \Delta V_z \frac{\partial \Delta C_j}{\partial z} \approx 0, \quad \Delta D \frac{\partial^2 \Delta C_j}{\partial z^2} \approx 0.$$

Для условий стационарного режима последнее уравнение примет вид

$$V_z^* \left( \frac{\partial C_j}{\partial z} \right)^* = K_D D^* \left( \frac{\partial^2 C_j}{\partial z^2} \right)^* + K_{Rj} R_j^*.$$

Тогда, вычитая одно уравнение из другого, получим уравнение в переходном режиме в отклонениях

$$\frac{\partial \Delta C_j}{\partial \tau} + V_z^* \frac{\partial \Delta C_j}{\partial z} + \left( \frac{\partial C_j}{\partial z} \right)^* \Delta V_z = K_D \Delta D \left( \frac{\partial^2 C_j}{\partial z^2} \right)^* + K_D D^* \frac{\partial^2 \Delta C_j}{\partial z^2} + K_{Rj} \Delta R_j. \quad (1b)$$

Проведем линеаризацию остальных уравнений системы (2a), (3a), (5a), (6a) аналогично уравнению (1a), тогда эти линеаризованные уравнения примут вид

$$\frac{\partial \Delta T}{\partial \tau} + V_z^* \frac{\partial \Delta T}{\partial z} + \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)^* \Delta V_z - 2 \frac{\partial \Delta P}{\partial \tau} - 2 V_z^* \frac{\partial \Delta P}{\partial z} - 2 \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right)^* \Delta V_z =$$

$$= K_T \Delta a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)^* + K_T a^* \frac{\partial^2 \Delta T}{\partial z^2} - K_{hj} \left( \frac{1}{\rho^2 C_p} \sum_{j=1}^k h_j R_j \right)^* \Delta \rho - K_{hj} \left( \frac{1}{\rho C_p} \sum_{j=1}^k h_j R_j \right)^* \Delta C_p +$$

$$+ K_{h_j} \left( \frac{1}{\rho C_p} \right)^* \sum_{j=1}^h h_j^* \Delta R_j + K_{h_j} \left( \frac{1}{\rho C_p} \right)^* \sum_{j=1}^h R_j^* \Delta h_j + K_E \left( \frac{1}{\rho C_p} I \right)^* \Delta E +$$

$$+ K_E \left( E \frac{1}{\rho C_p} \right)^* \Delta I - K_E \left( EI \frac{1}{\rho^2 C_p} \right)^* \Delta \rho + K_E \left( EI \frac{1}{\rho C_p^2} \right)^* \Delta C_p + K_\Phi \Delta T, \quad (26)$$

$$\frac{\partial \Delta V_z}{\partial \tau} + V_z^* \frac{\partial \Delta V_z}{\partial z} + \left( \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^* \Delta V_z = \left( \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial P}{\partial z} \right)^* \Delta \rho -$$

$$- \left( \frac{1}{\rho} \right)^* \frac{\partial \Delta P}{\partial z} + K_{v,v}^* \frac{\partial^2 \Delta V_z}{\partial z^2} + K_v \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right)^* \Delta v, \quad (36)$$

$$\Delta P = K_p \left( \sum_{j=1}^h C_j \right)^* \Delta T + K_p T^* \sum_{j=1}^h \Delta C_j = K_\rho \Delta T + K_\rho T^* \sum_{j=1}^h \Delta C_j. \quad (56)$$

$$\frac{\partial \Delta I}{\partial \tau} + V_z^* \frac{\partial \Delta I}{\partial z} + \left( \frac{\partial I}{\partial z} \right)^* \Delta V_z + K_I \Delta I = 0. \quad (66)$$

В уравнения (16)–(36), (56), (66) входят приращения теплофизических параметров среды. Разложим эти приращения в ряд Тейлора для многих переменных и, ограничиваясь лишь первыми приближениями и с учетом выражения (56), будем иметь

$$\Delta C_p = \left( \frac{\partial C_p}{\partial T} \right)^* \Delta T + \left( \frac{\partial C_p}{\partial P} \right)^* \Delta P = \left( \frac{\partial C_p}{\partial T} \right)^* \Delta T + K_p \left( \frac{\partial C_p}{\partial P} \right)^* \Delta T +$$

$$+ \left( \frac{\partial C_p}{\partial P} \right)^* T^* K_p \sum_{j=1}^h \Delta C_j = \left[ \left( \frac{\partial C_p}{\partial T} \right)^* + K_p \left( \frac{\partial C_p}{\partial P} \right)^* \right] \Delta T + K_p \left( T \frac{\partial C_p}{\partial P} \right)^* \sum_{j=1}^h \Delta C_j =$$

$$= C_{p,T}^* \Delta T + C_{p,c_j}^* \sum_{j=1}^h \Delta C_j. \quad (8)$$

$$\Delta \rho = \left[ \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)^* + K_p \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)^* \right] \Delta T + K_p \left( T \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)^* \sum_{j=1}^h \Delta C_j =$$

$$= \rho_T^* \Delta T + \rho_{c_j}^* \sum_{j=1}^h \Delta C_j, \quad (9)$$

$$\Delta h_j = \left[ \left( \frac{\partial h_j}{\partial T} \right)^* + K_p \left( \frac{\partial h_j}{\partial P} \right)^* \right] \Delta T + K_p \left( T \frac{\partial h_j}{\partial P} \right)^* \Delta C_j = h_{jT}^* \Delta T + h_{jp}^* \Delta C_j, \quad (10)$$

$$\Delta a = \left[ \left( \frac{\partial a}{\partial T} \right)^* + \left( \frac{\partial a}{\partial P} \right)^* K_p \right] \Delta T + \left[ \left( \frac{\partial a}{\partial P} \right)^* K_p T^* + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^h \left( \frac{\partial a}{\partial C_j} \right)^* \right] \sum_{j=1}^h \Delta C_j = a_T^* \Delta T + a_{c_j}^* \sum_{j=1}^h \Delta C_j, \quad (11)$$

$$\Delta D = \left[ \left( \frac{\partial D}{\partial T} \right)^* + K_p \left( \frac{\partial D}{\partial P} \right)^* \right] \Delta T + \left[ \sum_{j=1}^h \left( \frac{\partial D}{\partial C_j} \right)^* + \right.$$

$$\left. + K_p \left( T \frac{\partial D}{\partial P} \right)^* \right] \sum_{j=1}^h \Delta C_j = D_T^* \Delta T + D_{c_j}^* \sum_{j=1}^h \Delta C_j, \quad (12)$$

$$\Delta v = \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)^* + K_p \left( \frac{\partial v}{\partial P} \right)^* \right] \Delta T + \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial P} T \right)^* K_p + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^h \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)^* \right] \sum_{j=1}^h \Delta C_j = v_T^* \Delta T + v_{c_j}^* \sum_{j=1}^h \Delta C_j, \quad (13)$$

$$\Delta R_j = \left[ \left( \frac{\partial R_j}{\partial C_j} \right)^* + K_p \left( \frac{\partial R_j}{\partial P} T \right)^* \right] \Delta C_j +$$

$$+ \left[ \left( \frac{\partial R_j}{\partial T} \right)^* + K_p \left( \frac{\partial R_j}{\partial P} \right)^* \right] \Delta T = R_{jc}^* \Delta C_j + R_{jT}^* \Delta T. \quad (14)$$

Значение  $\Delta E$ , входящее в уравнение (26), согласно [12], найдем из соотношения  $E = K P^\alpha y^\beta$ , где  $K, \alpha, \beta$  — постоянные, зависящие от рода газа. Ограничиваясь линейной частью разложения по приращениям и используя выражение (56), получаем

$$\Delta E = A_{E_p} \cdot K_p \Delta T + A_{E_p} K_p T^* \sum_{j=1}^h \Delta C_j + A_{E_y} \Delta I,$$

где

$$A_{E_p} = \alpha K_\alpha P^{\alpha-1} I^\beta, \quad A_{E_y} = \beta K_\alpha P^\alpha I^{\beta-1}, \quad K_\alpha = \frac{K P_H^\alpha \cdot I_H^\beta}{E_H}.$$

Учитывая полученные соотношения вместе с выражениями (8–14), преобразуем уравнения (16)–(36) к виду

$$\frac{\partial \Delta C_j}{\partial \tau} + V_z^* \frac{\partial \Delta C_j}{\partial z} + \left( \frac{\partial C_j}{\partial z} \right)^* \Delta V_z = K_D D^* \frac{\partial^2 \Delta C_j}{\partial z^2} +$$

$$+ N_{c_j}^* \Delta C_j + N_{T_j}^* \Delta T, \quad j = 1, 2, \dots, K, \quad (1\text{в})$$

где

$$N_{c_j}^* = \left[ K_D \left( \frac{\partial^2 C_j}{\partial z^2} \right)^* \cdot D_{c_j}^* + K_{R_j} R_{jC}^* \right],$$

$$N_{T_j}^* = \left[ K_D \left( \frac{\partial^2 C_j}{\partial z^2} \right)^* \cdot D_T^* + K_{R_j} R_{jT}^* \right].$$

$$A_{T\tau} \frac{\partial \Delta T}{\partial \tau} + A_{Tz} \frac{\partial \Delta T}{\partial z} - B_{c\tau} \frac{\partial (\sum \Delta C_j)}{\partial \tau} - B_{cz} \frac{\partial (\sum \Delta C_j)}{\partial z} -$$

$$- 2 \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right)^* \cdot \Delta V_z = K_T a^* \frac{\partial^2 \Delta T}{\partial z^2} + A_T \cdot \Delta T + B_c \sum_{j=1}^h \Delta C_j + L \Delta I, \quad (2\text{в})$$

где

$$A_{T\tau} = 1 - 2K_p, \quad A_{Tz} = V_z (1 - 2K_p), \quad B_{c\tau} = 2K_p T^*, \quad B_{cz} = 2V_z^* K_p T^*,$$

$$A_T = K_T \left( \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)^* \cdot a_T^* - K_{h_j} \left( \frac{1}{\rho^2 C_p} \sum_{j=1}^h h_j R_j \right)^* \cdot \rho_T^* -$$

$$- K_{h_j} \left( \frac{1}{\rho C_p} \sum_{j=1}^h h_j R_j \right)^* \cdot C_{p,T}^* + K_{h_j} \left( \frac{1}{\rho C_p} \right)^* \cdot \sum_{j=1}^h h_j R_j^* + K_{h_j} \left( \frac{1}{\rho C_p} \right)^* \sum_{j=1}^h R_j^* h_{j,T}^* -$$

$$- K_E \left( EJ \frac{1}{\rho^2 C_p} \right)^* \cdot \rho_T^* - K_E \left( EJ \frac{1}{\rho C_p^2} \right)^* \cdot C_{p,T}^* + K_\Phi \left( \frac{1}{\rho C_p} \right)^* -$$

$$- K_\Phi \left( \frac{1}{\rho C_p} \right)^* \cdot C_{p,T}^* - K_\Phi T^* \cdot \left( \frac{1}{\rho^2 C_p} \right)^* \cdot \rho_T^* + K_p A_{E_p} \left( \frac{1}{\rho C_p} \right)^* I^*,$$

$$B_c = K_T \left( \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)^* a_{c_j}^* - K_{h_j} \left( \frac{1}{\rho^2 C_p} \sum_{j=1}^h h_j R_j \right)^* \rho_{c_j}^* - K_{h_j} \left( \frac{1}{\rho C_p} \sum_{j=1}^h h_j R_j \right)^* \cdot C_{p,c_j}^* +$$

$$+ K_{h_j} \left( \frac{1}{\rho C_p} \right)^* \sum_{j=1}^h h_j^* R_{jc}^* + K_{h_j} \left( \frac{1}{\rho C_p} \right)^* \sum_{j=1}^h R_j^* h_{jp}^* - K_E \left( EI \frac{1}{\rho^2 C_p} \right)^* \rho_{c_j}^* -$$

$$- K_E \left( EI \frac{1}{\rho C_p^2} \right)^* \cdot C_{p,c_j}^* - K_\Phi T^* \left( \frac{1}{\rho C_p} \right)^* \rho_{c_j}^* + K_E K_p A_{E_p} T^* \left( \frac{1}{\rho C_p} \right)^* -$$

$$- K_\Phi T^* \left( \frac{1}{\rho C_p} \right)^2 C_{p,c_j}^*, \quad L = K_E \left( \frac{1}{\rho C_p} \right)^* (A_{EI} I^* + E^*),$$

$$\frac{\partial \Delta V_z}{\partial \tau} + V_z^* \frac{\partial \Delta V_z}{\partial z} + \left( \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^* \Delta V_z = K_{v,v}^* \frac{\partial^2 \Delta V_z}{\partial z^2} + K_{vT} \cdot \Delta T +$$

$$+ K_{vc_j} \sum_{j=1}^h \Delta C_j - K_p \left( \frac{1}{\rho} \right)^* \frac{\partial \Delta T}{\partial z} - K_p \left( \frac{T}{\rho} \right)^* \frac{\partial (\sum \Delta C_j)}{\partial z}, \quad (3\text{в})$$

где

$$K_{vT} = \left[ K_{vT}^* \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right)^* + \left( \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial P}{\partial z} \right)^* \rho T^* \right],$$

$$K_{vcj} = \left[ K_{vcj}^* \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right)^* + \left( \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial P}{\partial z} \right)^* \rho c_j^* \right].$$

Уравнение (6б) сохраним без изменения

$$\frac{\partial \Delta I}{\partial \tau} + V_2^* \frac{\partial \Delta I}{\partial z} + K_I \Delta I + \left( \frac{\partial I}{\partial z} \right)^* \Delta V_z = 0. \quad (6в)$$

Таким образом, система уравнений (1)–(6) сведена к системе уравнений (1в)–(3в), (6в), содержащих четыре неизвестных:  $\Delta C_j$ ,  $\Delta T$ ,  $\Delta V_z$ ,  $\Delta I$ .

В зависимости от конкретного плазмохимического процесса и технологических требований к количественному определению химических компонентов вместо одного уравнения (1в) может быть взято несколько уравнений общего вида (1).

Полученная система (1в)–(3в), (6в) дает модель динамики процессов в плазматроне, которая должна быть представлена решениями этой системы.

Далее будут рассмотрены конкретные пути решения такой задачи динамики.

Заметим, что прямые способы решения такой сложной распределенной системы ни классическим методом, ни методом операционного исчисления не могут дать замкнутого аналитического выражения, которое было бы удобно для дальнейшего анализа динамики плазмохимических процессов.

Однако такие аналитические выражения решений системы могут быть найдены косвенным способом, сведением задачи к отысканию не самих решений, а его однозначных характеристик-инерционностей процесса. И далее уже через эти инерционности будут выражены искомые решения — передаточные и переходные функции.

Наша цель — отыскание относительно простых приближенных аналитических выражений переходных процессов, имеющих очевидные преимущества во многих отношениях. Такие выражения всегда очень удобны для дальнейшего научно-инженерного анализа динамики плазматрона.

Плазматрон, как и любой технологический аппарат, должен работать в оптимальном технологическом режиме, а возмущения, возникающие каким-либо образом, всегда могут вывести его из такого режима. Для изучения процесса вообще нас интересуют переходные процессы от одного стационарного режима, соответствующего некоторым постоянным выходным параметрам, к другому — также стационарному при скачкообразном ступенчатом изменении входной величины. В связи с этим именно переходные и передаточные функции удобны для описания динамических характеристик плазматрона.

Стремления к простым приближенным аналитическим представлениям передаточных и переходных функций обычно связывались с понятием постоянной времени дуги, и здесь были достигнуты определенные результаты. Однако возможности такого приближения весьма ограничены, так как они связаны с ограниченной возможностью аппроксимации сложного процесса простым аperiодическим звеном. Для сложных распределенных процессов такое простейшее представление инерционных свойств с помощью величины постоянной времени теряет свой смысл. Тем не менее общая идея получения приближенной передаточной функции, использующей удобные характеристики инерционных свойств объекта, может быть продолжена благодаря обобщению понятия постоянной времени на случай сложных распределенных плазмохимических процессов.

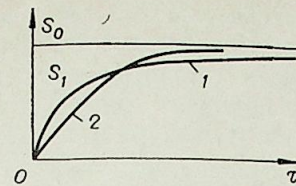


Рис. 1.

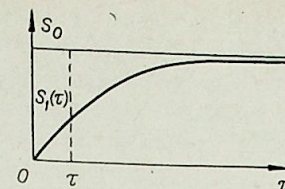


Рис. 2.

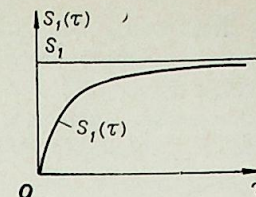


Рис. 3.

Рассмотрим критерий инерционности процесса, когда кривая переходного процесса существенно отличается от экспоненты. Вообще величиной инерционности процесса или (сокращенно) инерционностью  $S$  мы называем величину, численно равную площади, заключенной между кривой переходного процесса при ступенчатом возмущении, и прямой, соответствующей новому установившемуся режиму.

$$S = \int_0^{\infty} [1 - f_{\alpha}(\tau)] d\tau. \quad (15)$$

При этом значение  $f_{\alpha}(\infty)$  в новом установившемся режиме принято за единицу.

Для одномерно распределенных в пространстве процессов инерционность будет функцией только координаты  $z$ , т. е.  $S = S(z)$ , и можно определить среднюю инерционность на интервале  $(0, l)$

$$S_{\text{ср}} = \frac{1}{l} \int_0^l S(z) dz. \quad (16)$$

Выражение (16) может быть использовано для анализа плазматронов, состоящих из большого количества межэлектродных вставок (МЭВ), когда процесс по длине плазматрона будет распределенным, а по длине секции МЭВ инерционность можно принимать осредненную.

Заметим далее, что площадь  $S$  по координате  $\tau \in (0, \infty)$  может распределяться по-разному (рис. 1). Именно с этим связана неоднозначность первой инерционной характеристики  $S$ , обозначим ее  $S \equiv S_1$ . Будем устранять эту неоднозначность. Введем функцию распределения инерционности  $S_1(\tau)$ , значение которой в точке  $\tau \in (0, \infty)$  равно части площади  $S_1$ , отсекаемой вертикальной прямой, соответствующей моменту времени  $\tau$  (рис. 2).

При этом, очевидно,  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} S_1(\tau) = S_1$ , т. е.  $S_1$  представляет полную (всю) инерционность на интервале  $(0, \infty)$ . График функции распределения  $S_1(\tau)$  будет иметь вид (рис. 3).

Величину площади  $S_2$ , ограниченную кривой  $S_1(\tau)$ , называют инерционностью второго порядка. Следуя таким путем, далее получаем последовательность величин инерционности различных порядков  $S_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , в совокупности полностью и однозначно определяющую динамику данного процесса. Видно, что такая конструкция обобщения характеристики инерционных свойств объекта естественна по своему физическому смыслу.

Выражения инерционности могут быть найдены [13–15] из разложения в ряд Маклорена передаточной функции  $F(p)$  объекта, а именно

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n S_n^{\alpha} \cdot p^n, \quad (17)$$

т. е.  $S_n^{\alpha} = (-1)^n \frac{1}{n!} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d^n}{dp^n} F(p)$  при  $p = 0$ .

Величины  $S_n^\alpha$  при  $n > 1$  по своему геометрическому и физическому смыслу рассматриваются как обобщенные инерционности высших порядков. Если  $S_0^\alpha$  и  $S_1^\alpha$  являются первыми важными характеристиками переходного процесса, то инерционности высших порядков дают дальнейшее уточнение изменения переходной функции. Совокупность всех инерционностей  $S_n^\alpha$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) представляет полное ее описание. Понятие инерционности процесса отражает важный физический смысл этой величины как прямое обобщение представления постоянной времени процесса. Очевидно, что в математическом смысле здесь нет принципиальной разницы с моментом  $C_n$  функции, поскольку  $C_n^\alpha = n! S_n^\alpha$ .

Величины  $S_n$  могут быть найдены непосредственно по дифференциальным уравнениям для инерционностей, которые значительно проще основных уравнений процесса, так как являются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Они получаются из данных основных уравнений (1в)—(3в), (6в) с частными производными в соответствии с формулой (17).

Применяя преобразования Лапласа — Карсона и переходя к пределу при  $p \rightarrow 0$ , из уравнений (1в)—(3в), (6в) получим для инерционностей  $S_0$  соответствующие уравнения, при этом уравнения с частными производными (1в)—(3в), (6в) превращаются в обыкновенные дифференциальные уравнения для нулевых инерционностей

$$V_z^* \frac{dS_0^1}{dz} + \left(\frac{\partial C_j}{\partial z}\right)^* \cdot S_0^3 = K_D D^* \frac{d^2 S_0^1}{dz^2} + N_{cj}^* \cdot S_0^1 + N_{Tj}^* S_0^2, \quad (1г)$$

$$A_{Tz} \frac{dS_0^2}{dz} - B_{cz} \frac{dS_0^1}{dz} - 2 \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)^* \cdot S_0^3 = K_T a^* \frac{d^2 S_0^2}{dz^2} + A_T S_0^2 + B_c S_0^1 + L S_0^4, \quad (2г)$$

$$V_z^* \frac{dS_0^3}{dz} + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)^* \cdot S_0^3 = K_{v^*} \cdot \frac{d^2 S_0^3}{dz^2} + K_{vT} S_0^2 + K_{vcj} S_0^1 - K_p \left(\frac{1}{\rho}\right)^* \frac{dS_0^2}{dz} - K_p \left(\frac{T}{\rho}\right)^* \frac{dS_0^1}{dz}, \quad (3г)$$

$$V_z^* \frac{dS_0^4}{dz} + K_I S_0^4 + \left(\frac{\partial I}{\partial z}\right)^* S_0^3 = 0. \quad (6г)$$

Преобразовав уравнения (1в)—(3в), (6в) по Лапласу — Карсону, затем продифференцируем по  $p$ , и переходя к пределу при  $p \rightarrow 0$ , получим для первых инерционностей  $S_1^\alpha$  следующие дифференциальные уравнения:

$$-S_0^1 + \Delta C_j(+0) + V_z^* \frac{dS_1^1}{dz} + \left(\frac{\partial C_j}{\partial z}\right)^* \cdot S_1^3 = K_D D^* \frac{d^2 S_1^1}{dz^2} + N_{cj}^* S_1^1 + N_{Tj}^* S_1^2, \quad (1д)$$

$$-A_{Tz} [S_0^2 - \Delta T(+0)] + A_{Tz} \frac{dS_1^2}{dz} - B_{cz} \frac{dS_1^1}{dz} - 2 \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)^* \cdot S_1^3 = K_T a^* \frac{d^2 S_1^2}{dz^2} + A_T S_1^2 + B_c S_1^1 - B_{ct} [S_0^1 - \Sigma \Delta C_j(+0)] - L S_1^4, \quad (2д)$$

$$-S_0^3 + \Delta V_z(+0) + V_z^* \frac{dS_1^3}{dz} + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)^* S_1^3 = K_{v^*} \frac{d^2 S_1^3}{dz^2} + K_{vT} S_1^2 + K_{vcj} S_1^1 -$$

$$-K_p \left(\frac{1}{\rho}\right)^* \frac{dS_1^2}{dz} - K_p \left(\frac{T}{\rho}\right)^* \frac{dS_1^1}{dz}, \quad (3д)$$

$$-S_0^4 + \Delta I(+0) + V_z^* \frac{dS_1^4}{dz} + K_I S_1^4 + \left(\frac{\partial I}{\partial z}\right)^* \cdot S_1^3 = 0. \quad (6д)$$

При нулевых начальных условиях  $\Delta C_j(+0) = \Delta T(+0) = \Delta V_z(+0) = \Delta I(+0) = 0$ .

Преобразовав уравнения (1в)—(3в), (6в) по Лапласу — Карсону, затем дважды их продифференцируем по  $p$ , и переходя к пределу при  $p \rightarrow 0$ , получим для вторых инерционностей  $S_2^\alpha$  следующие дифференциальные уравнения:

$$S_1^1 + V_z^* \frac{dS_2^1}{dz} + \left(\frac{\partial C_j}{\partial z}\right)^* S_2^3 = K_D D^* \frac{d^2 S_2^1}{dz^2} + N_{cj}^* S_2^1 + N_{Tj}^* S_2^2, \quad (1е)$$

$$-A_{Tz} S_1^2 + A_{Tz} \frac{dS_2^2}{dz} - B_{cz} \frac{dS_2^1}{dz} - 2 \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)^* S_2^3 = K_T a^* \frac{d^2 S_2^2}{dz^2} + A_T S_2^2 + B_{cj} S_2^1 - B_{ct} S_1^1 + L S_2^4, \quad (2е)$$

$$-S_1^3 + V_z^* \frac{dS_2^3}{dz} + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)^* S_2^3 = K_{v^*} \frac{d^2 S_2^3}{dz^2} + K_{vT} S_2^2 + K_{vcj} S_2^1 - K_p \left(\frac{1}{\rho}\right)^* \frac{dS_2^2}{dz} - K_p \left(\frac{T}{\rho}\right)^* \frac{dS_2^1}{dz}, \quad (3е)$$

$$-S_1^4 + V_z^* \frac{dS_2^4}{dz} + K_I S_2^4 + \left(\frac{\partial I}{\partial z}\right)^* S_2^3 = 0. \quad (6е)$$

В уравнениях (1г)—(3г), (6г), (1д)—(3д), (6д) и (1е)—(3е), (6е) введены следующие обозначения:

$$S_0^1 = \widetilde{\Delta C}_j, \quad S_0^2 = \widetilde{\Delta T}, \quad S_0^3 = \widetilde{\Delta V}_z, \quad S_0^4 = \widetilde{\Delta I}, \quad (-1)^n n! S_n^1 = \widetilde{\Delta C}_j^{(n)}, \\ (-1)^n n! S_n^2 = \widetilde{\Delta T}^{(n)}, \quad (-1)^n n! S_n^3 = \widetilde{\Delta V}_z^{(n)}, \quad (-1)^n n! S_n^4 = \widetilde{\Delta I}^{(n)}$$

при условии  $p = 0$ .

Здесь в качестве примера учитывается изменение только  $j$ -го компонента, хотя уравнения, по существу, действительны для общего случая.

Знак  $\sim$  означает преобразование по Лапласу — Карсону по временной координате, верхний индекс — производная по  $p$ .

Таким образом, последовательно дифференцируя уравнения (1в)—(3в), (6в), преобразованные по Лапласу — Карсону по параметру  $p$ , и каждый раз переходя к пределу при  $p \rightarrow 0$ , будем получать дифференциальные уравнения, содержащие инерционности более высокого порядка.

Учет инерционностей высших порядков способствует постепенному уточнению переходных функций процесса. Совокупность всех инерционностей  $S_n^\alpha$  ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) представляет полное и однозначное ее описание.

Таким образом, вместо уравнений с частными производными (1в)—(3в), (6в) для самого параметра процесса мы получаем обыкновенные дифференциальные уравнения относительно инерционностей нулевого и более высоких порядков (1г)—(3г), (6г), (1д)—(3д), (6д) и (1е)—(3е), (6е). Данные системы содержат переменные коэффициенты и являются неоднородными, за исключением первой, которая однородна. Эти рекуррентные системы удобны тем, что решаются последовательно в общем случае сравнительно простыми численными методами. Здесь может быть успешно применен удобный прием, использующий понятие «матрица»

анта Бейкера» [16], который представляется рядом. Ввиду абсолютной и равномерной сходимости ряда такой матрициант во многих случаях инженерных расчетов вполне может быть аппроксимирован несколькими первыми членами разложения. Переход от решения однородной системы к неоднородной получается вариацией произвольных постоянных. В до- полнение отметим, что в таких постановках задач хорошо проходит при- менение матрициантов в условиях использования метода осредненных коэффициентов [17]. Он позволяет вариацией величины необходимой точности сильно упрощать процедуру решения.

Для решения систем дифференциальных уравнений (1г)—(3г), (6г), (1д)—(3д), (6д) и (1е)—(3е), (6е) необходимо задать граничные условия для исходных уравнений. Задание граничных условий будет связано с рассмотрением физических условий процесса для конкретных поста- новок задач.

Переход от записи краевых условий или условий Коши для иско- мых функций к записи их для величин инерционностей (моментов функ- ций) производится достаточно просто. В частности, равенству нулю ос- новного параметра соответствует равенство нулю всех его инерционно- стей, и условие  $f_\alpha(Z_0, \tau) = C = \text{const}$  приводит к условию  $S_0^\alpha = C = \text{const}$ , а все  $S_n^\alpha = 0$  при  $n > 0$ .

Решение уравнений (1г)—(3г), (6г) находим сначала для нулевых инерционностей  $S_0^\alpha$ . Затем подставляем найденные значения  $S_0^\alpha$  в урав- нения (1д)—(3д), (6д), находим значения первых инерционностей  $S_1^\alpha$ . И затем подставляем найденные значения  $S_1^\alpha$  в уравнения (1е)—(3е), (6е), находим  $S_2^\alpha$  и так далее.

Ниже будет рассмотрено несколько интегральных приближений пе- редаточных функций. Определяя коэффициенты разложения через инер- ционности, мы ограничиваем их конечным числом. Практически во мно- гих случаях достаточно взять их лишь до второго — третьего порядка включительно ( $S_n^\alpha$ , где  $n = 0, 1, 2, 3$ ). Здесь одновременно с разложением данной переходной функции мы применяем ее интегральное интерполи- рование.

По инерционностям процесса  $S_n^\alpha$  восстанавливаем функции пере- ходного процесса в плазматроне. Для этой цели весьма эффективно мо- гут быть использованы ряды Бурмана — Лагранжа и специальные по- линомы Каттериджа.

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ПРОЦЕССА С ПОМОЩЬЮ РЯДА БУРМАНА — ЛАГРАНЖА

Ряды Бурмана — Лагранжа [19, 20] получаются при разложении од- ной аналитической функции  $F(p)$  по степеням другой аналитической функции

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n [\omega(p)]^n. \quad (18)$$

Если положим, что в ряде (18)  $\omega(p)$  имеет вид

$$\omega(p) = \frac{p}{p + \lambda_\alpha}, \quad \text{то получим } F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \left( \frac{p}{p + \lambda_\alpha} \right)^n. \quad (19)$$

При этом выражения для коэффициентов имеют вид

$$d_n = \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^{n-m} C_{n-1}^{n-m} \lambda_\alpha^{n-m} S_{n-m}, \quad (20)$$

где  $\lambda_\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n-1}}{S_n}$ ,  $C_{n-1}^m = \frac{(n-1)!}{m!(n-m)!}$  — биномиальный коэффициент.

Ряду (19) соответствует разложение в ряд функции  $f_\alpha(\tau)$ , которое имеет вид

$$f_\alpha(\tau) = f(\infty) + e^{-\lambda_\alpha \tau} \sum_{n=1}^{\infty} d_n L_{n-1}(\lambda_\alpha \tau), \quad (21)$$

где  $L_n(\lambda_\alpha \tau)$  — полином Лагерра.

Частичная сумма ряда (21) является приближением выражения  $f_\alpha(\tau)$ . Затухание процесса при  $\tau \rightarrow \infty$  определяет величина

$$\lambda_\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^\alpha}{S_{n+1}^\alpha}. \quad (22)$$

Для конкретных приближений процесса частичными суммами ря- дами (19), (21) можно принимать приближенно

$$\lambda_\alpha \approx \frac{S_{n-1}^\alpha}{S_n^\alpha}.$$

Кроме разложения (21), использующего полиномы Лагерра, можно было бы найти и другие достаточно точные способы приближенного представления переходной характеристики процесса на всем ее интер- вале изменения. При этом с успехом могут быть использованы некото- рые ортогональные системы полиномов [21—23].

Вообще при применении любой ортогональной системы полиномов коэффициенты разложения можно выразить через инерционности про- цессов. Однако эти выражения достаточно громоздки, и соответствую- щие расчеты тем больше затруднены, чем более высокой степени поли- номы используются для повышения точности приближения. Большой интерес представляет возможность применения таких полиномов, для которых координатами разложения являются сами инерционности про- цесса (полиномы Каттериджа [18]). Это удобно в практических зада- чках, поскольку инерционность принята нами как основная динамическая характеристика. Однако полиномы Каттериджа дают приближения лишь на конечном отрезке наиболее существенного изменения характе- ристики. Такие условия не всегда удобны, поэтому можно также вос- пользоваться модификацией специальной системой полиномов [14, 24], распространенной на всю полуось времени, поскольку это необходимо для нахождения передаточных функций по переходному процессу в об- щем виде.

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ПРОЦЕССА С ПОМОЩЬЮ СПЕЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПОЛИНОМОВ

Основным преимуществом аппроксимаций этими полиномами явля- ется то, что коэффициенты разложения выражаются просто через соот- ветствующую характеристику инерционности ( $S_n^\alpha$ ). Приближенные пред- ставления переходного процесса такими полиномами будут иметь вид

$$f_\alpha(\tau) - f_\alpha(\infty) = e^{\lambda_\alpha \tau} [\lambda_\alpha S_1^\alpha \Phi_1(\tau) + \lambda_\alpha^2 S_2^\alpha \Phi_2(\tau) + \dots + \lambda_\alpha^{n+1} S_{n+1}^\alpha \Phi_{n+1}(\tau)]. \quad (23)$$

Последовательность аппроксимаций различной степени приближе- ния представляется следующим образом:

1. При  $n = 0$  единственный полином системы будет нулевой степени, и он имеет вид

$$\Phi_1(\tau) = -1. \quad (24)$$

Получаем простейшее (нулевое) приближение переходного процесса (25)

$$f_{\alpha}(\tau) - S_0^{\alpha} = e^{-\lambda_{\alpha}\tau} [\lambda_{\alpha} S_1^{\alpha} (-1)],$$

где

$$S_0^{\alpha} = f_{\alpha}(\infty).$$

2. При  $n = 1$  имеем систему двух полиномов первой степени

$$\Phi_1(\tau) = -2 + \lambda_{\alpha}\tau, \quad (26)$$

$$\Phi_1(\tau) = 1 - \lambda_{\alpha}\tau.$$

Выражение переходного процесса первого приближения имеет вид

$$f_{\alpha}(\tau) - S_0^{\alpha} = e^{-\lambda_{\alpha}\tau} [\lambda_{\alpha} S_1^{\alpha} (-2 + \lambda_{\alpha}\tau) + \lambda_{\alpha}^2 S_2^{\alpha} (1 - \lambda_{\alpha}\tau)], \quad (27)$$

или

$$f_{\alpha}(\tau) = S_0^{\alpha} - \lambda_{\alpha} e^{-\lambda_{\alpha}\tau} [(2S_1^{\alpha} - \lambda_{\alpha} S_2^{\alpha}) + (\lambda_{\alpha} S_2^{\alpha} - S_1^{\alpha}) \lambda_{\alpha}\tau]. \quad (27a)$$

3. При  $n = 2$  имеем систему трех полиномов второй степени

$$\Phi_1(\tau) = -3 + 3(\lambda_{\alpha}\tau) - \frac{1}{2}(\lambda_{\alpha}\tau)^2, \quad (28)$$

$$\Phi_2(\tau) = 3 - 5(\lambda_{\alpha}\tau) + (\lambda_{\alpha}\tau)^2,$$

$$\Phi_3(\tau) = -1 + 2(\lambda_{\alpha}\tau) - \frac{1}{2}(\lambda_{\alpha}\tau)^2.$$

Формула для второго приближения переходного процесса имеет вид

$$f_{\alpha}(\tau) = S_0^{\alpha} - e^{-\lambda_{\alpha}\tau} [\lambda_{\alpha} S_1^{\alpha} \Phi_1(\tau) + \lambda_{\alpha}^2 S_2^{\alpha} \Phi_2(\tau) + \lambda_{\alpha} S_3^{\alpha} \Phi_3(\tau)] \quad (29)$$

или

$$f_{\alpha}(\tau) = S_0^{\alpha} - \lambda_{\alpha} e^{-\lambda_{\alpha}\tau} [(-3S_1^{\alpha} + 3S_2^{\alpha}\lambda_{\alpha} - S_3^{\alpha}\lambda_{\alpha}^2) + (3S_1^{\alpha} - 5S_2^{\alpha}\lambda_{\alpha} + 2S_3^{\alpha}\lambda_{\alpha}^2) \cdot (\lambda_{\alpha}\tau) + (-\frac{1}{2}S_1^{\alpha} + S_2^{\alpha}\lambda_{\alpha} - \frac{1}{2}S_3^{\alpha}\lambda_{\alpha}^2) \cdot (\lambda_{\alpha}\tau)^2].$$

Индекс  $\alpha$  принимает поочередно обозначения концентрации, температуры, скорости и тока дуги, т. е.

$$f_{c_j}(\tau) = C_j(z, \tau), \quad f_T(\tau) = T(z, \tau),$$

$$f_v(\tau) = V(z, \tau), \quad f_i(\tau) = I(z, \tau).$$

Значения  $\lambda_{\alpha}$  целесообразно выбирать, исходя из тех же соображений, как и при рассмотрении рядов Бурмана — Лагранжа [24, 25].

Выбор количества учитываемых членов рассмотренных выше разложений однозначно связан с количеством найденных значений инерционностей, и все это будет определяться необходимой точностью аппроксимации. Очевидно, что во многих случаях нескольких первых членов разложения передаточной и переходной функций будет вполне достаточно для инженерных расчетов. Конкретные возможности приближений различных порядков раскрываются по мере рассмотрения различных числовых примеров, связанных с различными реальными условиями работы плазматрона.

Выполненным в этом плане работам расчетного и экспериментального характера, а также детализации предложенной методики посвящена следующая статья, которая будет опубликована в очередном номере журнала.

Обращает внимание то обстоятельство, что вопрос о пригодности простейших аппроксимаций с помощью экспоненты еще недавно являлся предметом серьезных обсуждений, вероятно потому, что больших возможностей просто не было. Если в этом плане учесть, что больших аппроксимаций в нашем случае соответствуют учету лишь нулевого и первого членов разложения, то становится понятным общий оптимизм в оценке перспектив применения предложенных научно-инженерных методов моделирования динамики плазмохимических процессов.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренный метод моделирования и анализа динамики плазматрона как технологического объекта может быть использован при исследовании плазмохимических агрегатов, состоящих последовательно из плазматрона, реакционного канала (плазмохимического реактора) и закалочного устройства. Если в исходных уравнениях (1)–(6) не учитывать электрические параметры, то такие уравнения будут описывать протекание передаточных и переходных функций в плазмохимическом реакторе. Процедура определения передаточных и переходных функций остается прежней. Если учесть связь плазматрона и плазмохимического реактора, так как выходные параметры плазматрона будут входными параметрами последнего, то, очевидно, уже исключается произвол в выборе граничных условий того и другого процесса. Если в исходных уравнениях (1)–(6) не учитывать электрические параметры и добавить к ним условия, учитывающие интенсивный отвод тепла, то получим систему уравнений, описывающих закалку. Выходные параметры плазмохимического реактора становятся входными параметрами закалочного устройства. Процедура нахождения передаточных и переходных функций закалочного устройства остается такой же, как и для плазматрона.

Для плазмохимического агрегата, в котором химический процесс в основном происходит в плазматроне, длина реакционного канала (плазмохимического реактора) может быть сведена к минимуму, так как в таком канале будет протекать заключительный этап плазмохимического процесса и будет происходить перераспределение тепловых потоков, влияющих на длительную работу закалочного устройства.

Отметим, что данный метод моделирования позволяет рассматривать не только сосредоточенные, но и более реальные — распределенные возмущающие и управляющие воздействия на технологическую систему в соответствии с общими положениями структурной теории распределенных систем [14, 26].

Таким образом, в данном подходе к моделированию и анализу динамики плазматрона как технологического объекта открываются потенциальные возможности представления переходных и передаточных функций плазмохимического агрегата в целом и вытекающие отсюда возможности решения задач распределенного контроля и управления, и оптимизации таких агрегатов. Все это связано с большими преимуществами данного структурного подхода к моделированию.

В работе приняты следующие обозначения:  $V_z$  — осредненная скорость потока в плазматроне по осевой координате;  $C_p$  — теплоемкость при постоянном давлении;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности;  $h_j$  — покомпонентная энтальпия;  $R_p$  — газовая постоянная, выраженная через давление;  $M_j$  — молекулярный вес  $j$ -го химического компонента;  $M_x$  — дифференциальное сопротивление дуги;  $\varphi$  — дифференциальное сопротивление источника питания;  $U_{x,x}$  — напряжение холостого хода источника питания;  $a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$  — коэффициент температуропроводности;  $S_n^{\alpha}$  — моменты функции, соответствующие инерционностям.

Институт теплофизики  
СО АН СССР, Новосибирск

Поступила в редакцию  
1/IX 1979

## ЛИТЕРАТУРА

- Жуков М. Ф. Электрические и тепловые характеристики высокоэнтальпийных плазматронов. — В кн.: Экспериментальные исследования плазматронов. Новосибирск, Наука, 1977, с. 112–128.
- Борискин С. П. и др. Двумерная математическая модель плазмохимического реактора. — В кн.: Тезисы докладов Второго Всесоюзного совещания по плазмохимической технологии и аппаратостроению. Т. II. М., 1977, с. 41–43.

3. Кинетика и термодинамика химических реакций в низкотемпературной плазме. Под ред. Л. С. Полака. М., Наука, 1965, с. 180.
4. Жуков М. Ф., Коротеев А. С., Урюков Б. А. Прикладная динамика термической плазмы. Новосибирск, Наука, 1975, с. 280.
5. Алексеев Б. В. Пограничный слой с химическими реакциями. М., 1967, с. 190.
6. Кафаров В. В. Методы кибернетики и химии и химической технологии. М., Наука, 1971, с. 318.
7. Вэйлас С. Химическая кинетика и расчеты промышленных реакторов. М., Наука, 1965, с. 480.
8. Колонина Л. И., Урюков Б. А. Расчет постоянной времени электрической дуги в разных газах.— В кн.: Устойчивость горения электрической дуги. Под ред. М. Ф. Жукова. Новосибирск, 1973, с. 24—32.
9. Hertz W. Determination of the conductance decay time constants of interrupted arcs by the aid of a Channel model.— In: XI Intern. Conf. on Phenom. in Ioniz. Gases. Bucharest, 1966.
10. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., 1967. 330 с.
11. Бабанов Н. А. и др. Теория автоматического управления. Ч. 1. Под ред. А. А. Воронова. М., Высшая школа, 1977. 288 с.
12. Грановский В. Л. Электрический ток в газе. М., Наука, 1971. 350 с.
13. Девятков Б. Н. Определение динамических характеристик и критериев инерционности и регулируемости химико-технологических аппаратов. Автоматика и телемеханика, 1960, т. XXI, № 6.
14. Девятков Б. Н., Демиденко Н. Д., Охорзин В. А. Динамика распределенных процессов в технологических аппаратах, распределенный контроль и управление. Красноярск, 1976, с. 310.
15. Девятков Б. Н. Теория переходных процессов в технологических аппаратах с точки зрения задач управления. Новосибирск, 1964. 313 с.
16. Современная математика для инженеров. /Под ред. Беккенбаха. Пер. с англ. под ред. И. В. Векуа. М., 1959, ИЛ. 499 с.
17. Фрезер Р., Дункан В., Коллар А. Теория матриц и ее приложение к дифференциальным уравнениям в динамике. М., ИЛ, 1950. 240 с.
18. Каттеридж О. П. Применение специальных систем полиномов для приближенного вычисления переходной характеристики.— В кн.: Труды I конгресса ИФАК, т. 1. М., 1961, с. 140—149.
19. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958. 270 с.
20. Уиттеккер Е. Т., Ватсон Г. Н. Курс современного анализа. М., ОНТИ, 1936, с. 290.
21. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М., Физматгиз, 1961, 390 с.
22. Балк М. Б. Интерполяционный процесс Паде для некоторых аналитических функций.— В кн.: Исследования по современным проблемам функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1960, с. 98—112.
23. Балк М. Б. К вопросу об интерполировании аналитических функций посредством дробно-рациональных функций.— ДАН СССР, 1951, т. 79, № 2.
24. Девятков Б. Н. Применение специальной системы полиномов для приближения переходного процесса на бесконечном интервале.— Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1960, № 8.
25. Стилтьес Т. Исследования о непрерывных дробях. Харьков, ОНТИ, 1936. 230 с.
26. Бутковский А. Г. Структурная теория распределенных систем. М., Наука, 1977. 320 с.

В. А. ЛЕБЕДЕВ

ПРИМЕНЕНИЕ ЗОНАЛЬНОГО МЕТОДА  
К ТЕПЛОФИЗИЧЕСКОМУ РАСЧЕТУ ИЗЛУЧАЮЩЕЙ СИСТЕМЫ  
С ЗЕРКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

В работе рассматривается лучистый теплообмен в излучающей системе, состоящей из полого цилиндра и двух зеркал, размещенных по торцам. Система заполнения диатермической средой и разделена на  $n = 14$  изотермических зон (условная модель оптической системы Кассегрена). Поверхности зон предполагаются серыми, оптически однородными, поверхности зеркал — изотермическими. Поскольку «малое» зеркало не закрывает полностью один из торцов цилиндра, то необходимая для расчетов замкнутость системы создавалась введением условной кольцевой зоны. Заданы все геометрические параметры системы, коэффициенты поглощения  $a$  и отражения  $r$ .

Решалась смешанная постановка задачи о лучистом теплообмене, где по заданным оптическим и геометрическим параметрам для  $n_1$  граничных зон и заданным результирующим потоком излучения остальных  $n_2 = n - n_1$  зон определяются плотности результирующих излучений и температуры зон, в которых эти характеристики не были известны. Использовались следующие системы и выражения в безразмерном виде [1]:

$$\theta_{\text{рез}}(M_i) = a_i a_s \Phi(M_i F_s) + a_i \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq p}}^{n_1} a_h \Phi(M_i F_h) - a_i \sum_{j=1}^{n_2} \theta_{\text{рез}j} \Phi(M_i F_j), \quad (1)$$

температуры поверхностей

$$\theta(M_i) = a_p \Phi(M_i F_p) + \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq p}}^{n_1} a_h \theta_{hs} \Phi(M_i F_h) - \sum_{j=1}^{n_2} \theta_{\text{рез}j} \Phi(M_i F_j) - \frac{\theta_{\text{рез}i}}{a_i}, \quad (2)$$

$\Phi(M_i F_k)$  — локальные разрешающие угловые коэффициенты излучения (УКИ),

$$\theta(M_i) = \frac{T^4(M_i) - T_s^4}{T_p^4 - T_s^4}, \quad \theta_{\text{рез}k} = \frac{E_{\text{рез}k}}{\sigma_0 (T_p^4 - T_s^4)}, \quad \theta_{hs} = \frac{E_{hs}}{E_{ps}} = \frac{T_h^4 - T_s^4}{T_p^4 - T_s^4}.$$

Осредненные энергетические характеристики излучения граничных тел определяются аналогично локальным характеристикам с применением средних разрешающих УКИ —  $\Phi_{ik}$ .

Средние УКИ определяются из системы уравнений

$$\Phi_{ik} - \sum_{j=1}^n r_j \Phi_{ij} \Phi_{jk} = \Phi_{ik}, \quad (3)$$

которую можно представить как

$$\Phi'_{ik} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{jk} \Phi'_{jk} = \Phi_{ik}, \quad (4)$$

где

$$a_{jk} = R'_j \varphi'_{jk} = R_j \gamma_j \varphi_{jk}, \quad \Phi_{ik} = \gamma_k \Phi'_{ik}, \quad (5a)$$

$$\varphi'_{jk} = \frac{\varphi_{jk}}{1 - \varphi_{jj}}, \quad \gamma_k = \frac{1}{1 - R_k \varphi_{kk}}, \quad R'_j = \frac{R_j (1 - R_{jj})}{1 - R_j \varphi_{jj}}. \quad (5б)$$

Преобразования для системы с  $\Phi (M_i F_k)$  аналогичны.

Для решения системы (4) ее удобно представить в виде матричного уравнения

$$A \Phi_i = \varphi_i,$$

где  $A$  — матрица системы (4), а  $\Phi_i$  и  $\varphi_i$  — матрицы-столбцы вида

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} \Phi_{i1} \\ \vdots \\ \Phi_{i14} \end{bmatrix}, \quad \varphi_i = \begin{bmatrix} \varphi_{i1} \\ \vdots \\ \varphi_{i14} \end{bmatrix}.$$

Все средние и локальные геометрические УКИ  $\Phi_{ik}$  и  $\varphi(M_i F_k)$  определялись либо по известным формулам, либо с помощью введения поверхностей для получения условно замкнутых систем. При этом использовались теоремы взаимности и замкнутости, свойства конгруэнтности и аксиома аддитивности потоков излучения [2]. Система имеет две зеркальные плоские поверхности, следовательно, в выражении значений УКИ между зонами системы должны входить зеркальные составляющие  $\Phi'_{ik}$ , которые появляются из-за влияния «большого» зеркала. Второе зеркало системы Кассегрена не учитывается из-за малости его площади. Для получения  $\Phi'_{ik}$  использовался «метод изображений» [3]. Были получены формулы для вычисления численных значений зеркальных составляющих УКИ. Численные значения диффузных и зеркальных составляющих, а также самих УКИ между зонами излучающей системы получены в виде наборов матриц.

По (5а), (5б), оптическим параметрам системы, численным значениям УКИ с учетом и без учета зеркального отражения вычисляются элементы  $a_{ij}$  матрицы  $A$ . С помощью (4),  $a_{ij}$  и численных значений УКИ составлялись системы уравнений с четырнадцатью неизвестными  $\Phi'_{ik}$  для вариантов с отражением и без отражения от большого зеркала.

По (5а), значениям  $\Phi'_{ik}$  и вычисленным значениям  $\gamma_k$  определялись значения разрешающих УКИ  $\Phi_{ik}$ . Аналогично вычисляются  $\Phi (M_i F_k)$ . По значениям оптических характеристик зон, разрешающих УКИ  $\Phi_{ik}$  и  $\Phi (M_i F_k)$ , известных результирующих тепловых потоков с помощью формул для  $\theta_i$  и  $\theta (M_i)$  определяются значения средних и локальных температур боковых зон стенок цилиндра для различных значений известных температур зеркал и внешней среды.

В качестве примера обработанных результатов [4] дан рисунок. Заданы температуры малого зеркала (зона 1)  $T_1 = 570 K$ , большого зеркала (зона 3) с отверстием (зона 4)  $T_3 =$

$= 280 K$ ,  $T_4 = 260 K$ , внешней среды (зона 2)  $T_2 = 0 K$ , тепловой поток через боковые стенки (зоны 5—14), равный 0. Сплошные горизонтальные прямые соответствуют усреднению значений температур изотермических участков цилиндра с учетом отражения от зоны 3; а пунктирные — без учета отражения.

Расчеты показали неизмеримость влияния тепловых режимов малого зеркала (Кассегрена) и большого зеркала на температурный профиль боковой поверхности цилиндра, несмотря на значительную разницу в размерах поверхностей зеркал. Влияние зеркального отражения системы от большого зеркала на температурное поле цилиндра оказывается весьма небольшим ( $\Delta_{\max} T_i = 1,5$  град) и проявляется в наибольшей степени в зонах, прилегающих к большому зеркалу.

Применение локальных характеристик дает качественное уточнение формы кривой температурного профиля (см. рисунок, кривые  $A$  и  $B$ ) относительно профиля, полученного с помощью осредненных характеристик: проявляется тенденция к понижению температуры в зонах, непосредственно прилегающих к большому зеркалу. В то же время наблюдается хорошее совпадение температурных распределений, полученных с помощью локальных и осредненных УКИ, что позволяет использовать при инженерных расчетах только осредненные УКИ. Введя в рассмотрение коэффициент теплопроводности ( $\lambda = 0,6$  Вт/(м·К)) и используя осредненные УКИ, методом итераций определили температурное распределение, учитывающее потери тепла из-за излучения с торца цилиндра в окружающую среду и тепловые потоки вдоль цилиндра [5] (рис. 1, линия  $C$ ). Температурные распределения получены без учета селективности излучения боковых стенок цилиндра, индикатрис отражения поверхностей зеркал, неизотермичности зеркал. Качественно кривые совпадают с экспериментальными температурными распределениями [6].

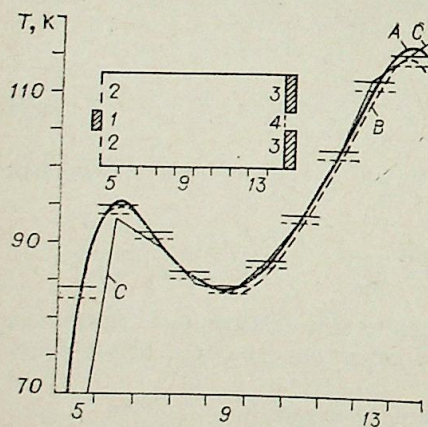
Все результаты получены с помощью весьма несложного программирования, что позволяет избежать использования дорогостоящей вычислительной техники и применять ЭВМ МИР-2.

Институт теплофизики  
СО АН СССР,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
15/VI 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

- Суринов Ю. А. Применение и развитие нового метода определения и расчета локальных характеристик излучения. — Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1967, № 2, с. 150—169.
- Рубцов Н. А. Теплообмен излучением. Новосибирск, НГУ, 1977, с. 51—53.
- Спэрроу Э. М., Сесс Р. Д. Теплообмен излучением. Л., Энергетика, 1971.
- Лебедев В. А. Зональный расчет излучающей системы с зеркальными поверхностями. — В кн.: Теплообмен излучением. Новосибирск, 1977, с. 72—84.
- Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. М.—Л., Машгиз, 1962, 456 с.
- Лебедев В. А., Вайнер Е. А. Исследования температурных полей в излучающих цилиндрических системах различных конфигураций. — В кн.: Теплообмен излучением. Новосибирск, 1977, с. 85—91.



Температурное распределение вдоль стенок цилиндра.

1—4 — номера торцевых зон; 5—14 — номера боковых (кольцевых) зон; A — температурное распределение с учетом зеркального отражения; B — то же, без учета зеркального отражения; C — температурное распределение с учетом теплопроводности стенок цилиндра.

Н. Н. ПОНОМАРЕВ, Н. А. РУБЦОВ

### РАДИАЦИОННО-КОНДУКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН В ПЛОСКОМ СЛОЕ РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЫ

Радиационно-кондуктивный теплообмен (РКТ) в поглощающих, излучающих и произвольным образом рассеивающих средах представляет собой сложный взаимосвязанный процесс переноса тепловой энергии, в котором помимо теплового излучения учитывается теплопроводность среды. В связи с различной природой рассматриваемых при этом механизмов переноса энергии математическая формулировка соответствующих краевых задач, как известно, сводится к системе нелинейных интегродифференциальных уравнений, аналитическое решение которой в общем случае не представляется возможным. В то же время практический интерес к постановкам такого рода задач вызван их многочисленными приложениями в различных областях науки и техники. В частности, важным приложением поставленной ниже задачи РКТ является исследование основных закономерностей теплообмена в слоях дисперсных и теплоизоляционных материалов. Последние применительно к различным задачам криотехники широко используются в виде вакуумно-порошковой и вакуумно-многослойной теплоизоляции, работающей при температурах ниже 300 К. При этом структурные особенности этих материалов диктуют необходимость учитывать эффекты, связанные с рассеянием энергии излучением.

Наиболее обстоятельно принципиальные стороны РКТ в плоском слое изотропно рассеивающей серой среды рассмотрены в работе Р. Висканты [1]. В этой работе дается строгая постановка задачи в виде системы двух нелинейных интегродифференциальных уравнений, численное решение которой проведено методом прямой итерации. Здесь представлен подробный анализ результатов решения, вскрывающий характерные особенности комбинированного теплообмена. Заслуживает внимания точное решение задачи, изложенной в монографии М. Н. Опискина [2], где решение уравнения переноса излучения проведено методом разложения по собственным функциям Кейса. В приближении модели двух потоков в [3] найдено численное решение задачи РКТ в плоском слое серой излучающей, поглощающей и рассеивающей сред. Значения радиационных составляющих тепловых потоков, рассчитанные по этой методике, существенно занижены в случае, когда излучение в переносе тепловой энергии преобладает. Приближенное аналитическое решение задачи получено в [4] на основе упрощенного представления интеграла в системе интегродифференциальных уравнений с помощью трехузловой квадратурной формулы А. Маркова. Следует отметить, что полученные аналитические выражения для кондуктивной составляющей могут давать большие погрешности, когда доля энергии, переданная излучением, преобладает. Попытка приближенного решения задачи РКТ в плоском слое поглощающей и анизотропно рассеивающей сред содержится в [5]. Здесь рассмотрена методика решения задачи РКТ в плоском слое среды с анизо-

тропным рассеянием. К сожалению, представленные в этой работе результаты малоэффективны с точки зрения анализа и сопоставлений их с результатами других исследователей.

Анализируя состояние вопроса в целом, необходимо отметить слабую изученность влияния анизотропного рассеяния на теплообмен в рассматриваемых условиях. Точные численные решения такого рода задач, особенно в случаях с преобладанием радиационной составляющей в тепловом потоке чрезвычайно трудоемки даже для современных ЭВМ. В этой связи разработка простых, но физически реальных моделей процесса, а также эффективных алгоритмов расчета продолжает оставаться актуальной задачей.

В настоящей работе рассматривается решение задачи о стационарном радиационно-кондуктивном теплообмене в поглощающей, излучающей и анизотропно рассеивающей серой среде, заключенной между двумя неограниченными изотермическими черными пластинами. Уравнение сохранения энергии и соответствующие граничные условия можно представить в виде

$$\frac{d}{dy} \left( \lambda \frac{dT}{dy} \right) = \alpha (\eta_0 - \eta_*), \quad (1)$$

$$T = T_1, \quad y = 0, \quad (2)$$

$$T = T_2, \quad y = L.$$

Здесь  $\eta_0 = 4n^2\sigma_0 T^4$  — плотность потока объемного равновесного излучения в точке  $y$ ;  $\alpha$  — коэффициент поглощения объемного излучения;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности;  $n$  — показатель преломления среды;  $y$  — текущая координата;  $L$  — толщина слоя;  $\eta_*$  — локальная объемная плотность потока падающего излучения, которая определяется из соотношения

$$\eta_*(y) = 2\pi \int_{-1}^{+1} I(y, \mu) d\mu. \quad (3)$$

В выражении (3)  $\mu = \cos \theta$ ,  $\theta$  — угол между направлением распространения излучения и осью  $y$ , причем  $-1 \leq \mu \leq 1$ .

$I(y, \mu)$  — интенсивность монохроматического излучения, определяемая из уравнения переноса энергии излучения:

$$\mu \frac{\partial I}{\partial y} = -kI + \frac{\beta}{2} \int_{-1}^{+1} \gamma(\mu, \mu') I(y, \mu') d\mu' + \alpha \frac{\eta_0}{4\pi}, \quad (4)$$

где  $\beta$  — коэффициент рассеяния объемного излучения;  $k = \alpha + \beta$  — коэффициент ослабления излучения;  $\gamma(\mu, \mu')$  — индикатриса однократного рассеяния, постулируемая в виде

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \gamma(\mu, \mu') d\mu = 1, \quad \gamma(\mu, \mu') = \sum_{n=0}^N a_n P_n(\mu) P_n(\mu'),$$

где  $P_n$  — полином Лежандра  $n$ -го порядка. К уравнению (4) необходимо добавить соответствующие граничные условия

$$I(0, \mu) = \frac{E_{эф1}}{\pi}, \quad \mu > 0, \quad (5)$$

$$I(L, \mu) = \frac{E_{эф2}}{\pi}, \quad \mu < 0,$$

где  $E_{эф*i*}$  — плотность потока полусферического эффективного излучения границы слоя  $i = 1, 2$ .

Предполагая для решения задачи (1)–(5) использование метода прямой итерации, отметим, что решение уравнения (4) с граничными условиями (5) выделяется при заданном значении  $\eta_0(y)$  на каждой итерации в самостоятельную задачу. Для решения этой задачи воспользуемся модифицированным методом средних потоков (СП-метод), рассмотренным в работе [7]. В основе СП-метода лежит замена линейного уравнения переноса излучения эквивалентной ему системой нелинейных дифференциальных уравнений относительно осредненных в верхней и нижней полусфере значений интенсивностей излучения. Уравнения СП-системы получаются путем последовательного интегрирования уравнения (4) по  $\mu$  соответственно с весом 1 и  $\mu$  в пределах от 1 до  $-1$  и введением соответствующих коэффициентов переноса.

Преобразуя уравнения (1) и (2) в систему СП-метода к безразмерному виду, сводим нашу проблему к следующей нелинейной краевой задаче:

$$\frac{d}{dh} \left( N \frac{d\theta}{dh} \right) = (1 - \omega) (\theta^4 - \Phi_*); \quad (6)$$

$$\theta = \theta_1, \quad h = 0, \quad (7)$$

$$\theta = \theta_2, \quad h = h_0;$$

$$\frac{d}{dh} \left( \frac{\Phi_*^+(h)}{m_+(h)} + \frac{\Phi_*^-(h)}{m_-(h)} \right) + (1 - \omega) (\Phi_*^+(h) + \Phi_*^-(h)) = (1 - \omega) \theta^4(h), \quad (8)$$

$$\frac{d}{dh} (\delta_+(h) \Phi_*^+(h) + \delta_-(h) \Phi_*^-(h)) + \left( 1 - \frac{a_1 \omega}{3} \right) \left( \frac{\Phi_*^+(h)}{m_+(h)} + \frac{\Phi_*^-(h)}{m_-(h)} \right) = 0;$$

$$\Phi_*^+(0) = \varepsilon_1 \frac{\theta_1^4}{2} + r_1 \Phi_*^-(0), \quad (9)$$

$$\Phi_*^-(h_0) = \varepsilon_2 \frac{\theta_2^4}{2} + r_2 \Phi_*^+(h_0).$$

Здесь  $\theta = \theta(h) = T(h)/T_*$  — безразмерная температура;  $h = k \cdot y$ ,  $h_0 = k \cdot L$  — оптические глубины и толщины слоя;  $\omega = \beta/k$  — альбеда однократного рассеяния;  $\Phi_* = \eta_*(h)/4n^2\sigma_0 T_*^4$  — безразмерная плотность потока объемного излучения, падающего в сечении  $h$ ;  $N = \lambda k/4n^2\sigma_0 T_*^3$  — безразмерный радиационно-кондуктивный параметр;  $T_*$  — определяющая температура ( $T_* = T_1$ );  $a_1$  — первый угловой момент индикатрисы;  $\varepsilon_i, r_i$  — излучательная и отражательная способности границ  $i = 1, 2$ . В системе (8), (9) приняты следующие обозначения:

$$\Phi_*^{+(-)}(h) = \frac{2\pi \int_0^{1(0)} I(h, \mu) d\mu}{4n^2\sigma_0 T_*^4}, \quad m_{\pm}(h) = \frac{\Phi_*^{\pm}(h)}{\Phi_*^{\pm}(h)}, \quad \delta_{\pm}(h) = \frac{P_{\pm}(h)}{\Phi_*^{\pm}(h)},$$

где

$$\Phi_*^{+(-)}(h) = \frac{2\pi \int_0^{1(0)} I(h, \mu) \mu d\mu}{4n^2\sigma_0 T_*^4}, \quad P^{+(-)}(h) = \frac{2\pi \int_0^{1(0)} I(h, \mu) \mu^2 d\mu}{4n^2\sigma_0 T_*^4}. \quad (10)$$

Заметим, что  $\Phi_*(h) = \Phi_*^+(h) + \Phi_*^-(h)$ , а  $\Phi(h) = \Phi^+(h) - \Phi^-(h)$ , где  $\Phi(h)$  — безразмерная плотность потока полусферического результирующего излучения в сечении  $h$ . Решение СП-системы (8)–(10) предполагает нелинейный итерационный процесс, обладающий высокой скоростью сходимости. Коэффициенты переноса  $m_{\pm}, \delta_{\pm}$  уточняются на каждом шаге итерации по методике, изложенной в [7].

Анизотропия учитывается путем представления индикатрисы однократного рассеяния в виде разложения в ряд по полиномам Лежандра. В настоящей работе рассматривалась трехчленная индикатриса

$$\gamma(\xi) = a_0 + a_1 P_1(\xi) + a_2 P_2(\xi), \quad (11)$$

где  $\xi$  — косинус угла между направлениями падающего и рассеянного лучей. В работе [8], а также в наших расчетах была обнаружена слабая чувствительность полусферических потоков излучения к контуру индикатрисы (11). Это позволило выделить в качестве определяющего параметра индикатрисы некоторую интегральную характеристику рассеяния

$$F = \frac{1}{2} \int_0^1 \gamma(\xi) d\xi,$$

имеющую смысл доли излучения, рассеянного частицей вперед. Для индикатрисы вида (11) параметр  $F$  может быть непосредственно выражен через средний косинус рассеяния

$$F = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \bar{\xi}, \quad \bar{\xi} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \gamma(\xi) \xi d\xi.$$

Значение  $F = 0,5$  определяет изотропное и релеевское рассеяние. Случай  $F = 0,93$  в наших условиях соответствует максимально вытянутой индикатрисе:

Задача (6), (7) с заданным распределением  $\Phi_*(h)$  аппроксимировалась разностной краевой задачей, представляющей собой нелинейную систему алгебраических уравнений, для решения которой применялся метод Ньютона. В решении общей нелинейной системы (6)–(9) использовался следующий итерационный процесс. В качестве начального приближения для  $\theta(h)$  принималось линейное распределение температуры в слое ( $N = \infty$ ), затем решалась СП-система (8)–(10) и определялось  $\Phi_*(h)$ . Далее решалась краевая задача (6), (7) и находилось новое распределение температуры, которое вновь использовалось в решении СП-системы, и т. п. Итерационный процесс повторяется до тех пор, пока не будет достигнуто требуемое совпадение последовательных приближений. Отметим, что скорость сходимости итераций СП-метода не зависит от метода решения задачи (6), (7). В процессе расчетов было обнаружено, что характер сходимости процесса Ньютона для данного класса задач определяется оптической толщиной  $h_0$  и параметром  $(1 - \omega)/N$ . Замедление сходимости наблюдается при больших  $h_0$  и малых значениях  $\omega$  и  $N$ .

Ниже представлены некоторые результаты численного решения системы (6)–(9) для случая абсолютно черных границ слоя ( $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ ). Рассматривается расчет величин  $\theta, d\theta/dh, \Phi, \Phi^{\pm}, \Phi_*$ , а также суммарного потока тепла, определяемого соотношением

$$\psi = -\frac{d\theta}{dh} + \frac{\Phi}{4N} \Big|_{h=0}$$

в зависимости от параметров  $N, \omega, \theta_2, h_0$  и  $F$ . Для оценки точности решения полученные результаты сопоставлялись с данными Р. Висканты и

Таблица 1

Тепловые потоки на стенке для  $h_0=1; \theta_2=0,5; F=0,5$

N	$\omega$	$-\frac{d\theta}{dh}$		$\Phi(0)$		$\psi$	
		[11]	Н. Р.	[11]	Н. Р.	[11]	Н. Р.
1	0,5	0,4967	0,4969	0,5626	0,5627	0,6374	0,6376
	0,25	0,5495	0,5640	0,5393	0,5350	1,8978	1,9037
0,1	0,5	0,5175	0,5250	0,5428	0,5403	1,8745	1,8758
	0,75	0,4863	0,4899	0,5404	0,5404	1,8373	1,8410

Тепловые потоки на стенке слоя для  $h_0=1$ ;  $\theta_2=0,5$ ;  $N=1$ .

$\omega$	$-\frac{d\theta}{dh} _{h=0}$			$\Phi(0)$			$\psi$		
	$F=0,5$	$F=0,75$	$F=0,93$	$F=0,5$	$F=0,75$	$F=0,93$	$F=0,5$	$F=0,75$	$F=0,93$
0,25	0,4893	0,5001	0,5006	0,5652	0,5843	0,5989	0,6406	0,6461	0,6504
0,50	0,4969	0,4981	0,4991	0,5627	0,6018	0,6340	0,6376	0,6486	0,6576
0,75	0,4962	0,4972	0,4980	0,5513	0,6121	0,6658	0,6340	0,6502	0,6645

М. Н. Описика [1—2]. В табл. 1 сравниваются с расчетом данные работы [1]. Сравнение с данными работы [2] для  $h_0=1$ ,  $N=0,1$  и  $N=0,05$  дало максимальное расхождение менее 3%. Таким образом, результаты сопоставлений с двумя различными методами [1—2] свидетельствуют о достаточно хорошей точности используемой методики. В табл. 2 приведены результаты расчетов суммарных потоков, а также его составляющих  $-\frac{d\theta}{dh}|_{h=0}$  и  $\Phi(0)$  в зависимости от параметров  $F$  и  $\omega$ . Как видно из таблицы, в случае, когда радиационная и кондуктивная составляющие потока тепла одного порядка ( $N=1$ ), в области умеренных оптических толщин ( $h_0 \sim 1$ ) анизотропия рассеяния почти не влияет на температурные градиенты у стенки, но заметно увеличивает потоки излучения, особенно в случае слабого поглощения. Отметим слабую зависимость температурного градиента у стенки от альбедо  $\omega$  при  $N=1$ .

В случае больших оптических толщин параметр  $F$  оказывает некоторое влияние на температурный градиент у стенки (рис. 1). По мере снижения параметра  $N$  (рис. 2) температурные поля в слое заметно деформируются. На рис. 3 представлено распределение безразмерной плотности потока объемного излучения  $\Phi_*$  по толщине слоя в зависимости от параметра  $F$ . При  $\omega=0,5$ ,  $N=1$  и  $h_0=1$  отмечается слабое влияние анизотропии рассеяния на уровень значений  $\Phi_*$ . Небольшое влияние  $F$  проявляется лишь в областях слоя, примыкающих к его границам. Для оптически толстых сред ( $h_0=5$ ) влияние параметра  $F$  на величину  $\Phi_*$  у стенки оказывается существенным. Рис. 4 иллюстрирует влияние параметра  $F$  на локальные значения безразмерных составляющих радиационного потока,  $\Phi^\pm$  для случая  $N=1$ ,  $h_0=1$ . Как видно из рисунка, анизотропия рассеяния оказывает диаметрально противоположное влияние на величины  $\Phi^+$  и  $\Phi^-$ . Уровень локальных значений безразмерных результирующих потоков излучения  $\Phi$  с ростом  $F$  увеличивается (рис. 5). Результаты расчетов показывают, что влияние анизотропии рассеяния на величину  $\Phi$  растет с ростом оптической толщины. На рис. 6 приведены зависимости локального результирующего потока излучения от параметра  $N$ . Можно отметить не очень сильное влияние  $N$  на величину  $\Phi$ . На рис. 7 представлена зависимость локальных значений температурных градиентов  $-\frac{d\theta}{dh}$  от  $N$  для  $h_0=1$  и  $\omega=0,25$ , свидетельствующая об определяющем влиянии параметра  $N$  на кондуктивную составляющую.

В заключение кратко остановимся на анализе коэффициентов переноса, используемых в процессе решения СП-системы и играющих важную роль в приближенных моделях теории переноса излучения.

На рис. 8 показано локальное изменение коэффициента  $\delta = P/U$ , где  $P = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^{+1} I(h, \mu) \mu^2 d\mu$  — лучевое давление, а  $U = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^{+1} I(h, \mu) d\mu$  — объ-

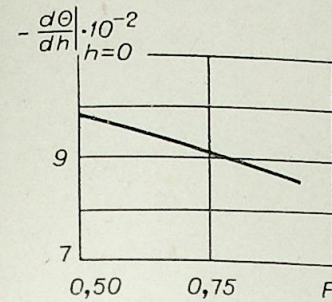


Рис. 1. Влияние параметра  $F$  на температурный градиент на стенке.  
 $N=1$ ,  $\omega=0,5$ ,  $\theta_2=0,5$ ,  $h_0=5$ .

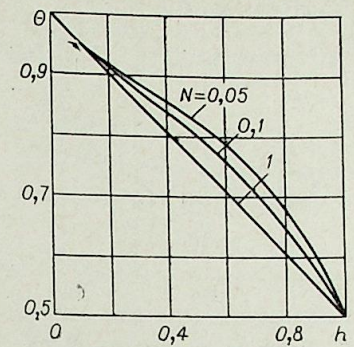


Рис. 2. Влияние параметра  $N$  на распределение температуры.  
 $\omega=0,25$ ,  $\theta_2=0,5$ ,  $h_0=1$ ,  $F=0,5$ .

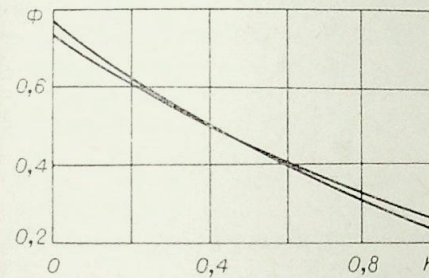


Рис. 3. Влияние параметра  $F$  на локальную безразмерную плотность потока падающего излучения.  
 $N=1$ ,  $\omega=0,5$ ,  $\theta_2=0,5$ ,  $h_0=1$ .

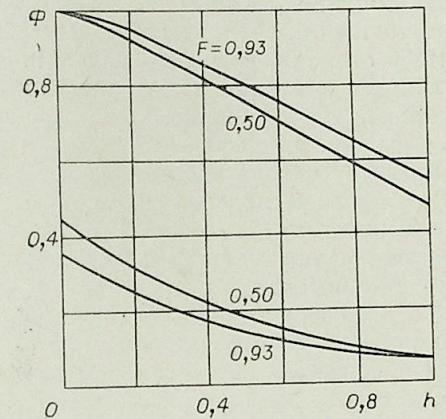


Рис. 4. Влияние параметра  $F$  на распределение безразмерных составляющих потока излучением.  
 $N=1$ ,  $\omega=0,5$ ,  $\theta_2=0,5$ ,  $h_0=1$ .

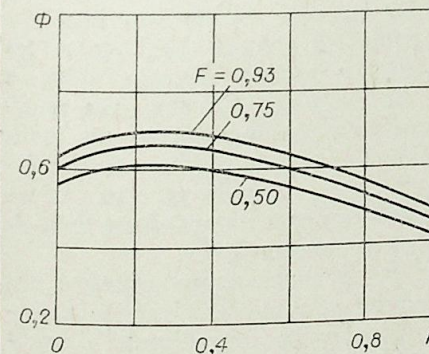


Рис. 5. Влияние параметра  $F$  на локальную безразмерную плотность потока излучением.  
 $N=1$ ,  $\omega=0,5$ ,  $\theta_2=0,5$ ,  $h_0=1$ .

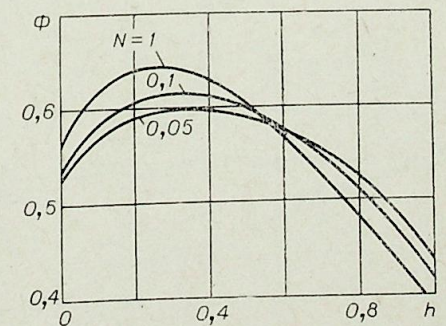


Рис. 6. Влияние параметра  $N$  на локальную безразмерную плотность потока излучением.  
 $\omega=0,5$ ,  $\theta_2=0,5$ ,  $h_0=1$ ,  $F=0,5$ .

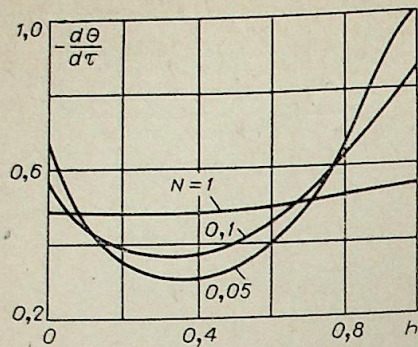


Рис. 7. Влияние параметра  $N$  на локальную безразмерную плотность теплового потока теплопроводностью.  
 $\omega=0,25$ ,  $\theta_2=0,5$ ,  $h_0=1$ ,  $F=0,5$ .

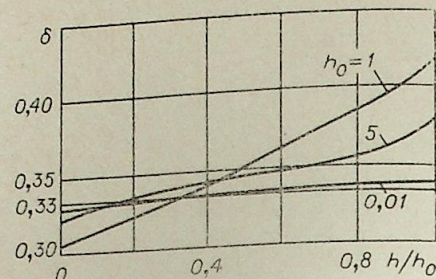


Рис. 8. Влияние оптической толщины  $h_0$  на локальный коэффициент переноса  $\delta$ .

$N=1$ ,  $\omega=0,5$ ,  $\theta_2=0,5$ ,  $F=0,5$ .

емная плотность энергии излучения;  $c$  — скорость света. Как известно, среднее значение  $\delta = 1/3$  служит основой широко известной модели — приближения Эддингтона. Из рис. 8 видно, что при небольших оптических толщинах ( $h_0 \sim 1$ ) наблюдается максимальное отклонение коэффициента  $\delta$  от своего среднего значения. Это обстоятельство связано с тем, что в области значений  $h_0 \sim 1$  анизотропия интенсивности излучения проявляется наиболее сильно.

На рис. 9 показаны локальные изменения коэффициентов  $m_{\pm}$  в зависимости от оптической толщины. Эти коэффициенты входят в уравнения двухпоточковой модели, где принимают свои средние значения, тождественно равные двум. Из рис. 9 следует, что коэффициенты  $m_+$  и  $m_-$  — существенно различны и достигают своего наибольшего отклонения от среднего значения в области  $h_0 \sim 1$ .

Проведенный нами предварительный анализ свидетельствует о том, что уровень локальных значений коэффициентов переноса определяется разнообразными параметрами задачи, включая оптические характеристики среды и гранич, режимные и температурные поля и т. п.

## ВЫВОДЫ

1. Используемый в работе СП-метод решения радиационной части задачи выгодно отличается хорошей сходимостью и достаточно хорошей

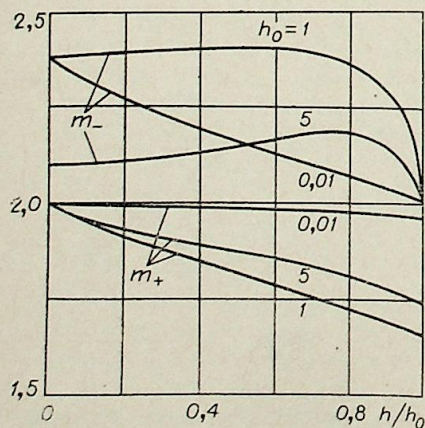


Рис. 9. Влияние оптической толщины  $h_0$  на локальные коэффициенты переноса  $m_+$  и  $m_-$ .

$N=1$ ,  $\omega=0,5$ ,  $\theta_2=0,5$ ,  $F=0,5$ .

точностью, что в значительной степени определило эффективность метода решения задачи РКТ (система (6) — (9)) в целом. Кроме того, в процессе решения СП-системы можно получить непосредственно полный набор точных значений характеристик поля излучения, что позволяет глубже исследовать физическую природу процессов РКТ.

2. В пределах выполненного исследования обнаружено слабое влияние анизотропии рассеяния (параметра  $F$ ) на температурные поля и кондуктивную составляющую потока тепла; напротив, потоки излучения весьма чувствительны к изменениям параметра  $F$ , особенно в области больших оптических толщин.

3. Радиационно-кондуктивный теплообмен в анизотропно-рассеивающей среде является многопараметрическим процессом, характеристики которого определяются лишь в результате полного численного (экспериментального) исследования в каждом конкретном случае.

Институт теплофизики  
СО АН СССР,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
3/VIII 1979

## ЛИТЕРАТУРА

1. Висканта Р. Перенос теплопроводностью и излучением в поглощающих и рассеивающих средах. — Теплопередача. М., Мир, 1965, с. 171—180.
2. Оцисик М. Н. Сложный теплообмен. М., Мир, 1976. 616 с.
3. Берткуа, Себан. Перенос тепла теплопроводностью и излучением в поглощающих и рассеивающих средах. — Теплопередача. М., Мир, 1971, № 2, с. 103—105.
4. Каганер М. Г. Совместный перенос тепла излучением и теплопроводностью в поглощающих и рассеивающих средах. — Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1968, № 6, с. 94—99.
5. Белов Г. Я. Лучисто-кондуктивный перенос тепла в плоском слое поглощающей и рассеивающей среды. — ТВТ, 1973, т. 11, № 4, с. 810—817.
6. Мень А. А., Сергеев О. А. Радиационно-кондуктивный теплообмен в среде с анизотропным рассеянием. — В кн.: Теплообмен, 1974. Советские исследования АН СССР. Национальный комитет по тепло- и массообмену. М., Наука, 1975, с. 12—18.
7. Пономарев Н. Н. О решении задач переноса лучистой энергии модифицированным методом средних потоков. — Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1979, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3, с. 64—68.
8. Иванс, Чу, Черчилль. Влияние анизотропии рассеяния на перенос излучения. — Теплопередача. М., Мир, 1965, т. 3.

Ю. П. ГУПАЛО, А. Д. ПОЛЯНИН,  
П. А. ПРЯДКИН, Ю. С. РЯЗАНЦЕВ

О НЕСТАЦИОНАРНОМ ТЕПЛООБМЕНЕ ЧАСТИЦЫ,  
ДВИЖУЩЕЙСЯ С ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТЬЮ  
В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Нестационарный конвективный теплообмен частиц с окружающей средой встречается в метеорологии, химической технологии, металлургии. При этом наряду со временем выхода на стационарный режим значительный интерес представляет взаимосвязь тепловой и гидродинамической стадий процесса.

Рассмотрим нестационарный конвективный теплообмен сферы, движущейся прямолинейно с произвольным законом изменения скорости от времени  $U(t)$  в идеальной несжимаемой жидкости. Предположение об

идеальности жидкости, т. е. о малости толщины вязкого пограничного слоя по сравнению с характерным размером частицы (или с толщиной теплового пограничного слоя при больших числах Пекле) оправдывается, например, для жидких металлов, используемых в качестве теплоносителей в атомных реакторах [1]. Считаем, что температуры вдали от частицы  $T_\infty$  и на ее поверхности  $T_0$  постоянны, а число Пекле  $Re = aU_*/\chi$  ( $a$  — радиус

сферы,  $\chi$  — коэффициент температуропроводности,  $U_*$  — характерная скорость частицы) велико, что позволяет пренебречь тангенциальным переносом тепла вдоль поверхности частицы (см. рисунок).

В предположении потенциальности поля течения (что всегда имеет место при движении из состояния покоя) соответствующая безразмерная краевая задача в сферической системе координат, связанной с центром частицы (угол  $\theta$  отсчитывается от направления набегающего потока), имеет вид

$$\Delta\varphi = 0, \quad (1)$$

$$r \rightarrow \infty, \varphi \rightarrow U(t)r \cos \theta; \quad r = 1, \partial\varphi/\partial r = 0,$$

где  $U(t)$  — скорость частицы;  $r, \theta$  — сферические координаты,

$$\partial T/\partial t + (v\nabla)T = Pe^{-1}\partial^2 T/\partial r^2, \quad (2)$$

$$T(t, r, \pi) = 1; \quad T(t, 1, \theta) = 0, \quad T(t, \infty, \theta) = 1;$$

$$T = (T_* - T_0)/(T_\infty - T_0);$$

$$v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial\psi}{\sin\theta}; \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\psi}{\partial r}.$$

Здесь  $\varphi$  и  $\psi$  — потенциал скоростей и функция тока,  $T_*$  — температура; характерным масштабом времени является  $t_* = a/U_*$ .

Задачу (1), (2) рассмотрим с двумя различными начальными условиями для температуры

$$\text{случай } \alpha: T(0, r, \theta) = 1;$$

$$\text{случай } \beta: T(0, r, \theta) = T^0(r, \theta).$$

Здесь  $T^0(r, \theta)$  соответствует стационарному режиму движения жидкости и теплообмена, который определяется из решения задачи (1), (2) при  $U \equiv U(0)$  (см. формулы (4), (5) и (9)); условие  $\alpha$  означает, что при  $t < 0$  температура в потоке постоянна, а перенос к поверхности начинается внезапно в момент  $t = 0$ . В частном случае стационарного поля обтекания  $U(t) = \text{const}$  задача с начальным условием  $\alpha$  рассмотрена в [2].

Решение задачи (1) дает следующее выражение для функции тока вблизи поверхности частицы

$$\psi(t, r, \theta) = 3/2 U(t)(r-1) \sin^2 \theta. \quad (3)$$

Задача (2), (3) в переменных

$$\eta = Pe^{1/2}(r-1) \sin^2 \theta, \quad \xi = \xi(t, \theta), \quad (4)$$

$$\partial\xi/\partial t - 3/2 U(t) \sin \theta \partial\xi/\partial\theta = \sin^4 \theta$$

сводится к уравнению теплопроводности [4]

$$\partial T/\partial \xi = \partial^2 T/\partial \eta^2,$$

$$T(\eta, 0) = 1; \quad T(0, \xi) = 0, \quad T(\infty, \xi) = 1,$$

решение которого имеет вид

$$T(\eta, \xi) = \text{erf}(1/2\eta\xi^{-1/2}), \quad (5)$$

$$(T^0(r, \theta) = T(\eta, \xi), \quad \xi_0 = \xi(0, \theta)).$$

Первыми интегралами уравнения для  $\xi$  в (4) являются

$$u(t, \theta) = C_1, \quad u(t, \theta) = \text{tg} \frac{\theta}{2} \exp\left(\frac{3}{2} \int_0^t U(\xi) d\xi\right), \quad (6)$$

$$\xi = \Lambda(\theta, C_1) + C_2, \quad \Lambda(a, b) = \frac{2}{3} \int_a^\pi U^{-1}(t(\xi, b)) \sin^3 \xi d\xi, \quad (7)$$

где функция  $t(\theta, C_1)$  получена разрешением уравнения (6) относительно  $t$ , т. е. и  $u(t(\theta, C_1), \theta) = C_1$ .

Удовлетворяя начальным условиям и учитывая (5), находим конкретные выражения для  $\xi$ :

$$\xi_\alpha = \Lambda(\theta, u(t, \theta)) - \Lambda(2 \text{arc tg} u(t, \theta)), \quad u(t, \theta), \quad (8)$$

$$\xi_\beta = \xi_\alpha + \xi_0; \quad \xi_0 = 2/3 U^{-1}(0)(2/3 + x - 1/3x^3), \quad x = (1-u^2)(1+u^2)^{-1}, \quad (9)$$

где функции  $u$  и  $\Lambda$  определены в (6), (7). Здесь и в дальнейшем все величины, относящиеся к случаям  $\alpha$  и  $\beta$ , помечаются соответственно этими же индексами.

Для локального и полного тепловых потоков на поверхность частицы имеем

$$j(\theta, t) = \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1} = \sqrt{\frac{Pe}{\pi}} \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{\xi(t, \theta)}}, \quad (10)$$

$$I(t) = 2\pi \int_0^\pi \sin \xi j(t, \xi) d\xi.$$

Полученные выражения позволяют по заданному закону изменения скорости частицы от времени  $U = U(t)$  получить распределение температуры и тепловые потоки.

В качестве иллюстрации применения полученных выше формул рассмотрим теплообмен сферы, движущейся по закону изменения скорости со временем  $U(t) = (1 + 3t)^{-1}$ . В этом случае в первых интегралах (6), (7) имеем следующие выражения для функций  $u$  и  $\Lambda$ :

$$u(t, \theta) = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} (1 + 3t)^{1/2}, \quad \Lambda(\theta, C_1) = \frac{16}{9} C_1^2 \cos^6 \frac{\theta}{2}.$$

Отсюда для функций  $\zeta$  находим

$$\zeta_\alpha = \frac{16}{9} u^2(t, \theta) \left[ \cos^6 \frac{\theta}{2} - (1 + u^2(t, \theta))^{-3} \right],$$

$$\zeta_\beta = \zeta_\alpha + \zeta_0; \quad \zeta_0 = \frac{2}{3} \left( \frac{2}{3} + x - \frac{1}{3} x^3 \right), \quad x = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}.$$

С учетом указанного тепловые потоки определяются по формулам (10), откуда видно, что при  $t \rightarrow 0$   $I_\alpha \rightarrow \infty$  (это является следствием несогласованности начального и граничного условий в (2)). При больших временах тепловые потоки выходят на один и тот же режим и стремятся к нулю обратно пропорционально  $\sqrt{t}$ , в то время как скорость частицы стремится к нулю пропорционально  $t^{-1}$ .

Из результатов работы (5) следует, что указанный метод интегрирования системы (1), (2) обобщается на случай движения тела вращения произвольной формы с переменной скоростью в идеальной жидкости.

Институт проблем механики  
АН СССР,  
Москва

Поступила в редакцию  
17/XI 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М., Наука, 1967.
2. Chao B. T. Transient heat and mass transfer to translating droplet.— Trans. ASME., Ser. C. J., Heat Transfer, 1969, v. 91, № 2.
3. Седов Л. И. Механика сплошной среды, т. 2. М., Наука, 1973.
4. Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Прядкин П. А., Рязанцев Ю. С. О нестационарном массообмене капли в потоке вязкой жидкости.— Прикладная математика и механика, 1978, т. 42, вып. 3.
5. Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С. Диффузия к частице при больших числах Пекле в случае произвольного осесимметричного обтекания вязкой несжимаемой жидкостью.— Прикладная математика и механика, 1976, т. 40, вып. 5.

УДК 536.33 : 536.25

С. В. СОЛОВЬЕВ

### РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ПРОВОДОВ С ПОКРЫТИЕМ ПРИ РАДИАЦИОННО-КОНВЕКТИВНОМ НАГРЕВЕ

Правильный выбор технологических режимов эмалирования имеет исключительно важное значение для обеспечения высокого качества изоляции проводов [1]. Одним из таких режимов является температурный режим эмалирования. Знание температурного поля системы проволоки — покрытие (лак) необходимо для выяснения механизма и расчета процессов тепло- и массопереноса при изготовлении проводов.

Известно [2], что если направления теплового потока и потока удаляемых паров растворителя из покрытия совпадают, то скорость сушки возрастает. Этим качеством обладает радиационный подвод электромагнитной энергии. Конвективная же сушка сравнительно замедлена из-за несовпадения потока тепла (направленного внутрь слоя) и потока удаляемых паров (изнутри наружу). Поэтому на практике целесообразнее иметь первый случай.

Решение системы дифференциальных уравнений, описывающих процессы переноса тепла и массы, представляет большие трудности. Приходится делать допущения. Так, в [3] принято, что температура постоянна и одинакова по всему сечению изоляции провода, что требует дополнительного исследования. Отсутствие литературы по данному вопросу и определило цель этой работы.

В настоящей работе рассматривается задача о нахождении нестационарного поля температур для системы проволока — покрытие с целью выяснить, существует ли перепад температур в слое покрытия; если существует, то каковы его величина, направление и роль в процессе сушки покрытия. В связи со сложностью задачи, описывающей теплообмен при эмалировании, здесь представлена упрощенная модель теплообмена для двух крайних случаев: 1. Покрытие является прозрачной (диатермичной) средой и лучистый поток со стенок эмалипечи проходит через него и полностью попадает на проволоку; 2) покрытие является непрозрачной средой и лучистый поток на проволоку не проходит.

Между этими предельными случаями находятся реальные процессы нагрева такой системы.

Для обоих случаев предполагалось, что распределение температур в проволоке равномерно по радиусу, а слой покрытия в силу его малой толщины (порядка  $10^{-5}$  м) принимался плоским. Теплофизические свойства проволоки и покрытия, а также температуры воздуха и стенок эмалипечи считались постоянными. Рассматривался процесс пленкообразования, покрытие считалось твердым телом (массопере-

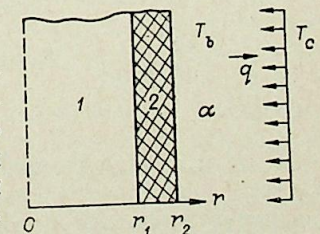


Рис. 1. Модель задачи.  
1 — проволока; 2 — покрытие.

пос не учитывался). Такая модель реализуется при эмалировании проводов из расплава.

На рис. 1 приведена рассматриваемая модель. Со стенок эмальпечи с абсолютной температурой  $T_c$  падает лучистый поток на систему проволока — покрытие. Кроме этого, тепло от теплоносителя (воздуха) в печи со температурой  $T_b < T_c$  за счет конвекции подводится к системе (отводится от системы). Необходимо определить распределение температуры в слое покрытия.

Случай 1. Покрытие представляет собой диатермичную среду. Краевая задача описывается следующими уравнениями:

$$\frac{dT_1}{d\tau} = \frac{2\varepsilon\sigma}{c_1\rho_1r_1} (T_c^4 - T_1^4) + \frac{2\lambda_2}{c_1\rho_1r_1} \left( \frac{\partial T_2}{\partial r} \right)_{r=r_1}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \tau} = a_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2}, \quad r_1 \leq r \leq r_2; \quad (2)$$

$$T_1(0) = T_2(r, 0) = T_n = \text{const}; \quad (3)$$

$$-\lambda_2 \left( \frac{\partial T_2}{\partial r} \right)_{r=r_2} + \alpha [T_b - T_2(r_2, \tau)] = 0; \quad (4)$$

$$T_1(\tau) = T_2(r_1, \tau). \quad (5)$$

Изменение температуры  $T_1$  в проволоке (уравнение (1)) обусловлено падающим лучистым потоком со стенок печи и теплопроводностью покрытия. Уравнение (3) выражает начальное условие и уравнения (4,5) — граничные условия на внешней и внутренней поверхностях покрытия.

Взяв за масштабы по координате и температуре радиус проволоки  $r_1$  и температуру стенок печи  $T_c$  преобразуем систему уравнений (1) — (5) к безразмерному виду

$$\frac{dT}{dFo} = 2Sk(1 - T^4) + 2k_\lambda \left( \frac{\partial \theta}{\partial R} \right)_{R=1}; \quad (6)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = k_a \frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2}, \quad 1 \leq R \leq R_2; \quad (7)$$

$$T(0) = \theta(R, 0) = \theta_n; \quad (8)$$

$$-\left( \frac{\partial \theta}{\partial R} \right)_{R=R_2} + Bi[\theta_b - \theta(R_2, Fo)] = 0; \quad (9)$$

$$T(Fo) = \theta(1, Fo). \quad (10)$$

Случай 2. Покрытие представляет собой непрозрачное тело. Краевая задача в безразмерной форме описывается уравнениями (11) — (15):

$$\frac{dT}{dFo} = 2k_\lambda \left( \frac{\partial \theta}{\partial R} \right)_{R=1}; \quad (11)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = k_a \frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2}, \quad 1 \leq R \leq R_2; \quad (12)$$

$$T(0) = \theta(R, 0) = \theta_n; \quad (13)$$

$$-\left( \frac{\partial \theta}{\partial R} \right)_{R=R_2} + Bi[\theta_b - \theta(R_2, Fo)] + \frac{Sk}{k_\lambda} [1 - \theta^4(R_2, Fo)] = 0; \quad (14)$$

$$T(Fo) = \theta(1, Fo). \quad (15)$$

В этом случае изменение температуры проволоки в (11) происходит за счет теплопроводности покрытия, наружная поверхность которого поглощает лучистый поток тепла со стенок печи и участвует в конвективном теплообмене с теплоносителем (граничное условие (14)).

В работе приняты следующие обозначения:  
 $r_1, r_2$  — радиусы проволоки и покрытия;  $r$  — текущий ради-

ус;  $T_1, T_2$  — абсолютные температуры проволоки и покрытия;  $\alpha$  — коэффициент теплообмена между покрытием и теплоносителем;  $\varepsilon$  — эффективная степень черноты;  $\sigma = 5,67 \times 10^{-8}$  Вт/м<sup>2</sup> К<sup>4</sup> — постоянная Стефана — Больцмана;  $c_1, \rho_1$  — удельная теплоемкость и плотность проволоки;  $\lambda_1, \lambda_2$  — коэффициенты теплопроводности проволоки и покрытия; время;  $a_1, a_2$  — коэффициенты температуропроводности проволоки и покрытия;  $R = r/r_1$  — безразмерный текущий радиус;  $T, \theta$  — безразмерные температуры проволоки и покрытия; число Фурье —  $Fo = a_1\tau/r_1^2$ ; радиационное число Старка —  $Sk = \varepsilon\sigma T_c^3 r_1/\lambda_1$ ; число Био —  $Bi = \alpha r_1/\lambda_2$ ;  $\theta_n, \theta_b$  — безразмерные начальная температура и температура теплоносителя;  $\Delta Fo, \Delta R$  — шаг по времени и координате; перепад температуры по толщине покрытия —  $\Delta T = T_2(r_2, \tau) - T_2(r_1, \tau)$ .

Обе системы уравнений в силу их нелинейности решались численно. Уравнения (7) и (12) аппроксимировались явной разностной схемой 1-го порядка точности по времени и 4-го — по координате [4]. Шаг по времени  $\Delta Fo = (\Delta R)^2/6k_a$  выбирался из условия устойчивости. Производные по координатам в (6), (9), (11), (14) аппроксимировались по трехточечным формулам. В конечно-разностной форме система уравнений (6) — (10) имеет вид

$$\frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta Fo} = 2Sk [1 - (T^n)^4] + k_\lambda \frac{4\theta_1^n - 3\theta_0^n - \theta_2^n}{\Delta R}; \quad (16)$$

$$\theta_i^{n+1} = \frac{1}{6} (\theta_{i+1}^n + 4\theta_i^n + \theta_{i-1}^n); \quad (17)$$

$$T^0 = \theta_i^0 = \theta_n; \quad (18)$$

$$-\frac{1}{2\Delta R} (\theta_{N-2}^{n+1} - 4\theta_{N-1}^{n+1} + 3\theta_N^{n+1}) + Bi(\theta_b - \theta_N^{n+1}) = 0; \quad (19)$$

$$T^n = \theta_0^n. \quad (20)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots; \quad i = 0, 1, 2, \dots, N,$$

где  $T^n = T(Fo_n)$ ;  $\theta_i^n = \theta(R_i, Fo_n)$ .

Аналогично записывается и система уравнений (11) — (15), искомая температура  $\theta^4(R_2, Fo)$  на  $(n+1)$ -м слое по времени принималась равной значению на  $n$ -м слое, при этом ошибка аппроксимации не превышала 0,001%. Численное решение реализовывалось на ЭВМ БЭСМ-4. Число шагов по координате  $N$  принималось равным 4 и 8. Оказалось, что погрешность при этом не превышает  $10^{-5}$ , поэтому в целях экономии машинного времени полагалось  $N=4$ . В результате численного решения были получены поля температур в покрытии для обоих случаев. Расчеты проводились при  $T_b = 573$  К,  $T_n = 300$  К,  $T_c = 873$  и 1000 К,  $r_1 = 5 \times 10^{-4}$ ,  $r_2 = 5,5 \times 10^{-4}$  м (для медной проволоки).

На рис. 2 представлено распределение температуры провода в зависимости от безразмерного времени для первого случая. Из рисунка видно, что начиная с начального момента времени за счет конвекции и излучения температура провода растет. При достижении температуры теплоносителя  $\theta_b$  (причем ее достижение тем скорее, чем больше коэффициент теплообмена — кривые 5, 3, а этого можно достичь при применении принудительного обдувания проволоки, как это делается в печах агрегатов NORE-128, VRE-144 фирмы Спикме (Италия) [1]) происходит выравнивание конвективного и лучистого потоков тепла. Далее определяющую роль играет излучение и температура провода продолжает расти. Однако тенденция роста здесь иная: большие температуры достигаются при меньших коэффициентах теплообмена и больших эффективных степенях черноты  $\varepsilon$  (кривые 1 и 3, 2 и 4). Итак, из анализа этого рисунка просматриваются две зоны, в которых повышение температуры провода происходит описанным выше образом. Для случая непрозрачного по-

Результаты сравнения температуры провода для двух предельных случаев ( $T_c = 873$  К)

№ п.п.	$\alpha$ , Вт/м <sup>2</sup> К	$\epsilon$	Случай 1	Случай 2	$\tau$ , с
			$T_1$ , К	$T_1$ , К	
1	30	0,8	589,680	586,183	10
2	30	0,4	486,898	485,398	
3	100	0,8	623,594	617,840	
4	100	0,4	553,622	550,609	

жит линии 5 (5 К на толщине 50 мкм). «Отрицательный» в том смысле, что перепад температур не будет способствовать уносу растворителя из покрытия (направления теплового потока и потока удаляемых паров растворителя противоположны). В данном случае для всех рассмотренных режимов (линии 1—6) доминирует конвективный теплообмен. С течением времени поле температур в покрытии перестраивается. При  $Fo = 5919$  (15 с.) показана такая перестройка (преобладает лучистый теплообмен). Наибольший «положительный» перепад температур — направления теплового потока и потока удаляемых паров растворителя совпадают — у линии 3 (3,5 К). Анализируя поведение линий 2 и 6, 2' и 6', можно сделать вывод, что увеличение температуры стенки играет положительную роль, ускоряя перестройку поля температур в сторону преобладания лучистого теплообмена над конвективным.

Для второго случая распределение перепадов температур по толщине покрытия представлено на рис. 4. Здесь имеют место только «отрицательные» перепады температур, причем наибольший принадлежит линии 3 (10, 2 К), соответствующей режиму высокоинтенсивного конвективного теплообмена с достаточно большой эффективной степенью черноты покрытия. По мере прогревания покрытия, т. е. с ростом числа  $Fo$ , перепа-

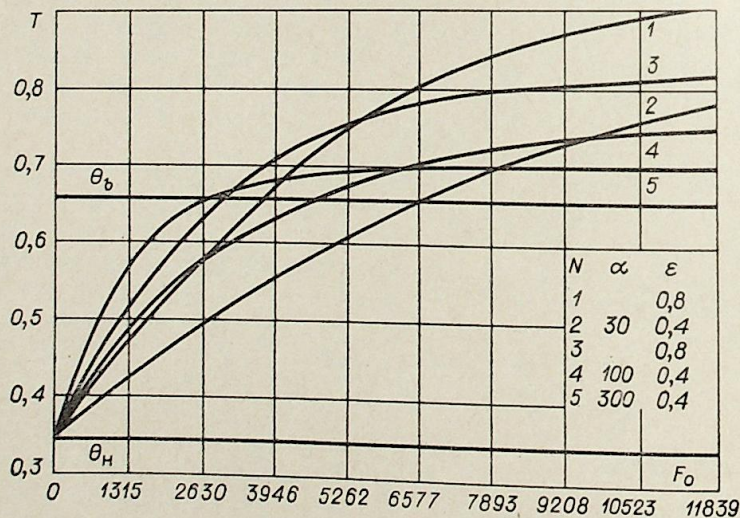


Рис. 2. Зависимость между  $T$  и  $Fo$  для диатермичного покрытия.  $T_c = 873$  К;  $T_b = 573$  К;  $T_n = 300$  К;  $\alpha =$  Вт/м<sup>2</sup> К.

крытия температура провода (для тех же размеров и температур) растет во времени медленнее, чем для диатермичного покрытия. Некоторые результаты сравнения приведены в таблице.

На рис. 3 приведены зависимости перепада температур (между внешней и внутренней поверхностями покрытия) по толщине покрытия для первого случая. Видно, что это распределение линейное. При значении  $Fo = 1973$ , что соответствует 5с, наибольший «отрицательный» перепад температур принадле-

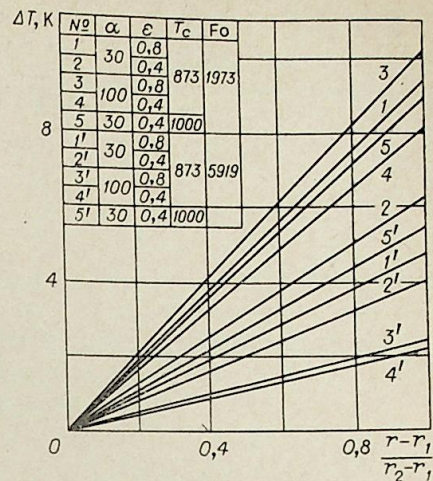
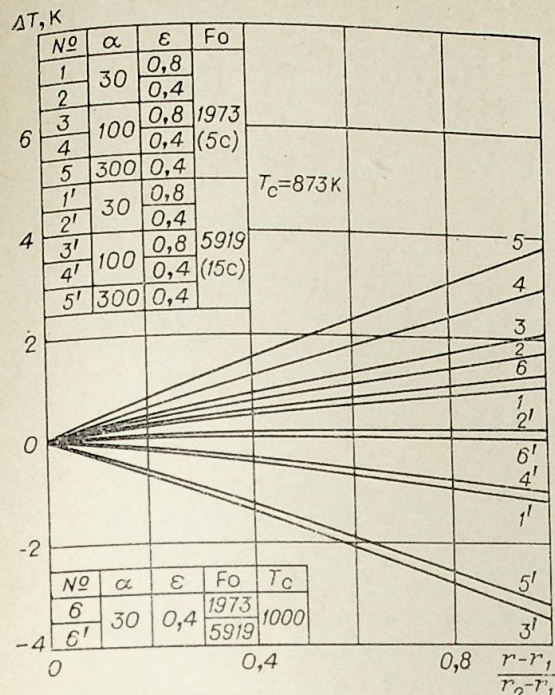


Рис. 4. Распределение перепадов температур по толщине непрозрачного покрытия.

Рис. 3. Распределение перепадов температур по толщине диатермичного покрытия.

ды температур уменьшаются при  $Fo \rightarrow \infty$  асимптотически стремятся к нулю. Повышение температуры стенки увеличивает величину «отрицательного» перепада температур (линии 5 и 4, 5' и 4').

Таким образом, в результате численного решения задачи о нахождении нестационарного температурного поля системы проволока — покрытие при радиационно-конвективном нагреве (несмотря на упрощенную рассматриваемую модель теплообмена) можно констатировать: 1) в слое покрытия (50 мк) существуют перепады температур; 2) величина перепадов температур колеблется от  $-3,5$  до  $-3,8$  К (случай 1) и от  $10,2$  до  $2,3$  К (случай 2). Поэтому предположение о постоянстве температуры по толщине покрытия принять нельзя. (Для рассмотренных чисел  $Fo$ ,  $T_n$ ,  $T_c$ ,  $T_b$ , размеров, теплофизических свойств проволоки и покрытия); 3) для диатермичного покрытия существуют «отрицательные» и «положительные» перепады температур. Первые будут замедлять скорость сушки покрытия — определяющую роль играет конвекция. Вторые — ускорять, теплообмен при этом определяется излучением. Для непрозрачного покрытия возможны лишь «отрицательные» перепады температур по его толщине.

Томский политехнический институт

Поступила в редакцию  
26/III 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Привезенцев В. А., Пешков И. Б. Обмоточные и монтажные провода. Изд. 4. М., Энергия, 1971.
2. Гуревич В. З. Энергия невидимого света, М., Наука, 1973.
3. Холодный С. Д. Выбор технологического режима при химическом структурировании изоляции кабелей и эмалированных проводов.— Кабельная техника, 1977, вып. 8.
4. Самарский А. А. Теория разностных схем. М., Наука, 1977.

В. П. ПААСОНЕН

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ  
В НЕОДНОРОДНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ  
С ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА

В работе предлагается методика расчета тепловых задач при наличии поверхностных тепловых источников для класса неоднородных конструкций с плоской или осевой симметрией. Структура конструкций этого класса описана в работе [1]. На рис. 1 изображено сечение регулярной детали, которое можно интерпретировать как объединение одинаково ориентированных прямоугольников с последующим искривлением по одному измерению. Сборка подобных объектов с общей образующей (базисной кривой) дает более сложную, неоднородную регулярную конструкцию. Допускается также наличие нерегулярных деталей, т. е. произвольных областей. В этом случае на используемой сетке производится предварительная аппроксимация нерегулярных областей регулярными.

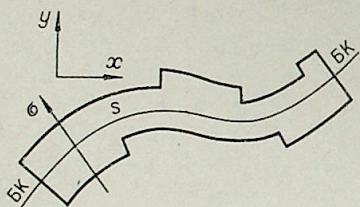


Рис. 1.

Для описанного класса объектов типичным является наличие мелких деталей, играющих важную роль во всем тепловом процессе. По этой причине, а также из-за возможных резких скачков теплофизических свойств на границах раздела сред, методика должна быть ориентирована на работу в условиях существенно неравномерной сетки и разрывных коэффициентов, что по соображениям корректности и экономичности исключает использование явных схем и требует применения абсолютно устойчивых неявных методов расщепления [2]. Наконец, разрывность теплофизических характеристик и наличие тепловых источников, которые предполагаются быть распределенными на границах раздела сред, требуют применения консервативных схем, построенных на основе закона сохранения энергии [3]. Предлагаемая численная модель процесса теплообмена в исследуемом объекте удовлетворяет изложенным выше требованиям.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для описания конструкции удобно использовать так называемую естественную систему координат, которая строится следующим образом. Выбирается базисная кривая, расположенная «параллельно» основным слоям изделия. Новыми координатами точки  $(x, y)$  служат:  $\sigma$  — расстояние по нормали до базисной кривой и  $s$  — длина дуги в основании указанной нормали. Если  $x = G(s)$ ,  $y = F(s)$  — естественное параметрическое представление базисной кривой, то переход к  $(\sigma, s)$  задается преобразованием

$$x = G(s) - \sigma F'(s), \quad y = F(s) + \sigma G'(s). \quad (1)$$

Следует заметить, что выпуклость базисной кривой здесь не требуется. Важно лишь, чтобы конструкция не выходила из области однозначности преобразования (1). Область однозначности со стороны выпуклости базисной кривой бесконечна, со стороны вогнутости ограничена радиусом кривизны.

Система  $(\sigma, s)$  ортогональна, уравнение теплопроводности в ней имеет вид

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = A \frac{\partial}{\partial \sigma} B\lambda \frac{\partial T}{\partial \sigma} + D \frac{\partial}{\partial s} E\lambda \frac{\partial T}{\partial s}, \quad (2)$$

где  $c, \rho, \lambda$  — разрывные теплофизические характеристики, зависящие от материала и температуры, а коэффициенты  $A, B, D, E$  — функции  $\sigma$  и  $s$ , зависящие также от типа симметрии ( $\nu = 0$  — плоская,  $\nu = 1$  — осевая):

$$B = \frac{1}{A} = y^\nu x'_s, \quad D = \frac{G'_s}{y^\nu x'_s}, \quad E = \frac{y^\nu G'_s}{x'_s}.$$

Предполагается, что на различных участках внешней границы могут ставиться граничные условия трех типов:

$$T = \Phi, \quad I = q, \quad I = \alpha(\Phi - T), \quad (3)$$

где  $I = \lambda \frac{\partial T}{\partial n}$  — поток тепла по внешней нормали к границе,  $\Phi, q, \alpha$  — функции точки на границе и времени  $t$ .

На внутренних границах раздела сред задается условие неидеального теплового контакта

$$I_+ - I_- = g, \quad (4)$$

где  $g$  — мощность источника (стока) тепла.

Задачи с условием типа (4) возникают, например, при расчете конструкций с неидеальной подгонкой деталей, со щелями или при наличии поверхностей трения.

МЕТОД РАСЧЕТА

В переменных  $\sigma, s$  область представляет собой объединение прямоугольников с гранями, параллельными осям. Прямоугольная сетка в области строится так, чтобы крайние линии сетки были фиктивными, т. е. находились вне объекта, а ближайшие к ним совпадали с габаритами. Затем каждой ячейке сетки присваивается соответствующий номер материала, занимающего ее. Пустые ячейки обозначаются нулем.

Введение расширенной сетки и нумерация материалов позволяют единообразно описывать границы раздела сред и внешние границы, легко различать внутренние, граничные и законтурные узлы. Действительно, если  $\Pi$  и  $S$  — произведение и сумма номеров материалов в ячейках фрагмента сетки (рис. 2), то при  $\Pi \neq 0$  центральный узел  $(i, j)$  — внутренний, при  $S = 0$  — законтурный, при  $\Pi = 0$  и  $S \neq 0$  — граничный.

Эти простые соображения, названные Н. Н. Яненко логическим методом фиктивных областей, можно применять в различного рода задачах: в задачах упругости или, для описания границ сложных каналов, в задачах гидродинамики. Следует заметить, что предлагаемый подход, в отличие от метода фиктивных областей, освобождает от необходимости выполнять вычисления в фиктивной зоне.

Разностная схема строится способом, описанным в работе [4]. Отличие со-

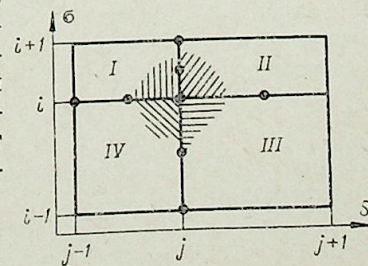


Рис. 2.

стоит в том, что здесь рассматривается более общая система координат, выбрана пная форма метода дробных шагов и учитываются тепловые источники. Кроме того, запись разностного уравнения во внутренних и граничных узлах проводится здесь по общей схеме [5].

Для построения схемы следует рассматривать самый общий случай: четыре соседствующих ячейки фрагмента заняты различными материалами. Непосредственная запись уравнения в центральном узле затруднительна, поскольку на границах раздела в решении нет необходимой гладкости. Поэтому уравнение (2) аппроксимируется отдельно в каждой ячейке схемой, содержащей односторонние разностные и дифференциальные потоки  $I_{\sigma} = \lambda \frac{\partial T}{\partial \sigma}$ ,  $I_s = \lambda \frac{\partial T}{\partial s}$  на внутренних гранях фрагмента:

$$\begin{aligned} (cp)_{ij}^I \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{2A_{ij}}{H_{i+\frac{1}{2}}^{\sigma}} \left[ (B\lambda)_{i+\frac{1}{2}j}^I \frac{T_{i+1j} - T_{ij}}{H_{i+\frac{1}{2}}^{\sigma}} - B_{ij} I_{\sigma}^I \right] + \\ &+ \frac{2D_{ij}}{H_{j-\frac{1}{2}}^s} \left[ E_{ij} I_s^I - (E\lambda)_{ij-\frac{1}{2}}^I \frac{T_{ij} - T_{ij-1}}{H_{j-\frac{1}{2}}^s} \right], \\ (cp)_{ij}^{II} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{2A_{ij}}{H_{i+\frac{1}{2}}^{\sigma}} \left[ (B\lambda)_{i+\frac{1}{2}j}^{II} \frac{T_{i+1j} - T_{ij}}{H_{i+\frac{1}{2}}^{\sigma}} - B_{ij} I_{\sigma}^{II} \right] + \\ &+ \frac{2D_{ij}}{H_{j+\frac{1}{2}}^s} \left[ (E\lambda)_{ij+\frac{1}{2}}^{II} \frac{T_{ij+1} - T_{ij}}{H_{j+\frac{1}{2}}^s} - E_{ij} I_s^{II} \right], \\ (cp)_{ij}^{III} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{2A_{ij}}{H_{i-\frac{1}{2}}^{\sigma}} \left[ B_{ij} I_{\sigma}^{III} - (B\lambda)_{i+\frac{1}{2}j}^{III} \frac{T_{ij} - T_{i-1j}}{H_{i-\frac{1}{2}}^{\sigma}} \right] + \\ &+ \frac{2D_{ij}}{H_{j+\frac{1}{2}}^s} \left[ (E\lambda)_{ij+\frac{1}{2}}^{III} \frac{T_{ij+1} - T_{ij}}{H_{j+\frac{1}{2}}^s} - E_{ij} I_s^{III} \right], \\ (cp)_{ij}^{IV} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{2A_{ij}}{H_{i-\frac{1}{2}}^{\sigma}} \left[ B_{ij} I_{\sigma}^{IV} - (B\lambda)_{i-\frac{1}{2}j}^{IV} \frac{T_{ij} - T_{i-1j}}{H_{i-\frac{1}{2}}^{\sigma}} \right] + \\ &+ \frac{2D_{ij}}{H_{j-\frac{1}{2}}^s} \left[ E_{ij} I_s^{IV} - (E\lambda)_{ij-\frac{1}{2}}^{IV} \frac{T_{ij} - T_{ij-1}}{H_{j-\frac{1}{2}}^s} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Кроме того, на внутренних гранях заданы условия источника (стока) тепла, аппроксимирующие (4):

$$\begin{aligned} I_{\sigma}^I - I_{\sigma}^{IV} &= g_{14}, & I_{\sigma}^{II} - I_{\sigma}^{III} &= g_{23}, \\ I_s^{II} - I_s^I &= g_{21}, & I_s^{III} - I_s^{IV} &= g_{34}. \end{aligned} \quad (6)$$

Если умножить уравнения (5) на площади соответствующих ячеек и сложить результаты, то получим соотношение, содержащее точные потоки только в форме разностей (6), которые можно исключить, заменив их мощностями источников. Разделив это уравнение на площадь фрагмента сетки, получим прототип разностной схемы

$$\bar{c} \frac{\partial T}{\partial t} = \Lambda_{\sigma} T + \Lambda_s T + F(g), \quad (7)$$

где  $F(g)$  — сеточная функция источника;  $\Lambda_{\sigma}$  и  $\Lambda_s$  — разностные операторы, интегрально аппроксимирующие

$$L_{\sigma} = A \frac{\partial}{\partial \sigma} B \lambda \frac{\partial}{\partial \sigma} \text{ и } L_s = D \frac{\partial}{\partial s} E \lambda \frac{\partial}{\partial s};$$

$\bar{c}$  — значение  $c\rho$ , средневзвешенное по площадям ячеек.

В граничных узлах схема получается аналогично. Пусть, например, на рис. 2 ячейки II, III пусты. Тогда из системы (5) соответствующие этим ячейкам соотношения выпадают; из системы (6) остается в силе только первое соотношение; потоки  $I_s^{II}$  и  $I_s^{III}$  исключаются с помощью граничных условий (3). В результате описанной выше процедуры вновь получается уравнение типа (7).

Дискретизация по времени и применение метода переменных направлений или метода приближенной факторизации [2] дает экономичную, абсолютно устойчивую и консервативную схему.

Методика и логика расчета, а также созданная по ней программа допускают сравнительно простой переход к усложнению физико-математической модели задачи (учет фазовых превращений, введение движущихся внешних границ), к усложнению объекта (области, составленные из конечного числа произвольных «криволинейных четырехугольников»). В последнем случае достаточно отказаться от «естественной» системы координат и работать в неортогональной системе, определяемой самой сеткой. Логический метод фиктивных областей пригоден для решения целого ряда задач, отличных от описанной здесь простой тепловой задачи.

#### НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

По предлагаемой методике рассчитан ряд задач, определяющих тепловой режим фторопластовых уплотнений вращающихся валов. С рабочими конструкциями и экспериментальными установками, содержащими фторопластовые манжеты, можно ознакомиться подробно в [6]. В данной

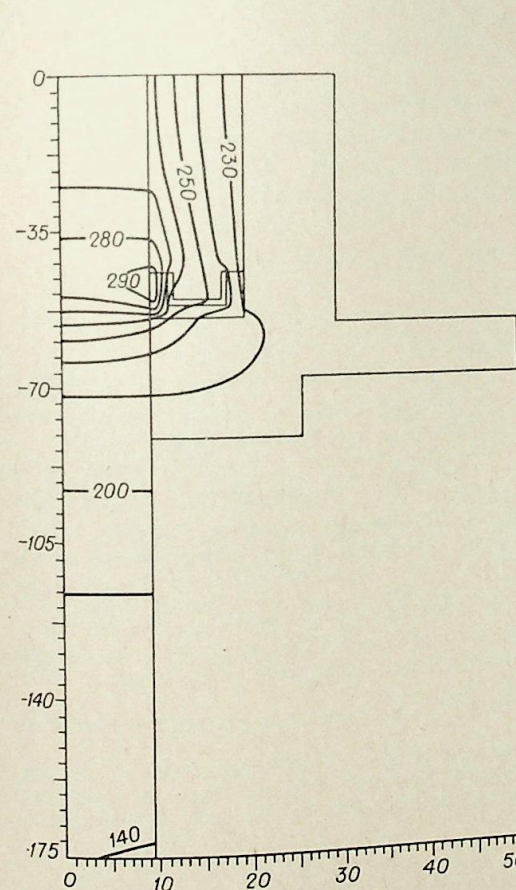


Рис. 3.

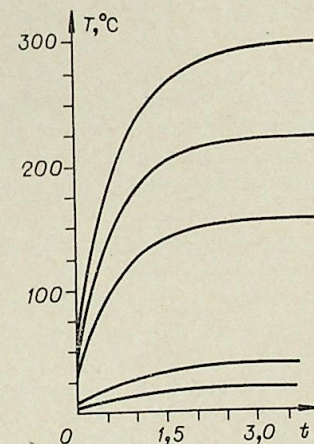


Рис. 4.

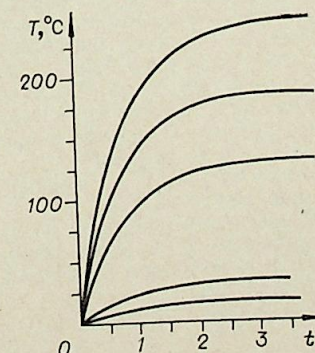


Рис. 5.

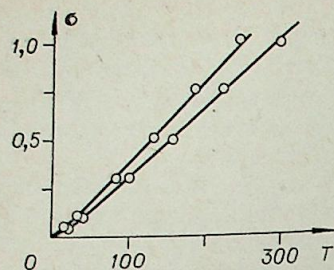


Рис. 6.

работе приводятся результаты расчета одной из задач такого рода, предложенной автору И. Н. Черским.

Конструкция представлена на рис. 3. Из соображений двойной симметрии (относительно оси и плоскости, ортогональной оси, проходящей через середину изделия) приведена только четверть сечения. Конструкция состоит из стального корпуса, стального вращающегося вала, фторопластового уплотнения, упрочненного П-образной стальной цапгой. Внутренняя полость между валом и

корпусом, ограниченная двумя уплотнениями, занята смазочным материалом. Конвективный теплообмен учитывался здесь путем введения эффективных теплофизических характеристик смазки.

На внешних границах задавалось условие теплообмена с внешней средой (воздухом), имеющей начальную температуру конструкции  $0^\circ\text{C}$ . На границе вал — среда коэффициенту теплоотдачи сообщалась поправка, связанная с вращением вала. На границе вал — уплотнение задавалось условие (4) с постоянной мощностью источника тепла  $g = 0,1; 0,3; 0,5; 0,75; 1,0$ , зависящей от скорости вращения вала.

На рис. 3 изображена карта изолиний температурного поля при максимальной скорости вращения ( $g = 1,0$ ) в установившемся режиме ( $t = 4$  ч). Хорошо видны изломы изолиний на границах раздела сред.

Важными техническими характеристиками узла уплотнения являются зависимости максимальной температуры на поверхности трения и средне-объемной температуры смазки от времени. Эти зависимости для указанного выше спектра значений  $g$  представлены соответственно на рис. 4, 5. На рис. 6. даны зависимости максимальной температуры на поверхности трения и среднеобъемной температуры смазки в установившемся режиме от мощности источника, полученные из ряда расчетов с различными значениями  $g$ . Линейный характер зависимостей хорошо согласуется с экспериментальными исследованиями [7].

Новосибирский Государственный университет

Поступила в редакцию  
16/IX 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Валдуллин А. Н., Паасонен В. И. Модульное представление алгоритма расчета тепловых задач в неоднородных областях с криволинейной границей. — В кн.: Численные методы механики сплошной среды, т. 8, № 3. Новосибирск, 1977.
2. Яценко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, Наука, 1967.
3. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М., Наука, 1973.
4. Валдуллин А. Н., Воронко В. П., Сафин Р. И. Экономическая разностная схема сквозного счета для решения осесимметричной задачи Стефана. — В кн.: Численные методы механики сплошной среды, т. 4, № 3. Новосибирск, 1973.
5. Паасонен В. И. Численное моделирование процессов теплообмена в конструкциях при отсутствии идеального теплового контакта. Тез. докл. Всесоюз. науч.-техн. конф. «Свойства и применение полимерных материалов при низких температурах». Якутск, 1977.
6. Черский И. Н. Полимерные материалы в современной уплотнительной технике. Якутск, 1975.
7. Черский И. Н., Попов С. Н. Влияние температурных факторов на эксплуатационные характеристики полимерных уплотнений. Тез. докл. Всесоюз. науч.-техн. конф. «Свойства и применение полимерных материалов при низких температурах». Якутск, 1977.

Ю. А. ПШЕНИЧНОВ

### К РАСЧЕТУ ТЕЧЕНИЯ КАПЕЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ С ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТЬЮ В ТЕРМИЧЕСКОМ НАЧАЛЬНОМ УЧАСТКЕ ПЛОСКОГО КАНАЛА

В работе приводятся асимптотические формулы для поля скорости и гидравлического сопротивления в задаче о ламинарном течении капельной жидкости, нагреваемой переменным по длине канала тепловым потоком.

С учетом допущений, аналогичных принятым в [1], рассматриваемая задача формулируется в виде

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu(\theta) \frac{\partial u}{\partial y} \right] = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{dEu}{dx}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = u \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (2)$$

$$u(0, x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=\frac{1}{2}} = 0, \quad \int_0^1 u(x, y) dy = 1, \quad (3)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0} = \text{Ki}(x), \quad \theta\left(\frac{1}{2}, x\right) = 0, \quad \theta(y, 0) = 0, \quad (4)$$

где  $u = v/\langle v \rangle$  — относительная скорость;  $\langle v \rangle$  — средняя по сечению канала скорость;  $y = y^*/h$ ;  $y^*$  — размерная координата, отсчитываемая от поверхности канала;  $h$  — ширина канала;  $x = (x^*/h)/\text{Re}$ ;  $x^*$  — продольная размерная координата;  $\text{Re} = \langle v \rangle h/a_0$ ;  $a_0$  — коэффициент температуропроводности жидкости при температуре  $T = T_0$ ;  $T_0$  — температура в сечении  $x = 0$ ;  $\theta = (T - T_0)/T_0$  — безразмерная температура;  $\mu(\theta) = \mu^*(T)/\mu_0$ ;  $\mu^*$  — вязкость жидкости;  $\text{Ki} = (q^*h)/(T_0\lambda_0)$ ;  $q^* = q^*(x)$  — плотность теплового потока;  $\lambda_0, \mu_0$  — соответственно коэффициент теплопроводности и вязкости при температуре  $T = T_0$ .

В результате интегрирования уравнения движения по координате  $y$  в пределах от 0,5 до  $y$  и замены переменных по формулам [2]

$$\vartheta(\xi, \eta) = \theta(y, x), \quad W(\xi, \eta) = u(y, x), \quad \eta = \sqrt[3]{1,5x}, \quad \xi = y/\eta$$

краевая задача (1) — (4) преобразуется к виду

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = \sigma(\vartheta) R(\eta) \eta \left( \xi \eta - \frac{1}{2} \right), \quad (5)$$

$$2\eta \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} + \xi W \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} = \eta W \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta}, \quad (6)$$

$$-\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = \eta q(\eta), \quad \vartheta(\infty, \eta) = 0, \quad \vartheta|_{\eta=0} = 0, \quad W(0, \eta) = 0, \quad (7)$$

$$\eta \int_0^{1/\eta} W d\xi = 1, \quad (8)$$

где

$$\sigma(\vartheta) = \frac{1}{\mu(\vartheta)}, \quad R(\eta) = \frac{1}{Pr} \frac{dEu}{d\eta}$$

Разложив правые и левые части уравнений (5), (6) и краевых условий (7) в ряды Тейлора по степеням переменной  $\eta$ , образуем из выражений при одинаковых степенях  $\eta$  последовательность граничных задач для функций  $W_k(\xi)$  и  $\vartheta_k(\xi)$ :

$$\xi W_0' \vartheta_0' = 0, \quad W_0' = 0, \quad W_0(0) = 0,$$

$$W_1' = -\frac{R_0}{2}, \quad W_1(0) = 0,$$

$$\vartheta_k'' + \frac{1}{2} \xi \sum_{i=0}^{k+1} W_{k+1-i} \vartheta_i' - \sum_{i=1}^{k+1} i W_{k+1-i} \vartheta_i = 0,$$

$$-\vartheta_k'(0) = q_{k-1}, \quad \vartheta_k(\infty) = 0, \quad (q_{-1} = 0), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$W_2' = \xi R_0 - \frac{R_1}{2} - \frac{1}{2} \sigma_1 R_0 \vartheta_1, \quad W_2(0) = 0,$$

$$W_3' = R_0 \sigma_1 \xi \vartheta_1 - \frac{1}{2} R_0 \sigma_1 \vartheta_2 - \frac{1}{2} R_0 \sigma_2 \vartheta_1^2 + R_1 \xi - \frac{1}{2} R_1 \sigma_1 \vartheta_1 - \frac{R_2}{2},$$

$$W_3(0) = 0,$$

где

$$F_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{\partial^k F}{\partial \eta^k} \right|_{\eta=0} \quad (F = \vartheta, W, R, q), \quad \sigma_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k \sigma}{d \vartheta^k} \right|_{\vartheta=0} \quad (9)$$

Пусть функции  $\Lambda_{10}(\xi)$ ,  $\Lambda_{20}(\xi)$ ,  $\Lambda_{21}(\xi)$ ,  $\Lambda_{22}(\xi)$  — решения граничных задач

$$\Lambda_{10}'' + 3\xi^2 \Lambda_{10}' - 3\xi \Lambda_{10} = 0, \quad \Lambda_{10}(0) = -1, \quad \Lambda_{10}(\infty) = 0,$$

$$\Lambda_{20}'' + 3\xi^2 \Lambda_{20}' - 6\xi \Lambda_{20} = 0, \quad \Lambda_{20}(0) = -1, \quad \Lambda_{20}(\infty) = 0,$$

$$\Lambda_{21}'' + 3\xi^2 \Lambda_{21}' - 6\xi \Lambda_{21} = -3(\Lambda_{10} - \xi \Lambda_{10}') \int_0^\xi \Lambda_{10} d\xi, \quad \Lambda_{21}(0) = 0, \quad \Lambda_{21}(\infty) = 0,$$

$$\Lambda_{22}'' + 3\xi^2 \Lambda_{22}' - 6\xi \Lambda_{22} = -3\xi^2(\Lambda_{10} - \xi \Lambda_{10}'), \quad \Lambda_{22}(0) = 0, \quad \Lambda_{22}(\infty) = 0,$$

а  $S_{10}(\xi)$ ,  $S_{20}(\xi)$ ,  $S_{21}(\xi)$ ,  $S_{22}(\xi)$  — интегралы от этих функций в пределах от 0 до  $\xi$ . Тогда, решив последовательно уравнения для  $W_k$  и  $\vartheta_k$  и приняв во внимание, что в силу (9) функции  $W_k$  и  $\vartheta_k$  являются коэффициентами разложения  $W(\xi, \eta)$  и  $\vartheta(\xi, \eta)$  в ряды по степеням  $\eta$ , получим

$$W(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (\xi^2 \eta^2 - \xi \eta) (R_0 + R_1 \eta + R_2 \eta^2 + R_3 \eta^3 + \dots) + 6q_0 \sigma_1 S_{10}(\xi) \eta^2 + 6[q_1 \sigma_1 S_{20}(\xi) - q_0^2 \sigma_1^2 S_{21}(\xi) + q_0^2 \sigma_2 S_{12}(\xi) - q_0 \sigma_1 S_{23}(\xi)] \eta^3 + \dots,$$

$$\text{где } S_{12}(\xi) = \int_0^\xi \Lambda_{10}^2 d\xi, \quad S_{23}(\xi) = 2 \int_0^\xi \xi \Lambda_{10} d\xi - S_{22}(\xi).$$

Величины  $R_0$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  определяются из условия постоянства расхода жидкости по длине канала (8):

$$R_0 = -12, \quad R_1 = 0, \quad R_2 = 72q_0 \sigma_1 S_{10}(\infty),$$

$$R_3 = 72 [q_1 \sigma_1 S_{20}(\infty) - q_0^2 \sigma_1^2 S_{21}(\infty) + q_0 \sigma_2 S_{12}(\infty) - q_0 \sigma_1 I_3],$$

$$I_3 = S_{23}(\infty) + \int_0^\infty S_{10}(\xi) d\xi.$$

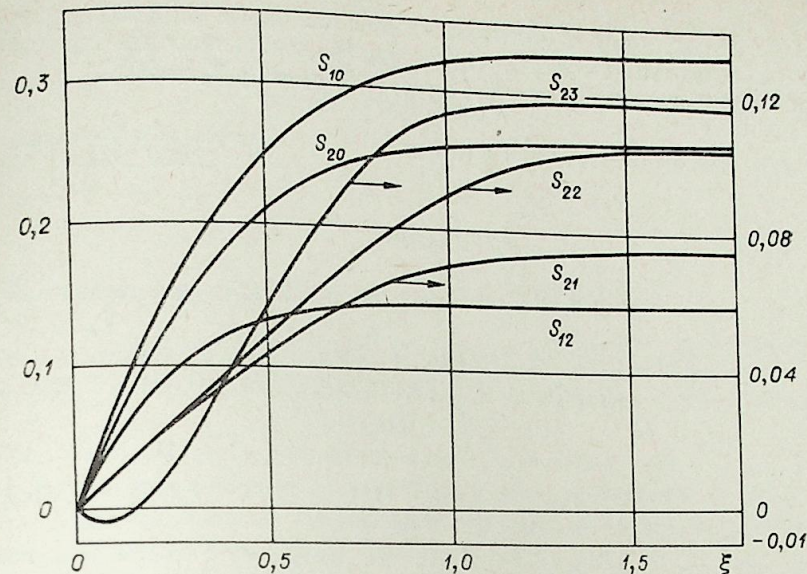


Рис. 1. Графики функций  $S_{10}(\xi)$ ,  $S_{20}(\xi)$ ,  $S_{21}(\xi)$ ,  $S_{22}(\xi)$ ,  $S_{12}(\xi)$ ,  $S_{23}(\xi)$ .

Следовательно, для коэффициента гидравлического сопротивления  $\xi$  имеем

$$Re \xi = 24 - 2R_2 \eta^2 - 2R_3 \eta^3 + \dots, \quad (10)$$

где  $Re = \langle v \rangle h / \nu_0$ ,  $\nu_0$  — кинематическая вязкость жидкости при  $T = T_0$ . С учетом (10) асимптотическая формула для поля скорости окончательно запишется в виде

$$u = \frac{1}{4} (y - y^2) Re \xi(\eta) + 6q_0 \sigma_1 S_{10}(\xi) \eta^2 + 6[q_1 \sigma_1 S_{20}(\xi) - q_0^2 \sigma_1^2 S_{21}(\xi) + q_0^2 \sigma_2 S_{12}(\xi) - q_0 \sigma_1 S_{23}(\xi)] \eta^3 + \dots \quad (11)$$

При не зависящей от температуры вязкости полученные выражения (10) и (11) переходят в известные [1]:

$$u = 6(y - y^2), \quad Re \xi = 24.$$

Значение  $Re \xi = 24$  вместо 96 из [1] обусловлено применением в качестве определяющего размера не эквивалентного диаметра плоского канала, а его ширины.

Входящие в (10) и (11) функции  $S_{ij}(\xi)$  определялись численным интегрированием решений  $\Lambda_{ij}(\xi)$ , для нахождения которых использовался метод прогонки [3]. Соответствующие конечно-разностные уравнения записывались с учетом поправок четвертого порядка малости по шагу  $\Delta \xi$  на интервале  $0 \leq \xi \leq 5$ . Графики функций приведены на рис. 1.

На рис. 2 представлены данные расчета зависимости скорости  $u$  от координаты  $\eta$  конечно-разностным методом [4] (сплошные линии) и по формуле (1) (точки) для различных значений координаты  $y$ : 1 —  $y = 0,01$ ; 2 —  $y = 0,02$ ; 3 —  $y = 0,03$ ; 4 —  $y = 0,5$ . Горизон-

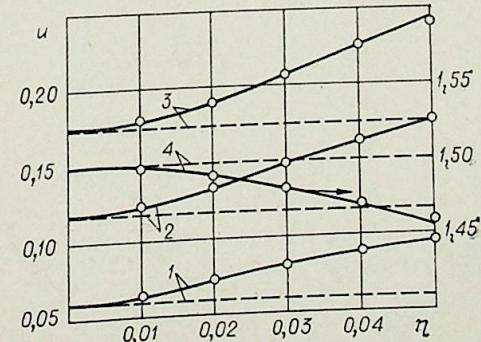


Рис. 2. Результаты расчета зависимости относительной скорости от координаты  $\eta$ , полученные конечно-разностным методом и по асимптотической формуле (11).

тальными пунктирными линиями показаны значения скорости в случае постоянной вязкости  $\mu = \text{const}$ . При расчете использовались данные по вязкости воды [5];  $q_0 = 60$ ;  $\sigma_1 = 0,449$ ;  $q_1 = 0$ ,  $\sigma_2 = 0$ ;  $T_0 = 10^\circ\text{C}$ .

Красноярский политехнический институт

Поступила в редакцию  
29/XII 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Петухов Б. С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М., Энергия, 1967.
2. Worsoe-Schmidt P. M. Heat transfer in the thermal entrance region of circular tubes and annular passages with fully developed laminar flow. Int.—J. Heat Mass Transfer, 1967, v. 10, № 4.
3. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М., Наука, 1971.
4. Тест Ф. Л. Теплоотдача при ламинарном течении жидкости с вязкостью, зависящей от температуры.— Теплопередача, 1968, № 4.
5. Жукаускас А. А., Жюгда И. И. Теплопередача в ламинарном потоке жидкости. Вильнюс, Минтас, 1969.

УДК 621.396.6.019

В. В. ОЛЕЙНИКОВ, В. А. САПОЖНИКОВ

### О ЗАДАЧЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТРЕБОВАНИЙ ПО НАДЕЖНОСТИ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ СЛОЖНОЙ СИСТЕМЫ

При проектировании технических систем возникает задача оптимального распределения требований по надежности между элементами системы, исходя из некоторых ограничений.

Различные постановки такой задачи и методы ее решения довольно обстоятельно рассматривались для простой системы (см., например, [1]). Делались попытки рассмотрения этой задачи и для сложной системы [2].

В настоящей работе данная задача математически ставится и в общем виде решается для сложной ремонтируемой системы с произвольной структурой при довольно общем виде зависимости между расходными средствами и надежностью. Доказывается существование и единственность ее решения, предлагается итерационный метод решения, рассматриваются вопросы нахождения приближенного решения.

Пусть система  $S$  состоит из  $n$  независимых в смысле надежности элементов.

Для каждого элемента системы введем функцию  $x_i(t)$ , характеризующую состояние  $i$ -го элемента в момент времени  $t \geq 0$ :

$$x_j(t) = \begin{cases} 1, & \text{если к моменту времени } t \text{ } i\text{-й} \\ & \text{элемент не отказал;} \\ 0, & \text{если к моменту времени } t \text{ } i\text{-й} \\ & \text{элемент отказал} \end{cases}$$

Таким образом, состояние системы  $S$  в момент времени  $t$  описывается вектором

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in X,$$

где  $X$  — множество состояний  $S$ .

Введем вероятности

$$p_i(t) = \mathcal{P}\{\tau_i \geq t\}, \quad \tau_i = \tau: x_i(\tau) = 1, \quad t, \tau \geq 0, \quad i = \overline{1, n};$$

$$q_i(t) = 1 - p_i(t);$$

$$p_x(t) = \mathcal{P}\{\eta \geq t\}, \quad \eta: x(\eta) = x, \quad \eta \geq 0, \quad x = (x_1, \dots, x_n);$$

которые будем понимать соответственно как надежность и ненадежность  $i$ -го элемента, надежность системы  $S$  в течение времени  $t$ .

Если  $x_{i_j} = 1$ ,  $j = \overline{1, l}$ ,  $x_{i_j} = 0$ ,  $j = \overline{l+1, n}$ , то в силу независимости элементов системы

$$p_x(t) = \mathcal{P}\{\tau_{i_1} \geq t, \dots, \tau_{i_l} \geq t, \tau_{i_{l+1}} < t, \dots, \tau_{i_n} < t\} = \prod_{j=1}^l p_{i_j}(t) \prod_{j=l+1}^n q_{i_j}(t).$$

В дальнейшем для простоты записи аргумент  $t$  будем опускать.

Зададим на  $X$  некоторый функционал  $w(x)$  такой, что:

$$1^\circ. 0 \leq w(x) \leq 1, \quad x \in X$$

(иначе в качестве  $w$  можно взять  $w'(x) = \frac{w(x)}{\max_{x \in X} \|w(x)\|}$ );

$$2^\circ. w_{i_1 \dots i_k} = w(x), \quad x_{i_r} = 0, \quad r = \overline{1, k}; \quad x_{i_l} = 1, \quad l = \overline{k+1, n}, \quad k = \overline{0, n};$$

$$w_{i_0} \equiv w_0 = 1, \quad w_{i_1 \dots i_n} = 0;$$

$$3^\circ. w_{i_1 \dots i_k} \leq w_{i_1 \dots i_l}, \quad k > l;$$

$$4^\circ. w_{i_1 \dots i_k} = w_{i_2 i_1 i_3 \dots i_k} = \dots = w_{i_k i_{k-1} \dots i_1}, \quad k = \overline{1, n}.$$

В качестве  $w(x)$  может выступать производительность системы  $S$  или какой-либо другой функционал, характеризующий поведение системы в зависимости от состояния ее элементов.

Следуя общему подходу [3], определим

$$W = Mw = \sum_{x \in X} w(x) p_x(t). \quad (2)$$

Пусть  $t$  фиксировано,  $w(x)$  задан своими значениями, и пусть

$$G(p_1, p_2, \dots, p_n)$$

— средства, затраченные на систему  $S$  в зависимости от надежности ее элементов. В общем случае средства могут быть нескольких типов. Для простоты в дальнейшем предполагаем средства одного типа.

В зависимости от того, на какие функции наложены ограничения, можно сформулировать две задачи распределения требований по надежности между элементами сложной системы  $S$ :

1) найти

$$\max_{p_1, \dots, p_n} W(p_1, p_2, \dots, p_n) \quad (3)$$

при

$$G(p_1, p_2, \dots, p_n) \leq G^0 \quad (4)$$

либо

2) найти

$$\min_{p_1, \dots, p_n} G(p_1, p_2, \dots, p_n) \quad (5)$$

при

$$W(p_1, p_2, \dots, p_n) \geq W^0. \quad (6)$$

Здесь  $G^0, W^0$  заданы.

В общем случае зададим функцию  $G$  в виде

$$G(p_1, p_2, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^m a_i \prod_{j=1}^n p_j^{\alpha_{ij}} (1-p_j)^{\beta_{ij}}, \quad (7)$$

где

$$0 \leq p_i \leq 1, \quad a_i \geq 0, \quad 1 \leq m \leq n,$$

$\alpha_{ij}, \beta_{ij}$  — любые вещественные числа.

Имеет место

**Теорема.** Решение задач (3), (4) и (5), (6) при (2), (7) для системы  $S$  существует и единственно.

**Доказательство.** Положим

$$u_{i_1 \dots i_k} = 1 - w_{i_1 \dots i_k}, \quad k = \overline{1, n}, \quad U = 1 - W. \quad (8)$$

Рассмотрим вначале задачу (3), (4). Для системы  $S$  при (2), (7), (8) задача (3), (4) эквивалентна задаче:

найти

$$\min_{p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n} U = \sum_{i=1}^m u_i q_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n p_j + \dots + \\ + \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^n \dots \sum_{j_k=1}^n u_{i_1 \dots i_k} \prod_{r=1}^k q_{i_r} \prod_{l=k+1}^n p_{i_l} + \dots + \prod_{i=1}^n q_i, \quad (9)$$

при

$$p_i + q_i = 1, \quad i = \overline{1, n}, \quad (10)$$

$$G \equiv \frac{1}{G^0} \sum_{i=1}^m a_i \prod_{j=1}^n p_j^{\alpha_{ij}} q_j^{\beta_{ij}} \leq 1. \quad (11)$$

Доказательство эквивалентности производится непосредственно подстановками и преобразованиями.

В (9), (11) все выражения являются полиномами [4], а следовательно, и выпуклыми функциями относительно своих естественных переменных

$$z_i = \ln p_i, \quad z_j = \ln q_j, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{n+1, 2n}.$$

Значит, задача (9), (11) как задача геометрического программирования имеет единственное решение [4].

Аналогично показывается, что и задача (5), (6) также имеет единственное решение.

Непосредственно применять методы геометрического программирования для решения указанных задач невозможно, так как велика степень трудности этих задач ( $2n + m - n - 2$  значительно больше нуля) [4]. Поэтому предлагается численный способ их решения.

Сначала введем некоторые понятия.

**О п р е д е л е н и е.** Конечной разностью 1-го порядка по индексу назовем выражения

$$\Delta_{i_1 \dots i_l}^1 = w_{i_1 \dots i_{l-1}} - w_{i_1 \dots i_{l-1} i_l}, \quad l = \overline{1, n}. \quad (12)$$

Конечные разности  $k$ -го порядка по индексу определяются с помощью рекуррентных соотношений

$$\Delta_{i_1 \dots i_l}^k = \Delta_{i_2 \dots i_{l-1} i_1}^{k-1} - \Delta_{i_2 \dots i_{l-1} i_l}^{k-1}, \quad k = \overline{2, n}, \quad l \geq k. \quad (13)$$

Если значения  $w$  с одинаковым числом индексов совпадают (т. е.  $w_{i_1} = w_{i_2}, w_{i_1 i_3} = w_{i_2 i_3}$  и т. д.), то получаем обычную конечную разность [5].

Используя (1) и понятие мультииндекса (см., например, [6]) (2), можно записать:

$$W = \sum_{|k|=0}^n \frac{(-1)^{|k|}}{|k|!} \Delta_k^{|k|} q_1^{k_1} \dots q_n^{k_n}, \quad (14)$$

где  $k$  — мультииндекс,  $k = (k_1, \dots, k_n), k_i = 0, 1, |k| = \sum_{i=1}^n k_i$ .

Для дальнейшего конкретизируем вид функции  $G$ .

Пусть

$$G = \sum_{i=1}^n \left( g_i^0 - \frac{1}{h_i} \ln \frac{q_i}{q_i^0} \right). \quad (15)$$

(15) следует из выражения

$$q_i(g_i + \Delta g_i) = q_i(g_i) - h_i \Delta g_i q_i, \quad (16)$$

отвечающего изменению ненадежности  $i$ -го элемента при изменении вложенных средств на  $\Delta g_i$ . Коэффициент вложенных средств. Перейдя в (16) к пределу и проинтегрировав полученное дифференциальное уравнение при начальных условиях  $q_i^0(g_i^0) = q_i^0$ , получим закон изменения ненадежности  $i$ -го элемента от вложенных в него средств. На  $q_i(g_i)$  наложены требуемые условия гладкости. Найдя от нее обратную функцию и суммируя по  $i$ , получаем (15).

И, таким образом, задачу (3), (4) при (8), (14), (15) можно переформулировать.

Найдем

$$\min_{q_1, \dots, q_n} U \equiv \sum_{|k|=1}^n \frac{(-1)^{|k|+1}}{|k|!} \Delta_k^{k_1, k_2, \dots, k_n} \quad (17)$$

при

$$G \equiv \sum_{i=1}^n \left( g_i^0 - \frac{1}{h_i} \ln \frac{q_i}{q_i^0} \right) \leq G^0. \quad (18)$$

Заметим, что (18) соответствует (11)

при

$$m = 1, \quad \frac{a_i}{G^0} = \frac{1}{e}, \quad \alpha_{ij} = 0, \\ \beta_{ij} = - \left[ h_j \left( G^0 - \sum_{i=1}^n \left( g_i^0 + \frac{1}{h_i} \ln q_i^0 \right) \right) \right]^{-1},$$

и из нее можно получить выражение для вида функции средств в случае нагруженного резервирования [2].

Аналогичным образом может быть записана и задача (5), (6).

Приведенная выше теорема и теорема Куна—Таккера [7] дают необходимые и достаточные условия использования для решения этих задач метода неопределенных множителей Лагранжа, с помощью которого задача (17), (18) сводится к решению системы  $n+1$  нелинейных уравнений относительно  $q_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) и  $U$ .

Так как  $q_i$  и  $U$  связаны между собой, то систему  $n+1$  уравнений можно записать в виде, пригодном для использования итерационных методов при ее решении:

$$q_i = \frac{U}{h_i \sum_{j=1}^n h_j^{-1} \sum_{|k|=1: k_i=1}^n q_i^{-1} \frac{(-1)^{|k|+1}}{|k|!} \Delta_k^{k_1, k_2, \dots, k_n}}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (19) \\ U = U - \frac{\sum_{i=1}^n \left[ g_i^0 - h_i^{-1} \ln \frac{q_i^*(U)}{q_i^0} \right] - G^0}{\sum_{i=1}^n \left[ h_i^2 \sum_{j=1}^n h_j^{-1} q_i^*(U) \sum_{|k|=1: k_i=1}^n q_i^{*-1} \frac{(-1)^{|k|+1}}{|k|!} \Delta_k^{k_1, k_2, \dots, k_n} (U) \dots q_n^{*k_n} (U) \right]^{-1}}, \quad (20)$$

где  $q_i^*(U)$ ,  $i = \overline{1, n}$  есть решение (19) при фиксированном  $U$ .

Результаты, приводимые ниже, получены методом типа Зейделя в комбинации с методом Ньютона.

Аналогично задачу (5), (6) при (14), (15) можно свести к системе  $n$  уравнений относительно неизвестных  $q_i$ :

$$q_i = \frac{U^0}{h_i \sum_{j=1}^n h_j^{-1} \sum_{|k|=1: k_i=1}^n q_i^{-1} \frac{(-1)^{|k|+1}}{|k|!} \Delta_k^{k_1, k_2, \dots, k_n}}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (21)$$

В итерационных методах в качестве начального приближения для  $q_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  можно взять  $q_i = 1/4$  или  $q_i = 1/2$ , а для  $U$ ,  $U = 0 + \varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ .

Заметим, что значения  $W$  в (14) определяются значениями  $q_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  и  $\Delta_k^{k_1, k_2, \dots, k_n}$ , знак и величина последних, в свою очередь, определяются свойствами системы  $S$ .

Имеют место следующие два утверждения.

Утверждение 1. Если  $\Delta_k^{k_1, k_2, \dots, k_n} R 0$ ,  $2 \leq |d| \leq |k|$ ,  $|k| = \overline{2, n}$ , то

$$(w_{i_1 \dots i_l} - w_{i_1 \dots i_l i_{l+1} \dots i_{l+m}}) R \sum_{j=1}^m \Delta_{i_1 \dots i_l i_{l+j}}^1,$$

где  $l \geq 0$ ,  $l+m \leq n$ ,

$R$  — одно из бинарных отношений  $\geq, \leq, =$ .

Доказательство. Воспользуемся индукцией по  $m$ . Для  $m=2$  справедливость утверждения следует из условия. Пусть утверждение выполняется для  $m=r-1$ ,  $r > 2$ ,  $l+r \leq m$ . Покажем, что оно выполняется для  $m=r$ . По условию

$$w_{i_1 \dots i_l i_{l+1} \dots i_{l+r}} R (w_{i_1 \dots i_l i_{l+1} \dots i_{l+r-2} i_{l+r-1} + \\ + w_{i_1 \dots i_l i_{l+1} \dots i_{l+r-2} i_{l+r}} - w_{i_1 \dots i_l i_{l+1} \dots i_{l+r-2}}), \\ (w_{i_1 \dots i_l i_{l+1} \dots i_{l+r-2} i_{l+r}} - w_{i_1 \dots i_l i_{l+1} \dots i_{l+r-2}}) R \\ (w_{i_1 \dots i_l i_{l+1} \dots i_{l+r-3} i_{l+r}} - w_{i_1 \dots i_l i_{l+1} \dots i_{l+r-3}}) R \dots \\ \dots R (w_{i_1 \dots i_l i_{l+r}} - w_{i_1 \dots i_l}).$$

Таким образом,

$$w_{i_1 \dots i_l i_{l+1} \dots i_{l+r}} R (w_{i_1 \dots i_l i_{l+1} \dots i_{l+r-2} i_{l+r-1} + \\ + w_{i_1 \dots i_l i_{l+1} \dots i_{l+r}} - w_{i_1 \dots i_l}).$$

По предположению

$$- w_{i_1 \dots i_l i_{l+1} \dots i_{l+r}} R \left( \sum_{j=1}^{r-1} \Delta_{i_1 \dots i_l i_{l+j}}^1 - w_{i_1 \dots i_l i_{l+r}} \right).$$

Добавляя к обеим частям неравенства  $w_{i_1 \dots i_l}$ , получаем утверждение 1.

Заметим, что условие  $\Delta_k^{k_1, k_2, \dots, k_n} = 0$ ,  $|k| = \overline{2, n}$  является необходимым и достаточным для аддитивности функционала  $w(x)$ , описывающего поведение системы  $S$  и для него решение задач (3), (4) и (5), (6) при (14), (15) выписывается в явном виде.

Утверждение 2. Если

$$\text{sign } \Delta_k^{k_1, k_2, \dots, k_n} = \text{const}, \quad 2 \leq |d| \leq |k|, \quad |k| = \overline{2, n}, \\ |\Delta_k^{k_1, k_2, \dots, k_n}| \geq |\Delta_l^{l_1, l_2, \dots, l_n}|,$$

$|l| > |k|$  ( $l$  и  $k$  — мультииндексы),  $|l| = \overline{3, n}$ .

Доказательство. Пусть  $|l| = |k| + 1$  и

$$\forall i, \quad i = \overline{1, n}, \quad k_i \in \{l_i\}_1; \quad \Delta_k^{k_1, k_2, \dots, k_n} \geq 0, \quad 2 \leq |d| \leq |k|.$$

Тогда

$$\Delta_l^{l_1, l_2, \dots, l_n} = \Delta_k^{k_1, k_2, \dots, k_n} - \Delta_l^{l_1, l_2, \dots, l_n}.$$

Предположим противное, т. е.

$$\Delta_k^{k_1, k_2, \dots, k_n} < \Delta_l^{l_1, l_2, \dots, l_n} \quad \text{или} \quad \Delta_k^{k_1, k_2, \dots, k_n} < \Delta_k^{k_1, k_2, \dots, k_n} - \Delta_l^{l_1, l_2, \dots, l_n}, \quad \Delta_l^{l_1, l_2, \dots, l_n} < 0.$$

#### ПРОТИВОРЕЧИЕ

При учете возрастания числа сомножителей  $q_i$  в последующих членах выражения (14) утверждения 1 и 2 позволяют с целью облегчения решения задач (3), (4) и (5), (6) при (14), (15) для соответствующих систем  $S$  отбрасывать члены в (14), начиная с некоторого  $|k|$ . Такое отбрасывание можно осуществить, полагая  $\Delta_k^{k_1, k_2, \dots, k_n} = 0$ , начиная с некоторого  $|k|$ . Погрешность полученного приближенного решения  $W$  при этом в силу знакопеременности членов в (14) будет определяться выражением, соответствующим  $|k|$ , с которого начинается отбрасывание.

В качестве примера решалась задача распределения требований по надежности между элементами системы, состоящей из 7 элементов и имеющей структурную схему, изображенную на рисунке.

Ниже приведены начальные данные.

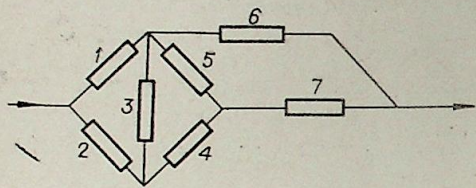
$i$	1	2	3	4	5	6	7
$h_i^{-1}$	0,3100	0,3508	0,1467	0,0026	0,5843	0,6530	0,1489
$g_i^0$	0,0437	0,0563	0,0560	0,0112	0,0980	0,6893	0,04550
$p_i^0$	0,6970	0,7850	0,5760	0,9550	0,3843	0,5078	0,5247

$$\sum_{i=1}^7 g_i^0 = 1, \quad G^0 = 1,6.$$

$w(x)$  характеризует связность системы. Определим

$$w_{i_1 \dots i_l} = \frac{M_{i_1 \dots i_l}}{M}, \quad l = \overline{0, n}, \quad (22)$$

где  $M$  — общее число минимальных путей системы [8];  $M_{i_1 \dots i_l}$  — число минимальных путей системы, когда элементы  $i_1, i_2, \dots, i_l$  отказали.



Структурная схема системы.

Очевидно, что таким образом определенный  $w(x)$  удовлетворяет всем требованиям 1° — 4°.

По (22) легко определить все значения  $w(x)$ .

Так,

$$w_i = 4/7, \quad i = 1, 3, 4,$$

$$5, 6, 8; \quad w_j = 3/7, \quad j = 2, 7.$$

Аналогично определяются  $w_{i_1 i_2}$  и т. д. Для данной системы  $S$  решалась задача (17), (18). В целях простоты счета в (17) все значения  $\Delta_k^{|k|}$ , начиная с  $|k|=3$ , приравнялись нулю. Для контроля была решена задача (17), (18), в которой нулю приравнялись все  $\Delta_k^{|k|}$ , начиная с  $|k|=4$ . Для обоих случаев результаты решения приведены ниже

$\tilde{W}$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$	$p_7$	
1-й случай	0,5415	0,7278	0,8160	0,8575	0,9974	0,4756	0,5078	0,9119
2-й случай	0,5342	0,7260	0,8157	0,8589	0,9974	0,4732	0,5078	0,9142

### ВЫВОДЫ

1. Рассмотрена и решена в общем виде задача оптимального распределения требований по надежности между элементами сложной системы.

2. Предложенный способ решения может быть применен для других подобных задач, содержательный смысл которых определяется функционалом  $w(x)$  и ограничением  $G$ .

3. Введенное понятие конечной разности порядка  $k$  по индексу является удобным средством при описании подобных задач.

4. Для практических целей можно ограничиться приближенной постановкой задачи, определяемой числом учитываемых в (17) членов.

Красноярский государственный университет

Поступила в редакцию  
18/VI 1979

### ЛИТЕРАТУРА

- Misra K. B. On optimal reliability design: a review.—Proceedings of the 6-th world congress IFAC, 1975, v. 3, p. 1—10.
- Кузьмин Ф. И. Задачи и методы оптимизации показателей надежности. М., Советское радио, 1972. 224 с.
- Ушаков И. А. Эффективность функционирования сложных систем.— В кн.: О надежности сложных технических систем. М., Советское радио, 1966, с. 25—56.
- Даффин Р., Питерсон Э., Зеппер К. Геометрическое программирование. М., Мир, 1972. 311 с.
- Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М., Наука, 1967. 375 с.
- Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М., Наука, 1976. 280 с.
- Пшеничный В. Н., Данилин Ю. М. Численные методы в экстремальных задачах. М., Наука, 1975. 319 с.
- Barlow R. E., Proschan F. Statistical theory of reliability and life testing.—Probability models. N. J., 1975. 297 p.

В. И. ПОТАПОВ, С. Г. БРАТЦЕВ

О ВЕРОЯТНОСТИ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ  
И СРЕДНЕМ ВРЕМЕНИ «ЖИЗНИ» ИЗБЫТОЧНЫХ СТРУКТУР  
С АДАПТИВНЫМИ ВОССТАНАВЛИВАЮЩИМИ ОРГАНАМИ

В работе С. М. Доманицкого\* описаны избыточные структуры с адаптивными восстанавливающими органами (АВО), реализующие пороговые функции с равными весами по входам, и даны оценки вероятности их безотказной работы при наличии на входах АВО отказов типа  $(1 \rightarrow 0)$  и  $(0 \rightarrow 1)$ . Адаптация по надежности в этих структурах осуществлялась за счет целенаправленного изменения порога АВО. При этом, однако, автор не учитывал влияние сбоев обоих типов на работу исследованных структур с АВО, исключил из рассмотрения восстанавливающие органы с адаптацией по надежности за счет целенаправленного изменения весов входов и не рассматривал влияние типа АВО и алгоритма адаптации на среднее время «жизни» резервируемых структур. Восполнению указанных пробелов теории избыточных структур с АВО посвящена настоящая работа.

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ  
И УСЛОВИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ

Адаптивными восстанавливающими органами будем называть пороговые логические элементы с переменными весами  $\omega_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ) входов  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ;  $n > 3$ ) и переменным порогом  $T_v$  ( $v=1, 2, \dots$ ), у которых в процессе работы в зависимости от ситуации на входах (от количества и вида отказов и сбоев) автоматически производится целенаправленное изменение параметров  $\omega_i$  и  $T_v$  для достижения максимально возможной корректирующей способности, обеспечиваемой данным типом АВО.

При рассмотрении адаптивных ВО первоначально с целью упрощения будем пренебрегать конечной надежностью устройства контроля и адаптации (УКА), полагая, что его интенсивность отказов не менее чем на порядок ниже интенсивности отказов на входах АВО, и считать, что время контроля и адаптации равно нулю. Последнее справедливо для быстродействующих электронных устройств, имеющих, например, комбинационную схему контроля входных сигналов АВО и жесткий алгоритм адаптации. При этом будем исходить из того, что адаптация начинается сразу же после появления отказа или сбоя на входе АВО. Считаем также, что одновременное появление на входах АВО двух и более отказов или сбоев исключено. Очередной отказ (сбой) может появиться только после адаптации ВО к предыдущему отказу. В дальнейшем будет учтена конечная надежность УКА.

При исследовании избыточных структур полагаем, что процесс возникновения отказов и сбоев на входах АВО — пуассоновский с соответ-

ствующими параметрами  $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1$  и  $\lambda^* = \lambda_0^* + \lambda_1^*$ , где  $\lambda_0, \lambda_1$  — интенсивности отказов соответственно вида  $(1 \rightarrow 0)$  и  $(0 \rightarrow 1)$ , а  $\lambda_0^*$  и  $\lambda_1^*$  — интенсивности сбоев вида  $(1 \rightarrow 0)$  и  $(0 \rightarrow 1)$ . Для упрощения аналитических выкладок вероятностью отказа самого АВО будем пренебрегать. Последнее не является существенным ограничением, так как структура различных типов АВО известна и их конечная надежность легко может быть учтена.

ТИПЫ АВО И АЛГОРИТМЫ АДАПТАЦИИ

Ограничимся рассмотрением двух типов АВО, так как в той или иной мере они включают в себя основные структурно-функциональные принципы практически всех известных АВО.

Первый из них — ВО<sub>1</sub> характеризуется однонаправленным ступенчатым изменением порога  $T_v$  (от максимального к минимальному) и бипарным изменением весов входов  $\omega_i$  ( $l=1, \omega_{l1}=1; l=2, \omega_{l2}=0$ ). Реализуемая им функция имеет следующий вид:

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = \text{sgn} \left( \sum_{i=1}^n \omega_{il} x_i - T_v \right). \quad (1)$$

Второй тип АВО — ВО<sub>2</sub> характеризуется однонаправленным (от максимального к минимальному) ступенчатым изменением порога  $T_v$  и реверсивным ступенчатым изменением весов входов  $\omega_i$  ( $l=1, \omega_{l1}=m; l=2, \omega_{l2}=m-1; \dots; l=m, \omega_{lm}=1; l=m+1, \omega_{l,m+1}=0$ ), а выражение для реализуемой им функции  $f_2(x_1, \dots, x_n)$  по форме совпадает с (1). Максимальное и минимальное значения  $T_v$  для обоих типов АВО зависит от алгоритма адаптации.

Рассмотрим принцип работы ВО<sub>1</sub>. Перед началом работы на всех  $n$ -входах веса равны  $\omega_{l1}$ , а порог  $T_v = \max$ . При появлении любого вида отказа или единичного сбоя на  $k$ -м входе соответствующее резервируемое устройство автоматически отключается от АВО, т. е.  $\omega_{k1} \rightarrow \omega_{k2}$ , а порог  $T_v$  в зависимости от выбранного алгоритма адаптации остается без изменения или уменьшается на единицу. Индикатором отказа (сбоя) изменения или уменьшается на единицу. Индикатором отказа (сбоя) любого резервируемого устройства является рассогласование его входного сигнала либо с сигналами на выходах неотключенных (работоспособных) резервируемых устройств, либо с сигналом на выходе ВО<sub>1</sub>.

Работа ВО<sub>2</sub> осуществляется согласно следующему принципу. Перед началом работы на всех  $n$ -входах веса равны  $\omega_{l1}$ , а порог  $T_v = \max$ . При каждом рассогласовании сигнала на выходе  $k$ -го резервируемого устройства с истинным значением вес  $k$ -го входа АВО уменьшается на единицу, а при каждом совпадении уменьшенный вес увеличивается на единицу. Таким образом, если на  $k$ -м входе ВО<sub>2</sub> число следующих подряд несоответствий с истинным значением равно  $r \leq m$ , а в следующий  $s \geq r$  циклах работы имеют место совпадения, то вес  $\omega_{kr}$  принимает ряд значений:

$$\omega_{k1} \rightarrow \omega_{k2} \rightarrow \dots \rightarrow \omega_{kr} \rightarrow \omega_{k,r-1} \rightarrow \omega_{k,r-2} \rightarrow \dots \rightarrow \omega_{k1}.$$

При этом порог  $T_v$  остается постоянным.

Если же на  $k$ -м входе ВО<sub>2</sub> число следующих подряд несоответствий с истинным значением равно  $r > m$ , то  $\omega_{kr} \rightarrow \omega_{k2} \rightarrow \dots \rightarrow \omega_{k,m+1} = 0$  ( $k$ -е резервируемое устройство отключается), а порог  $T_v$  в зависимости от выбранного алгоритма адаптации остается без изменения или уменьшается на единицу, равную  $m$  единицам веса входа. Однажды отключенное резервируемое устройство больше не подключается. Приняв во внимание, что в состоянии сбоя ложный сигнал на выходе резервируемого устройства появляется не более чем  $m$  раз подряд, легко заметить, что ВО<sub>2</sub> не чувствителен к сбоям при наличии трех и более неотключенных входов.

\* Доманицкий С. М. Построение надежных логических устройств. М., «Энергия», 1971, 280 с.

N				M			
N <sub>1</sub>		N <sub>2</sub>		M <sub>1</sub>		M <sub>2</sub>	
n	T <sub>v</sub>	n	T <sub>v</sub>	n	T <sub>v</sub>	n	T <sub>v</sub>
5	4	5	3	5	4	5	3
4	3	4	3	4	3	4	3
3	2	3	2	3	2	3	2
2	2	2	2	В дальнейшем входы АВО не отключаются			

Устройство контроля в АВО обоих типов в каждом цикле вычисления производит сравнение значений входных сигналов на неотключенных входах либо между собой, либо с сигналом на выходе АВО и при наличии рассог-

ласования выдает команду в устройство адаптации, которое в соответствии с выбранным алгоритмом изменяет параметры АВО —  $\omega_i$  и  $T_v$ .

Практически все алгоритмы адаптации обоих типов  $n$ -входовых АВО могут быть сведены к двум видам:  $N$  и  $M$ , разновидности которых ( $N_1$ ,  $N_2$  и  $M_1$ ,  $M_2$ ), начиная для упрощения с числа неотключенных входов  $n=5$ , приведены в таблице.

В тех случаях, когда априори известно, что на входах АВО интенсивность отказов вида  $(1 \rightarrow 0)$  много больше, чем  $(0 \rightarrow 1)$ , при алгоритме адаптации типа  $N$  в последнем адаптивном состоянии ( $n=2$ ) следует устанавливать  $T_j = 1$ .

### ВЕРОЯТНОСТЬ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ ИЗБЫТОЧНЫХ СТРУКТУР С АВО

В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями:  $E_i$  — работоспособное состояние системы при наличии на  $i$ -входах отказов и сбоев;  $E_r$  — неработоспособное состояние (поглощающее) системы, соответствующее потере корректирующей способности АВО;  $p_i$ ,  $p_r$  — вероятность нахождения системы в соответствующих состояниях  $E_i$  и  $E_r$ .

Исходя из алгоритмов адаптации вида  $N$  и  $M$  нетрудно составить графы состояний резервированных систем с  $n$ -входовыми АВО обоих типов (рис. 1 для алгоритмов вида  $N$  и рис. 2 для алгоритмов вида  $M$ ), где под дугами без квадратных скобок указаны вероятности переходов для  $BO_1$ , а в квадратных скобках — вероятности переходов для  $BO_2$ , отличные от соответствующих переходов для  $BO_1$ . Соответствующие графы состояний для систем с обоими типами АВО топологически эквивалентны и отличаются лишь вероятностями перехода из состояния  $E_i$  в состояние  $E_{i+1}$  для первого графа в диапазоне  $(0 \leq i \leq n-3)$  и для второго — в диапазоне  $(0 \leq i \leq n-4)$ , причем в обоих случаях в зависимости от ситуации на входах  $BO_1$  и  $BO_2$ , их корректирующая способность находится в пределах  $n-2 \leq R \leq n-1$ .

Система дифференциальных уравнений, соответствующая графу на рис. 1, принимает вид

$$\begin{aligned} p'_0(t) &= -\alpha_0 p_0(t) \\ p'_i(t) &= \alpha_{i-1} p_{i-1}(t) - \alpha_i p_i(t), \\ & \quad i = 1, 2, \dots, n-3 \\ & \quad \dots \dots \dots \\ p'_{n-2}(t) &= \alpha_{n-3} p_{n-3}(t) - 2(\lambda + \lambda_0^*) p_{n-2}(t), \\ p'_{n-1}(t) &= 2\lambda_1 p_{n-2}(t) - \alpha_{n-1} p_{n-1}(t), \\ p'_r(t) &= 2(\lambda_0 + \lambda_0^*) p_{n-2}(t) + \alpha_{n-1} p_{n-1}(t) + p_r(t), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\alpha_i = (n-i)(\lambda + \lambda^*)$  для  $BO_1$  и  $\alpha_i = (n-i)\lambda$  для  $BO_2$ ,  $0 \leq i \leq n-3$ , а  $\alpha_{n-1} = \lambda + \lambda^*$  для обоих АВО.

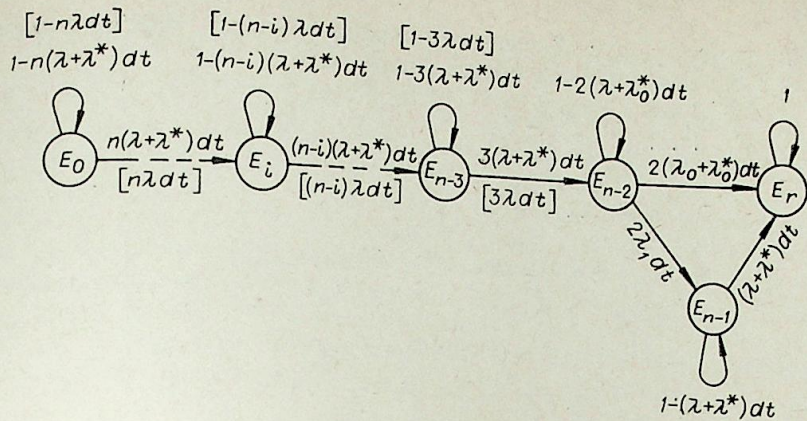


Рис. 1.

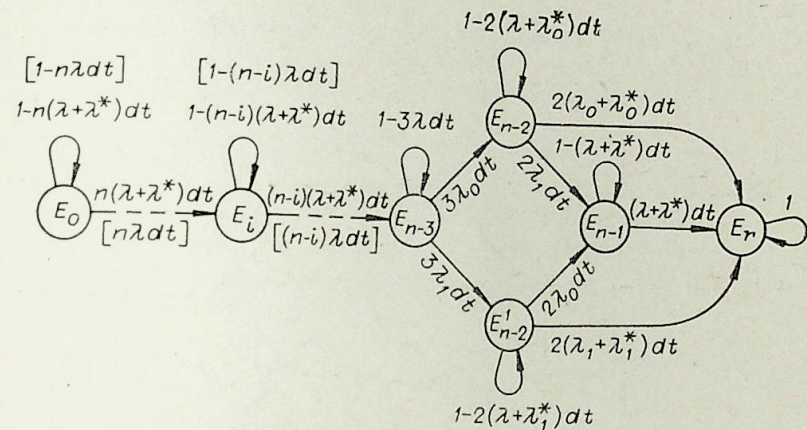


Рис. 2.

Решая систему уравнений (2) с начальными условиями  $p_0(0) = 1$ ,  $p_i(0) = 0$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ),  $p_r(0) = 0$ , получим

$$p_0(t) = e^{-\alpha t}, \quad (3)$$

$$p_i(t) = \prod_{j=0}^{i-1} \alpha_j \sum_{p=0}^i \frac{e^{-\alpha_p t}}{\prod_{\substack{m=0 \\ m \neq p}}^i (\alpha_m - \alpha_p)}, \quad 1 \leq i \leq n-3, \quad (4)$$

$$p_{n-2}(t) = \prod_{j=0}^{n-3} \alpha_j \left[ \sum_{p=0}^{n-3} \frac{e^{-\alpha_p t}}{B} - \sum_{p=0}^{n-3} \frac{e^{-2(\lambda + \lambda_0^*)t}}{B} \right], \quad (5)$$

$$\begin{aligned} p_{n-1}(t) &= 2\lambda_1 \prod_{j=0}^{n-3} \alpha_j \left\{ \sum_{p=0}^{n-3} \frac{e^{-\alpha_p t}}{(\alpha_{n-1} - \alpha_p) B} - \sum_{p=0}^{n-3} \frac{e^{-2(\lambda + \lambda_0^*)t}}{[\alpha_{n-1} - 2(\lambda + \lambda_0^*)] B} \right\} + \\ &+ e^{-\alpha_{n-1} t} \left\{ \sum_{p=0}^{n-3} \frac{1}{[\alpha_{n-1} - 2(\lambda + \lambda_0^*)] B} - \sum_{p=0}^{n-3} \frac{1}{(\alpha_{n-1} - \alpha_p) B} \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$B = [2(\lambda + \lambda_0^*) - \alpha_p] \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq p}}^{n-3} (\alpha_m - \alpha_p). \quad (7)$$

Используя выражения (3)–(7), можно вычислить вероятность безотказной работы и другие надежностные характеристики избыточной системы с  $BO_1$  и  $BO_2$  при алгоритмах адаптации вида  $N$ .

Для графа на рис. 2 соответствующая система дифференциальных уравнений записывается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} p_0'(t) &= -\alpha_0 p_0(t), \\ p_1'(t) &= \alpha_{i=1} p_{i-1}(t) - \alpha_i p_i(t), \\ & i = 1, 2, \dots, n-4 \\ p_{n-3}'(t) &= 4\alpha_{n-1} p_{n-4}(t) - 3\lambda p_{n-3}(t), \\ p_{n-2}'(t) &= 3\lambda p_{n-3}(t) - 2(2\lambda + \lambda^*) p_{n-2}(t), \\ p_{n-1}'(t) &= 2\lambda p_{n-2}(t) - \alpha_{n-1} p_{n-1}(t), \\ p_r'(t) &= 2\alpha_{n-1} p_{n-2}(t) + \alpha_{n-1} p_{n-1}(t) + p_r(t), \end{aligned} \right\} (8)$$

где  $\alpha_i$  ( $0 \leq i \leq n-4$ ) и  $\alpha_{n-1}$  для  $BO_1$  и  $BO_2$  имеют тот же вид, что и в системе (2).

Решение системы уравнений (8) с начальными условиями  $p_0(0) = 1$ ,  $p_i(0) = 0$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ),  $p_r(0) = 0$  можно представить в виде  $p_0(t)$  и  $p_i(t)$  ( $1 \leq i \leq n-4$ ), по форме совпадающие соответственно с (3) и (4), а

$$p_{n-3}(t) = 4\alpha_{n-1} \prod_{j=0}^{n-4} \alpha_j \left[ \sum_{p=0}^{n-4} \frac{e^{-\alpha_p t}}{(3\lambda - \alpha_p) C} - \sum_{p=0}^{n-4} \frac{e^{-3\lambda t}}{(3\lambda - \alpha_p) C} \right], \quad (9)$$

$$p_{n-2}(t) = 12\lambda\alpha_{n-1} \prod_{j=0}^{n-4} \alpha_j \left\{ \sum_{p=0}^{n-4} \frac{e^{-\alpha_p t}}{(3\lambda - \alpha_p) D} - \frac{1}{\lambda + 2\lambda^*} \sum_{p=0}^{n-4} \frac{e^{-3\lambda t}}{(3\lambda - \alpha_p) C} + e^{-2(2\lambda + \lambda^*)t} \left[ \frac{1}{\lambda + 2\lambda^*} \sum_{p=0}^{n-4} \frac{1}{(3\lambda - \alpha_p) C} - \sum_{p=0}^{n-4} \frac{1}{(3\lambda - \alpha_p) D} \right] \right\}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} p_{n-1}(t) &= 24\lambda^2\alpha_{n-1} \prod_{j=0}^{n-4} \alpha_j \left\{ \sum_{p=0}^{n-4} \frac{e^{-\alpha_p t}}{(3\lambda - \alpha_p)(\alpha_{n-1} - \alpha_p) D} - \frac{1}{(\lambda + 2\lambda^*)(\lambda^* - 2\lambda)} \sum_{p=0}^{n-4} \frac{e^{-3\lambda t}}{(3\lambda - \alpha_p) C} + e^{-2(2\lambda + \lambda^*)t} \left[ \frac{1}{3\lambda + \lambda^*} \times \right. \right. \\ & \times \left. \sum_{p=0}^{n-4} \frac{1}{(3\lambda - \alpha_p) D} - \frac{1}{(\lambda + 2\lambda^*)(3\lambda + \lambda^*)} \sum_{p=0}^{n-4} \frac{1}{(3\lambda - \alpha_p) C} \right] + \\ & \left. + e^{-\alpha_{n-1} t} \left[ \frac{1}{(\lambda + 2\lambda^*)(\lambda^* - 2\lambda)} \sum_{p=0}^{n-4} \frac{1}{(3\lambda - \alpha_p) C} - \frac{1}{3\lambda + \lambda^*} \sum_{p=0}^{n-4} \frac{1}{(3\lambda - \alpha_p) D} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{(\lambda + 2\lambda^*)(3\lambda + \lambda^*)} \sum_{p=0}^{n-4} \frac{1}{(3\lambda - \alpha_p) C} - \sum_{p=0}^{n-4} \frac{1}{(3\lambda - \alpha_p)(\alpha_{n-1} - \alpha_p) D} \right] \right\}, \quad (11) \end{aligned}$$

где

$$C = \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq p}}^{n-4} (\alpha_m - \alpha_p), \quad (12)$$

$$D = [2(2\lambda + \lambda^*)] C. \quad (13)$$

Полученные выражения (3), (4), (9-13) для  $p_i(t)$  ( $0 \leq i \leq n-1$ ) позволяют вычислить надежные характеристики, включая вероятность безотказной работы, для систем с  $BO_1$  и  $BO_2$  при алгоритме адаптации вида  $M$ .

Из систем уравнений (2) и (8) следует, что для обоих типов  $n$ -входных АВО при любом (из рассмотренных) виде алгоритма адаптации

вероятность безотказной работы избыточной системы определяется выражением  $W(t) = p_0(t) + \sum_{i=1}^{n-1} p_i(t)$ .

Приведенные математические модели надежности избыточных систем с адаптивными ВО позволяют напрямую расчетом легко решить следующие важные для практики задачи: при заданном соотношении и обеспечивающий резервируемой системе на интервале  $[0, T]$  вероятность безотказной работы не ниже заданной ( $W(t) \geq \bar{W}$ ) при минимальной ( $n \leq \bar{n}$ ) найти тип АВО, обеспечивающий ограничения на избыточность отказной работы системы.

### СРЕДНЕЕ ВРЕМЯ «ЖИЗНИ» ИЗБЫТОЧНЫХ СТРУКТУР С АВО

При эксплуатации избыточных систем длительного действия в малоизвестных условиях, доступ к которым исключен, важным показателем их надежности («живучести») является среднее время «жизни» системы  $T = \sum_{i=0}^{n-1} T_i$ , где  $T_i$  — среднее время работы между  $i$ -м и  $(i+1)$ -м отказами резервируемых блоков, подключенных ко входам АВО.

В связи с этим представляет теоретический и практический интерес аналитическое исследование среднего времени «жизни» систем с  $BO_1$  и  $BO_2$  при алгоритмах адаптации типа  $N$  и  $M$ .

Ввиду структурной неоднородности графов на рис. 1 и рис. 2, удобнее разбить диапазон изменения  $i$ , равный  $(0, n-1)$ , для первого графа на участки  $(0, n-3)$ ,  $n-2$ ,  $n-1$ , а для второго графа на участки  $(0, n-4)$ ,  $n-3$ ,  $n-2$ ,  $n-1$  и сравнить  $T_i$  внутри каждого участка.

В силу принятого предположения о простейшем потоке отказов и сбоев для расчета  $T_i$  на  $k$ -м участке любого из рассматриваемых графов можно воспользоваться выражением

$$T_i = \sum_{i=k_1}^{n-1} \int_0^{\infty} p_i(t) dt, \quad (14)$$

где  $k_1$  — начальный номер состояния системы внутри  $k$ -го участка,  $p_i(t)$  — вероятность нахождения резервированной системы в состоянии  $E_i$ , вычисленная при начальных условиях  $p_{k_1}(0) = 1$ ,  $p_{k_1+1}(0) = \dots = p_{n-1}(0) = 0$ .

Для резервированной системы с первым типом АВО, описываемой графом на рис. 1 ( $BO_1^N$ ) и графом на рис. 2 ( $BO_1^M$ ), введем соответствующие обозначения  $T_{1,i}^N$  и  $T_{1,i}^M$ , а для системы со вторым типом АВО ( $BO_2^N$ ,  $BO_2^M$ ) — соответственно  $T_{2,i}^N$  и  $T_{2,i}^M$ . Тогда, используя (14), трудно получить для  $BO_1^N$

$$T_{1,i}^N = X_{1,i}^N + \frac{\lambda + \lambda^* + 2\lambda_1}{2(\lambda + \lambda^*)(\lambda + \lambda_0^*)} \prod_{j=i}^{n-3} \alpha_j \sum_{p=i}^{n-3} \frac{1}{\alpha_p \prod_{\substack{m=i \\ m \neq p}}^{n-3} (\alpha_m - \alpha_p)}, \quad (15)$$

$$0 \leq i \leq n-3$$

где  $\alpha_i = (n-i)(\lambda + \lambda^*)$ ,

$$X_{1,i}^N = \frac{1}{\alpha_i} + \sum_{v=i+1}^{n-3} \prod_{j=i}^{v-1} \alpha_j \sum_{p=i}^v \frac{1}{\alpha_p \prod_{\substack{m=i \\ m \neq p}}^v (\alpha_m - \alpha_p)},$$

$$T_{1,n-2}^N = \frac{1}{\lambda + \lambda_0^*} \left( \frac{1}{2} + \frac{\lambda_1}{\lambda + \lambda^*} \right). \quad (16)$$

$$T_{1,n-1}^N = \frac{1}{\lambda + \lambda^*}. \quad (17)$$

Для  $BO_2^N$  имеют место равенства  $T_{2,n-2}^N = T_{1,n-2}^N$ ,  $T_{2,n-1}^N = T_{1,n-1}^N$ , а  $T_{2,i}^N$  ( $0 \leq i \leq n-3$ ) по форме совпадает с  $T_{1,i}^N$  и отличается от него лишь значением  $\alpha_i$ , которое для  $BO_2$  равно  $\alpha'_i = (n-i)\lambda$ . Очевидно, что  $\alpha_i > \alpha'_i$ , так как  $\lambda^* > 0$ .

Аналогичным образом для  $BO_1^M$  получены следующие значения  $T_{1,i}^M$ :

$$T_{1,i}^M = X_{1,i}^M + \left[ \frac{4(\lambda + \lambda^*)}{3\lambda} + \frac{2(3\lambda + \lambda^*)}{2\lambda + \lambda^*} \right] \prod_{j=i}^{n-5} \alpha_j \sum_{p=i}^{n-4} \frac{1}{\alpha_p \prod_{\substack{m=i \\ m \neq p}}^{n-4} (\alpha_m - \alpha_p)}, \quad (18)$$

$$0 \leq i \leq n-4,$$

где  $\alpha_i = (n-i)(\lambda + \lambda^*)$ ,

$$X_{1,i}^M = \frac{1}{\alpha_i} + \sum_{v=i+1}^{n-4} \prod_{j=i}^{v-1} \alpha_j \sum_{p=i}^v \frac{1}{\alpha_p \prod_{\substack{m=i \\ m \neq p}}^v (\alpha_m - \alpha_p)},$$

$$T_{1,n-3}^M = \frac{1}{3\lambda} + \frac{3\lambda + \lambda^*}{2(2\lambda + \lambda^*)(\lambda + \lambda^*)}, \quad (19)$$

$$T_{1,n-2}^M = \frac{4\lambda + \lambda^*}{2(\lambda + \lambda^*)(2\lambda + \lambda^*)}, \quad (20)$$

$$T_{1,n-1}^M = \frac{1}{\lambda + \lambda^*}. \quad (21)$$

Для  $BO_2^M$  имеют место равенства  $T_{2,n-3}^M = T_{1,n-3}^M$ ,  $T_{2,n-2}^M = T_{1,n-2}^M$ ,  $T_{2,n-1}^M = T_{1,n-1}^M$ , а  $T_{2,i}^M$  ( $0 \leq i \leq n-4$ ) вычисляется по следующей формуле:

$$T_{2,i}^M = X_{2,i}^M + \frac{3\lambda + \lambda^*}{2(2\lambda + \lambda^*)(\lambda + \lambda^*)} \prod_{j=i}^{n-3} \alpha'_j \sum_{p=i}^{n-3} \frac{1}{\alpha'_p \prod_{\substack{m=i \\ m \neq p}}^{n-3} (\alpha'_m - \alpha'_p)},$$

где  $0 \leq i \leq n-4$ ,

$$\alpha'_i = (n-i)\lambda,$$

$$X_{2,i}^M = \frac{1}{\alpha'_i} + \sum_{v=i+1}^{n-3} \prod_{j=i}^{v-1} \alpha'_j \sum_{p=i}^v \frac{1}{\alpha'_p \prod_{\substack{m=i \\ m \neq p}}^v (\alpha'_m - \alpha'_p)}.$$

Из приведенных выше выражений следует, что при  $\lambda^* > 0$   $T_{1,i}^N < T_{2,i}^N$  ( $0 \leq i \leq n-1$ ) для любых  $n \geq 3$ , а  $T_{1,i}^M < T_{2,i}^M$  ( $0 \leq i \leq n-1$ ) для любых  $n \geq 4$ ,

Перейдем теперь к анализу среднего времени «жизни» систем с одинаковыми АВО, работающими по различным алгоритмам адаптации. Используя очередные равенства

$$\prod_{j=i}^{n-3} \alpha_j = \alpha_{n-3} \prod_{j=i}^{n-4} \alpha_j,$$

$$\sum_{v=i+1}^{n-3} \prod_{j=i}^{v-1} \alpha_j \sum_{p=i}^v \frac{1}{\alpha_p \prod_{\substack{m=i \\ m \neq p}}^v (\alpha_m - \alpha_p)} = \prod_{j=i}^{n-4} \alpha_j \sum_{p=i}^{n-3} \frac{1}{\alpha_p \prod_{\substack{m=i \\ m \neq p}}^{n-3} (\alpha_m - \alpha_p)} +$$

$$+ \sum_{v=i+1}^{n-4} \prod_{j=i}^{v-1} \alpha_j \sum_{p=i}^v \frac{1}{\alpha_p \prod_{\substack{m=i \\ m \neq p}}^v (\alpha_m - \alpha_p)},$$

преобразуем (15) к виду

$$T_{1,i}^N = X_{1,i}^M + (1 + G\alpha_{n-3}) \prod_{j=i}^{n-4} \alpha_j \sum_{p=i}^{n-3} \frac{1}{\alpha_p \prod_{\substack{m=i \\ m \neq p}}^{n-3} (\alpha_m - \alpha_p)}, \quad (22)$$

где

$$G = \frac{\lambda + \lambda^* + 2\lambda_1}{2(\lambda + \lambda^*)(\lambda + \lambda_0^*)}.$$

Из выражений (18) и (22) ясно, что  $T_{1,i}^N \leq T_{1,i}^M$  ( $0 \leq i \leq n-4$ ), если

$$(1 + G\alpha_{n-3}) \prod_{j=i}^{n-4} \alpha_j \sum_{p=i}^{n-3} \frac{1}{\alpha_p \prod_{\substack{m=i \\ m \neq p}}^{n-3} (\alpha_m - \alpha_p)} \leq H \prod_{j=i}^{n-5} \alpha_j \sum_{p=i}^{n-4} \frac{1}{\alpha_p \prod_{\substack{m=i \\ m \neq p}}^{n-4} (\alpha_m - \alpha_p)},$$

где

$$H = \frac{4(\lambda + \lambda^*)}{3\lambda} + \frac{2(3\lambda + \lambda^*)}{2\lambda + \lambda^*}.$$

В связи с тем, что

$$\prod_{j=i}^{n-4} \alpha_j \sum_{p=i}^{n-3} \frac{1}{\alpha_p \prod_{\substack{m=i \\ m \neq p}}^{n-3} (\alpha_m - \alpha_p)} = \int_0^\infty p_{n-3}^{(i)}(t) dt,$$

$$\prod_{j=i}^{n-5} \alpha_j \sum_{p=i}^{n-4} \frac{1}{\alpha_p \prod_{\substack{m=i \\ m \neq p}}^{n-4} (\alpha_m - \alpha_p)} = \int_0^\infty p_{n-4}^{(i)}(t) dt,$$

где  $p_{n-j}^{(i)}$  — вероятность нахождения системы в состоянии  $E_{n-j}$  при условии, что при  $t=0$  она находилась в состоянии  $E_i$  вследствие очевидного неравенства

$$\int_0^\infty p_{n-4}^{(i)}(t) dt > \int_0^\infty p_{n-3}^{(i)}(t) dt,$$

знак неравенства  $T_{1,i}^N \leq T_{1,i}^M$  ( $0 \leq i \leq n-4$ ) будет совпадать со знаком неравенства  $1 + G\alpha_{n-3} \leq H$ . Значит  $T_{1,i}^N \leq T_{1,i}^M$  ( $0 \leq i \leq n-4$ ) при

$$1 + \frac{3(\lambda + \lambda^* + 2\lambda_1)}{2(\lambda + \lambda_0^*)} \leq \frac{4(\lambda + \lambda^*)}{3\lambda} + \frac{2(3\lambda + \lambda^*)}{2\lambda + \lambda^*}. \quad (23)$$

Из выражения (15) при  $i=n-3$  и (19) следует, что  $T_{1,n-3}^N \leq T_{1,n-3}^M$  при

$$\frac{1}{3(\lambda + \lambda^*)} + \frac{1}{2(\lambda + \lambda_0^*)} + \frac{\lambda_1}{(\lambda + \lambda^*)(\lambda + \lambda_0^*)} \leq \frac{1}{3\lambda} + \frac{3\lambda + \lambda^*}{2(2\lambda + \lambda^*)(\lambda + \lambda^*)}, \quad (24)$$

из выражения (16) и (20) вытекает, что  $T_{1,n-2}^N \leq T_{1,n-2}^M$  при выполнении условия

$$\frac{\lambda + \lambda^* + 2\lambda_1}{\lambda + \lambda_0^*} \leq \frac{4\lambda + \lambda^*}{2\lambda + \lambda^*}, \quad (25)$$

а из выражения (17) и (21) понятно, что

$$T_{1,n-1}^N = T_{1,n-1}^M. \quad (26)$$

Перейдем теперь к сравнению  $T_{2,i}^N$  и  $T_{2,i}^M$ . Поскольку в результате расчетов найдено, что  $X_{2,i}^N = X_{2,i}^M$ , то, следовательно,  $T_{2,i}^N \leq T_{2,i}^M$  ( $0 \leq i \leq n-2$ ) при

$$\frac{\lambda + \lambda^* + 2\lambda_1}{\lambda + \lambda_0^*} \leq \frac{3\lambda + \lambda^*}{2\lambda + \lambda^*}, \quad (27)$$

$$T_{2,n-1}^N = T_{2,n-1}^M. \quad (28)$$

Для практики представляет определенный интерес сравнение среднего времени «жизни» избыточных систем не только с разнотипными АВО и однотипными алгоритмами адаптации и с однотипными АВО, работающими по различным алгоритмам, адаптации, но и с разнотипными АВО, работающими по различным алгоритмам адаптации. Для этого проведем сравнение  $T_{1,i}^N$  с  $T_{2,i}^M$  и  $T_{1,i}^M$  с  $T_{2,i}^N$ .

Визуальный анализ графов на рис. 2 и рис. 4 дает основание сделать заключение, что при фиксированных значениях  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_0^*$  и  $\lambda_1^*$  начиная с некоторого значения  $n$   $T_{1,i}^N \leq T_{2,i}^M$  и  $T_{1,i}^M \leq T_{2,i}^N$ . Полагая, что для любого типа АВО  $\min n = 3$ , и найдя условия, при которых выполняются указанные выше неравенства, можно утверждать, что эти условия будут достаточными и для  $n > 3$ . Из уравнений (15) и (19) легко получить, что  $T_{1,n-3}^N \leq T_{2,n-3}^M$  при выполнении условия

$$\frac{5\lambda + 3\lambda^* + 6\lambda_1 + 2\lambda_0^*}{6(\lambda + \lambda^*)(\lambda + \lambda_0^*)} \leq \frac{1}{3\lambda} + \frac{3\lambda + \lambda^*}{2(2\lambda + \lambda^*)(\lambda + \lambda^*)}, \quad (29)$$

а из уравнения (15) при  $\alpha_i = \alpha_i^* = (n-i)\lambda$  и уравнения (19) следует, что  $T_{1,n-3}^M \leq T_{2,n-3}^N$ , если

$$\frac{3\lambda + \lambda^*}{2\lambda + \lambda^*} \leq \frac{\lambda + \lambda^* + 2\lambda_1}{\lambda + \lambda^*}. \quad (30)$$

Таким образом, результаты проведенного анализа, представленные в виде неравенств (23)–(30), позволяют для каждого соотношения параметров  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_0^*$ ,  $\lambda_1^*$  и  $n$  определить такой тип АВО и такой алгоритм адаптации, которые обеспечат резервированной системе максимальное среднее время «жизни».

Все предыдущие рассуждения об АВО велись в предположении абсолютной надежности устройства контроля и адаптации (УКА). Это делалось для упрощения математических выкладок. Однако если УКА по структурной сложности соизмеримо с резервируемыми блоками, то учет конечной надежности УКА может привести к недостаточно точным оценкам.

Для построения математических моделей избыточных структур с АВО при конечной надежности УКА к сделанным ранее предположениям добавим, что УКА отказывает с интенсивностью  $k\lambda$ , где  $k$  — коэффициент пропорциональности между интенсивностью отказов резервируемых блоков и УКА. При отказе УКА оно перестает оказывать какое-либо воздействие на веса входов  $\omega_i$  и порог  $T_v$  АВО.

Введем обозначение:  $E_{gij}^l$  — работоспособное состояние системы с АВО при отказе УКА после возникновения в адаптивном режиме  $l$  от-

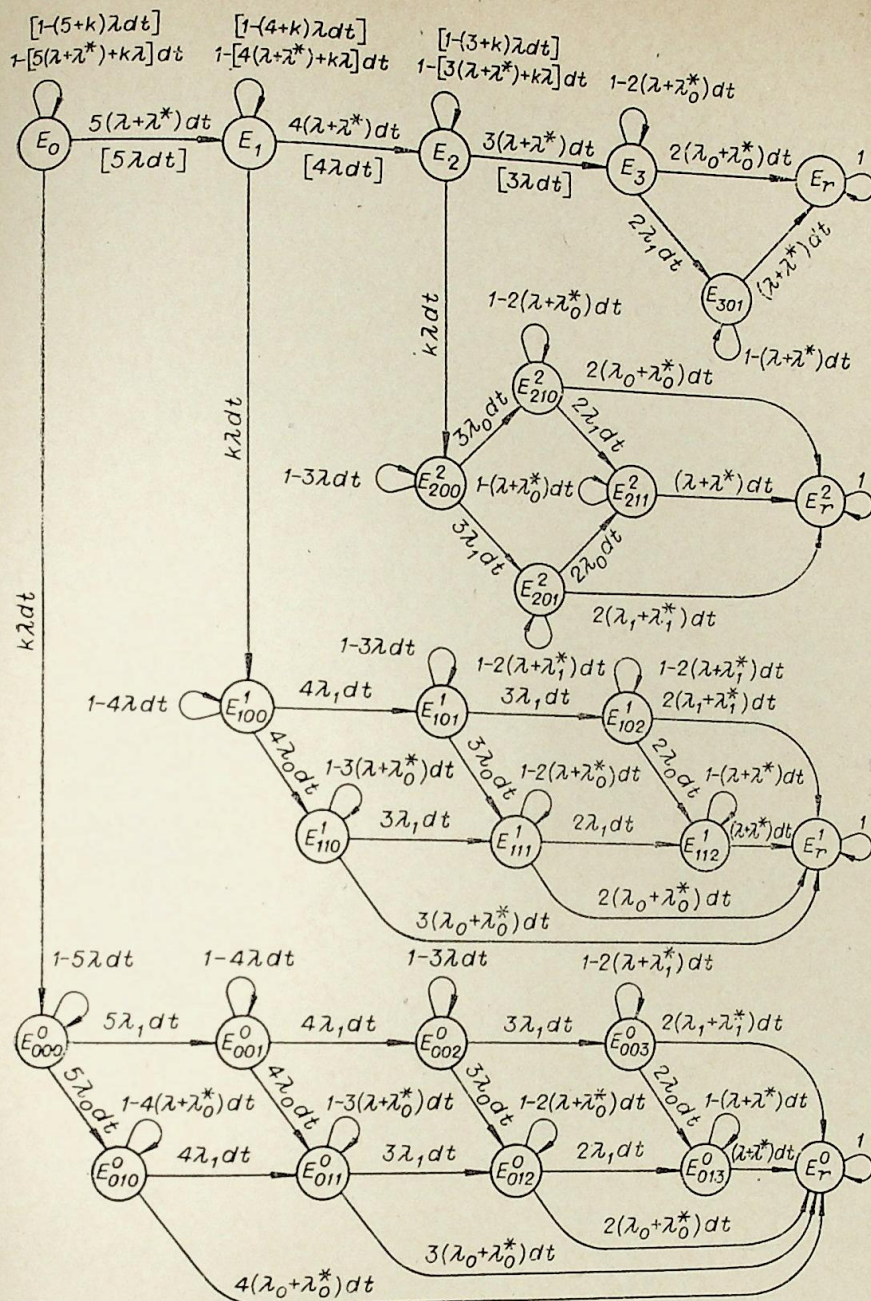


Рис. 3.

казов (сбоев) на входах АВО, при наличии на  $g$ -входах АВО неразличимых по виду отказов, на  $i$ -входах — отказов вида  $(1 \rightarrow 0)$  и на  $j$ -входах — отказов вида  $(0 \rightarrow 1)$ .

С учетом сказанного графы состояний резервированных систем (для простоты при  $n = 5$ ) с  $BO_{11}^N$ ,  $BO_{21}^N$  и с  $BO_{11}^M$ ,  $BO_{21}^M$  приведены соответственно на рис. 3 и рис. 4. Очевидно, для алгоритмов вида  $N_2$  и  $M_1$  построение соответствующих графов не вызовет особых трудностей, так как их ветви состоят из элементов графов (см. рис. 3 и 4).

Из приведенных графов видно, что аналитическое исследование систем с АВО при учете конечной надежности УКА в силу громоздкости

Ю. К. ГОРБУНОВ

ПОПЕРЕЧНЫЕ АКТИВНО-ИНДУКТИВНЫЕ  
ВОЛНОВЫЕ ПАРАМЕТРЫ ОБМОТOK  
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИИ

Волновые параметры схемы замещения обмоток электрических машин условно могут быть разделены на продольные и поперечные\*. Продольные параметры связаны с током, текущим вдоль обмотки, поперечные — с током, текущим с обмотки на корпус электрической машины через корпусную изоляцию и листы стали статора. Полагается, что по обмотке протекает синусоидальный ток с частотой от нескольких килогерц, до нескольких сот килогерц (в ряде случаев до нескольких мегагерц), что соответствует частотам свободных колебаний напряжений и токов в обмотке при волновых процессах.

Схема включения поперечных волновых параметров элемента обмотки показана на рис. 1, где  $Y_1 = G + j\omega C$  — полная проводимость корпусной изоляции;  $C$  — емкость между медью обмотки и торцевыми поверхностями листов стали паза статора;  $G$  — активная проводимость корпусной изоляции,  $Y_2 = \frac{1}{r + j\omega L}$  — полная проводимость листов стали на пути тока, текущего с обмотки на корпус;  $r$  и  $L$  — активное сопротивление и индуктивность листов стали, зависящие от глубины проникновения электромагнитной волны в стальные листы через их боковые поверхности.

На рис. 2 показано примерное направление силовых линий электрического и магнитного полей на обращенной к нам поверхности стальной пластины статора, если, например, напряжение между катушками, расположенными в трех соседних пазах, и корпусом равно  $\dot{U}$ . Данное поле накладывается на электромагнитное поле, создаваемое продольным током в обмотке и наводящем в стали вихревые токи. Для выяснения необходимости учета поперечных активно-индуктивных волновых параметров

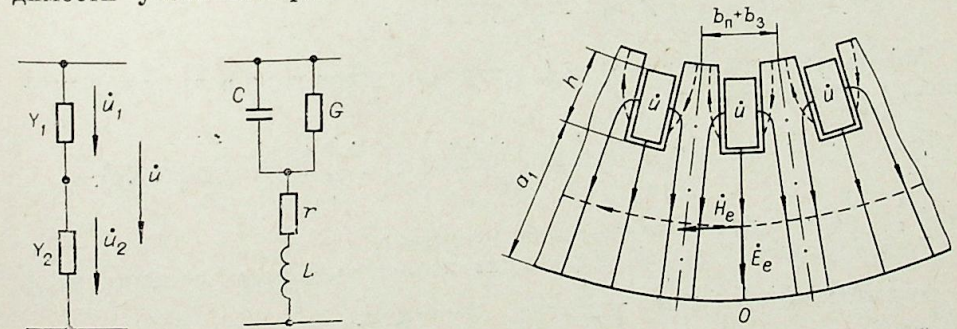


Рис. 1.

Рис. 2.

\* Каганов З. Г. Волновые напряжения в электрических машинах. М., Энергия, 1970.

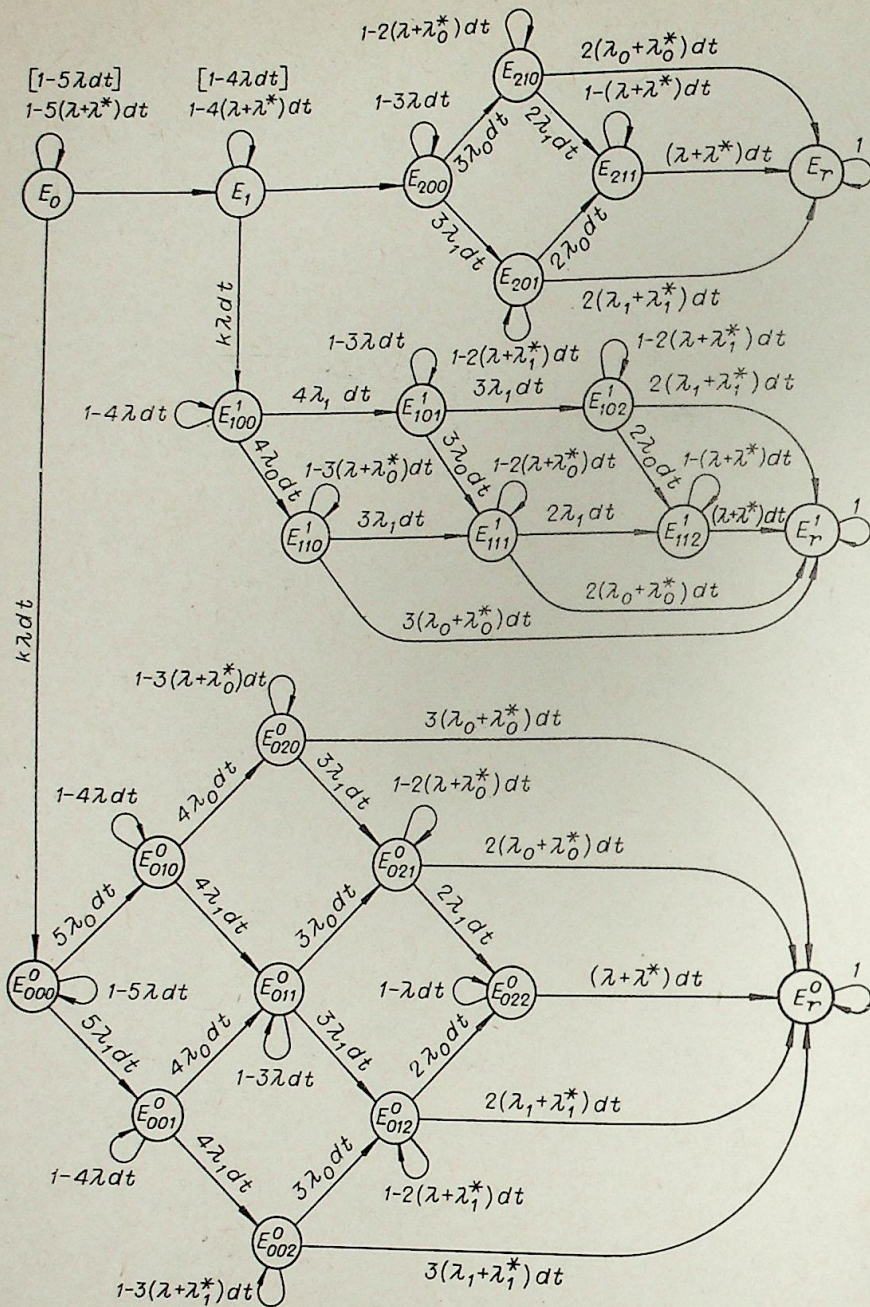


Рис. 4.

не представляется возможным и поэтому для их анализа необходимо использовать ЦВМ.

В результате проведенного математического моделирования на ЦВМ систем, описываемых графами на рис. 3 и рис. 4, установлено, что при  $k < 1$  отказы УКА практически не влияют на надежность систем с АВО и лишь при  $k \geq 1$  влияние отказов УКА на надежность систем с АВО становится заметным, особенно при большом  $t$ .

Омский политехнический институт

Поступила в редакцию  
25/IX 1977

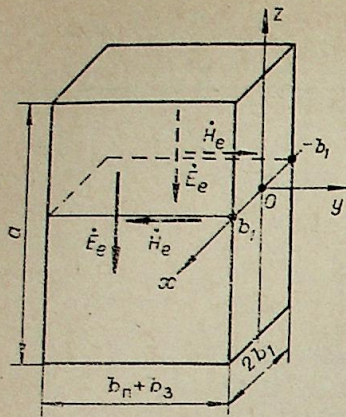


Рис. 3.

обмоток определим приближенное значение проводимости  $Y_2$  для одного из пазов статора электрической машины (на рис. 2 паз выделен штрихпунктирными линиями) при следующих допущениях.

1. Полагаем, что торцевые поверхности листа стали, обращенные к пазу, имеют потенциал относительно корпуса машины, равный  $\dot{U}_2$ .

2. Поскольку проводимость  $Y_2$  будет меньше у электрических машин со значительной шириной яра  $a_1$ , полагаем что  $a_1 > h$  (см. рис. 2).

3. Полагаем, что электрическое поле в стали плоскопараллельное. Поскольку ширина участков в зубце и яре различная, полагаем, что средняя ширина участка, по

которому замыкается ток, текущий по стали с обмотки на корпус, равна  $b_n + b_3$  при средней длине силовой линии электрического поля  $a = a_1 + 0,5h$  (рис. 3).

Тогда в изоляции между листами стали и на боковых поверхностях листа стали, имеющего толщину  $2b_1$ , напряженность электрического поля  $\dot{E}_e$  будет равна

$$\dot{E}_e = \frac{\dot{U}_2}{a}.$$

В листе стали напряженность электрического поля (без учета краевого эффекта)

$$\dot{E} = \dot{E}_e \frac{\text{ch } \tilde{\Gamma}_1 x}{\text{ch } \tilde{\Gamma}_1 b_1},$$

где  $\tilde{\Gamma}_1 = \sqrt{j\omega\mu_0\mu_1\gamma_1}$  — комплексный коэффициент распространения электромагнитного поля в стали;  $\mu_1$  — относительная магнитная проницаемость стали (при расчетах принимается постоянной величиной);  $\gamma_1$  — удельная проводимость стали.

Напряженность магнитного поля на боковых поверхностях пластины определяется из условия

$$\frac{d\dot{E}}{dx} = -j\omega\mu_0\mu_1\dot{H}$$

и при  $x = b_1$  будет равна

$$\dot{H}_e = -\frac{\gamma_1}{\tilde{\Gamma}_1} \dot{E}_e \text{th } \tilde{\Gamma}_1 b_1.$$

Мощность потерь в пластине (электромагнитное поле в пластину проникает с двух сторон)

$$\tilde{S} = -2a(b_n + b_3)\dot{E}_e\dot{H}_e^* = \frac{2(b_n + b_3)\gamma_1}{a}U_2^2 \left( \frac{\text{th } \tilde{\Gamma}_1 b_1}{\tilde{\Gamma}_1} \right)^* = U_2^2 (Y_2')^*,$$

где  $Y_2'$  — полная проводимость одной пластины.

При толщине стали  $2b_1$  и толщине изоляции между листами стали  $2b_2$  на длине паза  $l_n$  будет  $\frac{l_n}{2(b_1 + b_2)}$  пластины.

Тогда общая проводимость  $Y_2$  для одного паза будет равна

$$Y_2 = \frac{l_n Y_2'}{2(b_1 + b_2)} = \frac{(b_n + b_3) l_n \gamma_1}{(b_1 + b_2) a} \frac{\text{th } \tilde{\Gamma}_1 b_1}{\tilde{\Gamma}_1}. \quad (1)$$

Для ориентировочной оценки соотношений между проводимостями  $Y_1$  и  $Y_2$  вычислим их значения для одного из пазов синхронного двигателя СТД 800-2 при значениях:  $b_n = b_3 = 18$  мм,  $h = 48$  мм,  $a_1 = 100$  мм,  $l_n = 0,505$  м,  $2b_1 = 0,5$  мм,  $2b_2 = 0,05$  мм,  $\mu_1 = 180$ ,  $\gamma_1 = 2 \cdot 10^6$  Ом  $\cdot$  м $^{-1}$ ,  $C = 650$  пФ,  $G = 0,408 \cdot 10^{-3}$  См ( $\text{tg } \delta = 0,1$ ). Емкость  $C$  обмотки, расположенной в одной из пазов статора двигателя, была вычислена по формуле для емкости плоского конденсатора. Поскольку с ростом частоты проводимость  $Y_1$  возрастает, а  $Y_2$  уменьшается, сравним их значение на частоте  $f = 1$  МГц. Тогда  $Y_1 = 4,1 \cdot 10^{-3} e^{-j84,3^\circ}$  См и по (1)

$$Y_2 = 2,0 \cdot 10^4 e^{j45^\circ} \text{ См},$$

т. е.  $|Y_2| \gg |Y_1|$ . Аналогичное соотношение между проводимостями  $Y_1$  и  $Y_2$  имеет место во всех электрических машинах.

Таким образом, при расчете волновых перенапряжений в схеме замещения обмоток электрических машин можно не учитывать поперечные активно-индуктивные параметры стали статора на пути тока, текущего с обмотки на корпус электрической машины, поскольку полная проводимость стали до весьма высоких частот значительно больше проводимости корпусной изоляции.

Новосибирский электротехнический институт связи

Поступила в редакцию 14/VI 1979

УДК 621.313.333.001.31+621.313.333.001.24

О. Н. ВЕСЕЛОВСКИЙ

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ЛИНЕЙНЫЙ  
АСИНХРОННЫЙ ДВИГАТЕЛЬ  
И ЕГО АНАЛОГОВАЯ МОДЕЛЬ

В последние годы заметно возрастает интерес к линейным электродвигателям, подвижная часть которых совершает поступательное (транспортные и конвейерные системы) или возвратно-поступательное движение. Двигатели возвратно-поступательного движения находят себе применение в приводах производственных механизмов и различных автоматических устройств и приборов. В отличие от транспортных последние являются низкоскоростными (скорость перемещения подвижной части обычно меньше 3 м/с).

Среди разновидностей низкоскоростных линейных асинхронных двигателей (ЛАД) определенными преимуществами обладает цилиндрический двигатель, конструктивная схема которого приведена на рис. 1, где обозначено: 1 — стержень или труба из ферромагнитного материала; 2 — анизотропный слой вторичного элемента в виде чередующихся медных и стальных шайб, надетых на стержень 1 с тугой посадкой; 3 — воздушный зазор; 4 — активный слой индуктора в виде чередующихся шайбообразных катушек и ферромагнитных шайб; 5 — технологический зазор, неизбежно образующийся после намотки на активный слой внешнего ферро-

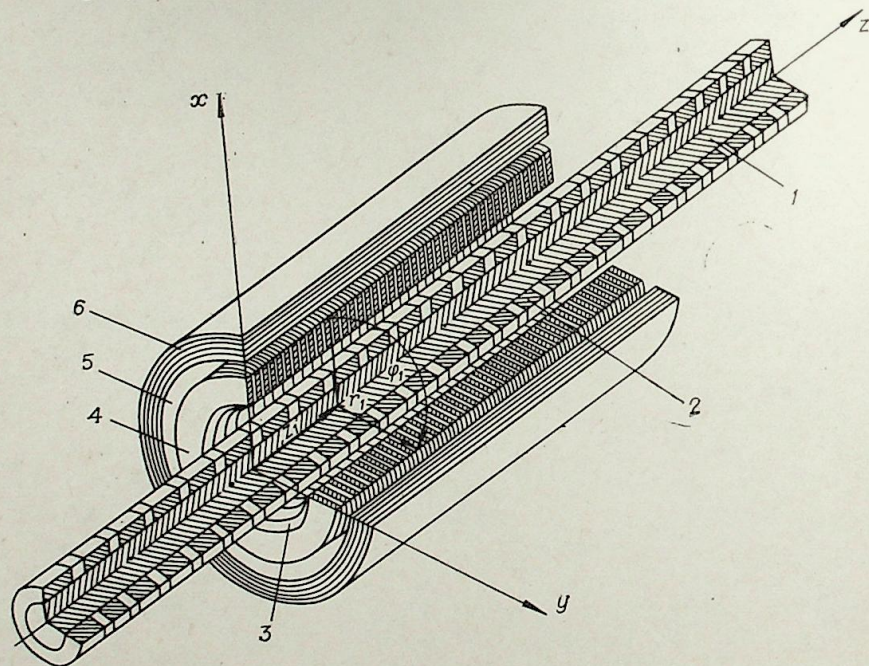


Рис. 1.

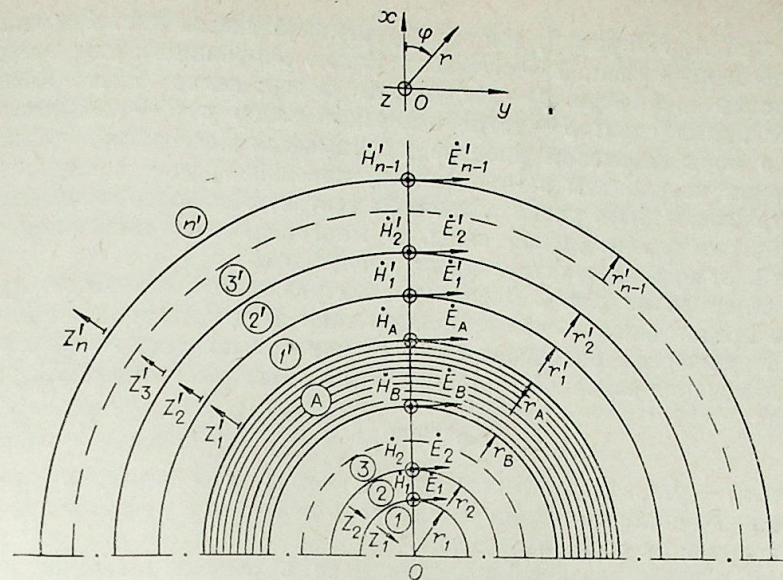


Рис. 2.

магнитного яра 6 из рулонной стали. Для уменьшения потерь от вихревых токов в яре 6 делается аксиальная, а в стальных шайбах активного слоя — радиальная прорези. Катушки соединяются по двух- или трехфазной схеме таким образом, чтобы при подключении источника питания в воздушном зазоре образовалось бегущее электромагнитное поле.

Среди достоинств цилиндрического ЛАД следует отметить относительную конструктивную простоту и, как следствие, технологичность образования активного слоя из отдельных модулей и анизотропного слоя на вторичном элементе [1]. Немаловажным является отсутствие в цилиндрическом исполнении так называемого поперечного краевого эффекта. К числу недостатков относится невозможность изготовить вторичный элемент произвольной длины, т. е. двигатель является по своей конструкции короткоходовым. Определенные трудности возникают при конструировании подшипниковых узлов.

Низкоскоростные ЛАД промышленной частоты имеют весьма малые полюсные деления, что влечет за собой заметное ослабление электромагнитной связи между первичным и вторичным контурами и ухудшение энергетических характеристик машин. В связи с этим практическое применение низкоскоростных ЛАД находят прежде всего в тех случаях, когда энергетические характеристики (КПД, коэффициент мощности) не играют решающей роли: кратковременные и повторно-кратковременные режимы работы, бесконтактная передача движения в условиях агрессивных сред или глубокого вакуума, а также во всех случаях, когда по техническим, экономическим, эстетическим или каким-либо иным причинам требуется обязательно исключить преобразователь вращательного движения в поступательное.

Удобным средством расчета дифференциальных и интегральных характеристик низкоскоростных, многополюсных ЛАД, обладающих измельченными структурами, является разрабатываемый в последние годы метод замещения индукционных машин аналоговыми моделями в виде каскадных соединений активного и пассивных четырехполюсников [2, 3, 4, 5]. В основе этого метода лежат идеи ортогодного моделирования, когда неоднородная область реального устройства замещается идеализированной средой, обладающей изотропией вдоль координатных осей.

На рис. 2 представлен схематический разрез цилиндрического ЛАД, на котором показано произвольное число пассивных слоев (1 — n')

тивный слой А. Например, для конструктивной схемы рис. 1 можно выделить пассивные слои: 1 — стержень (ядро) вторичного элемента, 2 — делитель пассивные слои; 3 — воздушный зазор; далее идет активный анизотропное покрытие, 3 — воздушный зазор и 6 — внешнее ядро. Модель в первоначальном анализе принимается бесконечно длинной в направлении координаты z (продольный краевой эффект в случае необнаправленности может быть учтен введением соответствующего коэффициента ослабления электромагнитной силы. В многополюсных низкоскоростных машинах этот эффект практически не проявляется).

Приведенная на рис. 2 модель рассматривается в линейном приближении, в предположении, что сторонние токи замыкаются по концентрическим окружностям активного слоя, имеют только φ-ю составляющую, а закон изменения основной гармоники тока определяется мнимой частью комплекса

$$e^{j(\omega t - \alpha z)},$$

где  $\omega = 2\pi f$  — угловая частота тока;  $\alpha = \pi/\tau$ ;  $\tau$  — полюсное деление. В случае необходимости можно рассмотреть действие и высших пространственных гармоник токовой нагрузки.

Таким образом, электромагнитное поле в рассматриваемой модели представляет собой монохроматическую волну, бегущую со скоростью  $v_c = 2\pi f$  в положительном направлении оси z. Поток энергии, распространяющейся от активного слоя и пересекающей коаксиальные поверхности всех рассматриваемых областей, может быть определен при помощи амплитуд тангенциальных составляющих напряженностей электрического E и магнитного H полей.

Если, как это обычно принято для анализа полей при низких частотах, пренебречь электрическим смещением, то при указанных выше допущениях из уравнения Максвелла

$$\text{rot } \vec{H} = (\Delta_{ct} e^{-j\alpha z} + \gamma \vec{E} e^{-j\alpha z}) \vec{e}_\varphi,$$

где  $\Delta_{ct}$  — амплитуда плотности стороннего тока;  $\gamma$  — электрическая проводимость рассматриваемой среды, можно получить следующее выражение для комплексной амплитуды результирующего векторного магнитного потенциала A:

$$\frac{d^2 \dot{A}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{A}}{dr} - \left( \beta^2 + \frac{1}{r^2} \right) \dot{A} = -\Delta_{ct} \mu_z. \quad (1)$$

Здесь

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu_z}{\mu_r} \alpha^2 + j\omega s \mu_z}; \quad (2)$$

$\mu_r$ ,  $\mu_z$  — абсолютная магнитная проницаемость среды рассматриваемого слоя в направлении координат r и z соответственно; s — скольжение соответствующей области относительно основной гармоники поля.

Рассмотрим решение задачи отдельно для пассивных и для активного слоев.

Пассивные слои. В любом пассивном слое сторонние токи отсутствуют и выражение (1) превращается в модифицированное уравнение Бесселя:

$$\frac{d^2 \dot{A}}{d(\beta r)^2} + \frac{1}{\beta r} \frac{d\dot{A}}{d(\beta r)} - \left[ 1 + \frac{1}{(\beta r)^2} \right] \dot{A} = 0,$$

решение которого для произвольного слоя под номером k

$$\dot{A}_k = C_k I_1(\beta_k r) + D_k K_1(\beta_k r),$$

где  $C_k$  и  $D_k$  — постоянные интегрирования;  $I_1(\beta_k r)$  и  $K_1(\beta_k r)$  — модифицированные функции Бесселя первого порядка соответственно первого и второго рода.

Комплексная амплитуда напряженности электрического поля

$$\dot{E}_k = -j\omega [C_k I_1(\beta_k r) + D_k K_1(\beta_k r)]$$

и комплексная амплитуда тангенциальной составляющей напряженности магнитного поля

$$\dot{H}_k = \frac{1}{\mu_{z,k}} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r \dot{A}_k] = \frac{\beta_k}{\mu_{z,k}} [C_k I_0(\beta_k r) - D_k K_0(\beta_k r)],$$

где  $I_0(\beta_k r)$  и  $K_0(\beta_k r)$  — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка.

Для полубесконечной области  $n'$ , принимая во внимание, что в бесконечности все поля исчезают, имеем

$$\dot{E}'_n(r) = -j\omega D'_n K_1(\beta'_n r);$$

$$\dot{H}'_n(r) = -\frac{\beta'_n}{\mu'_{z,n}} D'_n K_0(\beta'_n r).$$

Если взять отношение последних двух выражений, то исключается и вторая постоянная интегрирования

$$\frac{\dot{E}'_n(r)}{\dot{H}'_n(r)} = \frac{j\omega \mu'_{z,n} K_1(\beta'_n r)}{\beta'_n K_0(\beta'_n r)} = Z'_n(r).$$

При  $r = r'_{n-1}$   $Z'_n(r'_{n-1})$  обращается во «входное» поверхностное сопротивление полубесконечного пространства  $n'$

$$Z'_n = \frac{j\omega \mu'_{z,n} K_1(\beta'_n r'_{n-1})}{\beta'_n K_0(\beta'_n r'_{n-1})} = Z'_{c,n} \frac{K_1(\beta'_n r'_{n-1})}{K_0(\beta'_n r'_{n-1})}, \quad (3)$$

причем величина

$$Z'_{c,n} = \frac{j\omega \mu'_{z,n}}{\beta'_n}$$

представляет собой хорошо известное в теории электромагнитного поля характеристическое сопротивление среды области  $n'$  в прямоугольной системе координат.

Поскольку магнитная и электрическая напряженность поля на оси машины ( $r = 0$ ) не может принимать бесконечных значений, то в слое 1

$$\dot{E}_1(r) = -j\omega C_1 I_1(\beta_1 r);$$

$$\dot{H}_1(r) = \frac{\beta_1}{\mu_{z,1}} C_1 I_0(\beta_1 r).$$

«Входное» сопротивление области под номером 1

$$Z_1 = \frac{j\omega \mu_{z,1} I_1(\beta_1 r_1)}{\beta_1 I_0(\beta_1 r_1)} = Z_{c,1} \frac{I_1(\beta_1 r_1)}{I_0(\beta_1 r_1)}. \quad (4)$$

Выражениям (3) и (4) можно придать смысл некоторых входных сопротивлений двухполюсников, включенных по концам аналоговой модели.

Для произвольного пассивного слоя под номером k, находящегося внутри активного слоя (все величины — без штрихов),

$$\dot{E}_k(r) = -j\omega [C_k I_1(\beta_k r) + D_k K_1(\beta_k r)], \quad (5)$$

$$\dot{H}_k(r) = \frac{\beta_k}{\mu_{z,k}} [C_k I_0(\beta_k r) - D_k K_0(\beta_k r)].$$

Если принять на границах  $k$ -го слоя при  $r = r_{k-1}$   $\dot{E} = \dot{E}_{k-1}$  и  $\dot{H} = \dot{H}_{k-1}$ , а при  $r = r_k$   $\dot{E} = \dot{E}_k$  и  $\dot{H} = \dot{H}_k$ ,

то из (5) можно получить следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{E}_k &= \beta_k r_{k-1} \dot{E}_{k-1} b_{1k} - j\omega\mu_{z,k} r_{k-1} \dot{H}_{k-1} b_{2k}, \\ \dot{H}_k &= -\frac{\beta_k^2 r_{k-1}}{j\omega\mu_{z,k}} \dot{E}_{k-1} b_{3k} + \beta_k r_{k-1} \dot{H}_{k-1} b_{4k}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} b_{1k} &= K_0(\beta_k r_{k-1}) I_1(\beta_k r_k) + I_0(\beta_k r_{k-1}) K_1(\beta_k r_k), \\ b_{2k} &= K_1(\beta_k r_{k-1}) I_1(\beta_k r_k) - I_1(\beta_k r_{k-1}) K_1(\beta_k r_k), \\ b_{3k} &= K_0(\beta_k r_{k-1}) I_0(\beta_k r_k) - I_0(\beta_k r_{k-1}) K_0(\beta_k r_k), \\ b_{4k} &= K_1(\beta_k r_{k-1}) I_0(\beta_k r_k) + I_1(\beta_k r_{k-1}) K_0(\beta_k r_k). \end{aligned}$$

Уравнениям (6) можно придать каноническую форму уравнений четырехполюсника, при которой определитель матрицы преобразований равен единице.

$$\begin{aligned} r_{k-1} \dot{E}_{k-1} &= \beta_k r_{k-1} (r_k \dot{E}_k) b_{4k} + j\omega\mu_{z,k} r_{k-1} r_k \dot{H}_k b_{2k}, \\ \dot{H}_{k-1} &= \frac{\beta_k^2}{j\omega\mu_{z,k}} (r_k \dot{E}_k) b_{3k} + \beta_k r_k \dot{H}_k b_{1k}. \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнениям (7) соответствует аналоговая модель, один из возможных вариантов которой представлен на рис. 3. Это четырехполюсник, на входе и выходе которого «действуют» величины  $(r_k \dot{E}_k)$ ,  $(r_{k-1} \dot{E}_{k-1})$ ,  $\dot{H}_k$  и  $\dot{H}_{k-1}$ , а «сопротивления» схемы

$$\begin{aligned} Z_{1k} &= \frac{j\omega\mu_{z,k}}{\beta_k^2 b_{3k}} (\beta_k r_{k-1} b_{4k} - 1) = \frac{Z_{c,k}}{\beta_k b_{3k}} (\beta_k r_{k-1} b_{4k} - 1), \\ Z_{2k} &= \frac{j\omega\mu_{z,k}}{\beta_k^2 b_{3k}} = \frac{Z_{c,k}}{\beta_k b_{3k}}, \\ Z_{3k} &= \frac{j\omega\mu_{z,k}}{\beta_k^2 b_{3k}} (\beta_k r_k b_{1k} - 1) = \frac{Z_{c,k}}{\beta_k b_{3k}} (\beta_k r_k b_{1k} - 1). \end{aligned} \quad (8)$$

Особенность рассматриваемой модели состоит в том, что размерность «сопротивлений» четырехполюсника — Ом · м, т. е. соответствует размерности удельного электрического сопротивления.

Отношение

$$Z_k = -\frac{\dot{E}_k}{\dot{H}_k} = Z_{c,k} \frac{Z_{k-1} b_{1k} + Z_{c,k} b_{2k}}{Z_{k-1} b_{3k} + Z_{c,k} b_{4k}} \quad \text{при} \quad Z_{k-1} = -\frac{\dot{E}_{k-1}}{\dot{H}_{k-1}} \quad (9)$$

имеет смысл входного сопротивления четырехполюсника, нагруженного сопротивлением  $Z_{k-1}$ .

Для наружных слоев (все величины снабжены штрихами)

$$Z'_k = \frac{\dot{E}'_{k-1}}{\dot{H}'_{k-1}} = Z'_{c,k} \frac{Z'_{k+1} b'_{4k} + Z'_{c,k} b'_{2k}}{Z'_{k+1} b'_{3k} + Z'_{c,k} b'_{1k}}, \quad Z'_{k+1} = \frac{\dot{E}'_k}{\dot{H}'_k}. \quad (10)$$

Используя приведенные выше выражения, отвечающие каскадному соединению четырехполюсников (по концам схемы — двухполюсники  $Z_1$

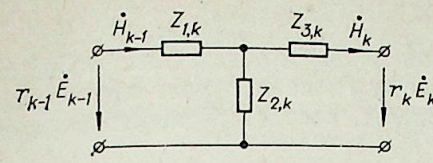


Рис. 3.

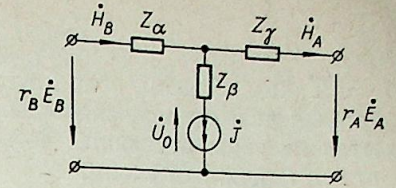


Рис. 4.

и  $Z'_n$ ), можно, свернув схему, определить два входных сопротивления пассивных участков, соответствующих внутренним и наружным слоям.

Активный слой. Решение уравнения (1) приводит к громоздким выражениям, содержащим бесконечные ряды. Для практических расчетов дело можно существенно упростить, если принять следующие два обычных в теории электрических машин допущения: пренебречь потерями на вихревые токи в проводящих элементах активного слоя и положить, что магнитная проницаемость вдоль листов электротехнической стали (в радиальном направлении) много больше, чем поперек листов. Эти допущения означают, что в выражении (2) следует принять  $\mu_z/\mu_r \approx 0$  и  $\gamma \approx 0$ . При этом уравнение (1) превращается в следующее:

$$\frac{d^2 \dot{A}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{A}}{dr} - \frac{1}{r^2} \dot{A} = -\mu_z \dot{\Delta}_{ст}.$$

Последнее выражение представляет собой известное уравнение Эйлера, которое путем подстановки  $r = e^u$  приводится к обыкновенному линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2 \dot{A}}{du^2} - \dot{A} = -\mu_z e^{2u} \dot{\Delta}_{ст},$$

решение которого

$$\dot{A} = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{1}{3} \mu_z r^2 \dot{\Delta}_{ст},$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные интегрирования.

Используя граничные условия

$$\text{при } r = r_A \quad \dot{E} = \dot{E}_A \text{ и } \dot{H} = \dot{H}_A;$$

$$\text{при } r = r_B \quad \dot{E} = \dot{E}_B \text{ и } \dot{H} = \dot{H}_B,$$

можно получить следующие уравнения активного четырехполюсника:

$$r_B \dot{E}_B = r_A \dot{E}_A + \frac{j\omega\mu_z}{2} (r_A^2 - r_B^2) \dot{H}_A + j\omega\mu_z \dot{\Delta}_{ст} \left( \frac{1}{6} r_A^3 + \frac{1}{3} r_B^3 - \frac{r_A r_B^2}{2} \right),$$

$$\dot{H}_B = 0 + \dot{H}_A + \dot{\Delta}_{ст} (r_A - r_B).$$

Этим уравнениям соответствует аналоговая модель, представленная на рис. 4, в которой действует источник тока  $j$ , представляющий собой комплексную амплитуду линейной плотности тока

$$j = \dot{\Delta}_{ст} (r_A - r_B).$$

Параметры схемы рис. 4, полученные методом, изложенным в [5], следующие:

$$Z_{\alpha} = j\omega\mu_z \frac{r_A^2 + r_A r_B - 2r_B^2}{6};$$

$$Z_{\beta} = -j\omega\mu_z \frac{r_A^2 - r_B^2}{12};$$

$$Z_{\gamma} = j\omega\mu_z \frac{2r_A^2 - r_A r_B - r_B^2}{6}$$

Таким образом, общий вид аналоговой модели представляет собой активный четырехполюсник рис. 4, к которому слева и справа присоединяются каскады пассивных четырехполюсников, соответствующих внутренним и наружным слоям.

Аналоговая модель легко может быть преобразована в электрическую схему замещения, если все сопротивления аналоговой схемы умножить на коэффициент приведения, получаемый из рассмотрения баланса мощностей. Для цилиндрического ЛАД этот коэффициент

$$K_{\Pi} = \frac{9mw_{\Phi}^2}{\pi r \tau}$$

где  $m$  — число фаз;  $w_{\Phi}$  — число последовательно соединенных витков в обмотке фазы;  $p$  — число пар полюсов. Амплитуда основной пространственной гармоники сторонней плотности тока

$$\dot{\Delta}_{ст} = \frac{3\sqrt{2}mw_{\Phi}}{2\pi r \tau (r_A - r_B)} \dot{I}_{\Phi}$$

На основе изложенного легко построить алгоритм расчета дифференциальных ( $E_k$  и  $\dot{H}_k$ ) и интегральных ( $I_{\Phi}$ ,  $\cos \varphi$ ,  $P_{эм}$ ,  $F_{эм}$  и др.) характеристик машины. Следует иметь в виду, что для расчета входного электрического сопротивления схемы необходимо знать собственное активное сопротивление обмотки фазы, которое в настоящем методе автоматически не определяется и подлежит расчету обычными приемами. Электромагнитная мощность при известных тангенциальных составляющих  $\dot{E}$  и  $\dot{H}$  на поверхности вторичного элемента определяется из уравнения

$$P_{эм} = -0,5 \operatorname{Re} [\dot{E}\dot{H}^*] 2\pi r \cdot 2\pi R,$$

а электромагнитная сила  $F_{эм} = P_{эм}/2\tau f$ , где  $\dot{H}^*$  — сопряженный комплекс амплитуды напряженности магнитного поля на поверхности вторичного элемента, имеющей радиус  $R$ .

### ВЫВОДЫ

1. Решение полевой задачи в линейном приближении позволяет представить многослойную коаксиальную структуру цилиндрического ЛАД в виде каскадной аналоговой схемы, которая, в свою очередь, может быть преобразована в электрическую схему замещения.

2. Аналоговая схема дает возможность построить простой алгоритм расчета дифференциальных и интегральных характеристик цилиндрического ЛАД.

Новосибирский электротехнический институт

Поступила в редакцию  
19/II 1979

### ЛИТЕРАТУРА

1. Веселовский О. Н. Линейные электродвигатели переменного тока для производственных механизмов и автоматических устройств.— *Электротехника*, 1977, № 6, с. 12—15.
2. Freeman E. M. Travelling waves in induction machines: input impedance and equivalent circuits.— *Proc. IEE*, 1968, N 12, p. 1772—1776.
3. Freeman E. M. Equivalent circuits from electromagnetic theory: low — frequency induction devices.— *Proc. IEE*, 1974, 121, N 10, p. 1117—1121.
4. Инкин А. И. Схемная аппроксимация линейных сред, находящихся под воздействием электромагнитного поля.— *Электричество*, 1975, № 4, с. 64—67.
5. Инкин А. И., Литвинов Б. В. Синтез каскадных схем замещения индукционных электрических машин на базе типовых E—H—четырёхполюсников.— *Электротехника*. 1977, № 1, с. 29—34.

УДК 532.537

Владимиров В. А., Тарасов В. Ф. Формирование вихревых колец.— *Изв. Сиб. отд. АН СССР*, 1980, № 3. Сер. техн. наук, вып. 1.

Проведено экспериментальное исследование процесса формирования вихревых колец при больших числах Рейнольдса. Предложена математическая модель, дающая описание этого процесса. Рис. 7. табл. 1, библиогр. 12.

УДК 533.664

Горелов Д. Н. К выбору оптимального закона колебаний крыла выполняющего роль движителя.— *Изв. Сиб. отд. АН СССР*, 1980, № 3. Сер. техн. наук, вып. 1.

В работе на основе линейной теории определены сила тяги и КПД крыла произвольного закона его деформации, получены соответствующие асимптотические формулы для режимов течения при больших и малых значениях числа Струхала, определены законы колебаний крыла, создающие максимальную среднюю силу тяги для некоторых классов возможных деформаций. Рис. 1, библиогр. 11.

УДК 533.6.011

Сурис А. Л. Распространение струи в поперечном сносящем потоке.— *Изв. Сиб. отд. АН СССР*, 1980, № 3. Сер. техн. наук, вып. 1.

В работе предложена полуэмпирическая методика расчета траектории струи в сносящем плазменном потоке.

На основании решения системы дифференциальных уравнений, выражающих закон сохранения потока импульса в проекции на оси координат, получено выражение, в которое входит коэффициент аэродинамического сопротивления  $C_x$ . Зависимость  $C_x$  от параметров процесса найдена экспериментально для условий распространения химически реагирующей струи в сносящем плазменном потоке в канале реактора. Рис. 4, библиогр. 9.

УДК 621.928.93

Багрянцев В. И., Кислых В. И. Нарушение разделения мелких частиц в вихревой камере.— *Изв. Сиб. отд. АН СССР*, 1980, № 3. Сер. техн. наук, вып. 1.

Экспериментально изучено нарушение процесса отделения частиц микронных размеров от потока газа в вихревой камере. При определенных расходных режимах частицы дыма удерживаются в камере длительное время, накапливаясь в приосевой зоне закрученного потока на коаксиальных цилиндрических поверхностях. Результаты экспериментов и теоретических оценок показали, что вследствие больших радиальных градиентов осевой компоненты скорости потока частицы аэрозоля под действием подъемной силы концентрируются в области максимальной завихренности. Величина подъемной силы в опытах определялась на плоском канале. Оказалось, что ее значение для частиц микронных размеров намного выше, чем следует из известных теоретических соотношений. Рис. 7. библиогр. 5.

УДК 532.529 : 534.22

Лежнин С. И. Волны конечной амплитуды при расслоенном режиме течения парожидкостной среды.— *Изв. Сиб. отд. АН СССР*, 1980, № 3. Сер. техн. наук, вып. 1.

На основе системы газодинамических уравнений двухскоростной парожидкостной среды исследовано распространение длинных волн конечной амплитуды в канале при расслоенном режиме течения. С помощью метода «многих масштабов» система уравнений, зависящих от нескольких малых параметров, сведена к одному эволюционному уравнению, решение которого остается справедливым для больших времен.

Показано, что диссипация и дисперсия волн при условиях, далеких от критических, определяются вязкостью пара и теплопроводностью жидкости. Рис. 2, библиогр. 14.

Султанов М. А. О гидрогазодинамическом характере формирования и развития структуры сверхзвукового плазменного факела при истечении из цилиндрического отверстия.— Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1980, № 3. Сер. техн. наук, вып. 1.

Исследовалась структура сверхзвукового плазменного факела в импульсном разряде большой мощности в условиях истечения плазменного потока из разрядовой камеры с цилиндрическим отверстием. При определенных условиях разряда структура факела зависит от полярности и материала электродов.

Указано на такое явление, неизвестное ранее в литературе как наличие двух темных пространств и двух «оболочек» в структуре свободного плазменного факела, двух скачков уплотнения при набегании факела на твердую, плоскую преграду в одном полупериоде тока. Экспериментальные исследования указывают на различие в скоростях поступления факелов и скоростях расширения «оболочек».

Определялись различные газодинамические параметры факела, спектроскопическими методами, измерены температура и электронная концентрация в различных зонах плазменного факела и по различным сечениям.

Наблюдаемые экспериментальные результаты объясняются на основе гидрогазодинамических процессов с привлечением соотношений Ренкина — Гюгонно. По мнению автора, природа образования сверхзвукового плазменного факела, исследованного в настоящей работе, аналогична с природой образования лазерного факела, образуемого на поверхности металлических мишеней при взаимодействии мощного излучения ОКГ. Рис. 7, библиогр. 9.

УДК 517.945

Блохин А. М., Роменский Е. И. Влияние свойства предельного стационарного решения на его установление.— Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1980, № 3. Сер. техн. наук, вып. 1.

В работе приводятся уравнения для малых возмущений стационарного решения, которое описывает обтекание кругового конуса сверхзвуковым потоком газа под нулевым углом атаки. Проверяется выполнение необходимого условия устойчивости стационарного решения. С этой целью исследуется спектр уравнений для малых возмущений. С помощью разностной схемы Мак Кормака вопрос об установлении стационарного решения рассматривается на разностном уровне. Рис. 3, библиогр. 7.

УДК 537.523 : 52—60

Деятов Б. Н., Жуков М. Ф., Назарук В. И. Множественное моделирование пульсаций дуги методом Монте-Карло.— Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1980, № 3. Сер. техн. наук, вып. 1.

Предложен метод моделирования поперечных пульсаций дуги в сечении турбулентного потока, основанный на вероятностном множественном описании процесса блуждания проводящего канала по узлам плоской решетки с учетом турбулентных молей, вызывающих неоднородность поля перемещений.

Рассмотрена принципиальная постановка задачи в терминах теории случайных множеств. Показаны пути управления процессом блуждания на модели с помощью вариаций множеств локальных возмущений. Рассматриваются вопросы постановки физических экспериментов с целью получения необходимой информации для идентификации локальных множеств. Рекомендован путь использования математических экспериментов, связанный по идее с принципами операционной игры. Рис. 2, библиогр. 13.

Деятов Б. Н., Жуков М. Ф., Хайтман С. М. Постоянная времени дуги, инерционность процесса и линейная модель динамики плазмы.— Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1980, № 3. Сер. техн. наук, вып. 1.

Понятие постоянной времени дуги впервые специально рассмотрено и использовано в исследованиях динамики процесса в работах М. Е. Заруди. Далее идея использования характеристики инерционности дуги в моделях динамики плазмы развивалась в работах М. Е. Заруди, О. Я. Новикова, В. М. Егона наш взгляд подходов в преодолении возникающих затруднений использования величины постоянной времени дуги в математической модели динамики, учитывающей сложный комплекс процессов низкотемпературной плазмы. Однако эти трудности продолжают расти с возрастанием сложности постановки задач.

В этой статье дается анализ источников таких трудностей, и отмечается, что они носят принципиальный характер. В связи с этим обращается внимание на важность свойства непрерывной распределенности плазменного процесса, что приводит к необходимости рассмотрения сложных уравнений с частными производными. В конечном итоге это приводит к одному из главных затруднений в прямом использовании простейшего понятия постоянной времени объекта, так как это понятие нелегко увязать со сложной моделью процесса, которому соответствует трансцендентная передаточная функция.

Целью данной работы является обоснование и дальнейшее развитие подходов, отражающих стремление к использованию представления о постоянной времени дуги и вообще характеристики инерционности процесса в моделях динамики. С этой целью в статье рассматривается естественное обобщение понятия постоянной времени дуги, как его инерционной характеристики. Введенные при этом обобщенные инерционности дуги различных порядков ( $S_0, S_1, S_2, S_3, \dots$ ) в совокупности однозначно определяют динамику процесса, а первая инерционность  $S_1$  (инерционность первого порядка) является главной характеристикой динамики и полностью соответствует по своей значимости величине постоянной времени ( $T$ ).

Показаны перспективы использования такого обобщения для анализа динамических свойств плазмы. Существенно, что при этом решение уравнения динамики дается в простом аналитическом выражении через обобщенные инерционности процесса. Заметим, что все это связано с ограничениями на величину порядка уравнения.

Рассмотрен пример, иллюстрирующий эти возможности. Приводятся результаты простых численных расчетов обобщенных инерционностей и характеристики динамики дуги по ее вольт-амперной зависимости, заданной дифференциальным уравнением в частных производных. Рис. 8, библиогр. 13.

УДК 537.525.1

Перегудов В. С., Урюков Б. А. Область устойчивой работы плазмотрона большой длины.— Изв. СО АН СССР, 1980, № 3. Сер. техн. наук, вып. 1.

Исследуется область устойчивой работы электрической цепи с дугой как элементом этой цепи. Дуга описывается динамической характеристикой, полученной для малых возмущений с конечной длиной волны. Показано, что при возмущениях с конечной длиной волны критерий устойчивости работы электрической цепи с дугой отличается от известного критерия Кауфмана. Для рассмотренной схемы электрической цепи область устойчивой работы расширяется. Рис. 2, библиогр. 3.

Борискин С. П., Девятков Б. Н., Левченко В. Ф. Научно-инженерный подход к проблеме моделирования и анализа динамики плазмотрона как технологического объекта.— Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1980, № 3, Сер. техн. наук, вып. 1.

На основе математического описания дан метод представления в приближенном аналитическом виде динамических характеристик плазмотрона как распределенного технологического объекта. Рассматриваемые процессы в плазмотроне по физико-химическому содержанию сложны. При обдуве электрической дуги сдуваемым потоком газа он претерпевает химические превращения в процессе всего движения по длине плазмотрона. Поэтому процесс в плазмотроне носит явно выраженный пространственно-распределенный характер.

Динамика процессов в плазмотроне объединяет плазмо-химические, тепловые, аэродинамические и электрические процессы и представлена в данной статье дифференциальными уравнениями в частных производных.

Рассмотрено несколько интегральных приближений переходных функций. Коэффициенты разложения таких функций выражены через конечное число инерционных процессов. С помощью инерционности процесса как обобщения понятия постоянной времени технологического объекта могут быть найдены передаточные функции и восстановлены в приближенном аналитическом виде переходные функции без решения дифференциальных уравнений в частных производных. Одновременно с разложением переходных функций используются их интегральные интерполирования.

Особое внимание обращено на возможность неограниченного повышения точности переходных функций при увеличении числа учитываемых членов разложения. Важным преимуществом такого аналитического приближения является то, что конкретно для каждой неизвестной переходной функции определено выражение, независимое от остальных переходных функций. Это позволяет рассматривать переходные процессы в плазмотроне по каждой функции в отдельности. Таким образом, открываются возможности развития структурного подхода к исследованию динамики плазмы.

Изложенный в данной статье подход к анализу динамики может быть использован при постановке задач распределенного контроля и управления, а также при оптимизации плазмотрона как технологического объекта. Рис. 3, библиогр. 26.

УДК 536.33

Лебедев В. А. Применение зонального метода к теплофизическому расчету излучающей системы с зеркальными поверхностями.— Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1980, № 3, Сер. техн. наук, вып. 1.

Рассматривается условно замкнутая излучающая цилиндрическая система с наличием зеркальных поверхностей, заполненная диатермической средой. Решается зональным методом задача в смешанной постановке с целью определения температурного распределения вдоль стенок цилиндра по известным температурам и тепловым потокам. Сравняются результаты решения задачи с применением осредненных и локальных угловых коэффициентов излучения (УКИ), а также с учетом теплопроводности стенок цилиндра при использовании осредненных УКИ. Рис. 1, библиогр. 6.

УДК 536.24

Пономарев Н. Н., Рубцов Н. А. Радиационно-кондуктивный теплообмен в плоском слое рассеивающей среды.— Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1980, № 3, Сер. техн. наук, вып. 1.

В работе представлены результаты численного исследования теплообмена в плоском слое серой поглощающей, излучающей и рассеивающей теплопроводной сред, образованном неограниченными абсолютно черными границами. Радиационная часть задачи исследуется с привлечением метода средних потоков (СП-метод). Задача решается с использованием итерационного подхода методом Ньютона. Используемый СП-метод отличается хорошей сходимостью и точностью, что в значительной степени определило эффективность метода решения задачи в целом.

В приближении трехчленной индикатрисы рассеяния обнаружено слабое влияние анизотропии рассеяния на температурные поля и кондуктивные составляющие потока тепловой энергии. Потоки излучения весьма чувствительны к анизотропии рассеяния в области больших оптических толщин. Рис. 9, табл. 2, библиогр. 8.

Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Придкин П. А., Рязанцев Ю. С. О нестационарном теплообмене частицы, движущейся с переменной скоростью в идеальной жидкости.— Изв. СО АН СССР, 1980, № 3, Сер. техн. наук, вып. 1.

В работе рассмотрен нестационарный конвективный теплообмен частицы, движущейся прямолинейно с произвольным законом изменения скорости от времени  $U=U(t)$  в идеальной жидкости. В приближении теплового пограничного слоя изучены выражения для локального и полного тепловых потоков на поверхности сферы. Подробно рассмотрен частный случай теплообмена сферы, движущейся по закону  $U(t)=(1+3t)^{-1}$ . Рис. 1, библиогр. 5.

УДК 536.33 : 536.25

Соловьев С. В. Расчет температурного поля проводов с покрытием при радиационно-конвективном нагреве.— Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1980, № 3, Сер. техн. наук, вып. 1.

Для двух предельных случаев прозрачного и непрозрачного теплового излучения тел численно получены нестационарные поля температур по толщине покрытия (лака), нанесенного на проволоку. Оказывается, что в слое покрытия, несмотря на его малую толщину, имеют место перепады температур. Показано, что перепады температур могут быть как «положительными» (преобладает лучистый перенос тепла), так и «отрицательными» (доминирует конвективный теплообмен).

«Положительные» и «отрицательные» перепады температур имеют место для прозрачного покрытия, для непрозрачного — будут лишь «отрицательные» перепады температур, которые нежелательны на практике.

Таким образом, зная, теплофизические свойства проволоки и покрытия, геометрию и условия теплообмена, по данной методике можно оценить (в рамках принятой модели) поле температур в слое покрытия для рассмотренных предельных случаев. Рис. 4, табл. 1, библиогр. 4.

УДК 518.5

В. И. Паасонен. Моделирование тепловых процессов в неоднородных конструкциях с источниками тепла.— Изв. СО АН СССР, 1980, № 3, Сер. техн. наук, вып. 1.

Предлагается методика расчета тепловых задач для сборных неоднородных конструкций произвольной формы с плоской или осевой симметрией и с источниками тепла, распределенными на границах раздела сред. Необходимость в решении таких задач возникает при расчете конструкций с щелями, с неидеальной подгонкой деталей, при наличии поверхностей трения и других тепловых источников (стоков).

Приведен пример расчета теплового режима фторопластового уплотнения вращающегося вала в осесимметричной экспериментальной установке. Источником тепла в этой задаче является трение на границе уплотнение — вал. Рис. 6, библиогр. 7.

УДК 532.522.2

Ю. А. Пшеничнов. К расчету течения капельной жидкости с переменной вязкостью в начальном термическом участке плоского канала.— Изв. СО АН СССР, 1980, № 3, Сер. техн. наук, вып. 1.

Рассматривается краевая задача для уравнений энергии и движения, описывающих ламинарное течение капельной жидкости в плоском канале в предположении малости поперечной составляющей скорости. Вязкость жидкости считается зависящей от температуры, а тепловой поток на поверхности канала задается как функция осевой координаты.

Путем преобразования координат задача представляется в форме, для которой введением специальных функций одной переменной строится асимптотическое решение в виде ряда по дробным степеням осевой координаты. Результаты расчета по предлагаемому решению согласуются в начальном участке канала с данными, полученными конечно-разностным методом. Рис. 2, библиогр. 5.

**Олейников В. В., Сапожников В. А.** О задаче распределения требований по надежности между элементами сложной системы.— Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1980, № 3. Сер. техн. наук, вып. 1.

В статье рассматривается задача оптимального распределения требований по надежности между элементами сложной невосстанавливаемой системы. Данная задача математически ставится и решается при достаточно общем виде зависимости между расходуемыми средствами и надежностью. Доказывается существование и единственность ее решения. Предлагается комбинированный итерационный метод решения. Рассматриваются вопросы приближенного решения. Рис. 1, библиогр. 8.

УДК 681.325

**Потапов В. П., Братцев С. Г.** О вероятности безотказной работы и среднем времени «жизни» избыточных структур с адаптивными восстанавливающими органами.— Изв. СО АН СССР, 1980, № 3. Сер. техн. наук, вып. 1.

Проведено исследование и составлены графы состояний резервируемых структур с двумя типами адаптивных восстанавливающих органов при различных алгоритмах адаптации. Получены выражения для расчета вероятности безотказной работы и среднего времени «жизни» рассмотренных избыточных систем. Аналитически исследовано среднее время «жизни» и получены соотношения, позволяющие выбрать тип адаптивного восстанавливающего органа и алгоритм адаптации, обеспечивающие резервируемой структуре наибольшее время «жизни» при заданной интенсивности отказов и сбоях типа  $(1 \rightarrow 0)$  и  $(0 \rightarrow 1)$  на входах восстанавливающего органа и ограничении на избыточность. Рис. 4, табл. 1, библиогр. 1.

УДК 621.313

**Горбунов Ю. К.** Поперечные активно-индуктивные волновые параметры обмоток электрических машин.— Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1980, № 3. Сер. техн. наук, вып. 1.

Рассмотрена картина электромагнитного поля, создаваемого высокочастотным синусоидальным напряжением, приложенным между обмоткой и корпусом электрической машины. Показано, что при частотах до нескольких мегагерц проводимость шихтованной стали статора на пути тока, текущего с обмотки на корпус машины, на несколько порядков превышает проводимость корпусной изоляции.

Таким образом, при анализе волновых процессов в электрических машинах в схему замещения обмоток можно не включать поперечные активно-индуктивные проводимости шихтованной стали. Рис. 3, библиогр. 1.

УДК 621.313.333.001.31 + 621.313.333.001.24

**Веселовский О. Н.** Цилиндрический линейный асинхронный двигатель и его аналоговая модель.— Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1980, № 3. Сер. техн. наук, вып. 1.

Одной из разновидностей линейных низкоскоростных электродвигателей является линейный асинхронный двигатель (ЛАД) цилиндрического исполнения. Этот двигатель конструктивно прост, надежен, позволяет при прочих равных условиях получить более высокие в сравнении с плоскими конструкциями энергетические характеристики. Обычные области применения — короткоходовые механизмы возвратно-поступательного движения, рассчитанные на кратковременные режимы работы.

Коаксиальную структуру цилиндрического ЛАД легко представить в виде многослойной совокупности ортотропных сред, которая, в свою очередь, на основе решения полевой задачи представляется в виде каскадного соединения активного и пассивных четырехполюсников. Получающаяся в результате аналоговая модель позволяет методами теории цепей (теории четырехполюсников) рассчитать дифференциальные (напряженности электрического и магнитного полей) и интегральные (ток, коэффициент мощности, электромагнитные мощность и сила и др.) характеристики в функции скорости движения (или скольжения) подвижной части. Аналоговая модель в случае необходимости может быть преобразована в электрическую схему замещения. Рис. 4, библиогр. 5.

## СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ ИЗДАТЕЛЬСТВА «НАУКА»

готовит к выпуску в 1981 г. книгу

**Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я.** Возникновение турбулентности в пограничном слое. 12 л. 1 р. 80 к.

Монография посвящена устойчивости ламинарных течений и возникновению турбулентности. Обсуждаются процессы возбуждения, линейного и нелинейного развития волн пограничного слоя, порождения перемежаемости и турбулентных пятен. Приведены результаты исследований влияния охлаждения, шероховатостей поверхности, акустических и турбулентных пульсаций, отсоса и других факторов на устойчивость и переход к турбулентности. Изложены современные методы расчета перехода.

Книга рассчитана на научных работников и инженеров, специализирующихся в области механики сплошных сред, а также для преподавателей, аспирантов и студентов.

*Книга высылается наложенным платежом. Заказы направляйте по адресу: 630090, Новосибирск, 90, Морской пр., 22, магазин «Наука».*