

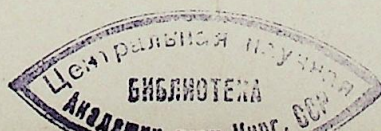
# ИЗВЕСТИЯ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

СЕРИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

Год основания журнала 1957 Год основания серии 1963	Периодичность журнала 15 номеров в год Периодичность серии 3 номера в год	№ 13 (313) вып. 3	Октябрь 1979
--	--	----------------------	-----------------

## СОДЕРЖАНИЕ

М. Ф. Жуков, А. С. Аньшаков, Г.-Н. Б. Дандарон, Г. Г. Эскин. Несамостоятельный разряд вблизи поверхности межэлектродной вставки . . . . .	3
В. Ф. Путько, В. С. Соболев, Н. Ю. Суяров. Управление движением опорного пятна электрической дуги по рабочей поверхности электродов с помощью внешнего поперечного вращающегося магнитного поля . . . . .	8
И. П. Васенко. Расчет магнитного поля, создаваемого элементами магнитной системы подогревателя коаксиального типа . . . . .	12
В. В. Гужков, А. М. Зимин, Н. П. Козлов, А. Г. Розанов, В. И. Хвесюк. Динамика температурных полей электродов частотных импульсных ламп . . . . .	21
А. М. Блохин. Смешанная задача для системы уравнений акустики с граничными условиями на ударной волне . . . . .	25
Е. Г. Зауличный, А. С. Лебедев, Р. В. Рафиков. Расчет газодинамических параметров в длинном цилиндрическом нестационарно прогреваемом канале перед соплом Лавала . . . . .	34
М. А. Гольдфельд, В. В. Затолока. Об улучшении отрывных свойств турбулентного пограничного слоя в результате воздействия скачка уплотнения . . . . .	40
А. П. Бурдуков, Н. С. Буфетов, А. Р. Дорохов. Абсорбция на стекающей пленке жидкости . . . . .	48
В. К. Битюков, Л. Н. Латыев, В. А. Петров, С. В. Степанов. Об определении коэффициента теплопроводности частично прозрачных материалов при высоких температурах . . . . .	53
Н. М. Расторгуева. Экспериментальное исследование интегральных полусферических излучательных способностей материалов в области температур 78÷150 К . . . . .	61
Н. Н. Пономарев. О решении задач переноса лучистой энергии модифицированным методом средних потоков . . . . .	64
Н. А. Рубцов, А. А. Емельянов. Исследование оптических свойств окиси бериллия в области температур плавления . . . . .	68
В. А. Лебедев. Об инвариантности угловых коэффициентов некоторых излучающих систем . . . . .	73
К. Б. Джакупов. О влиянии фазового перехода на конвективное движение вязкой жидкости в замкнутой полости . . . . .	78
А. Р. Дорохов, В. И. Казаков. Газосодержание в тонких динамических двухфазных слоях при пониженных давлениях . . . . .	84
Ю. С. Даниэлян, П. А. Яницкий. О кинетике замерзания воды во влажных грунтах . . . . .	89
И. Н. Глазков, К. П. Кадомская, Е. В. Кулькова, М. Л. Левинштейн. К вопросу о сравнительной оценке точности и устойчивости численных методов решения задачи Коши . . . . .	93
Е. А. Еркаева, Н. Д. Демиденко. Качественный анализ гиперболической системы, описывающей процесс теплообмена в технологических аппаратах . . . . .	101
С. Н. Рычков. Исследование резистивного кольца, замкнутого джозефсоновским контактом с малой емкостью . . . . .	109
А. Н. Борисов, И. А. Петраковский, Р. Г. Хлебопрос. Регистрация границ фотоизображения объектов . . . . .	117
В. М. Макаров. Алгоритм и программа расчета первичных параметров многоцепных линий электропередачи . . . . .	122
Г. В. Иванова, Н. В. Иванова. Уравнения однофазного асинхронного двигателя и преобразование индуктивных параметров . . . . .	129
Ю. К. Горбунов, И. Н. Сваровский. Расчет импульсных воздействий на продольную изоляцию обмоток электрических машин по многоэлементным схемам замещения . . . . .	131
Т. А. Филиппова, А. М. Турецкий. Моделирование технико-экономических показателей энергосистем и оценка погрешностей их планирования . . . . .	137
Э. С. Лукашов. Применение основных положений механики к электроэнергетическим системам . . . . .	145



М. Ф. ЖУКОВ, А. С. АНЬШАКОВ  
Г.-Н. Б. ДАНДАРОН, Г. Г. ЭСКИН

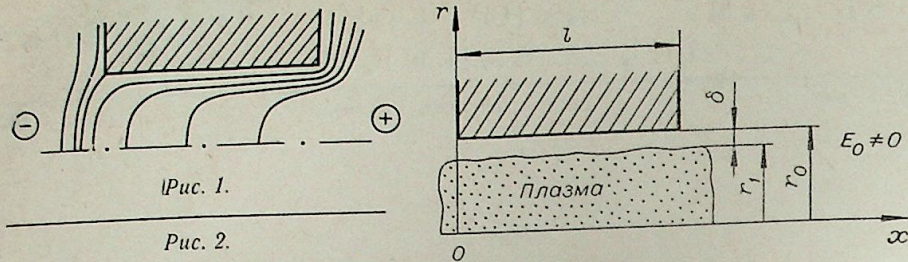
### НЕСАМОСТОЯТЕЛЬНЫЙ РАЗРЯД ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ МЕЖЭЛЕКТРОДНОЙ ВСТАВКИ

В связи с расширением технических приложений генераторов газоразрядной плазмы появилась потребность увеличить их мощность. Мощность единичного устройства можно повысить за счет увеличения как тока разряда, так и напряжения дуги. В последнем случае напряжение на дуге повышается за счет увеличения ее длины с помощью секционированной межэлектродной вставки, турбулизации потока газа и т. п. Однако, как показывает опыт, удлинение дуги связано с некоторыми трудностями. Так, при больших напряженностях электрического поля дуги и при турбулентном потоке плазмы создаются условия для возникновения пробоя на стенку, который сопровождается укорочением дуги и уменьшением общего падения напряжения. Поэтому возникает необходимость исследования процессов, происходящих вблизи изолированной и электропроводной стенки (секции).

Изучению поведения секции, стабилизирующей дуговой разряд, уделяется большое внимание [1]. Однако несмотря на многочисленные исследования поведения секции разрядной камеры [1—7], все еще остается спорным вопрос: потенциал какого участка дуги характеризует плавающий потенциал секции. Некоторые авторы, например [2], предполагают, что плавающий потенциал секции соответствует потенциалу пространства вблизи передней (от катода) кромки секции. Согласно их представлениям одна из эквипотенциальных поверхностей привязывается к передней кромке секции (рис. 1). По некоторым предположениям [5], эквипотенциальная поверхность привязывается к середине секции. В исследовании [6] утверждается, что зона привязки эквипотенциала зависит от режима горения дуги и места расположения секции.

Подобное разногласие свидетельствует о том, что в настоящее время еще не выяснен механизм процессов, происходящих вблизи поверхности секции. Такое положение обусловлено многими причинами. Например, секция вносит тепловое и электрическое возмущение в дуговую плазму. Последнее приводит к возникновению несамостоятельного разряда между столбом дуги и секцией, который в зависимости от условий горения дуги, положения и размеров секции может перейти в пробой. Цель данной работы — исследование несамостоятельного разряда между секцией канала и столбом дуги.

С точки зрения электрофизики секцию можно рассматривать как кольцевой зонд, охватывающий столб дуги. В то же время условия работы секции отличаются от условий, в которых обычно рассматриваются зонды. Наиболее характерными особенностями работы секции являются: а) наличие больших потоков энергии на секцию (секция вносит тепловое возмущение в плазму); б) высокое давление рабочей



среды ( $l \gg \lambda$ , т. е. размеры секции много больше длины свободного пробега частиц); в) значительное возмущение электрического поля ( $\text{grad } U > 0$ ). Только последняя особенность не рассматривается в теории зондов.

Проанализируем поведение большого зонда ( $l \gg \lambda$ ) в градиентной плазме ( $E > 0$ ). Такая задача в пренебрежении пространственным зарядом перед секцией решена в работе [7]. Однако упрощение, принятое в [7], правомерно только при таких размерах секции, когда ее возмущением можно пренебречь. Но даже и в этом случае пренебрежение объемным зарядом может значительно исказить общую картину поведения секции в плазме.

Если рассматривать секцию в качестве зонда, то можно видеть, что при помещении секции в плазму на нее идут потоки электронов и ионов. Однако поток электронов ввиду их большей подвижности в начальный момент времени преобладает над потоком ионов на стенку, и секция начинает заряжаться отрицательно. Процесс зарядки продолжается до тех пор, пока отталкивающее электроны поле не уравновесит оба потока. Данное условие применительно к секции можно записать следующим образом:

$$\int_S j_e dS = \int_S j_i dS. \quad (1)$$

Интегрирование проводится по поверхности секции, находящейся в контакте с плазмой. Следует отметить, что условие (1) не означает равенства потоков  $j_e$  и  $j_i$  во всем промежутке дуга — стенка и по всей длине секции.

Для нахождения распределения потенциала в промежутке дуга — секция необходимо решить уравнения Пуассона

$$\nabla^2 U = 4\pi e(n_i - n_e). \quad (2)$$

Прежде чем приступить к решению уравнения (2), воспользуемся моделью, представленной на рис. 2, и сделаем некоторые допущения: — тепловой слой много больше дебаевского радиуса экранирования  $a$ , и заряженные частицы (электроны, ионы) имеют местную температуру газа;

— толщина дебаевского слоя много меньше радиуса канала  $r_0$ , и возмущение электрического поля слабое, т. е.  $eE\lambda \ll kT$ ;

— вблизи секции наблюдаются кроме нейтральных частиц электроны и однозарядные положительные ионы;

— секция имеет цилиндрическую форму.

Действительно, оценки показывают, что в условиях, реализующихся в канале плазматрона, толщина теплового слоя много больше  $a$ . Плотности токов в пристенном слое малы и нагревом газа за счет протекания тока можно пренебречь. Тогда перепадом температуры на толщине  $a$  также можно пренебречь, т. е. можно считать, что пристенный слой газа находится в тепловом равновесии со стенкой. В равновесном случае концентрации электронов и ионов распределены

по закону Больцмана

$$n_e = n_0 \exp\left(-\frac{e\Delta U}{kT}\right) \approx n_0 \left(1 - \frac{e\Delta U}{kT}\right), \quad (3)$$

$$n_i = n_0 \exp\left(+\frac{e\Delta U}{kT}\right) \approx n_0 \left(1 + \frac{e\Delta U}{kT}\right). \quad (4)$$

С учетом (3) и (4) уравнение Пуассона примет вид

$$\nabla^2 U = 8\pi e^2 n_0 \frac{\Delta U}{kT}. \quad (5)$$

Принимая  $\Delta U = U_{\text{пл}} - U = \psi$  и  $a^2 = 8\pi e^2 n_0 / kT$ , уравнение (5) запишем в виде

$$\nabla^2 \psi = a^2 \psi. \quad (6)$$

В качестве граничных примем условия на поверхности секции и в невозмущенной плазме. Тогда имеем

$$\psi = 0 \text{ при } r = r_1, \quad \psi = U_0 + E_0 x \text{ при } r = r_0. \quad (7)$$

В цилиндрической системе координат уравнение (6) записывается следующим образом:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = a^2 \psi. \quad (8)$$

Решение уравнения (8) ищем в выражении

$$\psi = (U_0 + E_0 x) R(r). \quad (9)$$

Подставляя (9) в уравнение (8), получаем

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dR}{dr} - a^2 R = 0. \quad (10)$$

Уравнение (10) решается так

$$R = J_0(ar). \quad (11)$$

Полное решение уравнения (11) представляется выражением

$$\psi = (U_0 + E_0 x) J_0(ar).$$

Удовлетворяя граничным условиям (7), находим

$$J_0(ar_0) = 1, \quad J_0(ar_1) = 0. \quad (12)$$

Из условий (12) определяется толщина слоя  $\delta$ , где происходит основное изменение электрического поля:

$$\delta = (r_0 - r_1) \approx 2,3/a.$$

Отсюда видно, что электрическое поле в основном претерпевает изменение на толщине порядка дебаевского радиуса экранирования.

Теперь найдем величины потоков электронов и ионов на стенку, которые в данном случае могут быть определены по формулам

$$j_e = \frac{1}{4} e n_e v_{\text{эф}} = \frac{1}{4} e n_0 \left(1 - \frac{e\psi}{kT}\right) v_{\text{эф}},$$

$$j_i = e n_i \mu_i E = e n_0 \mu_i \left(1 + \frac{e\psi}{kT}\right) \frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

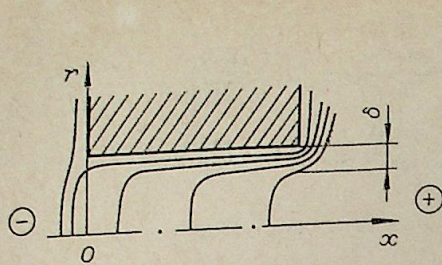


Рис. 3.

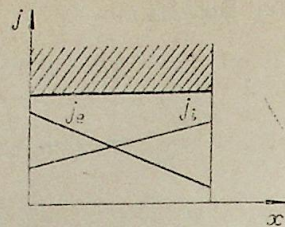


Рис. 4.

На поверхности стенки при  $r = r_0$  по условию (7)  $\psi = U_0 + E_0 x$ , тогда потоки частиц на поверхность будут определяться выражениями

$$j_e = \frac{1}{4} e n_0 v_{\text{ст}} \left[ 1 - \frac{e}{kT} (U_0 + E_0 x) \right], \quad (13)$$

$$j_i = e n_0 u_i (U_0 + E_0 x) \frac{\partial J_0(ar_0)}{\partial r}.$$

Подставим (13) в уравнение (1), интегрируя по поверхности вдоль сечения и пренебрегая малыми величинами, находим

$$u_0 = \frac{1}{2} E_0 l. \quad (14)$$

Таким образом, распределение электрического поля вблизи стенки сечения имеет вид

$$U = \left( x + \frac{l}{2} \right) E_0 [1 - J_0(ar)]. \quad (15)$$

Поведение потенциала вблизи стенки, подчиняющееся решению (15), иллюстрируется графиком (рис. 3). Как видно, полученная картина аналогична приведенной в работе [2] (см. рис. 1) с тем лишь отличием, что в данном случае ни одна из эквипотенциальных поверхностей не привязывается к сечению.

Уравнение (15) позволяет определить координату, потенциал пространства на которой соответствует потенциалу сечения. Это будет при  $x = -l/2$ .

Рассмотрим характер протекания токов несамостоятельного разряда на сечение. Качественные кривые, построенные с помощью уравнений (13), представлены на рис. 4. Из рисунка видно, что характер протекания ионного и электронного токов на сечение различен. В соответствии с данными, полученными выше, ток электронов у одной кромки преобладает над ионным током, у другой же кромки сечения наблюдается обратная картина — ионный ток превышает ток электронов. Подобное перераспределение токов на стенку вызывает ток в самой сечении, который измерялся многими авторами, например в работе [6].

Таким образом, при помощи сечения можно измерять распределение потенциала. При этом необходимо учитывать, что измеряемый потенциал соответствует потенциалу дуги с координатой  $x = -l/2$  от передней (от катода) кромки сечения МЭВ.

В заключение отметим еще раз, что механизм работы сечения отличается от механизма работы классического зонда. Основное отличие заключается в том, что под действием внешнего электрического поля происходит перераспределение потоков электронов и ионов на сечение,

в результате чего на поверхности сечения имеется линия нулевого тока, часто принимаемая разными авторами за линию привязки эквипотенциальной поверхности. На самом деле, как следует из проведенного анализа, потенциал сечения можно определить из уравнения (15).

Институт теплофизики  
СО АН СССР, Новосибирск

Поступила в редакцию  
7/VI 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Жуков М. Ф., Коротеев А. С. Прикладная динамика термической плазмы. Новосибирск, Наука, 1975. 296 с.
2. Эдельс Х., Кимблин С. В. Метод измерения нестационарной электропроводности плазменного столба.— В кн.: Низкотемпературная плазма. М., Мир, 1967, с. 337—349.
3. Асиновский Э. И., Кириллин А. В. Опытное определение коэффициента теплопроводности плазмы аргона.— В кн.: Низкотемпературная плазма. М., Мир, 1967, с. 248—257.
4. McKee V., Dean R. C., Pytte A. On cooled anodes in contact with a laminar arc-heated flow.— IEEE Trans. on Nuclear Science, 1964, v. V, TNS-11, N 1.
5. Даутов Г. Ю., Сазонов М. И. Исследование напряженности электрического поля в стабилизированных дугах.— В кн.: Генераторы низкотемпературной плазмы. М., Энергия, 1969, с. 200—208.
6. Паневин И. Г., Рычков Б. А. О характере токов шунтирования на сечениях стабилизированной каналовой дуги. Тез. докл. V Всесоюз. конф. по генераторам низкотемпературной плазмы. I. Новосибирск, 1972.
7. Стронгин М. П. Распределение тока и потенциала в областях, близких к электроду.— Изв. СО АН СССР, 1975, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2, с. 31—36.

В. Ф. ПУТЬКО, В. С. СОБОЛЕВ, Н. Ю. СУЯРОВ

### УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ОПОРНОГО ПЯТНА ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ДУГИ ПО РАБОЧЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ЭЛЕКТРОДОВ С ПОМОЩЬЮ ВНЕШНЕГО ПОПЕРЕЧНОГО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Исследованию движения опорных пятен электрической дуги под действием продольного, поперечного (по отношению к рабочей поверхности электродов), бегущего и других магнитных полей сложной конфигурации, вопросам стабилизации приэлектродных участков дуги постоянно уделяется большое внимание. Посредством воздействия магнитных полей на электрическую дугу решаются проблемы повышения ресурса работы электродов, управления длиной дуги в плазмотроне и напряженностью электрического поля.

Для исследования воздействия внешнего вращающегося магнитного поля на приэлектродные участки дуги, движение которых определяет перемещение опорных пятен разряда, создана специальная экспериментальная установка, схема которой показана на рис. 1. В качестве индуктора 1, создающего вращающееся магнитное поле, использован статор двигателя КД-30, питаемый напряжением промышленной частоты. Внутренний диаметр медного водоохлаждаемого анода 2 равнялся 30 мм, в качестве плазмообразующего газа использовались аргон и воздух. Катод 3 представлял собой циркониевую вставку, запрессованную в медный водоохлаждаемый цилиндр. Расход газа составлял  $0,8 \div 2,5$  г/с, газ подавался в разрядную камеру без закрутки. Ток дуги поддерживался равным 40 А.

Визуальные наблюдения и скоростная киносъемка движения опорного пятна электрической дуги по внутренней поверхности анода производились со стороны выходного отверстия плазменной установки. В случае отсутствия внешнего магнитного поля наблюдалось шунтирование электрической дуги стенкой разрядной камеры [1]. Регулируя расход газа в пределах  $0,8 \div 2,5$  г/с, удавалось установить среднюю длину дуги такой, что опорное пятно при своем перемещении постоянно находилось в зоне действия магнитного поля индуктора.

Наблюдения показали, что под действием вращающегося магнитного поля опорное пятно дуги начинает перемещаться по поверхности анода, причем столб дуги, расположенный вдоль разрядной камеры, движется по круговой траектории, радиус которой зависит от тока дуги и индукции внешнего магнитного поля.

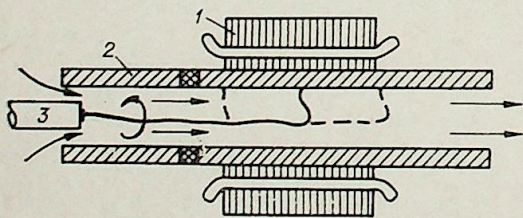


Рис. 1. Схема экспериментальной установки.

При изменении индукции магнитного поля от 0 до  $45 \cdot 10^{-4}$  Т наряду с вращением замечено продольное возвратно-поступательное перемещение опорного пятна дуги по поверхности анода, причем при значениях индукции, близких к  $45 \cdot 10^{-4}$  Т, траектория движения опорного пятна по аноду имела форму эллипса, плоскость которого вращалась вокруг оси разрядной камеры. При дальнейшем увеличении индукции поля опорное пятно дуги сокращало амплитуду своих возвратно-поступательных перемещений и одновременно вытеснялось в сторону катода, находящегося вне зоны действия магнитного поля. Передвижение индуктора вдоль разрядной камеры, при фиксированных значениях индукции магнитного поля и тока дуги, влекло за собой соответствующее смещение опорного пятна электрической дуги.

Скоростная киносъемка движения опорного пятна дуги по поверхности анода показала, что при малых значениях индукции вращающегося магнитного поля (ниже  $45 \cdot 10^{-4}$  Т) скорость вращения опорного пятна дуги ниже скорости вращения поля. По мере увеличения индукции скорость скольжения привязки дуги относительно магнитного поля уменьшается и при переходе через критическое значение  $45 \cdot 10^{-4}$  Т движение опорного пятна становится синхронным с вращением магнитного поля, что согласуется с данными работы [2].

Объяснить наблюдаемый эффект можно следующим образом. При движении пятна дуги по поверхности электрода приэлектродный участок испытывает действие не только сил аэродинамического сопротивления, но и сил сопротивления электродных пятен. Кроме того, скорость движения опорного пятна определяется диаметром анода, т. е. радиус траектории вращения не является произвольно устанавливаемым в зависимости от величины электромагнитной силы и скорости вращения поля, а жестко определен радиальными размерами анода. Поэтому при уменьшении величины магнитной индукции происходит уменьшение вынуждающей электромагнитной силы при

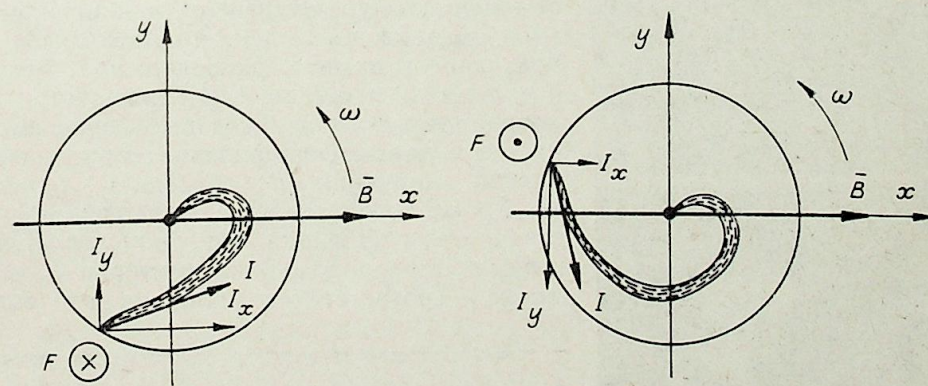
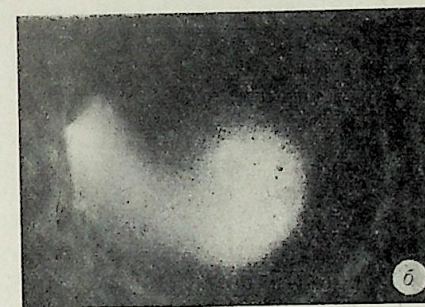
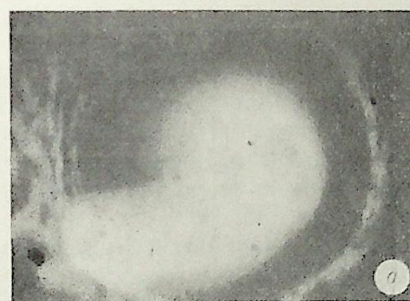


Рис. 2. Асинхронное движение анодной привязки дуги с магнитным полем.

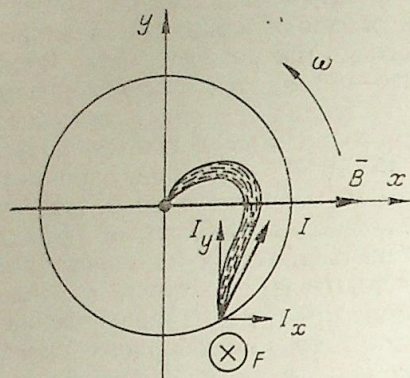
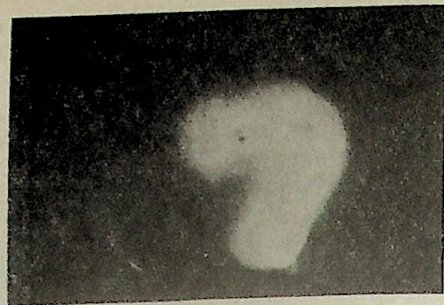
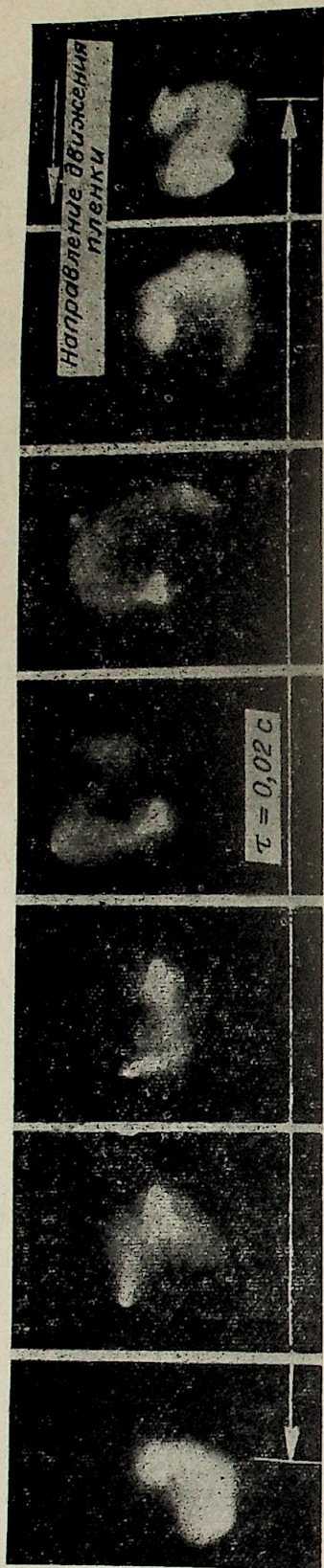


Рис. 3. Синхронное движение анодной привязки дуги с магнитным полем.

неизменной величине сил сопротивления, что приводит к асинхронному движению приэлектродного участка дуги по отношению к скорости вращения магнитного поля.

Синхронное движение вызывается действием вращающейся электромагнитной силы Лоренца. Эта сила действует на продольные участки электрической дуги (или продольную составляющую тока дуги), которые, вращаясь, вовлекают во вращательное движение и опорное пятно разряда.

На рис. 2 в плоскости сечения, перпендикулярного оси разрядной камеры, представлено два возможных случая при асинхронном движении анодной привязки. Здесь показано взаимное расположение векторов тока дуги вместе с их проекциями на координатные оси, которые вращаются вместе с полем (направление вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  совпадает с осью  $x$ ). Кроме того, указаны направления действия силы Лоренца ( $\vec{F}$ ), обусловленные взаимным расположением векторов  $\vec{I}_y$  и  $\vec{B}$  (точка — соответствует направлению силы

Рис. 4. Кинограмма движения прианодного участка дуги.

на наблюдателя, т. е. от катода; крестик — соответствует направлению от наблюдателя, т. е. к катоду). Пусть положение анодного пятна, показанного на рис. 2, а, соответствует некоторому моменту времени  $t$ , тогда рис. 2, б соответствует моменту времени  $t + \Delta t$ . В первом случае составляющая тока приэлектродной части дуги  $I_y$  имеет положительное направление и сила Лоренца направлена от наблюдателя. За время  $\Delta t$  анодное пятно в своем движении успевае отстать от вращающегося магнитного поля еще на некоторый угол, например на  $90^\circ$ . Как видно из рис. 2, б, составляющая тока  $I_y$  при этом меняет свое направление на обратное, а следовательно, и сила Лоренца меняет свое направление и действует уже в сторону наблюдателя.

При асинхронном вращении привязки дуги вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  со скоростью, равной скорости скольжения, будет поворачиваться относительно направления тока в радиальном участке дуги. Это вызовет периодическое изменение направления силы Лоренца, которая в процессе движения разряда будет действовать на ее прианодную часть то в одну, то в другую сторону. Сказанное объясняет тот факт, что при индукции ниже критической, т. е. когда возможно только асинхронное движение, наряду с вращательным имеет место и возвратно-поступательное движение вдоль поверхности анода. По мере увеличения индукции амплитуда продольных колебаний опорного пятна дуги растет вплоть до размеров области действия вращающегося магнитного поля.

На рис. 3 показан случай синхронного вращения привязки дуги с магнитным полем. Видно, что приэлектродные участки дуги несколько отстают от основного столба за счет дополнительных сил сопротивления, обусловленных приэлектродными процессами, и канал дуги выгибается в сторону вращения. Составляющая тока прианодного участка разряда имеет положительное направление и, следовательно, сила Лоренца направлена от наблюдателя. Это приводит к вытеснению привязки дуги в глубину разрядной камеры ближе к катоду, где она, продолжая вращаться синхронно с полем, стабилизируется в сравнительно узком пояске рабочей поверхности цилиндрического анода. Вытеснение разряда из области действия вращающегося магнитного поля происходит еще и за счет шунтирования, значение которого возрастает по мере увеличения индукции магнитного поля и приближения канала дуги к стенке разрядной камеры. Кинограмма (рис. 4) иллюстрирует характер движения прианодного участка электродного разряда и опорного пятна дуги по поверхности анода в случае синхронного движения дуги и поля. Здесь  $\tau$  — период вращения внешнего поперечного магнитного поля.

Таким образом, при индукциях вращающегося магнитного поля выше критических, т. е. при таких, которые способны обеспечить синхронный режим вращения привязки дуги, появляется возможность стабилизации опорных пятен разряда в необходимых зонах анодной камеры.

При индукциях ниже критических (когда возникает асинхронный режим вращения) можно осуществить дополнительное перемещение анодного пятна вдоль электрода в осевом направлении.

Куйбышевский политехнический институт им. В. В. Куйбышева

Поступила в редакцию 20/II 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Жуков М. Ф., Коротеев А. С., Урюков Б. А. Прикладная динамика теоретической плазмы. Новосибирск, Наука, 1975. 295 с.
2. Гаген Ю. Г., Таран В. Д. Сварка магнитоуправляемой дугой. М., Машиностроение, 1970. 159 с.

УДК 629.7.018.1 : 533.6.071.1 : 62-69

И. П. ВАСЕНКО

### РАСЧЕТ МАГНИТНОГО ПОЛЯ, СОЗДАВАЕМОГО ЭЛЕМЕНТАМИ МАГНИТНОЙ СИСТЕМЫ ПОДОГРЕВАТЕЛЯ КООКСИАЛЬНОГО ТИПА

В настоящее время электродуговые подогреватели широко применяются в экспериментальной аэродинамике [1, 2], плазмохимии, металлургии и других областях науки и техники. Среди многообразия конструктивных схем важное место занимают подогреватели коаксиального типа с магнитной стабилизацией дуги. Магнитное поле, вращающее дугу и стабилизирующее ее в заданном объеме, создается, как правило, соленоидом. Усиление магнитного поля и изменение его топологии в зоне горения дуги достигаются установкой дополнительного соленоида в головке центрального электрода [3], а также использованием магнитной системы, состоящей из магнитовода, в той или иной степени охватывающего соленоид [4, 5], и вставки из магнитомягкого материала, расположенной в головке центрального электрода под его охлаждаемой поверхностью [6].

Отсутствие методов расчета магнитного поля, создаваемого элементами магнитной системы, значительно затрудняет выбор ее параметров и параметров соленоида на стадии проектирования подогревателя.

В данной работе излагается методика расчета магнитного поля элементов магнитной системы с использованием закона Кулона для магнитных масс. На основании сравнения результатов расчета с экспериментом указывается область применения методики.

#### 1. РАСЧЕТ МАГНИТНОГО ПОЛЯ, СОЗДАВАЕМОГО ВСТАВКОЙ

Магнитное поле, создаваемое магнитной системой, равно сумме полей ее элементов, поэтому расчет магнитного поля, создаваемого магнитной системой подогревателя коаксиального типа (рис. 1), состоящий из магнитовода 1, 2 и вставки 3, расположенной в головке центрального электрода, выполним поэлементно.

Магнитное поле, образуемое в зоне горения дуги отдельными элементами системы, существенным образом зависит от их размеров, формы, материала, величины намагничивающего поля и др. Эти зависимости весьма сложны, поэтому для упрощения расчета предположим следующее.

1. Вставка осесимметрична и ее ось совпадает с осью подогревателя.

2. Магнитное поле вне материала вставки 3 создается только магнитными полосами или условными магнитными зарядами, расположенными на ее торцевых поверхностях.

3. Напряженность магнитного поля, создаваемого точечным маг-

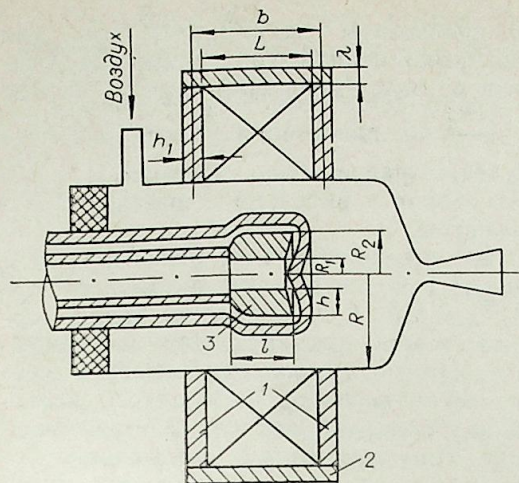


Рис. 1. Схема электродугового подогревателя коаксиального типа с комбинированной магнитной системой.

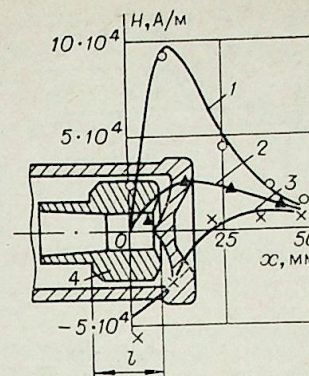


Рис. 2. Сравнение с экспериментом магнитного поля ферромагнитной вставки относительно небольших радиальных размеров, рассчитанного по формулам одногиполя.

нитным зарядом  $m$ , определяется аналогично закону Кулона для электрических зарядов, т. е. в воздухе

$$H = m/r^2, \quad (1.1)$$

где  $r$  — расстояние от заряда. Суммарный магнитный заряд  $m$ , расположенный на торцевой поверхности вставки 3, согласно [7], определим как

$$m = js, \quad (1.2)$$

где  $j$ , А/м — намагниченность материала;  $s$ , м<sup>2</sup> — площадь торцевой поверхности вставки.

С учетом сделанных допущений проведем расчет магнитного поля, создаваемого вставкой 3. В первом приближении заменим вставку эквивалентным магнитным диполем той же длины  $l$ , что и вставка, тогда, согласно [8], напряженность магнитного поля, создаваемого вставкой (диполем), выразится соотношением

$$H = \frac{M}{r^3} (1 + 3 \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.3)$$

где  $M = ml$  — магнитный момент диполя;  $r$  — расстояние от центра диполя до точки, в которой рассчитывается поле;  $\theta$  — угол между осью диполя и радиус-вектором  $r$ . В расчетной точке вектор  $H$  повернут относительно радиус-вектора  $r$  на угол  $\varphi$ , определяемый соотношением

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta. \quad (1.4)$$

Выражение (1.3) справедливо только при условии  $r \gg l$ , что в реальных электродуговых подогревателях, как правило, не выполняется. Кроме того, заменяя вставку диполем, мы отвлекаемся от ее радиальных размеров, сохраняя только ее длину и помещаем всю ее массу на оси, что может быть допустимо для вставок с относительно небольшими радиальными размерами. Для вставок относительно большого диаметра, имеющих осевое отверстие, масса которых расположена ближе к зоне горения дуги, такая замена может привести к существенной погрешности в оценке магнитного поля. Критерием допустимости замены вставки диполем может служить только эксперимент.

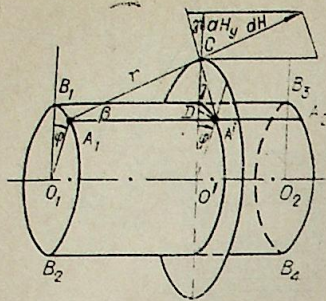


Рис. 3. Схема расчета магнитного поля ферромагнитной вставки при замене ее системой диполей.

Эксперименты показывают, что для вставки, выполненной в виде цилиндра с осевым отверстием, имеющей длину  $l \leq 2\rho$ , где  $\rho = \frac{R_1 + R_2}{2}$  на расстоянии от оси  $y \geq 2,5\rho$ , результаты расчета по формулам (1.3) и (1.4) удовлетворительно совпадают с экспериментом.

В качестве примера на рис. 2 приведены результаты расчета по формулам (1.3) и (1.4) (кривые 1, 2, 3) и измерения (отдельные точки) составляющих напряженности магнитного поля, создаваемого цилиндрической вставкой из стали 20, имеющей длину основной части  $l = 17$  мм, внешний диаметр 26 и диаметр осевого отверстия 10 мм. Радиальная составляющая (кривые 1 и 2) рассчитана и измерена на расстояниях от оси 22 и 34 мм, что соответствует  $y = 2,45$  и  $3,8\rho$ . Осевая составляющая измерена и рассчитана на расстояниях от  $y = 30$  мм  $= 3,33\rho$ . Расположение вставки 4 относительно начала координат и ее форма показаны на рис. 2.

В расчете учитывалась только основная часть вставки длиной  $l$ , ее хвостовая часть, предназначенная для соединения с другими деталями, в расчет не принималась, намагниченность материала вставки принималась равной намагниченности насыщения железа, т. е.  $j = 1,35 \cdot 10^5$  А/м. Составляющие магнитного поля измерены милливеберметром М-1119 при помощи зонда специальной конструкции [9]. Непосредственное измерение составляющих магнитного поля вставки невозможно, поэтому оно проведено косвенным путем. Измерены составляющие напряженности в подогревателе со вставкой и без нее и путем вычитания определены составляющие магнитного поля вставки. В процессе измерений осевая составляющая напряженности магнитного поля в подогревателе без вставки достигала  $6,5 \cdot 10^5$  А/м, что вполне достаточно для намагничивания материала вставки до состояния насыщения. Из рис. 2 видно, что результаты расчета по формулам (1.3) и (1.4) хорошо совпадают с результатами эксперимента, т. е. при расчете магнитного поля вставок длиной  $l \leq 2\rho$  на расстояниях от оси  $y \geq 2,5\rho$  вполне допустима замена вставки одним диполем.

В электродуговых подогревателях больших размеров с диаметром камеры порядка 200 мм внешний диаметр вставки может достигать 150 мм, а ее средний радиус  $\rho \approx 70$  мм, когда предельное расстояние расчетных точек от оси  $y \leq 1,5\rho$ , т. е. когда материал вставки находится от ее оси дальше, чем от зоны, в которой рассчитывается поле (зоны горения дуги). Более реальной представляется схема расчета с заменой вставки эквивалентной системой диполей той же длины, что и вставка, расположенных на цилиндрической поверхности с радиусом, равным  $\rho$ . На рис. 3, поясняющем схему расчета, это поверхность  $A_1B_1B_2A_2B_3B_4$ .

Напряженность магнитного поля, создаваемого элементарным зарядом  $dm$ , определяем по закону Кулона, т. е.

$$dH = dm/r^2. \quad (1.5)$$

Для определенности считаем, что на левом торце вставки, например в точке  $A_1$ , находится положительный заряд (+  $dm$ ), а справа, в точке  $A_2$  — отрицательный; расстояние вправо от заряда положительно, а влево — отрицательно.

Элементарный заряд в точке  $A_1$ , согласно (1.2), определяется соотношением  $dm = jds$ , где  $j$  — намагниченность,  $ds$  — элемент поверхности.

В цилиндрических координатах

$$ds = \int_{R_1}^{R_2} r dr d\varphi = \frac{1}{2} (R_2^2 - R_1^2) d\varphi.$$

Принимая во внимание, что  $R_2 - R_1 = h$ ,  $R_2 + R_1 = 2\rho$ , получим

$$dm = jh\rho d\varphi. \quad (1.6)$$

При определении напряженности по (1.5) в точке  $C$  (см. рис. 3) для заряда, расположенного в точке  $A_1$ , найдем расстояние  $r = A_1C$ . Для определения  $A_1C$  проведем через точку  $C$  плоскость, нормальную оси цилиндрической поверхности, расстояние точки  $C$  от оси обозначим через  $y$  ( $y \geq \rho$ ). Проведенная таким образом плоскость пересечет диполь  $A_1A_2$  в точке  $A'$ . В соответствии с выбранными направлениями обозначим  $A_1A'$  через  $x_1$ ;  $A'A_2$  через  $x_2$ , тогда из рис. 3 найдем  $r^2 = A_1C^2 = \rho^2 + x_1^2 + y^2 - 2\rho y \cos \varphi$ .

Принимая во внимание (1.5) и (1.6), получим  $dH_1 = \frac{jh\rho d\varphi}{\rho^2 + x_1^2 + y^2 - 2\rho y \cos \varphi}$ , в проекциях на координате оси  $x$  и  $y$  будем иметь  $dH_{1x} = dH_1 \cos \beta$ ;  $dH_{1y} = dH_1 \sin \beta \cos \gamma$ .

Из рис. 3 найдем  $\cos \beta = \frac{x_1}{A_1C}$ ,  $\sin \beta = \frac{A'C}{A_1C}$ ,  $\cos \gamma = \frac{y - \rho \cos \varphi}{A'C}$  и окончательно составляющие напряженности в точке  $C$ , создаваемой зарядом точки  $A_1$ , будут иметь вид

$$dH_{1x} = \frac{jh\rho x_1 d\varphi}{(\rho^2 + x_1^2 + y^2 - 2\rho y \cos \varphi)^{3/2}},$$

$$dH_{1y} = \frac{jh\rho (y - \rho \cos \varphi) d\varphi}{(\rho^2 + x_1^2 + y^2 - 2\rho y \cos \varphi)^{3/2}}.$$

Составляющие напряженности магнитного поля, создаваемого в точке  $C$  левым торцом вставки, находим интегрированием полученных выражений по  $\varphi$  в пределах от 0 до  $2\pi$ , т. е.

$$H_{1x} = \int_0^{2\pi} \frac{jh\rho x_1 d\varphi}{(\rho^2 + x_1^2 + y^2 - 2\rho y \cos \varphi)^{3/2}},$$

$$H_{1y} = \int_0^{2\pi} \frac{jh\rho (y - \rho \cos \varphi) d\varphi}{(\rho^2 + x_1^2 + y^2 - 2\rho y \cos \varphi)^{3/2}}.$$

Полагая аналогично [10]  $\frac{4\rho y}{(\rho + y)^2 + x_1^2} = k_1^2$  и  $\varphi = \pi - 2\alpha$ , получим  $d\varphi = -2d\alpha$ ,  $\cos \varphi = 2 \sin^2 \alpha - 1$ , а выражения для составляющих напряженности преобразуются к виду

$$H_{1x} = \frac{jhx_1 k_1^3}{2y \sqrt{\rho y}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{(1 - k^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}},$$

$$H_{1y} = \frac{jhk_1^3}{2y \sqrt{\rho y}} \int_0^{\pi/2} \frac{[y - \rho (2 \sin^2 \alpha - 1)] d\alpha}{(1 - k^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}}.$$

Воспользовавшись тождеством [11]

$$(1 - k^2 \sin^2 \alpha)^{-3/2} = \frac{1}{1 - k^2} (1 - k^2 \sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}} - \frac{k^2}{1 - k^2} \cdot \frac{d}{d\alpha} \left[ \sin \alpha \cos \alpha (1 - k^2 \sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}} \right],$$

сведем полученные интегралы к эллиптическим и получим

$$H_{1x} = \frac{-jh x_1 k_1^3 E(k_1)}{2y \sqrt{\rho y} (1 - k_1^2)},$$

Здесь знак минус взят потому, что в зоне горения дуги над вставкой осевая составляющая ее магнитного поля противоположна намагничивающему полю;

$$H_{1y} = \frac{jh}{2y \sqrt{\rho y}} \left[ \frac{k_1^3 (\rho + y) - 2k_1 \rho}{1 - k_1^2} E(k_1) + 2k_1 \rho K(k_1) \right],$$

где  $K(k)$  и  $E(k)$  полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

Напряженность в точке  $C$ , создаваемая правым торцом вставки, выразится аналогичными формулами, а суммарная напряженность с учетом выбранных направлений и знаков заряда — уравнениями

$$H_x = -\frac{jh}{2y \sqrt{\rho y}} \left[ \frac{x_1 k_1^3 E(k_1)}{1 - k_1^2} + \frac{x_2 k_2^3 E(k_2)}{1 - k_2^2} \right], \quad (1.7)$$

$$H_y = \frac{jh}{2y \sqrt{\rho y}} \left\{ \frac{k_1^3 (\rho + y) - 2k_1 \rho}{1 - k_1^2} E(k_1) - \frac{k_2^3 (\rho + y) - 2k_2 \rho}{1 - k_2^2} E(k_2) + 2\rho [k_1 K(k_1) - k_2 K(k_2)] \right\}, \quad (1.8)$$

где

$$k_2^2 = \frac{4\rho y}{(\rho + y)^2 + x_2^2}; \quad x_1 - x_2 = l.$$

В формуле (1.7), (1.8) так же, как и в (1.3), кроме геометрических параметров, входит величина  $j$ , зависящая от материала магнитного поля и других данных, но для каждого материала в состоянии насыщения имеющая свое определенное значение  $j_s$ . Поэтому формулами (1.3), (1.7) и (1.8) удобно пользоваться для оценки максимального, магнитного поля, создаваемого вставкой в состоянии ее насыщения, которое, как показывает эксперимент, достигается во внешнем поле порядка  $4 \cdot 10^5$  А/м.

Сравнение результатов расчета по формуле диполя (1.3) и интегральным формулам (1.7) и (1.8) с экспериментом для цилиндрической вставки из стали 20, имеющей длину 100 мм, внешний диаметр 118 и внутренний диаметр 78 мм, приведено на рис. 4. Положение вставки относительно начала координат приведено там же. Радиальная составляющая рассчитана и измерена на расстоянии от оси  $y = 72,5$  мм, что соответствует  $y = 1,5\rho$ , а осевая на расстоянии 70 мм от оси. Измерение осевой составляющей проведено с осреднением по кольцу шириной 5 мм ( $d_1 = 135$ ,  $d_2 = 145$  мм), а радиальной составляющей — с осреднением по цилиндрической поверхности кольца диаметром 145 и шириной 5 мм. Кривыми 1 нанесены результаты рас-

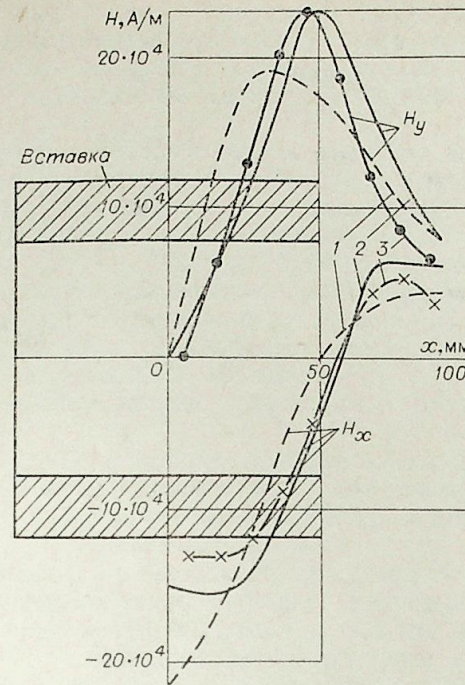


Рис. 4. Сравнение с экспериментом результатов расчета магнитного поля ферромагнитной вставки относительно больших радиальных размеров.

чета по формуле диполя (1.3), кривыми 2 — результаты расчета по формулам (1.7) и (1.8); кривыми 3 — результаты измерений. Измерение проведено во внешнем поле с осевой составляющей  $H_x = 4 \cdot 10^5$  А/м. Из рисунка видно, что радиальная составляющая, рассчитанная по интегральной формуле (1.8), у края вставки достигает  $2,3 \cdot 10^5$  А/м и практически совпадает с результатами измерений. В пределах вставки экспериментальные и рассчитанные по интегральной формуле значения радиальной составляющей напряженности отличаются друг от друга не более чем на 17%, в то время как расчетные значения, полученные по формуле одного диполя, в этой зоне отличаются как по характеру распределения, так и по величине; отличия по величине достигают 40%.

Значения осевой составляющей напряженности, рассчитанной по интегральной формуле (1.7), отличаются от ее экспериментальных значений не более чем на 20%, в то время как расчет по формуле диполя дает значения, отличающиеся от экспериментальных на 50 ÷ 60%.

Следовательно, интегральные формулы дают лучшее совпадение с экспериментом, чем дипольная формула, поэтому расчет магнитного поля вставки из магнитно-мягкого материала целесообразно проводить по интегральным формулам (1.7) и (1.8), однако на больших расстояниях от оси вставки при  $y \geq 2,5\rho$  расчет можно проводить по более простым формулам одного диполя (1.3), (1.4).

## 2. РАСЧЕТ МАГНИТНОГО ПОЛЯ, СОЗДАВАЕМОГО МАГНИТОВОДОМ

Рассмотрим магнитовод П-образного сечения, состоящий из торцевых дисков 1 и обечайки — 2 (см. рис. 1). Основное влияние на величину напряженности магнитного поля в зоне горения дуги должны ока-

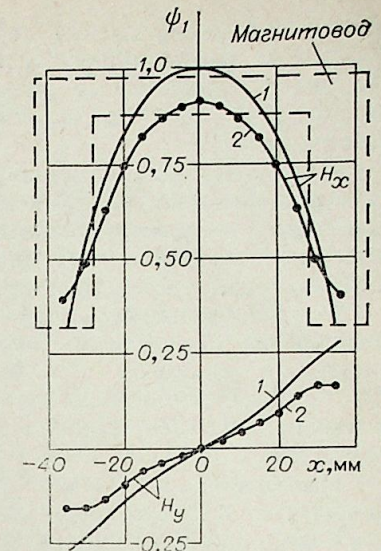


Рис. 5. Сравнение измеренного и расчетного значений магнитного поля, создаваемого электромагнитной катушкой, заключенной в магнитовод П-образного сечения.

зывать магнитные полюса или условные магнитные заряды, расположенные на цилиндрических поверхностях осевых отверстий торцевых дисков 1. Поэтому в первом приближении рассмотрим влияние только этих полюсов, влиянием остальных частей магнитовода пренебрежем.

При сделанных допущениях магнитовод можно заменить системой двух разноименно заряженных магнитных колец с радиусом  $R$ , равным радиусу осевого отверстия в торцевых дисках магнитовода, расположенных на одной оси на расстоянии  $b$  друг от друга, равном расстоянию между средними сечениями торцевых дисков.

В этих предположениях элементарный магнитный заряд, расположенный на элементе цилиндрической поверхности торцевого отверстия диска, по аналогии с (1.6) определится выражением  $dm = jh_1 R d\varphi$ , где  $j$  — намагниченность материала,  $h_1$  — толщина торцевых дисков магнитовода,  $R$  — радиус осевого отверстия дисков,  $d\varphi$  — элемент угла.

Магнитное поле, создаваемое элементарным зарядом, определим по формуле (1.5), а поле, создаваемое торцевым диском магнитовода (в схеме расчета заряженным кольцом), найдем путем интегрирования уравнения типа (1.5).

Таким образом, задача расчета магнитного поля магнитовода сведется к решению задачи, аналогичной задаче для вставки, рассмотренной выше. Разница только в том, что для вставки решалась внешняя задача, т. е. поле рассчитывалось вне материала вставки при  $y > \rho$  (в этом случае у торца вставки, из которого выходят магнитные силовые линии, их радиальная составляющая направлена от оси), а при решении задачи для магнитовода мы рассматриваем внутреннюю задачу, когда  $y < R = \rho$ , следовательно, у цилиндрической поверхности торцевого диска, из которой выходят магнитные силовые линии, их радиальная составляющая направлена к оси. Аналогично и для осевых составляющих: осевая составляющая магнитного поля вставки в зоне горения дуги противоположна магнитному полю основного соленоида, магнитное поле магнитовода в этой зоне направлено в ту же сторону, что и магнитное поле соленоида, т. е. решения для магнитовода и вставки отличаются только знаком. Следовательно, составляющие магнитного поля, создаваемого магнитоводом, выразятся формулами

$$H_x = \frac{h_1 j}{2y \sqrt{Ry}} \left[ \frac{x_1 k_1^3 E(k_1)}{1 - k_1^2} + \frac{x_2 k_2^3 E(k_2)}{1 - k_2^2} \right], \quad (2.1)$$

$$H_y = \frac{h_1 j}{2y \sqrt{Ry}} \left\{ \frac{2k_1 R - k_1^3 (R + y)}{1 - k_1^2} - \frac{2k_2 R - k_2^3 (R + y)}{1 - k_2^2} + 2R [k_2 K(k_2) - k_1 K(k_1)] \right\}, \quad (2.2)$$

где  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $E(k)$  и  $K(k)$  — определяются так же, как и для уравнений (1.7) и (1.8), при этом  $x_1 - x_2 = b$ ,  $h_1$  и  $R$  указаны на рис. 1.

Как и следовало ожидать, на оси при  $y = 0$  правая часть уравнения (2.2), т. е. радиальная составляющая магнитного поля магнитовода, после раскрытия неопределенности обращается в нуль, а осевая составляющая, т. е. выражение (2.1) в центре магнитовода ( $y = 0$ ,  $x_1 \approx$

$\approx -x_2$ ) преобразуется к виду

$$H_x = \frac{2\pi R h_1 b j}{\left[ R^2 + \left( \frac{b}{2} \right)^2 \right]^{3/2}}. \quad (2.3)$$

По формулам (2.1) и (2.2) при известной величине намагниченности материала  $j$  можно рассчитывать величины составляющих напряженности магнитного поля, создаваемой магнитоводом в любой точке зоны горения дуги. Формула (2.3) в силу своей простоты удобна для оценки магнитного поля, создаваемого магнитоводом в центре магнитовода. Анализ (2.3) показывает, что напряженность магнитного поля магнитовода в его центре достигает максимума при  $\frac{L + h_1}{R} = 1,41$ , где  $L$  — длина

соленоида. Однако следует иметь в виду, что при толщине торцевых дисков магнитовода  $h_1 \geq 0,4R$  материал дисков намагничивается не одинаково, вблизи соленоида намагниченность может достигать состояния насыщения  $j_s$ , а на противоположной стороне диска она может быть значительно ниже, поэтому оценка по формулам (2.1), (2.2), (2.3) при  $j = j_s$  может давать завышенные значения составляющих напряженности. При очень тонких дисках ( $h_1 \leq 0,2R$ ) и относительно толстых обечайках магнитовода в условиях сильных намагничивающих полей ( $H \geq 3 \cdot 10^5$  А/м) не весь магнитный поток, циркулирующий в магнитоводе, коммутируется торцевыми дисками. Часть потока из обечайки попадает в зону горения дуги, минуя торцевые диски. В этом случае расчет по формулам (2.1)—(2.3) может давать заниженные (на  $10 \div 30\%$ ) значения.

В качестве иллюстрации применения формул (2.1) и (2.2) и сравнения результатов расчета с экспериментом на рис. 5 приведены расчетные (1) и измеренные (2) значения осевого распределения магнитного поля магнитовода, имеющего длину  $b = 71$  мм, диаметр осевых отверстий торцевых дисков 64 мм ( $R = 32$  мм), толщину дисков  $h_1 = 15$  мм, или  $h_1 = 0,47R$ , толщину обечайки  $\lambda = 10$  мм или  $\lambda = 0,313R$ . Расчет и измерения проведены на расстоянии от оси  $y = 14,5$  мм. На рис. 5 указано положение магнитовода относительно начала координат. По оси ординат отложена относительная величина  $\psi = H(x)/H(0)$ , где  $H(x)$  — напряженность магнитного поля соленоида с магнитоводом в точке с координатой  $x$ ,  $H(0) = 6 \cdot 10^5$  А/м, расчетная величина магнитного поля в центре соленоида с магнитоводом. Из рис. 5 видно, что характер осевого распределения расчетного и измеренного полей совпадает, однако расчетное значение  $H_x$  в центре магнитовода на 9% превышает измеренное. Это обусловлено, видимо, тем, что в расчете принято равномерное насыщение дисков до состояния  $j_s$ , а в действительности их внешние стороны намагничены значительно слабее. Под торцами дисков расчетное значение радиальной составляющей, примерно в 1,5 раза превышает измеренное. Это объясняется тем, что в расчетной схеме мы помещаем все магнитные полюса на одну линию, по мере приближения к ней  $H_y \rightarrow \infty$ , на самом же деле заряды распределены по поверхности более или менее равномерно и пика не наблюдается.

Сравнение с экспериментом результата расчета по формуле (2.3) магнитного поля на оси магнитовода с диаметром осевых отверстий торцевых дисков 386 мм и относительно тонкими торцевыми дисками  $h_1 = 0,11R$  при толщине обечайки  $\lambda = 0,094R$  показывает, что в центре магнитовода расчетная величина напряженности примерно на 5—7% ниже экспериментальной.

Таким образом, сравнение расчетов с экспериментом показывает, что при относительной толщине торцевых дисков магнитовода  $0,1R \leq h_1 < 0,5R$  результаты расчета по формулам (2.1)—(2.3) утвердительно

но совпадают с экспериментом, поэтому этими формулами можно пользоваться при выборе магнитовода на стадии проектирования подогревателя.

Центральный аэрогидродинамический институт  
им. Н. Е. Жуковского

Поступила в редакцию  
25/ХІІ 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Коротеев А. С. и др. Генераторы низкотемпературной плазмы. М., Наука, 1969.
2. Жуков М. Ф., Смоляков В. Я., Урюков Б. А. Электродуговые подогреватели газа. М., Наука, 1973.
3. Захаркин Р. Я. и др. Коаксиальный плазмотрон с внешним и внутренним соленоидом. Физика, техника и применение низкотемпературной плазмы.— Тр. IV Всесоюз. конф. по генераторам низкотемпературной плазмы. Алма-Ата, 1970.
4. Гапонов В. И. Электроника. ч. 1. М., Физматгиз, 1960.
5. Алферов В. И. и др. Электродуговой подогреватель с дугой, вращаемой в магнитном поле.— ТВТ, 1971, 9, № 2.
6. Васенко И. П. Влияние ферромагнитной вставки на магнитное поле и характер горения дуги в подогревателе коаксиального типа.— Уч. зап. ЦАГИ, 1975, VI, № 1.
7. Путилов К. А. Курс физики, т. II. М., Гостехиздат, 1956.
8. Бозорт Р. Ферромагнетизм. М., ИЛ, 1956.
9. Васенко И. П. Об измерении сильных неоднородных магнитных полей.— Труды ЦАГИ, вып. 1689. М., 1976.
10. Калантаров П. Л., Нейман Л. Р. Теоретические основы электротехники. Л.— М., Госэнергоиздат, 1951.
11. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. М., Физматгиз, 1962.

В. В. ГУЖКОВ, А. М. ЗИМИН,  
Н. П. КОЗЛОВ, А. Г. РОЗАНОВ, В. И. ХВЕСЮК

## ДИНАМИКА ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ ЭЛЕКТРОДОВ ЧАСТОТНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ ЛАМП

Последние годы все шире применяются плазменные устройства, работающие в частотном режиме (плазмотроны переменного тока, искрители плазмы, источники высокоинтенсивного света и др.). Электроды таких систем работают в существенно нестационарных условиях, что требует исследования динамики изменения их основных параметров.

Особенно важно получить временные зависимости температурных полей на поверхности электродов, так как этим в значительной степени определяются механизм эмиссии электронов с катода и величина эрозии. К параметрам, характеризующим катодные процессы частотных разрядов, наряду с обычными для стационарных дуг (ток, давление и род газа, геометрия, условия охлаждения и свойства электродов), относятся частота повторения  $f$ , длительность импульса, зависимость разрядного тока от времени.

Под динамикой температурных полей мы понимаем их изменения, для которых существуют четыре характерных значения  $\tau$ :

1.  $\tau_1 = \tau_{\text{имп}}$  — время изменения температур в пределах одного импульса,
2.  $\tau_2 = 1/f$  — время изменения температурных полей в пределах одного периода,
3.  $\tau_3$  — характерное время изменения температурных полей, вызванного переходом от момента включения разряда к моменту, когда устанавливается периодический тепловой режим ( $\tau_3 \approx L^2/a$ , где  $L$  — длина электрода,  $a$  — температуропроводность);
4.  $\tau_4$  — характерное время перестройки температурных распределений, вызванной изменением свойств материала электродов, внутренней структуры, выхода легирующей присадки и т. д. ( $\tau_4 \sim$  ресурса устройства).

Для комплексного исследования теплового состояния электродов устройств, работающих в частотном режиме, необходима методика, обладающая большой производительностью наряду с высоким пространственно-временным разрешением. Методы измерения температур, применявшиеся до сих пор (см. например, обзор [1]), слишком трудоемки для решения такой задачи, поэтому авторами разработан и применен новый метод, основанный на использовании многократного регистратора спектров.

### МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ ТЕМПЕРАТУР

К методам измерения в импульсных системах предъявляются повышенные требования: хорошее пространственно-временное разрешение, удобство регистрации и высокая производительность обработки ре-

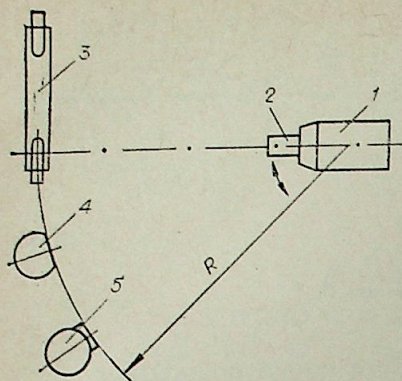


Рис. 1. Схема температурных измерений.

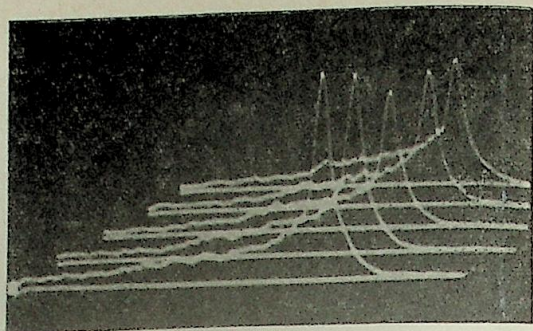


Рис. 2. Характерные МРС-граммы.  
Длительность одной развертки 50 мкс, период повторения разверток 300 мкс.

зультатов, возможность одновременного получения пространственного и временного распределения. Существующие методы (пирометрия, скоростная киносъемка и т. д.) слишком трудоемки. Предложенная методика позволяет сочетать высокую производительность, удобство регистрации с необходимым пространственно-временным разрешением.

Многократный регистратор спектров МРС-1 предназначен для регистрации распределения яркости вдоль какого-либо направления светящегося объекта. Чувствительным элементом прибора является двойной электронно-оптический преобразователь — диссектор [2]. Основные параметры МРС-1: время одной развертки  $1 \div 100$  мкс, количество разверток за цикл работы  $2 \div 16$ , период повторения разверток  $1,5 \div 300$  мкс. Схема эксперимента представлена на рис. 1. Диссектор 1 с объективом 2 крепится на поворотном столике. На одинаковом от него расстоянии  $R$  расположены исследуемый объект 3, штриховая мира с осветителем 4 и эталонная лампа 5. Прибор предварительно настраивается с помощью миры (пространственное разрешение прибора порядка 0,3 мм). Калибровка по температуре проводится по лампе СИ 10-300У. Влияние излучения плазмы на измерения устраняется введением узкополосного светофильтра ( $\lambda \sim 0,65$  мкм) и задержкой запуска МРС-1, которая варьируется относительно поджигающего импульса в пределах  $0,5 \div 15$  мс. При  $\tau_3 < 0,5$  мс наблюдается интенсивное послесвечение распадающейся плазмы, что резко снижает точность измерений. Время распада ксеноновой плазмы, по нашим данным, составляет  $200 \div 300$  мкс, что согласуется с результатами работы [3]. Характерные МРС-граммы приведены на рис. 2. Точность измерения температур  $\sim 2,5\%$ .

### РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Ниже приведены результаты измерений температур электродов частотных ламп ИСП-2500 ( $f = 50$  Гц,  $P = 3$  кВт,  $\tau_{\text{имп}} = 300$  мкс). Материал электродов — торированный вольфрам.

1. Установившийся периодический режим. Измерения температур электродов в пределах периода между импульсами ( $\tau_2$ ). На рис. 3 представлены результаты измерений температур на катоде в пределах одного периода. Наибольший интерес представляют абсолютные значения температур катода, которые позволяют судить об определяющем механизме эмиссии электронов с поверхности. Как видно из графиков, температуры рабочей поверхности катода достаточны для поддержания термоэмиссионного режима.

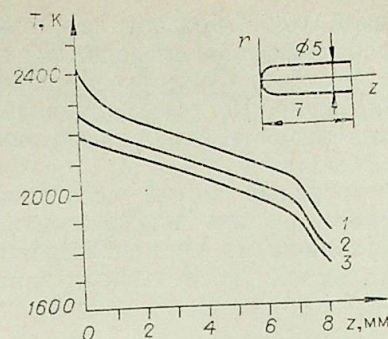


Рис. 3. Распределение температур по длине катода.  
 $\tau = 2,0$  (1), 7,5 (2), 15 мс (3).

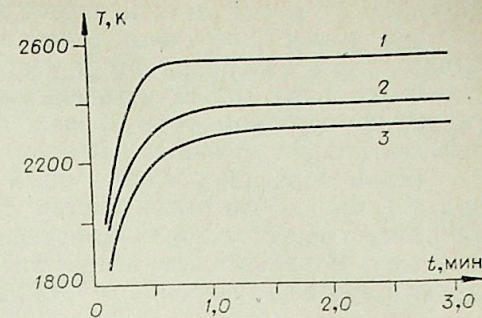


Рис. 4. Выход электрода на установившийся температурный режим.  
 $z = 1$  мм (1), 4 (2), 6 мм (3).

Распределение температур на цилиндрической части электрода линейно. Наклон  $T(z)$  остается практически постоянным в течение всего периода остывания.

2. Выход на периодический тепловой режим работы электродов.

В этом случае температурные распределения снимались при фиксированной задержке запуска МРС-1 с интервалом 15 с с начала работы лампы. Благодаря хорошей синхронизации измерительной аппаратуры с разрядом исключается влияние изменения температурных полей в паузе между импульсами. Поэтому можно изучать зависимость распределения температур от времени  $t$  с момента включения лампы. Результаты измерений приведены на рис. 4.

Таким образом, время выхода электродов на периодический тепловой режим работы составляет  $\sim 1$  мин. Скоростная киносъемка показала, что в начале работы температура активной поверхности катода заметно превышает ее максимальное значение в установившемся периодическом режиме, а площадь контакта оказывается существенно меньше. Это характерно для разряда с «холодными» электродами [4, 5].

3. Динамика температурных полей, вызванная изменением свойств и структуры электрода. На рис. 5 приведены температурные распределения, снятые через  $N$  импульсов с начала работы. Функции  $T(z)$  для катода и анода ведут себя по-разному. Температура анода изменяется слабо, наблюдается лишь небольшое ее увеличение. Для рабочей зоны катода ( $\sim 2 \div 3$  мм) она резко возрастает. С увеличением  $N$  перепад температур между этой зоной и цилиндрической частью электрода растет (до  $\sim 600$ ), в то время как уровень температур средней части катода снижается. Уменьшается также и тепловой поток. На поверхности электрода появляются следы эрозии в виде шариков, выростов диаметром  $0,1 \div 0,2$  мм. Скоростная киносъемка показала, что контакт дуги с катодом преимущественно осуществляется по поверхности этих выростов. Средняя температура в зоне катодного пятна, определенная по кривой остывания, достигает  $\sim 3500$  К.

Такой характер временной зависимости  $T(z)$  может быть связан с обеднением ра-

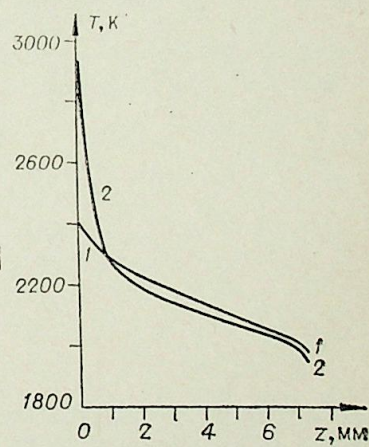


Рис. 5.  
 $N = 1 \cdot 10^3$  (1),  $1,5 \cdot 10^3$  (2).

бочей зоны катода активирующей присадкой [6]. Образование скачка температуры в поверхностной зоне ухудшает диффузию присадки из глущинных слоев материала, что приводит к еще большему перегреву конца электрода и, возможно, к увеличению его эрозии. На аноде, напротив, скачок температуры отсутствовал, привязка разряда была диффузной, заметного роста эрозии со временем не наблюдалось.

Таким образом, разработанный и примененный метод исследования электродов частотных систем позволяет получить информацию о динамике процессов, характеризующихся различными временными масштабами. В дальнейшем необходимо комплексное исследование зависимости эрозии электродов от режима работы плазменного устройства.

Московское высшее техническое училище  
им. Н. Э. Баумана

Поступила в редакцию  
11/ХІ 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Пустогаров А. В. Измерение температуры электродов плазмотронов.— В кн.: Приэлектродные процессы и эрозия электродов плазмотронов. Новосибирск, 1977, с. 41—60.
2. Кругляков Э. П. Об одном методе сверхскоростной регистрации контуров спектральных линий.— В кн.: Диагностика плазмы, вып. 2. М., Атомиздат, 1968, с. 117—126.
3. Герасимов Г. Н., Хряков Б. В. Исследование рекомбинации в послесвечении ксенона.— Оптика и спектроскопия, 1975, 39, № 3, с. 453—457.
4. Раховский В. И. Физические основы коммутации электрического тока в вакууме. М., Наука, 1970.
5. Амосов В. М., Карелин Б. А., Кубышкин В. В. Электродные материалы на основе тугоплавких металлов. М., Metallurgia, 1976.
6. Ровинский Р. Е., Самойленко М. В. Диффузия тория и разрушение электродов из торированного вольфрама в сильноточном разряде в ксеноне.— Радиотехника и электроника, 1959, № 6, с. 1018—1025.

А. М. БЛОХИН

### СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ АКУСТИКИ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ НА УДАРНОЙ ВОЛНЕ

В настоящей работе изучается смешанная задача для линеаризованной системы уравнений газовой динамики с граничными условиями, заданными на фронте ударной волны. Такая задача изучалась ранее С. П. Дьяковым [1] и В. М. Конторовичем [2] с помощью метода Фурье, С. В. Иорданским [3] и Р. М. Зайделем [4] с помощью метода Фурье и преобразования Лапласа.

В данной работе строится диссипативный интеграл энергии [5], из которого следует, что если при  $t=0$  неизвестные функции и их некоторые первые и вторые производные принадлежат пространству  $L_2$ , то смешанная задача поставлена корректно.

1. Рассмотрим систему уравнений, описывающую плоское движение газа:

$$\begin{aligned} u_t + u \cdot u_x + v \cdot u_y + V p_x &= 0, \\ v_t + u \cdot v_x + v v_y + V p_y &= 0, \\ \rho_t + u \rho_x + v \rho_y + c^2 \rho (u_x + v_y) &= 0; \\ S_t + u S_x + v S_y &= 0, \\ V = 1/\rho, \quad p = f(\rho, S), \quad c^2 = \partial f(\rho, S) / \partial \rho. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $u, v$  — компоненты вектора скорости газа в декартовой системе координат  $x, y$ ;  $t$  — время;  $p, \rho, V, S$  — давление, плотность, удельный объем, энтропия;  $c$  — скорость звука.

Будем рассматривать решения системы (1.1), содержащие разрыв — ударную волну с уравнением  $x = \varphi(t, y)$ . На разрыве выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} u_1 \varphi_y + v_1 &= u_2 \varphi_y + v_2, \\ (V_{n1} - V_{n2})^2 + (\rho_1 - \rho_2)(V_1 - V_2) &= 0, \\ \varphi_t &= - \frac{\rho_1 V_{n1} - \rho_2 V_{n2}}{\rho_1 - \rho_2} \cdot \sqrt{1 + \varphi_y^2}, \\ V_n &= \frac{v \cdot \varphi_y - u}{\sqrt{1 + \varphi_y^2}}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Индексы 1 и 2 указывают на значения неизвестных функций с задней и передней стороны ударной волны. К соотношениям (1.2) надо добавить адиабату Гюгонио  $p = p(V)$ , определяемую термодинамическими характеристиками среды, в которой распространяется разрыв.

Произведем линеаризацию системы (1.1) и граничных условий (1.2). В качестве основного решения рассмотрим решение с разрывом на прямой  $x=0$ , причем при  $x < 0$  имеем  $u = \hat{u}_2 = \text{const}$ ,  $v = 0$ ,  $p = \hat{p}_2 = \text{const}$ ,  $C = \hat{S}_2 = \text{const}$ ,  $\rho = \hat{\rho}_2 = \text{const}$ ,  $c = \hat{c}_2 = \text{const}$ ,  $\hat{p}_2 = f(\hat{\rho}_2, \hat{S}_2)$ ,  $\hat{c}_2^2 = \frac{\partial f}{\partial \rho} \Big|_{\hat{\rho}_2, \hat{S}_2}$ , а при  $x > 0$   $-u = \hat{u}_1 = \text{const}$ ,  $v = 0$ ,  $p = \hat{p}_1 = \text{const}$ ,  $S = \hat{S}_1 = \text{const}$ ,  $\rho = \hat{\rho}_1 = \text{const}$ ,  $c = \hat{c}_1 = \text{const}$ ,  $\hat{p}_1 = f(\hat{\rho}_1, \hat{S}_1)$ ,  $\hat{c}_1^2 = \frac{\partial f}{\partial \rho} \Big|_{\hat{\rho}_1, \hat{S}_1}$ . Константы выберем положительными. Кроме того, они должны удовлетворять соотношениям (1.2). Предположим также выполнение следующих обязательных условий [6]:

$$\hat{S}_1 > \hat{S}_2, \hat{u}_2 > \hat{c}_2, \hat{u}_1 < \hat{c}_1. \quad (1.3)$$

После линеаризации получаем (линеаризацию проводим только при  $x > 0$  в силу неравенства  $\hat{u}_2 > \hat{c}_2$ )

$$A \cdot U_x + B \cdot U_x + C \cdot U_y = 0, \quad (1.4)$$

$$A = \begin{pmatrix} M_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} M_1^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & M_1^2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} U \\ W \\ \mathcal{P} \\ \mathcal{E} \end{pmatrix}.$$

Здесь  $U = \delta u$ ,  $W = \delta v$ ,  $\mathcal{P} = \delta p$ ,  $\mathcal{E} = \delta S$  — малые возмущения скорости, давления и энтропии;  $M_1 = \hat{u}_1 / \hat{c}_1$ .

Система (1.4) приведена к безразмерному виду. Длины, время, скорости, давление, энтропия отнесены к следующим характерным величинам:  $l$  — длина,  $l/\hat{u}_1$  — время,  $\hat{u}_1$  — скорость,  $\hat{\rho}_1 \hat{c}_1^2$ ,  $\hat{S}_1$ .

Граничные условия на фронте разрыва при  $x=0$  можно записать так

$$U + d\mathcal{P} = 0, \quad W = (\hat{u}_2/\hat{u}_1 - 1)F_y, \quad F_t = \mu \cdot \mathcal{P}, \quad \mathcal{E} + v \cdot \mathcal{P} = 0, \quad (1.5)$$

где

$$d = \frac{1 + \Delta}{2M_1^2}, \quad \mu = -\frac{1 - \Delta}{(\hat{u}_2/\hat{u}_1 - 1)} \cdot \frac{\hat{\rho}_1}{2\hat{\rho}_2 M_1^2}, \quad v = -\frac{\hat{\rho}_1 \hat{c}_1^2}{\hat{S}_1} \cdot \left(1 - \frac{\Delta}{M_1^2}\right) \frac{\partial f}{\partial S} \Big|_{\hat{\rho}_1, \hat{S}_1};$$

$\Delta = -j^2 \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_H$ ;  $j = \hat{\rho}_1 \hat{u}_1 = \hat{\rho}_2 \hat{u}_2$  — поток газа через разрыв;  $\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_H$  — производная удельного объема  $V$  по давлению  $p$ , вычисленная вдоль адиабаты Гюгонио  $p = p(V)$ ;  $F = \delta \phi$  — малое смещение фронта разрыва.

Перепишем граничные условия (1.5), исключая функцию  $x = F(t, y)$  перекрестным дифференцированием:

$$U + d \cdot \mathcal{P} = 0, \quad W_t = \lambda \mathcal{P}_y, \quad \mathcal{E} + v \cdot \mathcal{P} = 0, \quad (1.5')$$

где

$$\lambda = \mu \left( \frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} - 1 \right) = -\frac{1 - \Delta}{2M_1^2} \cdot \frac{\hat{\rho}_1}{\hat{\rho}_2}.$$

Для политропного газа с показателем адиабаты  $\gamma$  коэффициенты в граничных условиях (1.5) имеют следующий вид:

$$d = \frac{\hat{u}_2}{2(\gamma + 1)\hat{u}_1} \cdot [4\gamma - 2 + (5 - 3\gamma)\alpha + (\gamma - 1)\alpha^2],$$

$$\left[ \frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} \right]^{-1} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{\gamma + 1} \alpha,$$

$$\mu = -\left[ M_2^2 + \frac{\gamma - 1}{2} \right] \frac{\alpha \hat{u}_2}{2\hat{u}_1}, \quad v = \frac{(1 - \alpha)^2}{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \alpha\right)}, \quad M_2 = \frac{\hat{u}_2}{\hat{c}_2}, \quad \alpha = M_2^{-2}.$$

В работах [1—4] показано, что если  $j^2 \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_H < -1$  или  $j^2 \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_H > 1 + 2M_1$ , то смешанная задача (1.4), (1.5) поставлена некорректно (можно построить пример некорректности типа примера Адамара [7]). Если

$$-1 < j^2 \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_H < \frac{1 - M_1^2 - \hat{\rho}_1 M_1^2 / \hat{\rho}_2}{1 - M_1^2 + \hat{\rho}_1 M_1^2 / \hat{\rho}_2}, \quad (1.6)$$

то возмущения затухают со временем. Если

$$\frac{1 - M_1^2 - \hat{\rho}_1 M_1^2 / \hat{\rho}_2}{1 - M_1^2 + \hat{\rho}_1 M_1^2 / \hat{\rho}_2} < j^2 \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_H < 1 + 2M_1, \quad (1.7)$$

то возмущения по амплитуде не убывают и не возрастают со временем (в работе [1] область (1.7) называется областью спонтанного излучения звука разрывом, в которой возмущения имеют вид незатухающих бегущих волн). В этой работе будет строиться диссипативный интеграл энергии для области (1.6). Отметим, что для политропного газа  $j^2 \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_H = -\alpha$  удовлетворяет неравенствам (1.6).

2. Введем новые независимые переменные с помощью следующего преобразования [8]:

$$t' = M_1^2 x / \beta + \beta t, \quad x' = x / \beta, \quad y' = y, \quad \beta = \sqrt{1 - M_1^2}. \quad (2.1)$$

Из (2.1) следует

$$\frac{\partial}{\partial t} = \beta \frac{\partial}{\partial t'}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{M_1^2}{\beta} \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial x'}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial x'} = \beta \frac{\partial}{\partial x} - \frac{M_1^2}{\beta} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Тогда система (1.4) преобразуется к виду

$$DU_{t'} + BU_{x'} + \beta CU_{y'} = 0, \quad (2.3)$$

где

$$D = \beta^2 A + M_1^2 B = \begin{pmatrix} M_1^2 & 0 & M_1^2 & 0 \\ 0 & M_1^2 & 0 & 0 \\ M_1^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det D = M_1^4 \beta^2 > 0.$$

Система (2.3) симметрическая гиперболическая по Фридрихсу. Граничные условия (1.5') не изменятся, только  $\lambda$  надо заменить на  $\lambda/\beta$ .

Продифференцируем третье уравнение системы (2.3) по  $(\partial/\partial t' + \partial/\partial x')$ . Затем вычтем из него первое уравнение, продифференцированное по  $\left(\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{1}{M_1^2} \frac{\partial}{\partial x'}\right)$ , и второе уравнение, продифференцированное по  $\frac{\beta}{M_1^2} \frac{\partial}{\partial y'}$ . Окончательно получаем волновое уравнение для функции  $\mathcal{P}$

$$M_1^2 \mathcal{P}_{t't'} = \mathcal{P}_{x'x'} + \mathcal{P}_{y'y'}. \quad (2.4)$$



причем  $\det(E - M_1^2 Q) = M_1^3 \beta^2 > 0$ . Система (3.2) симметрическая гиперболическая по Фридрихсу.

Умножим систему (3.2) на  $2U_p$  слева и приведем полученное уравнение к дивергентному виду [7], затем проинтегрируем полученное уравнение по области  $D$ . Область  $D$  выбирается так. Строим «шапочку» Гамильтона — Якоби [7] такую, что если  $(\tau, \xi, \eta)$  — вектор внешней нормали к поверхности «шапочки» в точке  $(t, x, y)$ , то при  $x > 0$  матрица  $(\tau A_p + \xi B_p + \frac{\eta}{\beta} C_p)$  неотрицательно определена.  $D$  — это область, ограниченная плоскостями  $t=0, t=t_1$ , поверхностью шапочки при  $0 \leq t \leq t_1$ , плоскостью  $x=0$ . После интегрирования получаем

$$\begin{aligned} & \int_{t=t_1} \int (A_p U_p, U_p) dx dy - \int_{t=0} \int (A_p U_p, U_p) dx dy - \int_{x=0} \int (B_p U_p, U_p) dt dy + \\ & + \int_{\Sigma} \left[ \left( \tau A_p + \xi B_p + \frac{\eta}{\beta} C_p \right) U_p, U_p \right] d\Sigma + \\ & + \int_D \left( \frac{1}{\beta} [H + H'] U_p, U_p \right) dx dy dt = 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где  $\Sigma$  — боковая поверхность «шапочки»,  $H'$  — транспонированная матрица  $H$ . Отбрасывая положительный интеграл по поверхности  $\Sigma$  и принимая во внимание, что  $-\left(\frac{1}{\beta} [H + H'] U_p, U_p\right) \leq M (A_p U_p, U_p)$ , где  $M$  некоторое положительное число, из (3.3) получаем

$$\begin{aligned} & \int_{t=t_1} \int (A_p U_p, U_p) dx dy - \int_{t=0} \int (A_p U_p, U_p) dx dy - \\ & - \int_{x=0} \int (B_p U_p, U_p) dt dy \leq M \int_0^{t_1} \left[ \int_{t=\text{const}} \int (A_p U_p, U_p) dx dy \right] dt. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для получения энергетической оценки осталось показать, что в неравенстве (3.4) можно отбросить интеграл по границе  $x=0$ . С этой целью рассмотрим квадратичную форму, которая стоит в интеграле по  $x=0$ .

$$\begin{aligned} & -(B_p U_p, U_p)|_{x=0} = -M_1^2 U^2 - 2U \cdot \mathcal{P} - \mathcal{P}^2 - \mathcal{Q}^2 - M_1^2 W^2 + \\ & + N_0 W^2 + N_1 \mathcal{P}^2 - M_1^2 U_t^2 - 2U_t \cdot \mathcal{P}_t - \mathcal{P}_t^2 - \mathcal{Q}_t^2 - M_1^2 W_t^2 + \\ & + N_2 M_1^2 \mathcal{P}_t^2 - M_1^2 U_{x'}^2 - 2U_{x'} \cdot \mathcal{P}_{x'} - \mathcal{P}_{x'}^2 - \mathcal{Q}_{x'}^2 - M_1^2 W_{x'}^2 + N_3 \mathcal{P}_{x'}^2 - \\ & - M_1^2 U_{y'}^2 - 2U_{y'} \cdot \mathcal{P}_{y'} - \mathcal{P}_{y'}^2 - \mathcal{Q}_{y'}^2 - M_1^2 W_{y'}^2 + N_4 \mathcal{P}_{y'}^2 + \\ & + 2M_1 \mathcal{P}_{t x'} (\sigma_1 \mathcal{P}_{t t'} + \sigma_2 \mathcal{P}_{x' x'}). \end{aligned}$$

В силу граничных условий (1.5')  $U, \mathcal{Q}$  выражаются при  $x=0$  через  $\mathcal{P}, U_t, \mathcal{P}_t$ , через  $\mathcal{P}_{t'}$ ;  $U_{y'}, \mathcal{Q}_{y'}$  через  $\mathcal{P}_{y'}$ ;  $W_{t'}, W_{x'}$  через  $\mathcal{P}_{y'}$ . С помощью граничных условий (1.5') и системы уравнений (2.3)  $U_{x'}, W_{y'}$  выражаются при  $x=0$  через  $\mathcal{P}_{t'}$  и  $\mathcal{P}_{x'}$ ;  $\mathcal{Q}_{x'}$  через  $\mathcal{P}_{t'}$ . Выбирая  $N_0, N_1, N_2, N_3, N_4$  достаточно большими, можно сделать квадратичную форму без последнего члена больше 0. В силу граничного условия (2.7) последний член записывается в виде

$$2M_1 (\sigma_1 \mathcal{P}_{t t'} + \sigma_2 \mathcal{P}_{x' x'}) \mathcal{P}_{t x'} = \frac{2M_1^3}{\beta} (m \mathcal{P}_{t t'} + n \mathcal{P}_{x' x'}) (\sigma_1 \mathcal{P}_{t t'} + \sigma_2 \mathcal{P}_{x' x'}).$$

Пусть  $m > 0, n > 0$ . Полагая  $\sigma_1 = \frac{m \sigma_2}{n}$ , получаем

$$2M_1 \mathcal{P}_{t x'} (\sigma_1 \mathcal{P}_{t t'} + \sigma_2 \mathcal{P}_{x' x'}) = \frac{2M_1^3 \sigma_2}{\beta n} (m \mathcal{P}_{t t'} + n \mathcal{P}_{x' x'})^2 > 0.$$

Итак, если  $m > 0, n > 0$ , то  $-(B_p U_p, U_p) > 0$ . Неравенства  $m > 0, n > 0$  приводят нас к неравенствам (1.6). Для идеального газа имеем

$$\begin{aligned} n &= \alpha \left[ M_2^2 + \frac{\gamma-1}{2} \right] (1-\alpha) \hat{u}_2^2 / \beta (\gamma+1) \hat{u}_1^2 > 0, \\ m &= \frac{\sqrt{2\gamma(\gamma+1)(1-\alpha)}}{\gamma(\gamma-1) \left[ 1 - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \alpha \right]^{1/2} \left( 1 + \frac{2\alpha}{\gamma-1} \right)} \times \\ &\times \left( \alpha/2 + (\gamma-1)(1-\alpha) + \frac{\gamma-1}{4} \alpha^2 \right) > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, отбрасывая интеграл по границе  $x=0$  в неравенстве (3.4), окончательно находим

$$I(t) \leq I(0) \exp(M \cdot t), \quad 0 \leq t \leq t_1. \quad (3.5)$$

где  $I(t) = \int_{t=\text{const}} \int (A_p U_p, U_p) dx dy$ .

Следовательно, если адиабата Гюгонио  $p = p(V)$  удовлетворяет неравенствам (1.6), то смешанная задача для системы (1.4) с граничными условиями (1.5) (или (1.5')) на разрыве поставлена корректно. Неравенство (3.5) дает оценку  $L_2$  — нормы неизвестных функций, их всех первых производных  $t > 0$ , через  $L_2$  — норму начальных данных, их первых производных. Кроме того, неравенство (3.5) дает оценку  $L_2$  — нормы вторых производных от  $\mathcal{P}$  (всех, поскольку  $\mathcal{P}_{y'}$  оценивается с помощью уравнения (2.4)).

4. Кратко рассмотрим построение области  $D$ . С этой целью вначале строим конус характеристических нормалей [7]

$$\det \left( \tau A_p + \xi B_p + \frac{\eta}{\beta} C_p \right) = 0. \quad (4.1)$$

Уравнение (4.1) определяет плоскости  $\tau + \xi = 0, \tau - \frac{1-M_1^2}{1+M_1^2} \xi = 0, \tau = 0$ ,

и конус  $M_1^2 (\tau + \xi)^2 = \xi^2 + \eta^2$ .

Следовательно вектора  $(\tau, \xi, \eta)$ , отвечающие положительно определенным формам  $\tau (A_p U_p, U_p) + \xi (B_p U_p, U_p) + \frac{\eta}{\beta} (C_p U_p, U_p)$ , лежат в области

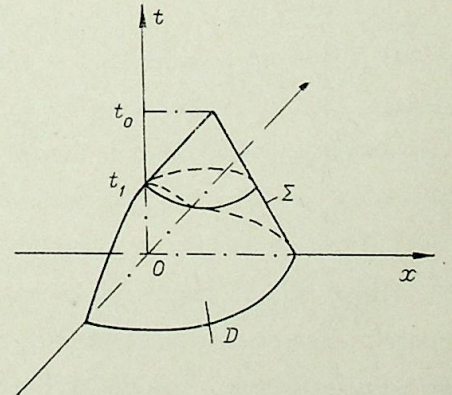
$$\tau + \xi > \frac{1}{M_1} \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad (4.2)$$

причем вектора  $\tau = 1, \xi = 0, \eta = 0$  лежат в этой же области. Область  $D$  строим так. Находим функцию  $\psi = \psi(x, y, t)$  такую, чтобы  $\psi(x, y, 0) = \psi_0(x, y)$  и чтобы она удовлетворяла уравнению Гамильтона — Якоби [7]

$$\psi_t + \psi_x = \frac{1}{M_1} \sqrt{\psi_x^2 + \psi_y^2}. \quad (4.3)$$

Пусть  $\psi_0(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - r, x \geq 0$ , т. е. начальные данные для системы (1.4) заданы внутри полукруга радиуса  $r$  с центром в начале координат. Решение (4.3) в этом случае дается формулой

$$\psi(x, y, t) = \sqrt{(x-t)^2 + y^2} + \frac{1}{M_1} t - r. \quad (4.4)$$





Е. Г. ЗАУЛИЧНЫЙ,  
А. С. ЛЕБЕДЕВ, Р. В. РАФИКОВ

РАСЧЕТ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ  
В ДЛИННОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ  
НЕСТАЦИОНАРНО ПРОГРЕВАЕМОМ КАНАЛЕ  
ПЕРЕД СОПЛОМ ЛАВАЛЯ

Рассматривается метод расчета газодинамических параметров при течении продуктов горения твердого горючего в многослойном нестационарно прогреваемом цилиндрическом длинном канале-газоводе. К каналу-газоводе пристыковано сопло Лавалья. Продукты горения твердого горючего могут входить в канал из предварительной камеры (рис. 1, а) или обтекать канал при горении торцевой стенки, перемещающейся влево (рис. 1, б) со скоростью горения горючего, зависящей от давления. Общим для обеих схем течения является влияние на конечные параметры (давление в форкамере, расход) особенностей течения в канале-газоводе, которые сопровождаются большими гидравлическими и тепловыми потерями, изменяющимися во времени.

В [1, 2] предложен метод расчета трения и теплообмена в круглой цилиндрической трубе при заданных и постоянных давлениях на входе в канал, расходе, параметре неизотермичности  $\Psi = T_{ст}/T_0$ . Задача ре-

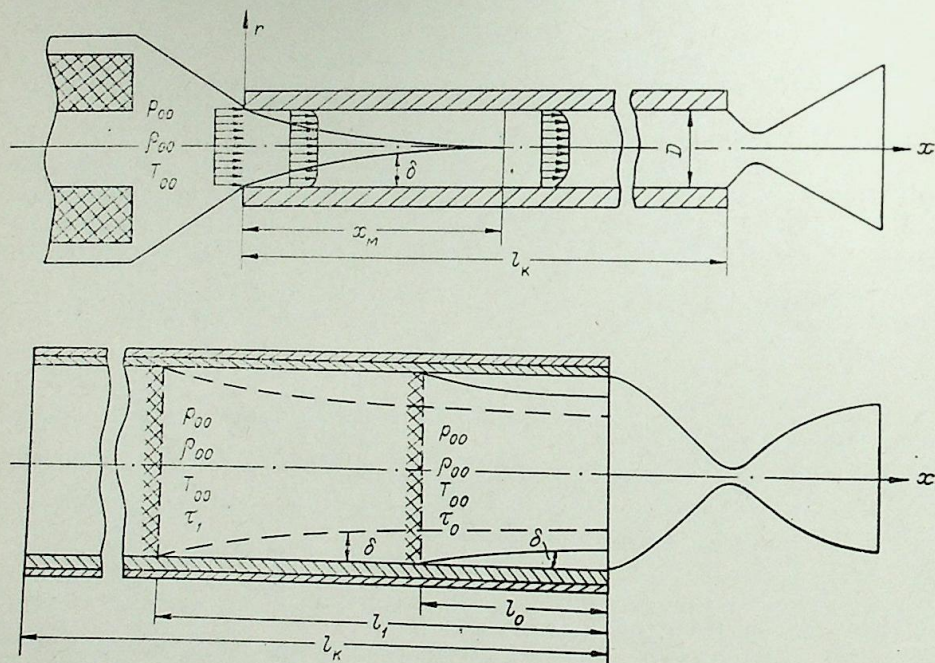


Рис. 1.

шается для турбулентного пограничного слоя методом интегральных соотношений. На правом открытом конце трубы для системы уравнений пограничного слоя условия не ставятся, параметры рассчитываются в результате решения задачи. Для расчета же течения в каналах, показанных на рис. 1, необходимо решить краевую задачу, так как условия на входе в трубу (в форкамере или у горящей поверхности торца) являются искомыми, а параметры течения на входе в сопло зависят не только от условий течения в трубе, но и от особенностей истечения через сопло Лавалья. С целью упрощения алгоритма расчета предварительно проведены численные расчеты до- и трансзвукового осесимметричного течения газа в сопле Лавалья для различных профилей скорости на входе в сопло. Показано, что для степенных профилей вида  $W/W_0 = (1 - r/r_0)^{1/n}$ , где  $W_0$  — скорость на оси,  $r_0$  — радиус трубы,  $s$  — константа (целое число  $n = 2, 4, 5, 7, 10$ ), при  $n \geq 5$  коэффициент расхода и другие характеристики течения в горле сопла при фиксированной геометрии последнего не зависят от формы профиля скорости на его входе. Это позволило свести задачу к расчету течения в трубе при заданном значении коэффициента расхода через сопло. Используется метод расчета турбулентного пограничного слоя в трубе совместно с решением уравнения нестационарной теплопроводности в ее многослойную стенку [3].

При расчете характеристик турбулентного пограничного слоя используется метод интегральных соотношений с замыканием уравнений соотношениями для относительных законов трения и теплообмена, предложенными Кутателадзе С. С. и Леонтьевым А. И. [1].

Интегральные уравнения импульсов, энергии и неразрывности, записанные для непроницаемого канала, приводятся к виду [1, 2]

$$\frac{d Re^{**}}{dx^0} + \frac{Re^{**}}{W^0} (1 + H) \frac{dW^0}{dx^0} = W_0^0 Re_L \frac{c_f}{2}, \quad (1)$$

$$\frac{d Re_T^{**}}{dx^0} + \frac{Re_T^{**}}{\Delta h} \cdot \frac{d(\Delta h)}{dx^0} = W_0^0 Re_L St, \quad (2)$$

$$Re^{**} = \frac{Re_L}{4H} (W_0^0 - 1). \quad (3)$$

Здесь  $Re_L = \rho_{00} W_{01} D / \mu_{00}$ ,  $Re^{**} = \rho_{00} W_{01} \delta^{**} / \mu_{00}$ ,  $Re_T^{**} = \rho_{00} W_{01} \delta_T^{**} / \mu_{00}$  — характерные числа Рейнольдса, записанные по диаметру канала  $D$ , толщинам потери импульса и энергии  $\delta^{**}$  и  $\delta_T^{**}$ , скорости на входе в канал  $W_{01}$ . Коэффициенты трения  $c_f/2$  и теплообмена  $St$  приведены в [1—3].  $W_0^0 = W_0/W_{01}$ ,  $x^0 = x/D$  — безразмерные величины,  $H = \delta^*/\delta^{**}$  — формпараметр пограничного слоя.

Нестационарное уравнение теплопроводности без учета перетечек тепла вдоль стенки канала

$$c\gamma \frac{dT}{dt} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left( r\lambda \frac{dT}{dr} \right) \quad (4)$$

с соответствующими начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} r = 0, \quad T(r, x) &= T_{нар}(r, x); \\ r = r_0, \quad -\lambda dT/dr &= \alpha(T_0^* - T_{ст}); \\ r = r_{нар}, \quad dT/dr &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

решается совместно с уравнениями (1) — (3).

В уравнениях (4), (5)  $r = D/2$ ,  $r_{нар}$  — наружный радиус канала,  $T_0^*$  — температура восстановления потока,  $c, \gamma, \lambda$  — теплоемкость, плот-

ность и теплопроводность материала стенки канала в общем случае зависят от температуры,  $\alpha$  — коэффициент конвективного теплообмена.

Явная конечно-разностная схема уравнения (4) приведена в [3]. Для многослойной стенки между слоями задается условие идеального контакта. Если внутренний слой трубы изготовлен из аблирующего теплозащитного материала, то интегральные уравнения (1) — (3) должны учитывать поперечный поток вещества, вдуваемого при абляции стенки канала в пограничный слой [1, 3, 5].

Чтобы определить величину перемещения внутренней границы канала за счет абляции, необходимо заложить определенную модель уноса материала. Для углеродных или термически разрушающихся композиционных теплозащитных материалов на органической основе удовлетворительно работает модель уноса за счет химической эрозии. В этом случае дополнительно к системе уравнений (1) — (4) добавляется интегральное соотношение сохранения количества вещества  $b_1$  [2].

К граничным условиям (5) добавляется условие баланса энергии на уносимой и термически разлагающейся поверхности

$$h_{ст} = h_{ст}^* - b_1 h_{разл}^0 - b_c \int_{T_{нр}}^{T_{ст}} c_{рс} dT - b_c h_{хим}^0 - b_r \int_{T_{нр}}^{T_{ст}} c_{рr} dT - b_1 \int_{T_{нм}}^{T_{нр}} c_{рм} dT + b_1 \int_0^{T_{нм}} c_{рм} dT. \quad (6)$$

Граничное условие (6) определяет температуру (энтальпию  $h_{ст}$ ) стенки, при которой начинается химическая эрозия — унос углерода (графитового материала) или коксового остатка композиционного теплозащитного покрытия. Общий массовый поперечный поток вещества со стенки ( $b_1$ ) равен сумме массовых потоков газов от термического разложения материала стенки ( $b_r$ ) и от уноса коксового остатка или графита ( $b_c$ ). Принимается допущение, что температура уноса (6) определяет величину, при которой реализуется диффузионный режим химических реакций, когда скорость уноса определяется скоростью подвода окислителя к стенке и отвода продуктов реакции от нее [6].

Энтальпия стенки  $h_{ст}$ , при которой реализуется диффузионный режим реакций, зависит от параметров внешнего обтекания стенки (энтальпии восстановления  $h_{ст}^*$ ), теплот термического разложения композиционного материала  $h_{разл}^0$  и химических реакций на поверхности  $h_{хим}^0$  [4], теплофизических свойств кокса (графита)  $c_{рс}$ , выделившихся газов  $c_{рr}$  и исходного материала  $c_{рм}$ .

На внешней стенке трубы закон теплообмена может быть произвольным. Для иллюстрации метода расчета в данной работе ограничимся случаем, характеризующимся условиями (5).

Давление в камере перед соплом  $p_{00}$  определяется из балансного уравнения газоприхода от горения горючего и истечения через сопло с учетом потерь давления и тепла при течении в канале [7]

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{V p_{00}}{RT_{00}} \right) = S_T u \gamma_T - \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \sqrt{\frac{2gk}{(k+1)RT_{00}}} \frac{\eta_c \eta_p}{\sqrt{\chi}} p_{00} F_{кр}. \quad (9)$$

Здесь  $V$ ,  $R$ ,  $T_{00}$  — свободный объем форкамеры, газовая постоянная смеси газов от горения топлива, температура горения,  $S_T$ ,  $\gamma_T$  — площадь горения, изменяющаяся во времени, плотность горючего;  $u = u_1 (p_{\infty} / p_{ам})^{\nu}$  — скорость его горения;  $\eta_c$ ,  $\eta_p$ ,  $\chi$  — коэффициенты расхода сопла,

потерь полного давления и тепловых потерь в канале-газоводе.

$$\chi = 1 - \frac{2\pi r l_{тр} \bar{q}_{ст}}{c_p T_{00} G}; \quad \eta_p = \frac{p_{0вх}}{p_{00}}. \quad (10)$$

Здесь  $G$  — секундный расход газа через сечение трубы, определяемый с учетом потерь полного давления  $\eta_p$  и коэффициента расхода сопла  $\eta_c$ . Последний рассчитывается решением уравнения (1), которое позволяет определить толщину вытеснения турбулентного пограничного слоя (ТПС)  $\delta^*$  перед критическим сечением сопла, уменьшающую его проходное сечение,  $\bar{q}_{ст}$  — средний по поверхности трубы удельный тепловой поток,  $\bar{q}_{ст} = \frac{1}{x} \int_0^x q_{ст} dx$ , определяемый из совместного решения уравнений ТПС (1) — (3) и нестационарной теплопроводности в стенку (4).  $p_{0вх}$  — полное давление на правом конце канала, определяемое потерями полного давления за счет трения потока о стенку:

$$dp_x/dx = -\rho W_0^2 c_f / r_0. \quad (11)$$

Здесь  $c_f$  — коэффициент трения, определяемый из решения уравнений ТПС (1) — (3) [1—3],  $W_0$  — скорость на оси трубы,  $p_x$  — статическое давление потока в сечении  $x$ , определяемое из соотношения полного давления  $p_{0x} = p_x + \rho \bar{W}^2 / 2g$ ,  $\bar{W}$  — средняя по сечению трубы скорость.

Предполагается, что параметры течения в канале (см. рис. 1, б) меняются не только за счет нестационарного прогресса стенки, но и за счет перемещения торца влево вследствие его горения, т. е. за счет увеличения длины пограничного слоя.

Расчет параметров течения, трения и теплообмена основан на методе последовательных приближений. Сначала в предположении отсутствия гидравлических и тепловых потерь по длине канала определяются газодинамические параметры в форкамере  $p_{00}$  и на входе в трубу. Затем, решая уравнения пограничного слоя для трубы (1) — (3) с урав-

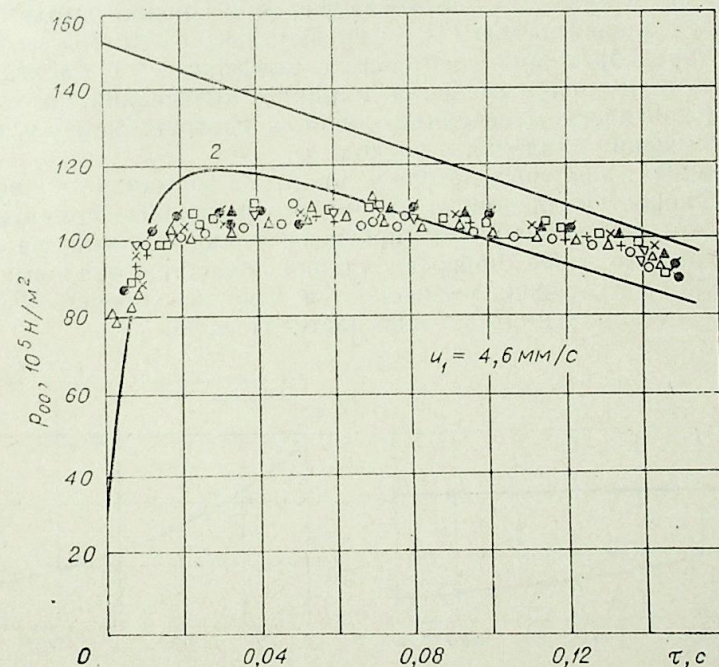


Рис. 2.

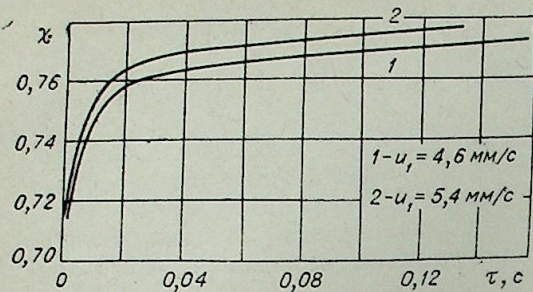


Рис. 3.

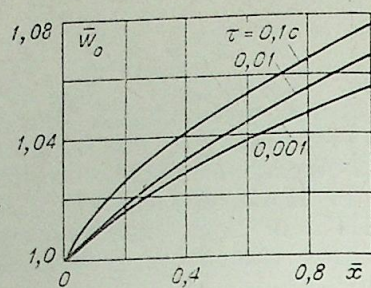


Рис. 4.

нением нестационарной теплопроводности (4) для начального ( $\tau = 0$ ) распределения температур стенки  $T_{ст} = f(x)$ , определяем параметры трения и теплообмена, которые дают возможность рассчитать потери. Последние дают возможность уточнить газодинамические параметры в форкамере сопла, которые позволяют рассчитать характеристики пограничного слоя в последующем приближении в данный момент времени. Достаточно двух-трех приближений, чтобы исключить невязку параметров на правом конце трубы и в форкамере.

Затем такая же последовательность операций проводится для следующего момента времени  $\Delta\tau$ , в течение которого параметры пограничного слоя считаются постоянными (квазистационарное приближение).

Алгоритм метода расчета реализован на ЭВМ БЭСМ-6 в виде алгол-программы.

На рис. 2 приведены результаты сопоставления предлагаемого метода расчета давления в форкамере  $p_{00}$  (кривая 2) со специально проведенными экспериментами по определению давления (точки) в канале (см. рис. 1, а). Для сравнения методов расчета здесь же приведена кривая 1, полученная из балансных расчетов газоприхода из канала и расхода через сопло без учета потерь  $\eta_p$  и  $\chi$ . Видно, что экспериментальные точки значительно лучше согласуются с предлагаемым методом расчета, чем с зависимостью (1). Некоторое несоответствие может быть объяснено пренебрежением изменения коэффициента расхода сопла  $\eta_c$  во времени за счет изменения толщины вытеснения пограничного слоя перед критическим сечением сопла, а соответственно и дополнительного изменения давления и расхода  $G$ .

Коэффициент тепловых потерь  $\chi$  для этого же канала приведен для различных скоростей горения  $u_1$  на рис. 3 в различные моменты времени. Видно, что нестационарность прогрева стенки сказывается на величинах потерь. По мере прогрева стенки величина тепловых потерь  $(1-\chi)$  и темп их изменения уменьшаются. Средняя скорость  $\bar{W}_0$  по длине канала  $x$  и во времени монотонно растет (рис. 4).

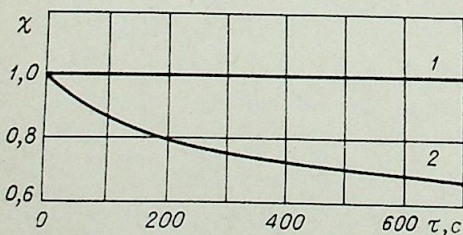


Рис. 5.

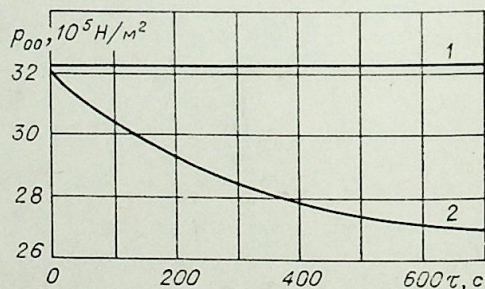


Рис. 6.

На рис. 5 и 6 приведены результаты расчета по предлагаемому методу (кривые 2) величин тепловых потерь и давления в форкамере  $p_{00}$  для схемы течения (см. рис. 1, б). Кривые 1 соответствуют случаю отсутствия тепловых потерь ( $\chi = 1$ ). Наглядно видно, что с увеличением длины канала (перемещение фронта горения влево), величина тепловых потерь во времени растет, приводя тем самым к падению полного давления в форкамере.

Разработанный метод расчета дает возможность уточнить расчет газодинамических параметров в длинных нестационарно прогреваемых каналах, предшествующих соплу Лавала. Метод расчета находится в удовлетворительном соответствии с экспериментом.

Новосибирский  
государственный университет

Поступила в редакцию  
26/IX 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И. Теплообмен и трение в турбулентном пограничном слое. М., Энергия, 1972. 342 с.
2. Леонтьев А. И., Фафури А. В., Никитин П. В. Турбулентный пограничный слой в начальном участке трубы в условиях неизотермичности и вдува.—ТВТ, 1969, 7, № 2, с. 276—283.
3. Зауличный Е. Г. Трение, теплообмен и унос материала в турбулентном пограничном слое сжимаемого высокоэнтальпийного газа в условиях существенной неизотермичности, вдува и отрицательного градиента давления.—В кн.: Теплообмен, т. 1. Минск, 1972, с. 41—46.
4. Зауличный Е. Г., Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И. Турбулентный пограничный слой при наличии реакций на поверхности.—ПМТФ, 1967, № 4, с. 92—96.
5. Глазунов А. А., Зауличный Е. Г., Иванов В. Я., Рычков А. Д. Взаимодействие пограничного слоя на выгораемой поверхности с неравновесным двухфазным потоком в осесимметричном сопле Лавала.—ПМТФ, 1977, № 3, с. 53—62.
6. Кантарович Б. В. Основы теории горения и газификации твердого топлива.—М., Изд-во АН СССР, 1958. 598 с.
7. Райзберг Б. А., Ерохин Б. Т., Самсонов К. П. Основы теории рабочих процессов в ракетных системах на твердом топливе. М., Машиностроение, 1972. 376 с.

УДК 532.526

М. А. ГОЛЬДФЕЛЬД, В. В. ЗАТОЛОКА

ОБ УЛУЧШЕНИИ ОТРЫВНЫХ СВОЙСТВ  
ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ  
В РЕЗУЛЬТАТЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ СКАЧКА УПЛОТНЕНИЯ

В ряде случаев сверхзвукового обтекания тел, например в воздухозаборниках, пограничный слой испытывает несколько воздействий скачков уплотнения, следующих друг за другом на некоторых расстояниях, как показано на схеме рис. 1, а (вместо любого из этих скачков могут быть участки плавного повышения давления). Поэтому возникает вопрос о том, как влияет предыдущее воздействие скачка на способность пограничного слоя противостоять отрыву при повторном воздействии скачкообразного (скачок уплотнения) или плавного повышения давления. Изучение однократного взаимодействия турбулентного пограничного слоя со скачком уплотнения [1, 2] показывает, что наполненность профиля скоростей пограничного слоя непосредственно после взаимодействия уменьшается. Известно, что уменьшение наполненности приводит к ухудшению способности пограничного слоя противостоять отрыву [3].

Казалось бы, отсюда следует, что предыдущее воздействие скачка на пограничный слой должно способствовать ухудшению его способности противостоять отрыву при последующем воздействии скачка или положительного градиента давления. Однако исследование профилей скорости пограничного слоя на различных расстояниях за скачком уплотнения [2, 4] показывает, что по мере удаления от скачка профили скоростей испытывают существенные изменения.

Рассмотрим экспериментальные данные о характере этих изменений и на этой основе выясним изменение отрывных свойств пограничного слоя. Для этого воспользуемся данными, полученными в процессе выполнения работ [4, 5] по исследованию протекания турбулентного пограничного слоя через скачок, индуцированный углом сжатия.

На рис. 1, б показана схема модели. Описанные в [4, 5] опыты по первому взаимодействию скачка с пограничным слоем проведены на варианте модели без второго клина, а описанные ниже опыты с повторным взаимодействием — на варианте со вторым клином. Режимы опытов по первому взаимодействию приведены в таблице, где  $M_0$  и  $M_0$  (см. рис. 1) — числа Маха соответственно перед первым взаимодействием скачка с пограничным слоем и на клине после первого взаимодействия, т. е. перед вторым взаимодействием, а  $\theta_1$  — угол первого клина.

В работах [4, 5] на основании обработки полученных в опытах профилей скорости пограничного слоя выявлено, что на расстоянии около пяти толщин пограничного слоя после воздействия скачка (расстояние отсчитывается от передней кромки первого клина) профиль такой, что можно выделить две его части — пристенную, занимающую 0,25—0,4 толщины слоя, или 2—3 мм, и внешнюю, в каждой из которых профиль скоростей с приемлемой точностью описывается степенным зако-

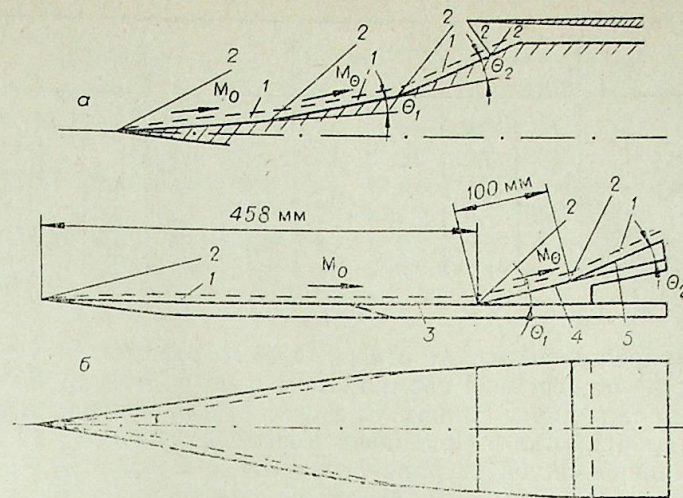
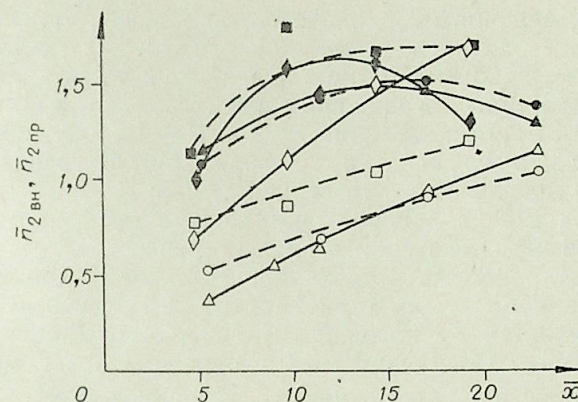


Рис. 1. Схема течения в воздухозаборнике (а); схема модели для опытов (б).

1 — пограничный слой, 2 — скачки уплотнения, 3 — начальная поверхность модели, 4 — первый клин, 5 — второй клин.



	Внешняя часть слоя $\bar{n}_{2вн}$		Пристенная часть слоя, $\bar{n}_{2пр}$					
$\theta_1$	$11^\circ$	$18^\circ$	$11^\circ$	$18^\circ$				
$M_0$	1,92	3,75	1,92	3,75	1,92	3,75	1,92	3,75
	—○—	—□—	—△—	—◇—	—●—	—■—	—▲—	—◆—

Рис. 2. Параметры  $\bar{n}_{2вн}$  и  $\bar{n}_{2пр}$  внешней и пристенной частей профиля скоростей пограничного слоя после воздействия скачка.

ном  $U/U_\delta = a(y/\delta)^{1/n}$ , но в которых величины  $n$  — разные. Здесь  $U$  — скорость течения в пограничном слое,  $U_\delta$  — скорость вне пограничного слоя,  $y$  — расстояние от стенки,  $\delta$  — толщина пограничного слоя,  $a = 1$  для внешней части слоя, а для пристенной части слоя величина  $a$  определяется из условия равенства величин  $U$  на границе между частями. Однако далее пограничный слой изменяется так, что на расстоянии около 20  $\delta$  за местом воздействия скачка его профиль скоростей уже можно описать степенным законом со значением  $n$ , постоянным для всей толщины слоя.

По результатам обработки этих профилей скорости определим зависимость параметров  $n = n_2$  после первого воздействия скачка на пограничный слой, отнесенных к параметрам  $n = n_1$  перед первым воз-

$M_0$	1,95		2,85		3,75		5,45	
$\theta_1$	11°	18°	11°	18°	11°	18°	11°	18°
$M_0$	1,5	1,2	2,25	2,0	3,0	2,6	4,2	3,4
$\delta_1$ , мм	4,5	4,75	5,1	5,15	5,05	4,95	8,2	8,0
$n_1$	7,3	7,0	7,25	7,2	7,4	7,25	9,6	9,6
$n_2$	7,9	8,85	9,3	10,3	10,4	11,5	10,8	14,05
$n_{2пл}$	7,4	7,7	7,5	7,45	7,7	8	6,5	6,6

действием (перед клином), от относительного расстояния  $\bar{x} = x/\delta_1$ , где  $x$  — расстояние от передней кромки клина вниз по потоку,  $\delta_1$  — толщина пограничного слоя перед клином. Значения  $\delta_1$  и  $n_1$  приведены в таблице, а результаты обработки в виде зависимостей  $\bar{n}_2 = n_2/n_1 = f(\bar{x})$  для внешней и пристенной частей пограничного слоя  $\bar{n}_2 = \bar{n}_{2вн}$  и  $\bar{n}_2 = \bar{n}_{2пр}$  приведены на рис. 2. Видно, что параметр  $n_{2вн}$  довольно быстро возрастает по мере удаления от передней кромки клина: при  $\bar{x} = 15-20$  величина  $n_{2вн}$  увеличивается в 1,5—3 раза по сравнению со значениями при  $\bar{x} = 5$ . Для пристенной части пограничного слоя параметр  $n_{2пр}$  возрастает медленнее: для  $\bar{x} = 15-20$  — на 20—50%. Поскольку вблизи скачка, при  $\bar{x} = 5$ , величины  $n_{2вн}$  значительно меньше, чем  $n_{2пр}$ , а темп их возрастания по  $\bar{x}$  различен, то величины  $n_{2вн}$  и  $n_{2пр}$  с ростом  $\bar{x}$  сближаются и при  $\bar{x} = 15-20$  имеют примерно одну и ту же величину  $n_2$ , общую для всей толщины пограничного слоя. Таблица, в которой приведены значения абсолютных величин  $n_2$  для  $\bar{x} = 15-20$ , общие для всей толщины пограничного слоя, и графики (рис. 3) зависимостей  $\bar{n}_2 = n_2/n_1 = f(M_0)$  показывают, что величины  $n_2$  и  $\bar{n}_2$  увеличиваются с ростом числа Маха и угла поворота потока  $\theta_1$  и превышают значения  $n_1$  и  $\bar{n}_1 = 1$  перед взаимодействием в 1,1 ÷ 1,6 раза.

Пограничный слой не только вблизи скачка (при  $x \approx 5\delta_1$ ), но и на большом удалении за ним (при  $x = (15-20)\delta_1$ ) своими показателями  $n_2$  сильно отличается от пограничного слоя соответствующей безградиентной пластины. Последний можно определить по методу работы [6]: зная величины единичного числа Рейнольдса  $Re_0 = \rho_0 U_0 / \mu_0$  [1/м] и толщины потери импульса  $\delta^{**}$  сразу за скачком (при  $\bar{x} \approx 5$ ) из опытов [4, 5], можно найти так называемую эквивалентную длину безградиентной пластины, а прибавив к ней расстояние по  $x$  между точками, соответствующими величинам  $x \approx 5\delta_1$  и  $\bar{x} = 20\delta_1$ , получить эквивалентную длину безградиентной пластины  $l_0$  для  $x \approx 20\delta_1$ . Зная  $l_0$ ,  $Re_0$  и  $M_0$ , по формуле, полученной в [6], определяем величины  $n_{2пл}$  для безградиентной плоской пластины, которые приведены в таблице. Их сравнение с величинами  $n_2$  показывает, что пограничный слой за скачком на довольно большом удалении от него ( $x \approx (15-20)\delta_1$ ) оказывается значительно более наполненным, чем пограничный слой соответствующей безградиентной пластины, так как величины  $n_2$  в 1,1—2 раза больше, чем  $n_{2пл}$ .

Выясним, как изменяется способность пограничного слоя противостоять отрыву при последующем воздействии скачка уплотнения в связи с рассмотренными увеличением его наполненности (увеличением  $n_2$ ) в результате предыдущего воздействия скачка. Воспользуемся для этого соотношением, полученным в [3]:

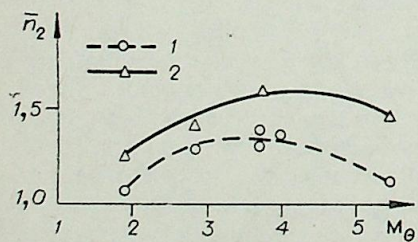


Рис. 3. Общий для всей толщины пограничного слоя параметр профиля скоростей  $\bar{n}_2$  на расстоянии за скачком  $\bar{x} = 20$ .  $\theta_1 = 11^\circ$  (1);  $18^\circ$  (2).

$$\bar{P}_{кр} = \frac{v \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{k}{k-1}}}{1 - \frac{k-1}{2} M^2 (1 - 0,024^2/n)^{\frac{k}{k-1}}}, \quad (1)$$

где:  $\bar{P}_{кр}$  — отношение давлений на скачке уплотнения, приводящее к отрыву турбулентного пограничного слоя;  $v$  — коэффициент восстановления полного давления в отрывном скачке;  $M$  — число Маха над пограничным слоем перед отрывом;  $k$  — показатель адиабаты.

На рис. 4 приведены вычисленные по формуле (1) величины  $\bar{P}_{кр}$  без предварительного воздействия скачка (кривая  $\theta_1 = 0$ ) и для двух случаев его наличия ( $\theta_1 = 11^\circ$  и  $\theta_1 = 18^\circ$ ). Необходимые исходные данные взяты из таблицы: для  $\theta_1 = 0$  — величины  $M_0$  и  $n_1$ , а для  $\theta_1 = 11^\circ$  и  $18^\circ$  —  $M_0$  и  $n_2$ . Сравнение кривых  $\theta_1 = 11^\circ$  и  $18^\circ$  с кривой  $\theta_1 = 0$  показывает, что наличие предварительного воздействия должно не ослабить, а усилить, и притом существенно, способность пограничного слоя противостоять отрыву в данном диапазоне  $M$  и  $\theta_1$  (увеличить значение  $\bar{P}_{кр}$  в 1,2—1,8 раза). Согласно этим расчетным оценкам, основанным на экспериментальных значениях  $n$ , положительное влияние предварительного воздействия скачка уплотнения усиливается с ростом его интенсивности (увеличением  $\theta_1$ ) и с увеличением числа Маха.

Каждому значению  $\bar{P}$  при данном значении  $M$ , как известно, соответствует определенное значение угла поворота потока  $\theta$  в плоском косом скачке. Величины  $\theta$ , соответствующие значениям  $\bar{P}_{кр}$ , являются величинами углов  $\theta_{отр}$ , под которыми пограничный слой сверхзвукового потока отделяется от поверхности при отрыве. Графики величин  $\theta_{отр}$ , соответствующие графикам  $\bar{P}_{кр}$  рис. 4, приведены на рис. 5.

Можно сказать, что если угол клина на поверхности тела, подобно-го модели, представленной на рис. 1, б, будет меньше  $\theta_{отр}$ , то отрыва перед кромкой клина не будет, а если он будет больше  $\theta_{отр}$ , то перед кромкой клина возможно возникновение отрыва, хотя бы только зарождающегося. Таким образом, если величина  $\bar{P}_{кр}$  характеризует скачок давления, который может выдержать без отрыва сверхзвуковой поток с пограничным слоем, то величина  $\theta_{отр}$  характеризует влияние отрыва на геометрию сверхзвукового течения с пограничным слоем.

Вызванное предварительным воздействием скачка давления улучшение способности пограничного слоя противостоять отрыву проверено путем испытаний модели, показанной на рис. 1, б. В качестве эффективного средства регистрации возникновения отрыва, даже если зона отрыва имеет размеры порядка толщины пограничного слоя, широко применяется метод саже-масляной визуализации течения на поверхности

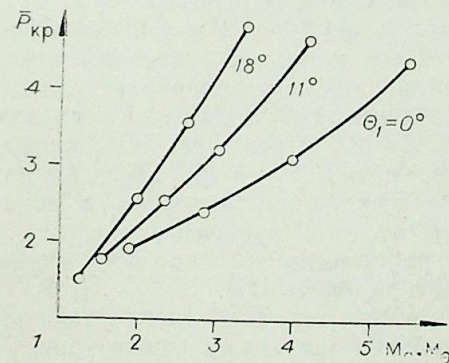


Рис. 4. Критический скачок давления, приводящий к отрыву без предварительного воздействия скачка ( $\theta_1 = 0$ ) и при его наличии ( $\theta_1 = 11^\circ$  и  $18^\circ$ ).

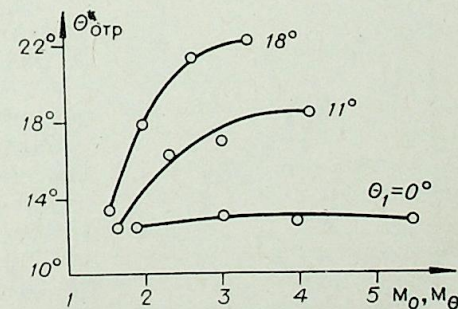


Рис. 5. Угол отрыва пограничного слоя без предварительного воздействия скачка ( $\theta_1 = 0$ ) и при его наличии ( $\theta_1 = 11^\circ$  и  $18^\circ$ ).

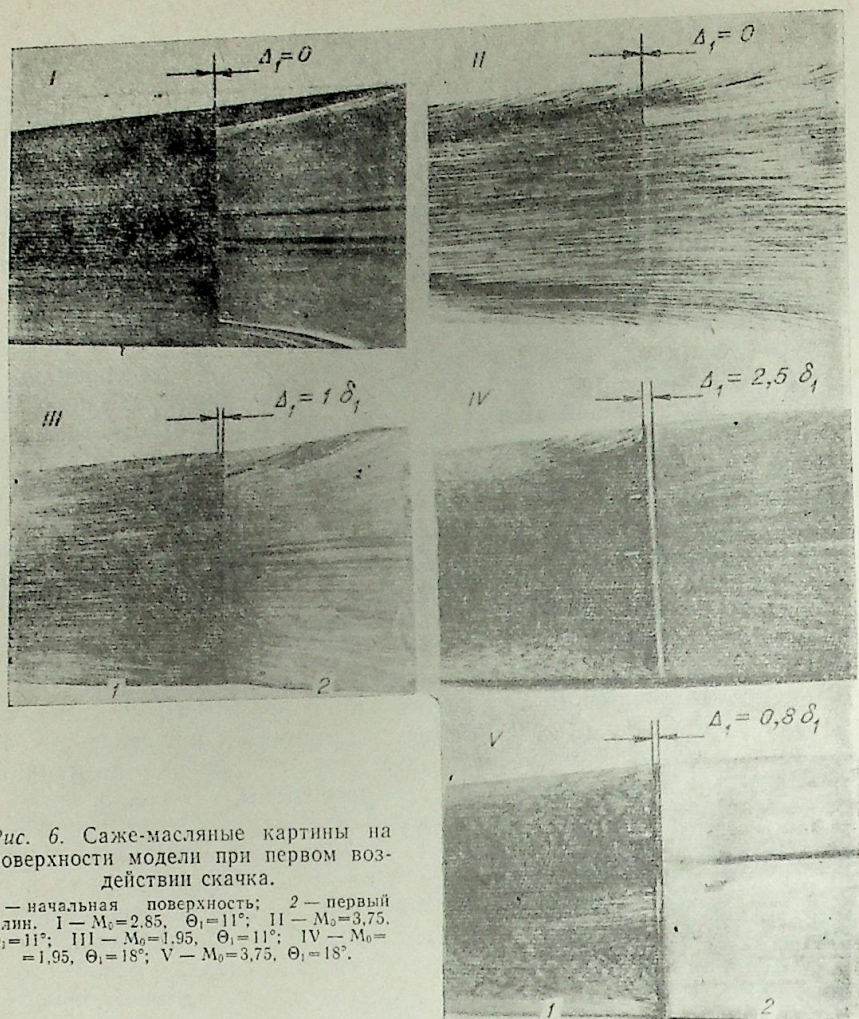


Рис. 6. Саже-масляные картины на поверхности модели при первом воздействии скачка.

1 — начальная поверхность; 2 — первый клин. I —  $M_0=2,85$ ,  $\theta_1=11^\circ$ ; II —  $M_0=3,75$ ,  $\theta_1=11^\circ$ ; III —  $M_0=1,95$ ,  $\theta_1=11^\circ$ ; IV —  $M_0=1,95$ ,  $\theta_1=18^\circ$ ; V —  $M_0=3,75$ ,  $\theta_1=18^\circ$ .

обтекаемого тела [7], который и использован в настоящих опытах. Предварительным воздействием был первый клин с углом  $\theta_1=11^\circ$  или  $18^\circ$ , т. е. с тем же углом, что и в опытах [4, 5]. Согласно рис. 5 в отсутствие предварительного воздействия (кривая  $\theta_1=0$ ) величина  $\theta_{отр}$  при  $M_0=2-6$  составляет  $12,5-13^\circ$ . Следовательно, можно ожидать, что при установке на модель первого клина с  $\theta_1=11^\circ$  отрыва перед ним не возникнет, а при  $\theta_1=18^\circ$  отрыв появится.

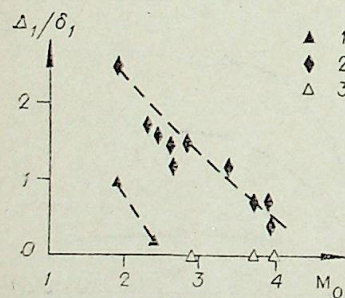


Рис. 7. Относительная ширина области первого отрыва.

С отрывом —  $\theta_1=11^\circ$  (1);  $18^\circ$  (2); без отрыва —  $\theta_1=11^\circ$  (3).

Полученные в опытах саже-масляные картины линий тока на поверхности модели показали, что действительно в случае  $\theta_1=11^\circ$  и  $M_0 > 2,5$  отрыва нет (см., например, рис. 6, фото I, II), а при  $M_0 < 2,5$  наблюдался зарождающийся отрыв, в котором линия отрыва располагалась всего лишь на расстоянии от кромки клина  $\Delta_1 \leq \delta_1$ , (рис. 6, фото III).

При  $\theta_1=18^\circ$  для всех чисел Маха от 1,9 до 4 наблюдался явный отрыв (рис. 6, фото IV и V), и линия отрыва располагалась на расстоянии  $\Delta_1 \geq \delta_1$ . Графики  $\Delta_1/\delta_1$  при отсутствии предварительного воздействия скачка приведены на рис. 7.

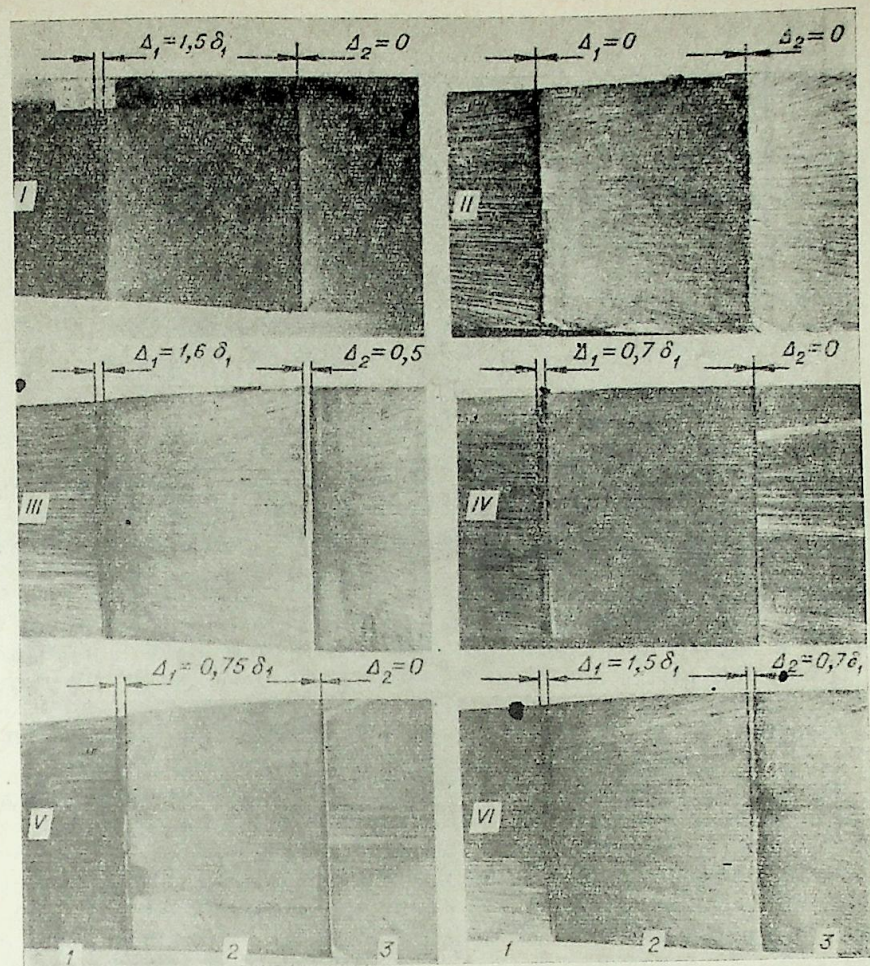


Рис. 8. Саже-масляные картины на поверхности модели при первом и повторном воздействии скачка.

1 — начальная поверхность; 2 — первый клин; 3 — второй клин.

Фото	$M_0$	Первый клин		Второй клин, угол $\theta_2$	Фото	$M_0$	Первый клин		Второй клин, угол $\theta_2$
		угол $\theta_1$	$M_0$				угол $\theta_1$	$M_0$	
I	2,85	18	1,9	11	IV	3,92	18	2,75	15
II	2,38	11	1,95	15	V	3,75	18	2,57	18
III	2,38	18	1,65	15	VI	2,85	18	1,98	18

Затем на поверхность первого клина, имеющего угол  $\theta_1=11^\circ$  или  $18^\circ$ , устанавливался второй клин с углом  $\theta_2=11, 15$  или  $18^\circ$ . Его передняя кромка находилась на расстоянии 100 мм (примерно  $20 \delta_1$ ) от передней кромки первого клина (см. рис. 1, б), т. е. на таком расстоянии, при котором, как показано выше, пограничный слой приобретал значительно большую наполненность, чем перед скачком, и имел общий для всей его толщины показатель  $n_2$ .

В случае второго воздействия скачка, характеризуемого величиной  $\theta_2=11^\circ$ , как показала саже-масляная визуализация, отрыв отсутствует даже тогда, когда предварительное воздействие сопровождается отрывом, например фото I на рис. 8, для которого  $\theta_1=18^\circ$  (виден отрыв),  $\theta_2=11^\circ$  (отрыва нет),  $M_0=1,9$ . Эту фотографию следует сравнить с

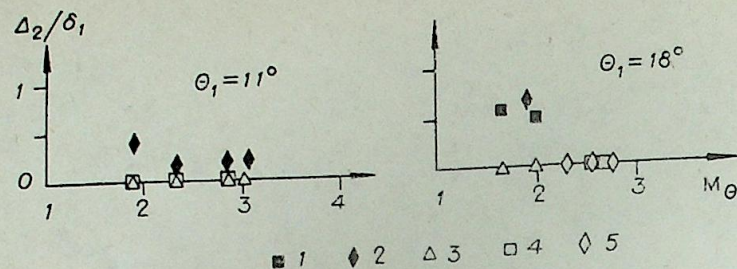


Рис. 9. Относительная ширина области второго отрыва.  
С отрывом —  $\theta_2 = 15^\circ$  (1);  $18^\circ$  (2); без отрыва —  $\theta_2 = 11^\circ$  (3);  $15^\circ$  (4);  $18^\circ$  (5).

фотографией III на рис. 6, на которой при отсутствии предварительного воздействия при почти том же значении числа Маха,  $M_0 = 1,95$ , перед клином с тем же углом ( $\theta_1 = 11^\circ$ ) виден зарождающийся отрыв.

Отрыв перед вторым клином с углом  $\theta_2 = 15^\circ$  для всех  $M_0$  отсутствовал при наличии предварительного воздействия  $\theta_1 = 11^\circ$  (рис. 8, фото II), а в случае предварительного воздействия  $\theta_1 = 18^\circ$  наблюдался зарождающийся отрыв при  $M_0 < 2,5$  (рис. 8, фото III) и его отсутствие при  $M_0 > 2,5$  (фото IV).

Увеличение угла второго клина до весьма большой величины  $\theta_2 = 18^\circ$  (рис. 8, фото V) при  $M_0 > 2$  сохранило, однако, отсутствие отрыва перед ним, даже несмотря на наличие отрыва в предварительном воздействии (перед первым клином, имевшим  $\theta_1 = 18^\circ$ ). При  $M_0 < 2$  в тех же условиях ( $\theta_2 = 18^\circ$ ,  $\theta_1 = 18^\circ$ ) наблюдается (см. фото VI) лишь зарождение отрыва перед вторым клином ( $\Delta_2/\delta_1 = 0,7$ ), тогда как без предварительного воздействия в тех же прочих условиях (см. рис. 6, фото IV) виден развитый отрыв ( $\Delta_2/\delta_1 = 2,5$ ). В случае сравнительно слабого предварительного воздействия ( $\theta_1 = 11^\circ$ ) перед вторым клином  $\theta_2 = 18^\circ$  все же наблюдался отрыв, но зарождающийся,  $\Delta_2/\delta_1 = 0,2-0,4$ .

Графики полученных по саже-масляным картинам величин  $\Delta_2/\delta_1$ , для предварительного воздействия  $\theta_1 = 11^\circ$  и  $18^\circ$  приведены на рис. 9. Их сравнение с графиками  $\Delta_1/\delta_1$  без предварительного воздействия (см. рис. 7), а также рассмотренные выше фотографии показывают, что наличие предварительного воздействия скачка действительно либо исключает, либо сильно уменьшает отрыв при повторном воздействии скачка уплотнения. Положительное влияние предварительного воздействия может быть весьма сильным. Например, предварительное воздействие, соответствующее клину с углом  $\theta_1 = 18^\circ$ , приводит к увеличению  $\theta_{отр}$  не менее чем на  $5^\circ$ , что согласуется с графиком рис. 5, для которого величины  $\theta_{отр}$  были вычислены по экспериментальным значениям параметра пограничного слоя  $n$ .

Таким образом, скачок уплотнения может оказывать благоприятное воздействие на пограничный слой, которое проявляется в том, что на расстоянии 15—20 толщин пограничного слоя от места предварительного воздействия скачка существенно усиливается способность пограничного слоя противостоять отрыву при повторном воздействии скачка.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Seebaugh W. R., Paynter G. C., Childs M. E. Shock-Wave Reflection from a Turbulent Boundary layer with Mass Bleed.— J. of Aircraft, 1968, 5, N 5. p. 461—467.
2. Гольдфельд М. А., Долгов В. Н. Профили скоростей при взаимодействии турбулентного пограничного слоя со скачком уплотнения на клине.— В кн.: Аэрофизические исследования. Новосибирск, ИТПМ, 1973, с. 98—99.
3. Огородников Д. А. Управление пограничным слоем путем отсоса или слива.— Тр. ЦИАМ, № 507. М., 1970, с. 42—57.
4. Гольдфельд М. А., Долгов В. Н. Развитие турбулентного пограничного слоя после взаимодействия со скачком уплотнения при  $M = 2-6$ .— Изв. СО АН СССР, 1978, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3, с. 9—14.
5. Гольдфельд М. А., Долгов В. Н. Экспериментальное исследование турбулентного пограничного слоя на треугольной пластине с клином.— Изв. СО АН СССР, 1973, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2, с. 16—22.
6. Репик Е. У., Чекалин В. Е. Конвективный теплообмен в сверхзвуковых конических соплах.— Инженерный журнал, 1962, 2, вып. 2, с. 359—364.
7. Settles G. S., Bogdonoff S. M., Vas I. E. Incipient Separation of a Supersonic Turbulent Boundary Layer at Moderate to High Reynolds Numbers. AIAA Paper N75-7. Pasadena, California, 1975. 15 p.

А. П. БУРДУКОВ,  
Н. С. БУФЕТОВ, А. Р. ДОРОХОВ

### АБСОРБЦИЯ НА СТЕКАЮЩЕЙ ПЛЕНКЕ ЖИДКОСТИ

Задача расчета совместного тепло- и массообмена при абсорбции на стекающей пленке жидкости относится к классу самосопряженных задач, допускающих получение решения в конечном виде при существенном упрощении постановки задачи [1]. Тем не менее результаты даже упрощенного теоретического расчета являются надежной основой для анализа и обобщения экспериментальных данных.

В [1] для случая неизотермической абсорбции газа на поверхности стекающей пленки, имеющей постоянную толщину  $\delta$ , получена следующая функциональная зависимость:

$$Nu_D = \frac{g_n \cdot \delta}{\rho \cdot D \Delta c} = f(Re, Pr, Lu, Ka, \frac{x}{\delta}). \quad (1)$$

Здесь  $Nu_D$ ,  $Re = \frac{\Gamma}{\mu}$ ,  $Pr = \frac{\nu}{a}$ ,  $Lu = \frac{a}{D}$ ,  $Ka = \frac{r_a \cdot d}{c_p}$  — критерии Нуссельта, Рейнольдса, Прандтля, Льюиса и модифицированный критерий Кутателадзе соответственно;  $x$  — текущая координата в направлении стекания пленки;  $g_n$  — удельный поток пара;  $\Gamma$  — удельная плотность орошения поверхности;  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $a$ ,  $c_p$ ,  $r_a$ ,  $D$  — динамическая и кинематическая вязкость, температуропроводность, теплоемкость, теплота абсорбции; коэффициент диффузии  $\Delta C = C_0 - C_{ct}$  — разность концентраций абсорбируемого вещества — движущая сила процесса.

Аналитический вид зависимости (1) получен в предположении постоянной температуры стенки ( $T_{ct} = const$ ) при линейном распределении температуры по сечению пленки для ударного профиля скорости. На границе раздела фаз принималась линейная аппроксимация зависимости равновесной концентрации абсорбента от температуры раствора при постоянном давлении ( $p_a = const$ )  $C = d \cdot T + b$ , где  $d$  и  $b$  — постоянные коэффициенты. Очевидно, что возможность использования полученной зависимости для практических расчетов может быть установлена только путем сопоставления с экспериментом.

В настоящей работе исследуется неизотермическая абсорбция водяного пара водным раствором бромистого лития при стекании его пленкой по вертикальной трубе. Опыты проводились на установке, схема которой представлена на рис. 1. Экспериментальный участок (1) — вертикальная труба из нержавеющей стали с наружным диаметром 25 мм, с толщиной стенки 1 мм и длиной 1,3 м (поверхностью класса чистоты 6) располагался внутри стеклянной колонны (2) диаметром 155 мм. Охлаждающая вода заданной температуры подавалась в трубу (1) с постоянным расходом. Скорость ее течения была не менее 2 м/с, что обеспечивало достаточно высокий коэффициент теплоотдачи со стороны воды и в итоге — выполнение условия  $T_{ct} = const$ . Из кольцевого распределителя (3) с регулируемым зазором щели крепкий раствор

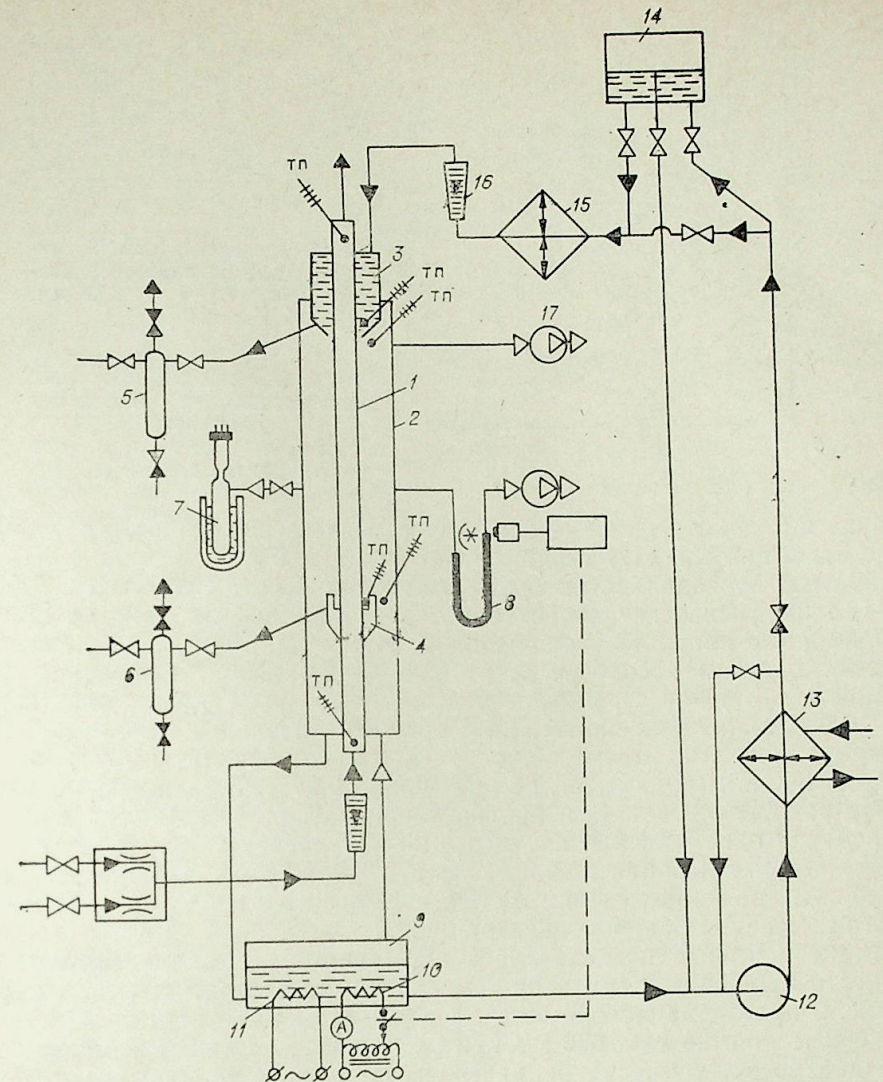


Рис. 1. Принципиальная схема экспериментальной установки.

бромистого лития стекал пленкой по наружной поверхности трубы в передвигающийся по рабочему участку пробоотборник (4) и далее в нижнюю часть абсорбера, в специальный сборник, а затем в генератор (9). Пробы раствора отбирались непосредственно из щелевого зазора распределителя и из сборника (4) в колбы (5) и (6). Водяной пар поступал в нижнюю часть абсорбера из генератора (9), снабженного регулируемым зазором (10) и нерегулируемыми (11) нагревателями. Заданное давление в абсорбере, определяемое U-образным дифференциальным манометром (8), поддерживалось автоматически.

Крепкий раствор из генератора центробежным бессальниковым насосом (12) через теплообменник (13) подавался в бак постоянного уровня (14) и далее в термостат (15), где достигалась заданная температура через ротаметр (16) в распределитель (3). Температуру раствора в распределителе и пробоотборнике, а также температуру пара и охлаждающей воды измеряли медьконстантановыми термопарами (т.п.). Особое внимание уделено надежной герметизации установки. Откачка

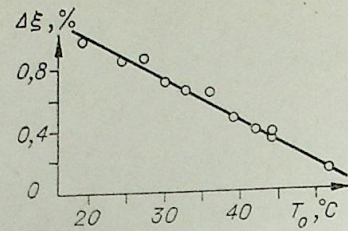
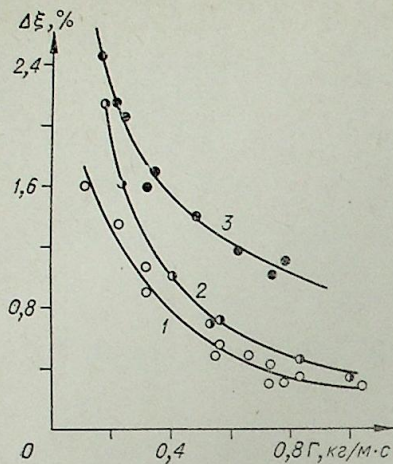


Рис. 3. Влияние начальной температуры  $T_0$  на изменение концентрации  $\Delta\xi$  ( $x=1000$  мм,  $T_w=24^\circ\text{C}$ ).

Рис. 2. Зависимость изменения концентрации от плотности орошения.  
 $x=1000$  мм;  $T_w=24^\circ\text{C}$ ;  $p_a=0,93$  (1); 1,45 (2); 2,0 кПа (3).

воздуха и паровоздушной смеси осуществлялась пластинчато-роторным вакуумным насосом (17) с производительностью 5 л/с.

Опыты проводились на бромистом литии, соответствующем ТУ-22-14-74, теплофизические свойства которого брались по данным [3, 4], в диапазонах плотностей орошения  $\Gamma$  от 0,2 до 1,0 кг/мс и давлений водяных паров в абсорбере  $p_a$  от 0,93 до 2,0 кПа. Нижняя граница плотности орошения ограничена условием неразрывности пленки, верхняя — максимальными плотностями орошения реальных аппаратов. Содержание инертных примесей, определяемых специальным газоанализатором (7) по методике [5], не превышало 0,05%. Концентрацию раствора в распределителе  $\xi_0$  и пробоотборнике  $\xi_x$  определяли по данным [4], измеряя одновременно плотность и температуру проб. Точность определения концентрации оценивалась в 0,5%. Разброс экспериментальных данных при определении  $\Delta\xi = \xi_0 - \xi_x$  лежит в пределах 10% из-за малого изменения общей концентрации.

В эксперименте исследовалась абсорбция пара в зависимости от плотности орошения, начальной температуры раствора, давления пара. На рис. 2 приведена зависимость  $\Delta\xi = \xi_0 - \xi_x$  от плотности орошения  $\Gamma$  на рабочем участке  $x = 1000$  мм при различных давлениях водяного пара в абсорбере, температуре раствора на выходе из оросителя  $T_0 = 24^\circ\text{C}$  и температуре охлаждающей воды  $T_w = 24^\circ\text{C}$ . Видно, что с увеличением плотности орошения величина  $\Delta\xi$  уменьшается. При этом с увеличением давления интенсивность абсорбции возрастает.

Результаты определения  $\Delta\xi$  также на метровом участке в зависимости от температуры раствора  $T_0$ , поступающего в распределитель при фиксированных  $p_a = 0,93$  кПа и  $T_w = 24^\circ\text{C}$ , показаны на рис. 3. Видно существенное влияние  $T_0$  на определяемую величину  $\Delta\xi$ . Таким образом, изменение условий на границе раздела фаз пар — пленка (различные  $p_a$ ) или входных условий (температуры раствора  $T_0$ , плотности орошения  $\Gamma$ ) существенно влияет на интенсивность абсорбции, что свидетельствует о большой роли процессов, связанных с гидродинамической и тепловой стабилизацией по длине трубки.

Ясно, что для установления количественных закономерностей данных по осредненным характеристикам массообмена недостаточно. Необходимо располагать данными по локальным коэффициентам массоотдачи. Конструкция установки позволяла это сделать, так как отбор проб можно было производить в любой точке по высоте трубы.

На рис. 4 приведены некоторые результаты по измерению средней концентрации  $\xi_x$  и температуры раствора  $T$  по длине трубы для условий, когда на вход подавался:

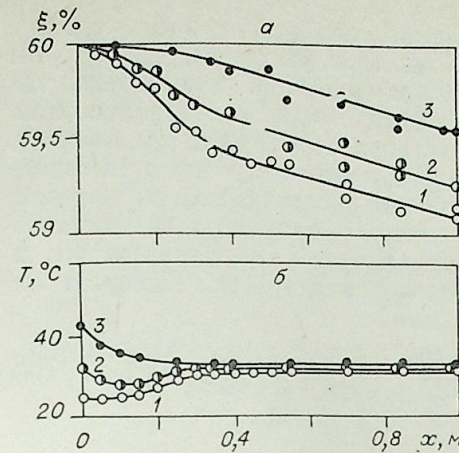


Рис. 4. Изменения средней концентрации (а) и температуры (б) раствора по длине рабочего участка.  
 $T_w=24^\circ\text{C}$ ;  $\Gamma=0,344$  кг/м·с;  $T_0=24$  (1); 32 — (2); 44°C (3).

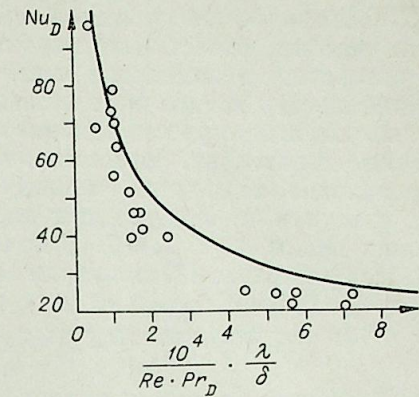


Рис. 5. Обработка экспериментальных данных в координатах  
$$Nu_D \div \frac{1}{Re \cdot Pr_D} \cdot \frac{\lambda}{\delta}$$

а) раствор, существенно переохлажденный относительно равновесных условий (кривая 1);

б) раствор при температуре  $T_0 = T_{cp} = 0,5 (T'' + T_{ст})$  ( $T''$  — равновесная температура при данных  $\xi_0$  и  $p_a$ ,  $T_{ст}$  — температура стенки) (кривая 2);

в) раствор при  $T_0 = T''$  (кривая 3).

Общим для всех трех представленных случаев является наличие участков, на которых зависимости  $\xi_x \div x$ ,  $T \div x$  меняют свой характер. При этом относительная роль процессов тепло- и массообмена на этих участках различна. Так, на начальных участках (кривые 1, 2) интенсивность абсорбции мала и существенно возрастает с переходом течения от гладкой ламинарной пленки к волновой. Место появления волн в каждом конкретном случае зависит от плотности орошения  $\Gamma$  и давления абсорбируемого пара  $p_a$  и находится на расстоянии от 50 до 250 мм от щели распределителя. В дальнейшем тепло- и массообмен стабилизируются и поддерживаются постоянными на всем оставшемся рабочем участке ( $400 < x \leq 1000$ ).

В случае  $T_0 = T''$  (кривая 3) велика роль начального теплового участка, так как процесс абсорбции начинается только после выхода теплового слоя, развивающегося от стенки, на поверхность пленки.

Анализ полученных зависимостей  $\xi_x$  от  $x$  показал существенное различие в распределении локальных коэффициентов массообмена по длине рабочего участка. Если не рассматривать участки, связанные с волнообразованием и выходом средней температуры на постоянную величину, то принципиальное расхождение расчета и эксперимента заключается в том, что в эксперименте на значительном участке величина удельного потока пара сохраняет практически постоянное значение, в то время как расчет дает  $g_a \sim x^{-0,5}$ .

Вероятной причиной расхождения расчета и эксперимента является отличие реальной картины стекания пленки, поверхность которой покрыта волнами, имеющими неупорядоченный трехмерный характер уже на расстояниях от 40 до 250 мм от щели распределителя, от модели гладкой ламинарной пленки, используемой в [1]. Имеется ряд данных [6], свидетельствующих о перемешивании жидкости в пленке на фронте волны. Если предположить полное перемешивание раствора, когда за проходящей волной полностью выравнивается профиль концентраций и

температуры, то на длине волны  $\lambda$  оказывается справедливым решение [1]. Задача об абсорбции в подобной постановке рассмотрена в [6]. При помощи фотосъемки стекающей пленки раствора установлено, что в исследуемом диапазоне чисел Рейнольдса  $\lambda \approx 35$  мм. Однако если предполагать полное перемешивание раствора через такие промежутки, то весьма важно учесть влияние начального теплового участка на осредненные характеристики массообмена, так как расстояние  $x_n$ , на котором происходит смыкание тепловых пограничных слоев, развивающихся от стенки и от поверхности пленки, имеет такой же порядок, что и длина волны, т. е.  $x_n \sim \lambda$ . Для начального участка В. Е. Накоряков и Н. И. Григорьева [7] получили зависимость

$$Nu_D = \frac{g_n \cdot \delta}{\rho \cdot D \cdot (d \cdot T_{cp} + b - C_0)} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\pi} \cdot (1 + |K_a|/V Lu)} \cdot \left( \frac{1}{Re \cdot Pr_D} \cdot \frac{l}{\delta} \right)^{-0,5}, \quad (2)$$

где  $l$  — длина пластины, причем  $l \leq x_n$ .

При сопоставлении полученных данных с зависимостью (2) (см. рис. 5, где в качестве линейного размера  $l$  брали длину волны  $\lambda = 35$  мм) видно, что эксперимент и расчет удовлетворительно согласуются между собой. Это может свидетельствовать о справедливости высказанного выше предположения. При обобщении были использованы экспериментальные данные на участке развитого волнового течения.

Таким образом, получены новые экспериментальные данные по абсорбции водяного пара водным раствором бромистого лития, стекающего пленкой по вертикальной трубе, для условий работы абсорбера бромисто-литиевых холодильных машин. Опытные данные обобщены при допущении полного перемешивания раствора на фронте волны.

Специальное конструкторское  
бюро «Энергохиммаш»,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
7/VIII 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Накоряков В. Е., Григорьева Н. И. О совместном теплопереносе при абсорбции на каплях и пленках. — ИФЖ, 1977, XXXII, № 3, с. 399—405.
2. Рамм В. М. Абсорбция газов. М., Химия, 1976. 656 с.
3. Исследование теплофизических свойств жидких растворов и сплавов. Сб. научн. тр. Под ред. С. С. Кутателадзе. Новосибирск, ИТФ СО АН СССР, 1977. 147 с.
4. Löwe H. Thermodynamische und physikalische Eigenschaften der wässrigen Lithium — Bromide — Lösung. Dis. Karlsruhe, 1960.
5. Берман Л. Д., Туманов Ю. А. Исследование теплоотдачи при конденсации движущегося пара на горизонтальной трубе. — Теплоэнергетика, 1962, № 10, с. 70—83.
6. Холпанов П. П., Шкадов В. Я., Малюсов В. А., Жаворонков Н. М. О массообмене в пленке жидкости при волнообразовании. — Теор. основы хим. технологии, 1967, 1, № 1, с. 73—79.
7. Накоряков В. Е., Григорьева Н. И. О совместном теплопереносе при пленочной абсорбции. — В кн.: Теплообмен и гидродинамика при кипении и конденсации. Новосибирск, ИТФ СО АН СССР, 1979, с. 278—284.

УДК 536.2.08 + (536.3 : 535.34)

В. К. БИТЮКОВ, Л. Н. ЛАТЫЕВ,  
В. А. ПЕТРОВ, С. В. СТЕПАНОВ

#### ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ЧАСТИЧНО ПРОЗРАЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

В связи с использованием частично прозрачных материалов в ряде новых отраслей науки и техники весьма актуален вопрос об измерении коэффициента теплопроводности  $\lambda$  этих материалов при высоких температурах, например для кварцевых стекол при  $T \geq 600 \div 700$  К, фтористого кальция, фтористого бария и фтористого магния при  $T \geq 500 \div 550$  К монокристаллов KCl при  $T \geq 450 \div 500$  К [1, 2], т. е. когда перенос тепла происходит и теплопроводностью и излучением.

Традиционные методы определения коэффициента теплопроводности основывались на проведении эксперимента в таких условиях, когда влияние излучения на теплоперенос достаточно мало (применение тонких образцов [3], закрашивание [4], экстраполяция к нулевой толщине [5, 6]), а также на приближенной оценке этого влияния [7—9].

Однако с развитием вычислительной техники и численных методов появилась возможность строгого решения обратной задачи радиационно-кондуктивного теплопереноса (РКТ) [2], когда по измеренным значениям перепада температур на образце  $\Delta T$ , плотности теплового потока  $Q$  и температуре поверхности образца  $T_1$  (с привлечением данных по оптическим свойствам частично прозрачного материала и ограничивающих его поверхностей) рассчитывают коэффициент теплопроводности.

Погрешность определения коэффициента теплопроводности  $\delta \lambda$  будет определяться как погрешностями экспериментально измеренных параметров, так и погрешностями используемых оптических свойств материала и граничных поверхностей. Вопрос о роли последних до настоящего времени не получил должного анализа, поэтому имеет смысл изучить его подробнее.

Рассмотрим радиационно-кондуктивный перенос тепла в плоском слое частично прозрачного материала толщиной  $2h$ , ограниченном зеркально отражающими нагревателем с температурой  $T_1$  и холодильником. (Начало координат — в центре слоя. Ось  $X$  совпадает с направлением теплового потока.) Известны  $Q$  и  $\Delta T$ . В этом случае обратная задача РКТ сводится к решению уравнений переноса

$$\begin{matrix} + \\ (-) \end{matrix} \mu \frac{dI_v^{+(-)}}{dx} = \begin{matrix} - \\ (+) \end{matrix} \tau_v I_v^{+(-)} + \begin{matrix} + \\ (-) \end{matrix} \tau_v n_v^2 \cdot I_{p,v} \quad (1)$$

и энергии

$$-\frac{\lambda}{h} \frac{dT}{dx} + 2\pi \int_0^1 \int_0^1 (I_v^+ - I_v^-) \mu d\mu dv = Q \quad (2)$$

с граничными условиями

$$I_v^{+(-)} = (1 - R_{1(2),v}) n_v^2 \cdot I_{p,v} + R_{1(2),v} I_v^{-(+)}, \quad x = \begin{matrix} - \\ + \end{matrix} 1; \quad (3)$$

$$T(-1) = T_1, \quad (4)$$

$$T(-1) - T(1) = \Delta T, \quad (5)$$

где  $T$  — температура;  $I_v^{+(-)}$  — интенсивность вперед (назад);  $x$  — координата точки ( $x \in [-1, 1]$ );  $\mu = |\cos \psi|$ ;  $\psi$  — угол, отсчитываемый от положительного направления оси  $X$ ;  $I_p$  — интенсивность равновесного излучения в вакууме;  $\tau = kh$ ;  $n$ ,  $k$  — показатель преломления, коэффициент поглощения материала, соответственно;  $R$  — коэффициент отражения. Индексы соответствуют 1(2) — нагревателю (холодильнику),  $v$  — спектральной зависимости.

Решая систему уравнений (1—4) согласно [10], получим

$$\lambda = -\frac{Q \cdot h \cdot (1+x)}{T(x) - T_1} + \frac{2\pi h}{T(x) - T_1} \int_0^1 dv \cdot n_v^2 \left\{ \int_{-1}^1 d\xi \{G_v(-1, \xi) \times \right. \\ \times [I_{p,v}(\xi) - I_{p,v}(-1)] - G_v(x, \xi) [I_{p,v}(\xi) - I_{p,v}(x)] \} + \\ \left. + \Gamma_v(-1) I_{p,v}(-1) - \Gamma_v(x) \cdot I_{p,v}(x) + [G_{1,v}(-1) - \right. \\ \left. - G_{1,v}(x)] \cdot I_{p,v1} + [G_{2,v}(-1) - G_{2,v}(x)] I_{p,v2} \right\}, \quad (6)$$

где

$$G_v(x, \xi) = \int_0^1 d\mu \frac{\mu}{\beta_v} \{ \beta_v \cdot \exp(-\gamma_v |x - \xi|) + R_{1,v} \exp[-\gamma_v(2 + x + \xi)] + \\ + R_{2,v} \exp[-\gamma_v(2 - x - \xi)] + R_{1,v} \cdot R_{2,v} \{ \exp[-\gamma_v(4 + x - \xi)] + \\ + \exp[-\gamma_v(4 - x + \xi)] \} \};$$

$$G_{1,v}(x) = \int_0^1 d\mu \frac{\mu^2}{\tau_v \beta_v} (1 - R_{1,v}) \{ \exp[-\gamma_v(1 + x)] + R_{2,v} \exp[-\gamma_v(3 - x)] \};$$

$$G_{2,v}(x) = \int_0^1 d\mu \frac{\mu^2}{\tau_v \beta_v} (1 - R_{2,v}) \{ \exp[-\gamma_v(1 - x)] + R_{1,v} \exp[-\gamma_v(3 + x)] \};$$

$$\Gamma_v(x) = \frac{2}{3\tau_v} + \int_0^1 d\mu \frac{\mu^2}{\tau_v \beta_v} \{ (R_{1,v} - \beta_v) \exp[-\gamma_v(1 + x)] +$$

$$+ (R_{2,v} - \beta_v) \exp[-\gamma_v(1 - x)] + R_{1,v}(R_{2,v} - 1) \exp[-\gamma_v(3 + x)] + \\ + R_{2,v}(R_{1,v} - 1) \exp[-\gamma_v(3 - x)] - R_{1,v} \cdot R_{2,v} \{ \exp[-\gamma_v(5 + x)] + \\ + \exp[-\gamma_v(5 - x)] \} \};$$

$$\gamma_v = \frac{k_v h}{\mu}; \quad \beta_v = 1 - R_{1,v} \cdot R_{2,v} \cdot \exp(-4\gamma_v).$$

Отметим, что функция  $\Gamma_v(x)$  связана с устранением особенностей в ядре  $G_v(x, \xi)$  уравнения (6) [11].

В результате дискретизации (6) по координате получим систему из  $m_x - 1$  нелинейных алгебраических уравнений ( $m_x$  — число узлов по координате), содержащую  $m_x$  неизвестных  $\lambda$ ,  $T_i$  ( $i = 2, 3, \dots, m_x$ ). Добавление к ней (5) полностью определяет задачу. Численное решение осуществлялось методом Ньютона. Дискретизация (6) по углу, частоте и координате проводилась аналогично [12]. Итерационный процесс заканчивался при одновременном выполнении условий

$$\left| \frac{\lambda^{(j)} - \lambda^{(j-1)}}{\lambda^{(j)}} \right| < 10^{-5} \quad \text{и} \quad \left| \frac{T_i^{(j)} - T_i^{(j-1)}}{T_i^{(j)}} \right| < 10^{-5},$$

где  $j$  — номер итерации. Вычисления проводились на ЭВМ БЭСМ-6 по программе, составленной на языке АЛГОЛ-60.

Анализ влияния экспериментально измеряемых параметров и используемых при решении обратной задачи РКТ оптических свойств материала, нагревателя и холодильника выполнялся следующим образом. Вначале на основании решения прямой задачи РКТ для заданных  $2h$ ,  $T_1$ ,  $\Delta T$  и  $\lambda$  рассчитывалась плотность теплового потока  $Q$ . Очевидно, что если использовать найденное значение  $Q$  для решения обратной задачи РКТ, то в результате должно получиться исходное значение  $\lambda$ .

Далее, один из использованных при решении задачи измеряемых параметров либо параметров, характеризующих оптические свойства системы, изменялся на величину его погрешности, и в результате решения обратной задачи РКТ получалось новое значение коэффициента теплопроводности  $\lambda'_i$ . Величина  $\delta\lambda_i = 100\% (\lambda'_i - \lambda)/\lambda$  характеризовала погрешность определения коэффициента теплопроводности, обусловленную погрешностью  $i$ -го параметра.

В качестве объекта исследования было выбрано безводное кварцевое стекло марки КИ, ограниченное вольфрамовыми нагревателем и холодильником. Коэффициенты отражения границ рассчитывались по формулам Френеля. Результаты решения прямой задачи РКТ представлены в табл. 1.

При проведении расчетов значения показателя преломления кварцевого стекла для комнатной температуры рассчитывались по дисперсионной формуле, заимствованной из [13],

$$n = A + BL + CL^2 + DL^3 + EL^4,$$

где  $l$  — длина волны в мкм;  $L = 1/(l^2 - 0.028)$ ,  $A = 1.44902$ ,  $B = 0.004604$ ,  $C = -0.000381$ ,  $D = -0.0025268$ ,  $E = -0.00007722$ . Температурная зависимость показателя преломления во всем спектральном диапазоне учитывалась в соответствии с [14] ( $dn/dT = 11.5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ).

Коэффициент поглощения кварцевого стекла взят из [15]. Расчеты при  $T_1 = 1200 \text{ K}$  выполнены с использованием данных по  $k$  для  $T = 1073 \text{ K}$ , а при  $T_1 = 1600 \text{ K}$  — для  $T = 1673 \text{ K}$ .

Оптические постоянные вольфрама при высоких температурах определялись методом Крамерса — Кронига по известным значениям излучательной способности  $\epsilon_v$  [16]. Для определения оптических постоянных методом Крамерса — Кронига необходимо знать величину  $\epsilon_v$  в бесконечном спектральном интервале, а они известны в ограниченном интервале. Чтобы обойти эту трудность, был разработан самосогласованный вариант метода Крамерса — Кронига, в котором оптические постоянные металла определяются по спектральной излучательной способности из достаточно широкого, но ограниченного спектрального интервала без привлечения посторонних данных по оптическим постоянным или предположений о ходе излучательной способности в ультрафиолетовой части спектра.

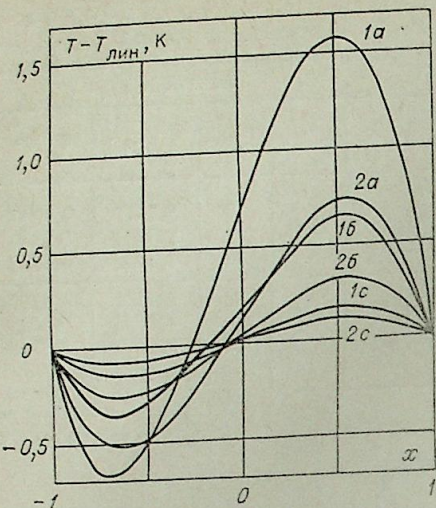
1. На основе модифицированной теории Друде была произведена экстраполяция значений  $\epsilon_v$  из области длин волн 3—5 мкм на среднюю и дальнюю ИК-область. Модификация теории Друде заключалась в учете в выражении для действительной части диэлектрической посто-

Т а б л и ц а 1

Результаты решения прямой задачи радиационно-кондуктивного теплопереноса ( $\Delta T = 50 \text{ K}$ )

$T_1, \text{ K}$	$\lambda, \text{ Вт/м} \cdot \text{ K}$	$2h \cdot 10^3, \text{ м}$	$Q \cdot 10^{-4}, \text{ Вт/м}^2$	$Q_m/Q^*$
1200	2,1	2	5,8017	0,9049
		5	2,6684	0,7870
		10	1,6259	0,6458
1600	2,3	2	7,6031	0,7563
		5	4,1796	0,5503
		10	3,0543	0,3765

\*  $Q_m$  — средний по слою тепловой поток, связанный с теплопроводностью ( $Q_m = \lambda \frac{\Delta T}{2h}$ ).



Поле температур в плоском слое кварцевого стекла КИ.

$T_1 = 1600$  (1),  $1200$  К (2);  $2h = 10 \cdot 10^{-3}$  (а);  $5 \cdot 10^{-3}$  (б);  $2 \cdot 10^{-3}$  м (с).

отражении учитывался согласно [18], где для восстановления добавочной фазы, обусловленной неисследованным участком в ультрафиолетовой области спектра, использовались известные значения оптических постоянных при нескольких длинах волн, определенные другими методами, например поляриметрическими. В данной работе значения оптических постоянных при нескольких длинах волн не брались из работ других авторов (они практически отсутствуют при высоких температурах), а определялись непосредственно по известным значениям  $\epsilon_v$  в видимой области спектра. Как показывает анализ существующих данных, на небольшом участке спектра оптические постоянные  $n$  и  $k$  являются линейными функциями длины или, по крайней мере, их можно с достаточной точностью аппроксимировать линейными функциями. Излучательная способность связана с  $n$  и  $k$  довольно простой зависимостью, т. е. в конечном счете излучательная способность — функция четырех неизвестных, являющихся коэффициентами в линейных функциях  $n$  и  $k$ . Взяв четыре длины волны и соответствующие им излучательные способности из рассматриваемого спектрального интервала, получим замкнутую систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов. Эту систему решали численными методами на ЭВМ, а затем определяли оптические постоянные при нескольких длинах волн. Такой способ учета вклада ультрафиолетовой области имеет преимущество перед существующими, так как отпадает проблема согласования привлекаемых данных по оптическим постоянным с имеющимися значениями излучательности.

Использованные оптические свойства кварцевого стекла марки КИ и вольфрама приведены в табл. 2. Исходные значения коэффициента теплопроводности кварцевого стекла получены экстраполяцией в область высоких температур данных [19]. Все расчеты выполнены при  $m_x = 19$ ,  $m_u = 14$  и  $m_v = 50$  (время счета равнялось  $\sim 2$  мин).

На рисунке представлены поля температур в плоском слое для разных толщин и уровней температур.

Результаты решения обратной задачи РКТ представлены в табл. 3. Выбор погрешностей оптических свойств кварцевого стекла, вольфрама и экспериментально измеряемых параметров примерно соответствовал современному состоянию экспериментальных исследований.

янной члена, обусловленного поглощением излучения за счет межзонных переходов электронов  $\epsilon_b$ . Для определения плазменной и релаксационной частот электронов проводимости, а также члена  $\epsilon_b$ , необходимых для экстраполяции  $\epsilon_v$  в ИК-область, использовались известные значения излучательной способности из области 3—5 мкм. Полученная система нелинейных уравнений решалась численным методом на ЭВМ. Проверяли описанную экстраполяционную процедуру по результатам работы [17], где значения  $\epsilon_v$  вольфрама исследованы до 15 мкм. Экстраполированные значения  $\epsilon_v$  во всей области экстраполяции (5—15 мкм) совпали с экспериментальными в пределах погрешности эксперимента.

Большой вклад ультрафиолетовой области в изменение фазы при

Таблица 2  
Использованные в расчетах значения коэффициента поглощения кварцевого стекла марки КИ и показателя преломления и показателя поглощения вольфрама

$T, K$	$l, \mu\text{км}$	0,669	1,250	1,831	2,005	2,027	2,064	2,113	2,170	2,230	2,287	2,336	2,373	2,395	2,404	2,421	2,452	2,494
1073	$k, \text{см}^{-1}$	0,020	0,020	0,020	0,027	0,027	0,027	0,027	0,027	0,027	0,027	0,029	0,030	0,030	0,031	0,031	0,033	0,036
1200	$n$	3,255	3,385	3,360	3,327	3,336	3,348	3,370	3,399	3,441	3,482	3,532	3,586	3,586	3,596	3,614	3,646	3,687
1200	$k$	3,285	4,677	6,569	7,287	7,382	7,537	7,748	7,988	8,246	8,485	8,691	8,839	8,928	8,965	9,034	9,158	9,324
1673	$k, \text{см}^{-1}$	0,030	0,030	0,030	0,038	0,038	0,038	0,038	0,038	0,039	0,040	0,042	0,044	0,046	0,047	0,049	0,052	0,059
1600	$n$	3,384	3,712	3,908	3,986	4,002	4,030	4,076	4,130	4,189	4,246	4,299	4,340	4,365	4,376	4,398	4,435	4,486
1600	$k$	3,385	4,801	6,650	7,317	7,400	7,541	7,730	7,939	8,159	8,368	8,547	8,682	8,763	8,796	8,858	8,969	9,121
1073	$l, \mu\text{км}$	2,545	2,604	2,668	2,732	2,796	2,855	2,906	2,948	2,979	2,996	3,008	3,011	3,099	3,179	3,276	3,385	3,500
1200	$k, \text{см}^{-1}$	0,039	0,049	0,068	0,094	0,130	0,181	0,217	0,247	0,270	0,290	0,292	0,315	0,365	0,419	0,500	0,640	1,000
1200	$n$	3,744	3,811	3,888	3,958	4,032	4,112	4,182	4,248	4,291	4,313	4,325	4,362	4,429	4,528	4,669	4,822	4,980
1673	$k, \text{см}^{-1}$	0,070	0,088	0,120	0,161	0,216	0,287	0,354	0,418	0,464	0,495	0,511	0,565	0,663	0,802	1,01	1,32	1,93
1600	$n$	4,556	4,638	4,731	4,816	4,907	4,999	5,072	5,133	5,181	5,208	5,231	5,287	5,377	5,502	5,640	5,804	6,003
1600	$k$	9,302	9,510	9,723	9,935	10,16	10,35	10,51	10,64	10,75	10,81	10,85	10,95	11,12	11,35	11,64	11,97	12,29
1073	$l, \mu\text{км}$	3,615	3,724	3,821	3,901	3,959	3,992	4,010	4,054	4,128	4,227	4,340	4,460	4,573	4,672	4,746	4,790	4,829
1200	$k, \text{см}^{-1}$	1,77	2,71	3,60	4,38	4,99	5,18	5,40	6,00	7,06	9,02	12,00	14,86	17,24	20,18	22,54	24,30	25,29
1200	$n$	5,129	5,267	5,397	5,521	5,603	5,845	5,909	5,931	6,037	6,197	6,384	6,588	6,781	6,951	7,079	7,155	7,184
1673	$k, \text{см}^{-1}$	13,36	13,74	14,10	14,41	14,62	14,74	14,80	14,89	15,10	15,39	15,72	16,07	16,40	16,68	16,89	17,01	17,04
1600	$n$	3,19	4,85	6,67	7,96	8,96	9,56	9,83	10,78	12,56	15,31	18,90	22,43	26,04	29,92	32,96	35,00	36,00
1600	$k$	6,166	6,308	6,433	6,541	6,645	6,704	6,736	6,812	6,943	7,115	7,312	7,520	7,715	7,886	8,014	8,090	8,100
1600	$n$	12,58	12,90	13,17	13,42	13,60	13,70	13,76	13,88	14,09	14,35	14,64	14,95	15,23	15,47	15,65	15,76	15,76

Таблица 3

Влияние погрешностей определения оптических свойств образца, нагревателя, холодильника и экспериментально измеряемых параметров на точность расчета коэффициента теплопроводности

Варьируемый параметр	% изменения	$T_1=1200$ К			$T_1=1600$ К		
		$\delta\lambda_i, \%$					
		$2h=2 \cdot 10^{-3}$ м	$2h=5 \cdot 10^{-3}$ м	$2h=10^{-2}$ м	$2h=2 \cdot 10^{-3}$ м	$2h=5 \cdot 10^{-3}$ м	$2h=10^{-2}$ м
$n$	1	-0,28	-0,70	-1,40	-0,87	-2,18	-4,32
$k$	10	-0,05	-0,06	-0,14	-0,05	-0,05	-0,44
$n_1$	10	0,27	0,64	1,22	0,70	1,71	3,28
$\kappa_1$	3	0,17	0,40	0,78	0,51	1,24	2,40
$n_2$	10	0,26	0,63	1,21	0,70	1,70	3,27
$\kappa_2$	3	0,17	0,40	0,77	0,51	1,24	2,39
$T_1$	0,25	-0,55	-1,36	-2,66	-2,46	-6,05	-11,81
$Q$	3	3,31	3,81	4,63	3,97	5,44	7,89
$\Delta T$	5	-4,87	-5,08	-5,46	-4,93	-5,28	-5,97
$h$	0,1	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10
$\delta\lambda, \%$		6,6	7,5	9,6	8,0	12,7	21,6

Необходимо отметить, что в зависимости от длины волны положительные вариации  $n_{1(2)}$  обуславливают разные по знаку значения  $\delta R_{1(2)}$ : положительные при  $\frac{n_{1(2)}}{n} > \sqrt{1 + \left(\frac{\kappa_{1(2)}}{n}\right)^2}$  и отрицательные в противном случае. Это приводит к тому, что при одинаковой по знаку во всей области спектра вариации  $n_{1(2)}$  не все длины волн дают однозначный вклад в  $\delta\lambda_{n_{1(2)}}$ . Для того чтобы в таких условиях величина  $\delta\lambda$  имела смысл вероятностной оценки сверху, было принято  $\delta n_{1(2)} = \text{sgn} \left( \frac{n_{1(2)}}{n} - \sqrt{1 + \left(\frac{\kappa_{1(2)}}{n}\right)^2} \right) \cdot |\delta n_{1(2)}|$ , что обеспечивало однозначность  $\delta R_{1(2)}$ , а значит и однозначность вклада всех длин волн в  $\delta\lambda_{n_{1(2)}}$ .

Суммарная систематическая погрешность  $\delta\lambda$  для доверительной вероятности 0,95 оценивалась по формуле [21]

$$\delta\lambda = 1,1 \sqrt{\delta\lambda_n^2 + \delta\lambda_k^2 + (|\delta\lambda_{n_1}| + |\delta\lambda_{\kappa_1}| + |\delta\lambda_{n_2}| + |\delta\lambda_{\kappa_2}|)^2 + \delta\lambda_{T_1}^2 + \delta\lambda_Q^2 + \delta\lambda_{\Delta T}^2 + \delta\lambda_h^2}$$

Объединение погрешностей  $\delta\lambda_{n_1}$ ,  $\delta\lambda_{\kappa_1}$ ,  $\delta\lambda_{n_2}$  и  $\delta\lambda_{\kappa_2}$  в одну группу соответствует тому, что указанные погрешности не являются независимыми.

Как видно из табл. 3, коэффициент теплопроводности частично прозрачных материалов при высоких температурах не может быть измерен с меньшей погрешностью, чем эффективный коэффициент теплопроводности, вопреки утверждению работы [19].

Отметим, что в некоторых работах (см., например, [20]) проведена линеаризация члена, соответствующего объемному излучению среды, в интегральном уравнении РКТ (уравнение (6) данной работы) с помощью соотношения

$$I_{p,v}[T(x)] = I_{p,v}(T_1) + I'_{p,v}(T_1)[T(x) - T_1].$$

Результаты численного анализа такой процедуры представлены в табл. 4.

Таблица 4

Погрешность определения коэффициента теплопроводности, обусловленная линеаризацией уравнений РКТ и учетом угловой зависимости коэффициентов отражения

$T_1, \text{К}$	$\lambda, \text{Вт/м}\cdot\text{К}$	$2h \cdot 10^3, \text{м}$	$\delta\lambda_{\text{лин}}, \%$	$\delta\lambda_{R_{1(2)}}, \%$	$\delta\lambda_{R_{1(2)}}, \%$
1200	2,1	2	-0,07	-0,02	0,54
		5	-0,25	-0,05	1,24
		10	-0,63	-0,12	2,31
1600	2,3	2	-0,11	-0,04	1,25
		5	-0,24	-0,06	3,07
		10	-0,69	-0,10	5,75

Видно, что с повышением температуры и ростом толщины слоя  $\delta\lambda_{\text{лин}}$  увеличивается.

Интересно исследовать также влияние неучета угловой зависимости коэффициентов отражения  $R_{1(2),v}(\mu)$  на погрешность определения коэффициента теплопроводности. Данные, приведенные в табл. 4, показывают, что без большой потери в точности расчетов можно производить замену  $R_{1(2),v}(\mu)$  на полусферический коэффициент отражения  $R_{1(2),v}$ . Использование вместо  $R_{1(2),v}(\mu)$  нормального коэффициента отражения  $R_{1(2),v}$ , как выполнено в [2], может приводить к погрешности в определении коэффициента теплопроводности до  $\sim 6\%$  (см. табл. 4).

Институт высоких температур  
АН СССР, Москва

Поступила в редакцию  
12/IX 1978

## ЛИТЕРАТУРА

- Сергеев О. А., Чадович Т. З. Теплофизические свойства плавного кварца.— В кн.: Исследования в области тепловых измерений. Тр. метролог. ин-тов СССР. Вып. 111 (171). Стандартгиз. М.—Л., 1969, с. 151—159.
- Сергеев О. А., Мень А. А. Теплофизические свойства полупрозрачных материалов. М., 1977.
- Егоров Б. Н., Кондратенко В. И., Килессо В. С. Теплофизические свойства некоторых стекол и ситаллов.— ТВТ, 1972, 10, вып. 5, с. 1122—1123.
- Петров А. В., Цыпкина А. С., Логачев Ю. А. Температурные зависимости теплопроводности щелочногаллоидных солей при повышенных температурах.— ФТТ, 1974, 16, вып. 1, с. 65—70.
- Варгафтик Н. Б., Филиппов Л. П., Тарзиманов А. А., Юрчак Р. П. Теплопроводность газов и жидкостей. М., Изд-во стандартов, 1970.
- Геллер В. З., Парамонов И. А., Слюсарев В. В. Экспериментальное исследование вклада радиационной составляющей в эффективный коэффициент теплопроводности толуола.— ИФЖ, 1974, 26, № 6, с. 1052—1057.
- Wray K. L., Connolly T. J. Thermal Conductivity of Clear Fused Silica at High Temperatures.— J. Appl. Phys., 1959, 30, № 11, p. 1702—1705.
- Бартенев Г. М., Фридкин Р. З. Измерение коэффициента истинной теплопроводности стекла при высоких температурах.— Стекло. Тр. НИИСтекла, 1972, № 1 (143), с. 14—18.
- Курияма Т. и др. Влияние радиационного теплопереноса при измерении коэффициента теплопроводности частично прозрачных материалов.— Кайрон, 1975, 41, № 353, с. 3588—3595.
- Петров В. А., Битюков В. К., Степанов С. В. Радиационно-кондуктивный теплоперенос в плоском слое частично прозрачного материала с полупрозрачными границами. Теоретические основы бесконтактного способа определения коэффициента теплопроводности. Отчет ИВТАН, 1977, № гос. рег. 76042318.
- Рубцов Н. А. Некоторые обобщения в теории одномерного переноса тепла излучением.— ПМТФ, 1967, № 4, с. 66—73.
- Степанов С. В., Петров В. А. Об одном методе решения стационарной задачи радиационно-кондуктивного теплопереноса в плоском слое II.— ИФЖ, 1976, 31, № 5, с. 866—872.

13. Воронкова Е. Н., Гречушников Б. Н., Дистлер Г. И., Петров И. П. Оптические материалы для инфракрасной техники. М., Наука, 1965.
14. Wray J. H., Neu J. T. Refractive index of several glasses as a function of wavelength and temperature.— J. Opt. Soc. Am., 1969, 59, № 6, p. 774—776.
15. Петров В. А. Оптические свойства кварцевых стекол при высоких температурах в области их полупрозрачности.— В кн.: Обзоры по теплофизическим свойствам веществ. М., ИВТАН, 1979, № 3 (17), с. 29—72.
16. Latyev L. N., Chekhovskoi V. Ya., Shestakov E. N. Monochromatic emissivity of tungsten in the temperature range 1200—2600 K and in the wavelength range 0.4—4  $\mu\text{m}$ .— High Temperatures — High Pressures, 1970, № 2, p. 175—181.
17. Дрешфильд, Хауз. Спектральная нормальная излучательная способность монокристаллов.— Ракетная техника и космонавтика, 1966, № 2, с. 249—251.
18. Милославский В. К. К вопросу о применении интегральных соотношений Крамера — Кронига для определения оптических констант металлов в ограниченной области спектра.— Оптика и спектроскопия, 1966, 21, вып. 3, с. 343—346.
19. Мень А. А., Чечельницкий А. З. О теплопроводности плавленного кварца.— ТВТ, 1973, 11, № 6, с. 1309—1312.
20. Мень А. А. Теоретические аспекты определения теплопроводности полупрозрачных веществ.— ТВТ, 1973, 11, № 2, с. 290—299.
21. Рабинович С. Г. Погрешности измерений. Л., Энергия, 1978.

Н. М. РАСТОРГУЕВА

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ  
ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПОЛУСФЕРИЧЕСКИХ  
ИЗЛУЧАТЕЛЬНЫХ СПОСОБНОСТЕЙ МАТЕРИАЛОВ  
В ОБЛАСТИ ТЕМПЕРАТУР 78 ÷ 150 К

Решение ряда задач низкотемпературной энергетики, вопросы правильного выбора оптимальных эксплуатационных режимов, проведение конструкционных расчетов в технике низких температур связаны с необходимостью изучения как теплофизических, так и оптических свойств используемых материалов. Некоторые из этих свойств, например интегральные излучательные способности, продолжают оставаться неизученными [1—3].

Настоящая работа посвящена экспериментальному исследованию интегральных полусферических излучательных способностей конструкционных материалов в диапазоне температур 78 ÷ 150 К, предназначенных для изготовления специальных радиационных экранов.

Излучательная способность образцов диаметром 20 и толщиной 0,25 мм определялась на двух установках с привлечением разных методов измерения: калориметрического и радиационно-калориметрического. Выбор двух методик обеспечил достаточно широкий температурный диапазон измерений и возможность апробировать новый радиационно-калориметрический метод, являющийся основным в экспериментах при криогенных температурах.

Калориметрический метод измерения, предполагающий нагрев образца внутренним источником тепла [4—5], применялся в области температур от 110 до 150 К. При исследовании образцов таким способом вместо медьконстантановой термопары использовалась манганинконстантановая толщиной 50 мкм, отградуированная по платиновому термометру сопротивления непосредственно в экспериментальной установке. Подобная замена термопар снизила теплопроводный поток по термопаре и позволила расширить температурный интервал исследования от 130 до 110 К.

В диапазоне температур от 78 до 90 К применялся радиационно-калориметрический метод измерения, позволяющий нагревать образец бесконтактным способом с помощью модели черного тела. Соответствующая измерительная

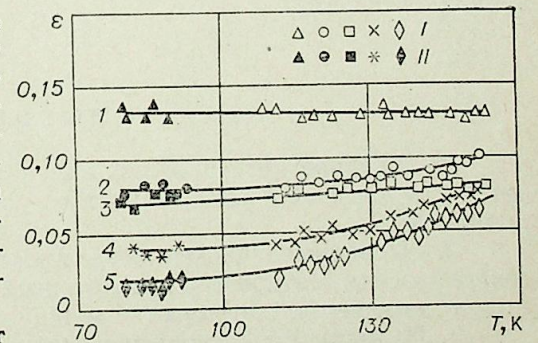


Рис. Интегральная полусферическая излучательная способность конструкционных материалов в зависимости от температуры. I — результаты измерений, полученные калориметрическим методом; II — результаты измерений, полученные радиационно-калориметрическим методом.

Характеристика образцов \*

Кривая на графике	Покрытие	Электролит	Плотность тока, А/м <sup>2</sup>
1	Ni6Cu12Ag9	Трилонатный	60
2	Ni6Cu12Ag9	»	40
3	Ni6Cu12Ag6	Цианистый	40
4	Ni6Cu12Ag6	Трилонатный	40
5	Ni6Cu12Ag9	»	20

\* Основа каждого образца — сталь X18H10T

установка создана на базе криостата КГ-150 и описана ранее в [6]. В качестве основных датчиков температуры использовались германиевый термометр сопротивления типа КГ, платиновый термометр сопротивления ТСПН-2А и дифференциальные термодпары хромельконстантан, отличающиеся низкой теплопроводностью и достаточной чувствитель-

ностью в рассматриваемой области температур.

На рисунке представлены результаты исследования зависимости интегральной степени черноты ( $\epsilon$ ) от температуры ( $T$ ) пяти конструкционных материалов, краткая характеристика которых приводится в таблице.

Из рисунка видно, что наибольшей отражающей способностью обладает образец 5, степень черноты которого в интервале от 78 до 150 К меняется от 0,02 до 0,07. Наиболее излучающим оказался образец 1, степень черноты которого остается постоянной в интервале 78 ÷ 150 К и равной 0,13.

Прослеживаемая зависимость между излучательной способностью материалов и плотностью тока при формировании слоев (см. табл. и рис.) неоднозначна, так как между металлическими слоями наносятся пленки блескообразователей, меняющихся от образца к образцу по химическому составу. Блескообразователи влияют на формирование поверхности последующего металлического слоя. Кроме того, пленки толщиной 6 ÷ 9 мкм являются прозрачными для излучения подложки в рассматриваемой области температур. Изученные факторы оказывают совместное влияние на радиационные свойства поверхности. Следует отметить, что все исследованные образцы имеют шероховатую поверхность с рисками легко различимыми визуально. Последнее, по-видимому, и привело к довольно большим значениям интегральных излучательных способностей всех измеренных образцов.

Экспериментальные результаты, полученные двумя разными методами для одних и тех же материалов, стыкуются между собой в пределах точности измерения. Максимальная погрешность в работе составила 3,5 ÷ 4%.

## ВЫВОДЫ

1. Значение интегральных излучательных способностей исследованных стальных образцов зависит от состояния поверхности подложки и покрытия.

2. Экспериментальные результаты по интегральным излучательным способностям материалов, полученные с привлечением двух разных методов измерения, согласуются между собой.

3. Радиационно-калориметрический метод, апробированный в работе, может быть рекомендован к использованию в измерениях при криогенных температурах.

Институт теплофизики  
СО АН СССР,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
7/XII 1978

## ЛИТЕРАТУРА

1. Handbook of thermophysical properties of solid materials. V. 1, Elements. Oxford — London — N. Y. — Paris, Pergamon press, 1961. 758 p.
2. Handbook of thermophysical properties of solid materials. V. 2. Alloys. Oxford — London — N. Y. — Paris, Pergamon press, 1962. 1272 p.
3. Излучательные свойства твердых материалов. Справочник. М., Энергия, 1974. 471 с.
4. Расторгуева Н. М., Рубцов Н. А. К исследованию интегральной излучательной способности материалов при низких температурах. — Изв. СО АН СССР, 1970, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3, с. 3—5.
5. Рубцов Н. А., Расторгуева Н. М. Приближенный анализ интегральной излучательной способности слоев NaCl и KBr в диапазоне температур 140 ÷ 370 К. — Изв. СО АН СССР, 1972, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3, с. 88—92.
6. Расторгуева Н. М. Радиационно-калориметрическая установка для измерения интегральных степеней черноты материалов при криогенных температурах. — В кн.: Теплообмен излучением. Новосибирск, Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1977, с. 113—116.

Н. Н. ПОНОМАРЕВ

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПЕРЕНОСА ЛУЧИСТОЙ ЭНЕРГИИ  
МОДИФИЦИРОВАННЫМ МЕТОДОМ СРЕДНИХ ПОТОКОВ

Анализ переноса лучистой энергии в дисперсных средах, где необходим учет многократного рассеяния, имеет важное значение для некоторых разделов науки и техники. Строгая постановка задач требует решения интегродифференциального уравнения с произвольной индикатрисой рассеяния. Достаточно точное решение уравнения переноса можно получить лишь с помощью быстродействующих ЭВМ на основе приближенных методов [1, 2]. В настоящей работе выбран простейший вариант метода средних потоков (СП) [3, 4], применявшийся ранее в физике ядерных реакторов.

СП-метод относится к классу нелинейных итерационных методов, обладающих высокой скоростью сходимости. В его основе лежит замена линейного уравнения переноса эквивалентной нелинейной системой уравнений, которая решается итерационно. Обычная схема СП-метода требует запоминания углового распределения интенсивности излучения на каждой итерации, что ведет к увеличению ячеек памяти ЭВМ. Данный метод нами модифицирован на основе идей работы [5] и затем обобщен на задачу с анизотропным рассеянием. Такой подход позволил провести аналитическое интегрирование по угловой переменной и тем самым исключить ее из итерационного процесса.

Рассмотрим модифицированный СП-метод на примере решения классической задачи переноса лучистой энергии. Пусть на верхнюю границу слоя поглощающей и рассеивающей среды падает параллельный поток монохроматического излучения под углом  $\Theta_0$ . Обозначим через  $\pi I_0$  поверхностную плотность потока на перпендикулярной к лучам площадке, находящейся на верхней границе слоя, тогда интенсивность рассеянного излучения (при условии, что она не зависит от азимута) определяется из уравнения

$$\mu \frac{\partial I}{\partial \tau} + I = B(\tau, \mu), \quad (1)$$

где

$$B(\tau, \mu) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{+1} I(\tau, \mu') \gamma(\mu, \mu') d\mu' + \frac{\lambda I_0}{4} \gamma(\mu, \mu_0) \exp(-\tau/\mu_0),$$

с граничными условиями

$$I(0, \mu) = 0, \mu < 0, I(\tau_0, \mu) = 0, \mu > 0. \quad (2)$$

Здесь  $\tau$  — оптическая глубина,  $\mu$  — косинус угла между осью  $\tau$  и направлением излучения,  $\lambda$  — альбеда однократного рассеяния,  $\mu_0$  — косинус угла наклона падающего излучения,  $\tau_0$  — оптическая толщина

слоя;  $\gamma(\mu, \mu') = \sum_{l=0}^N a_l P_l(\mu) P_l(\mu')$ , где  $P_l$  — полином Лежандра  $l$ -го порядка;  $a_l$  — коэффициент разложения.

Уравнение (1) записано для случая, когда индикатриса рассеяния постулирована в виде

$$\gamma(\zeta) = \sum_{l=0}^N a_l P_l(\zeta), \quad \int_{4\pi} \gamma(\zeta) \frac{d\Omega}{4\pi} = 1, \quad (3)$$

где  $\zeta$  — косинус угла между рассеянным и падающим пучками,  $d\Omega$  — элемент телесного угла.

Задачу о прохождении полусферического излучения через слой можно свести к предыдущей путем численного интегрирования искомых величин по  $\mu_0$ . Из уравнения (1) путем несложных преобразований можно получить систему уравнений средних потоков [4]

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\eta_+(\tau)}{m_+(\tau)} + \frac{\eta_-(\tau)}{m_-(\tau)} \right) + (1 - \lambda)(\eta_+(\tau) + \eta_-(\tau)) &= \frac{\lambda I_0}{2} \exp(-\tau/\mu_0), \\ \frac{d}{d\tau} (\delta_+(\tau) \eta_+(\tau) + \delta_-(\tau) \eta_-(\tau)) + \left( 1 - \frac{\lambda a_1}{3} \right) \left( \frac{\eta_+(\tau)}{m_+(\tau)} + \frac{\eta_-(\tau)}{m_-(\tau)} \right) &= \\ &= \frac{\lambda a_1 I_0}{6} \exp(-\tau/\mu_0), \end{aligned} \quad (4)$$

здесь

$$\eta_+(\tau) = \int_0^1 I(\tau, \mu) d\mu, \quad \eta_-(\tau) = \int_{-1}^0 I(\tau, \mu) d\mu \quad (5)$$

— усредненные по полусферам интенсивности излучения;

$$m_+(\tau) = \frac{\eta_+(\tau)}{q_+(\tau)}, \quad m_-(\tau) = \frac{\eta_-(\tau)}{q_-(\tau)} \quad (6)$$

— величины, обратные средним косинусам;

$$\delta_+(\tau) = \frac{p_+(\tau)}{\eta_+(\tau)}, \quad \delta_-(\tau) = \frac{p_-(\tau)}{\eta_-(\tau)} \quad (7)$$

— коэффициенты переноса в верхней и нижней полусферах;

$$q_+(\tau) = \int_0^1 I(\tau, \mu) \mu d\mu, \quad q_-(\tau) = \int_{-1}^0 I(\tau, \mu) \mu d\mu, \quad (8)$$

$$p_+(\tau) = \int_0^1 I(\tau, \mu) \mu^2 d\mu, \quad p_-(\tau) = \int_{-1}^0 I(\tau, \mu) \mu^2 d\mu \quad (9)$$

— угловые моменты.

К системе (4) следует присоединить граничные условия

$$\eta_+(0) = 0, \eta_-(\tau_0) = 0, \quad (10)$$

вытекающие из (2).

Система (4) является точным следствием уравнения (1), ее коэффициенты  $m_+$ ,  $m_-$ ,  $\delta_+$  и  $\delta_-$  определяются однородными дробно-линейными функционалами с положительной весовой функцией  $I(\tau, \mu)$ .

Ограничиваясь в разложении (3) случаем  $N=2$ , легко получить следующее выражение для функции источников:

$$B(\tau, \mu) = \frac{\lambda}{2} (a_0(\eta_+ + \eta_-) + a_1\mu(q_+ + q_-) +$$

$$+ \frac{a_2}{4} (3\mu^2 - 1) (3(p_+ + p_-) - (\eta_+ + \eta_-)) + \frac{I_0}{4} \exp(-\tau/\mu_0) \sum_{l=0}^2 a_l P_l(\mu) P_l(\mu_0)^* \quad (11)$$

Подставляя выражение (11) в формальное решение задачи (1), (2) для интенсивности излучения и проведя интегрирование по  $\mu$ , можно представить коэффициенты (6), (7) в аналитическом виде

$$m_+(\tau) = \frac{s_{+1}(\tau)}{s_{+0}(\tau)}, \quad m_-(\tau) = \frac{s_{-1}(\tau)}{s_{-0}(\tau)}, \quad \delta_+(\tau) = \frac{s_{+2}(\tau)}{s_{+0}(\tau)}, \quad \delta_-(\tau) = \frac{s_{-2}(\tau)}{s_{-0}(\tau)}, \quad (12)$$

где введены обозначения

$$s_{+n}(\tau) = \int_0^\tau \left( \frac{\lambda}{2} (a_0 \psi_0(\tau') E_{n+1}(\tau - \tau') + a_1 \psi_1(\tau') E_{n+2}(\tau - \tau') + a_2 \psi_2(\tau') (3E_{n+3}(\tau - \tau') - E_{n+1}(\tau - \tau'))) \right) d\tau', \quad n = 0, 1, 2; \quad (13)$$

$$s_{-n}(\tau) = (-1)^n \int_\tau^{\tau_0} \left( \frac{\lambda}{2} (a_0 \psi_0(\tau') E_{n+1}(\tau' - \tau) - a_1 \psi_1(\tau') E_{n+2}(\tau' - \tau) + a_2 \psi_2(\tau') (3E_{n+3}(\tau' - \tau) - E_{n+1}(\tau' - \tau))) \right) d\tau'; \quad n = 0, 1, 2.$$

Здесь

$$\psi_0(\tau) = \eta_+(\tau) + \eta_-(\tau) + \frac{I_0}{2} \exp(-\tau/\mu_0);$$

$$\psi_1(\tau) = q_+(\tau) + q_-(\tau) + \frac{I_0 \mu_0}{2} \exp(-\tau/\mu_0); \quad (14)$$

$$\psi_2(\tau) = 3(p_+(\tau) + p_-(\tau)) - (\eta_+(\tau) + \eta_-(\tau)) + \frac{I_0(3\mu_0 - 1)}{2} \exp(-\tau/\mu_0).$$

$E_n(\tau)$  — интегральная показательная функция  $n$ -го порядка,  $E_n(\tau) = \int_0^\tau \exp(-\tau/\mu) \mu^{n-2} d\mu$ . Угловые моменты  $q_+$ ,  $q_-$ ,  $p_+$ ,  $p_-$  определяются через  $\eta_+$  и  $\eta_-$  из выражений (6) и (7).

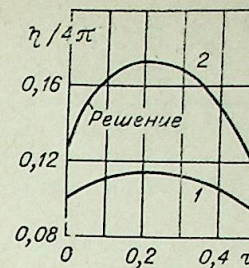
Коэффициенты переноса, приведенные к виду (12)—(14), позволили использовать для решения нелинейной системы (4) следующий итерационный процесс. В качестве нулевого приближения можно выбрать значения  $m_+ = 2$ ,  $m_- = -2$ ,  $\delta_+ = 1/3$  и  $\delta_- = 1/3$ , при которых система (4) превращается в аналог дифференциально-разностного приближения. Решая систему (4), находим нулевое приближение для  $\eta_+$  и  $\eta_-$ . Затем уточняем значения коэффициентов системы по формулам (12), где  $\eta_+$  и  $\eta_-$  берутся с предыдущей итерации, и определяем следующее приближение для  $\eta_+$  и  $\eta_-$ . Процесс повторяется до тех пор, пока не будет выполнен критерий конца итерации. Следует отметить, что сходимость описанного итерационного процесса слабо зависит от начального приближения.

Нами проведена серия расчетов с разными анизотропными индикатрисами ( $N \leq 2$ ) для различных альбедо  $\lambda$  и оптической толщины  $\tau_0$ . Расчеты показали быструю сходимость во всех рассмотренных случаях. При этом уже первая итерация близка к точному решению, для получения решения с повышенной точностью требовалось 7—9 итераций.

\* Здесь рассеяние первого порядка можно учесть точно.

Изменение по итерациям объемной плотности падающего излучения.

1 — нулевая итерация; 2 — первая итерация (точное решение).



На рисунке приведены кривые  $\eta/4\pi$ , полученные в результате итерации, где  $\eta = \int_{-1}^{+1} I d\mu$  — объемная плотность падающего излучения. Рассеяние изотропное:  $\lambda = 1$ ;  $\tau_0 = 0,5$ ;  $\mu_0 = 1$ . Видно, что уже на первой итерации численное решение совпадает с точным, при этом максимальное абсолютное отклонение от точного решения не превышает  $10^{-3}$ . Решение на нулевой итерации соответствует аналогу дифференциально-разностного приближения. Точные значения угловых моментов и коэффициентов переноса, полученные в процессе итераций, могут быть использованы для обоснования и улучшения различных приближенных моделей теории переноса. Данный метод можно распространить на задачи с граничными условиями более общего вида [6]: плоский слой, ограниченный непрозрачными диффузно излучающими и отражающими границами; слой, ограниченный непрозрачными диффузно излучающими и зеркально отражающими границами и т. д.

Высказанные соображения справедливы для случая слабывтянутой индикатрисы рассеяния (при  $N = 2$  максимальное значение коэффициента симметрии  $\varphi = 13,26$ ). Однако реальные индикатрисы могут иметь резкий максимум в направлении малых углов рассеяния, связанный с наличием крупных частиц в среде. Для решения задач многократного рассеяния с такими индикатрисами можно использовать приближенную методику на основе модифицированного СП-метода в сочетании с соотношениями подобия [7].

В заключение отметим, что модифицированный СП-метод легко обобщается на неоднородные среды, в которых величины  $\lambda$  и  $\gamma$  зависят от оптической глубины.

Отдел физико-технических проблем  
энергетики Уральского научного центра АН СССР,  
Свердловск

Поступила в редакцию  
24/VII 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. М., ИЛ, 1953, с. 431.
2. Марчук Г. И. Методы расчета ядерных реакторов. М., Атомиздат, 1961, с. 381.
3. Гермогенова Т. А., Сушкевич Т. А. Решение уравнения переноса методом средних потоков. — В кн.: Вопросы физики защиты реакторов. М., Атомиздат, 1969, с. 34—46.
4. Николойшвили Ш. С. О решении односкоростного управления переноса с использованием приближения Ивона — Мертенса. — Атомная энергия. 1966, 20, вып. 4, с. 344.
5. Труханов Г. Я. Решение задач термализации методом квазидиффузии. Препринт ИАЭ-1875. М., 1969.
6. Свэрроу Э. М., Сесс Р. Д. Теплообмен излучением. М., Энергия, 1971, с. 294.
7. Соболев В. В. Рассеяние света в атмосферах планет. М., Наука, 1972, с. 335.

Н. А. РУБЦОВ, А. А. ЕМЕЛЬЯНОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ  
ОПТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ОКСИ БЕРИЛЛИЯ  
В ОБЛАСТИ ТЕМПЕРАТУР ПЛАВЛЕНИЯ

Соединения металлов и неметаллов с бериллием характеризуются ценными химическими и физико-техническими свойствами. К сожалению, они изучены недостаточно, и это затрудняет не только понимание особенностей электронного строения таких соединений, но также и их использование в практике. Значительный интерес вызывает реакция окисления среды с частицами бериллия, которая протекает с выделением большого количества тепла. Определение интенсивности теплового излучения такой среды связано с решением уравнения переноса энергии излучения, учитывающего эффекты поглощения, рассеяния и излучения, а также с необходимостью иметь надежные данные по оптическим свойствам конденсированной фазы. В реальном диапазоне изменения спектра излучения конденсированной фазы определяющее влияние на уровень радиационных характеристик, а следовательно, и потоков энергии излучения, оказывает показатель поглощения излучения. Влияние показателя преломления менее значительно.

Цель настоящего исследования — экспериментальные измерения показателя поглощения окиси бериллия в видимой области спектра при температурах выше и ниже точки плавления. Литературные данные по температурной функции и дисперсии показателя поглощения конденсированной окиси бериллия весьма ограничены: в работах [1, 2] описываются эксперименты и свойства расплавленной окиси бериллия при длине волны излучения 0,6 мкм, ниже точки плавления, а для других длин волн такие данные практически отсутствуют.

При рассмотрении взаимодействия излучения с плоским слоем поглощающей и рассеивающей среды конечных размеров следует воспользоваться уравнением баланса энергии излучения, записываемым в безразмерной форме закона сохранения

$$a_v + r_v + d_v = 1, \quad (1)$$

где  $a_v$ ,  $r_v$ ,  $d_v$  — монохроматические значения поглощательной, отражательной и пропускательной способностей рассматриваемого слоя. Используя источники внешнего облучения с температурным уровнем, близким к уровню исследуемого изотермического слоя, предполагаем выполнение закона Киркгофа, согласно которому поглощательная способность слоя равна его излучательной способности (степени черноты):

$$a_v = \epsilon_v. \quad (2)$$

Если плоский слой исследуемой дисперсной среды облучается параллельным либо близким к нему потоком излучения, то в условиях справедливости закона Бугера пропускательная способность слоя опреде-

ляется следующим образом:

$$d_v = \Delta Q_{Sv}^d / \Delta Q_{Sv}^* \quad (3)$$

Здесь  $\Delta Q_{Sv}^d$  и  $\Delta Q_{Sv}^*$  — измеряемые значения потоков соответственно пропущенного и падающего в направлении  $S$  через сечение  $\Delta F$  излучений. Объем среды, взаимодействующий с падающим излучением:  $\Delta V = \Delta F \cdot \Delta S$ , где  $\Delta S$  — геометрическая толщина запыленного слоя,  $\Delta F$  — площадь, освещаемая зондирующим лучом при пересечении с исследуемым запыленным потоком.

Для определения полной отражательной способности слоя необходимо измерить энергию излучения, рассеянную по различным направлениям. С целью установления энергетических характеристик рассеяния излучения объемом  $dV = dF dS$  по направлениям при падении излучения из направления  $S$  вводится следующее определение:

$$d^5 Q_{\beta v}(M, S') = \frac{1}{4\pi} \beta v(M, S') d\Omega_S I_v(M, S) dF dS d\Omega_S dv, \quad (4)$$

представляющее собой элементарный поток энергии излучения, рассеиваемый объемом с точкой  $M$  в направлении  $S'$  в пределах телесного угла  $d\Omega_{S'}$ , совпадающего с направлением  $S'$ . Здесь  $\beta v(M, S')$  — коэффициент рассеяния элементарного объема с точкой  $M$  в направлении  $S'$ . Элементарный поток энергии излучения, входящий в исследуемый объем через площадку  $dF$ , определяется из соотношения

$$d^3 Q_{*v}(M, S) = I_v(M, S) dF d\Omega_S dV. \quad (5)$$

Тогда коэффициент рассеивания излучения элементарного объема с точкой  $M$  в направлении  $S'$  определяется следующим образом:

$$\beta v(M, S') = [d^5 Q_{\beta v}(M, S') / dQ_{*v}(M, S)] \cdot [4\pi / (dS d\Omega_S)]. \quad (6)$$

При рассмотрении реальной схемы измерений имеем

$$\beta v(M, S') = [\Delta Q_{\beta v}(M, S') / \Delta Q_{*v}(M, S)] \cdot [4\pi / (\Delta S \Delta \Omega_S)]. \quad (7)$$

Здесь  $\Delta \Omega_{S'}$  — конечное значение элементарного телесного угла, численно совпадающее с инструментальным значением раствора телесного угла, в пределах которого осуществляется прием, передача и последующая регистрация рассеянного излучения. Численное значение  $\Delta \Omega$  определяется из следующих соображений:

$$\Delta \Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta/2} \sin \varphi d\varphi = 2\pi \left(1 - \cos \frac{\theta}{2}\right).$$

Отражательная способность среды конечного объема в пренебрежении эффектами многократного рассеяния может быть определена из соотношения, вытекающего из уравнения (7):

$$r_v(M) = \Delta Q_{\beta v}(M) / \Delta Q_{*v}(M, S) = \sum \frac{1}{4\pi} \beta i v(M, S') \Delta \Omega_i \Delta S. \quad (8)$$

Здесь  $i$  — число выделяемых в эксперименте направлений рассеяния по лучу  $S'$ , охватывающих сферу. Тогда из уравнения (1) с учетом (2) получаем

$$\epsilon_v = 1 - (r_v + d_v). \quad (9)$$

Если рассеивающий изотермический слой сравнительно малой оптической толщины заполнен достаточно крупными частицами, то при определении  $\epsilon_v$  эффектами рассеяния можно пренебречь. Такое допущение выполняется в средах с малой концентрацией частиц ( $h_0 < 1,5$ ) с простейшей, вытянутой вперед, индикатрисой рассеяния.

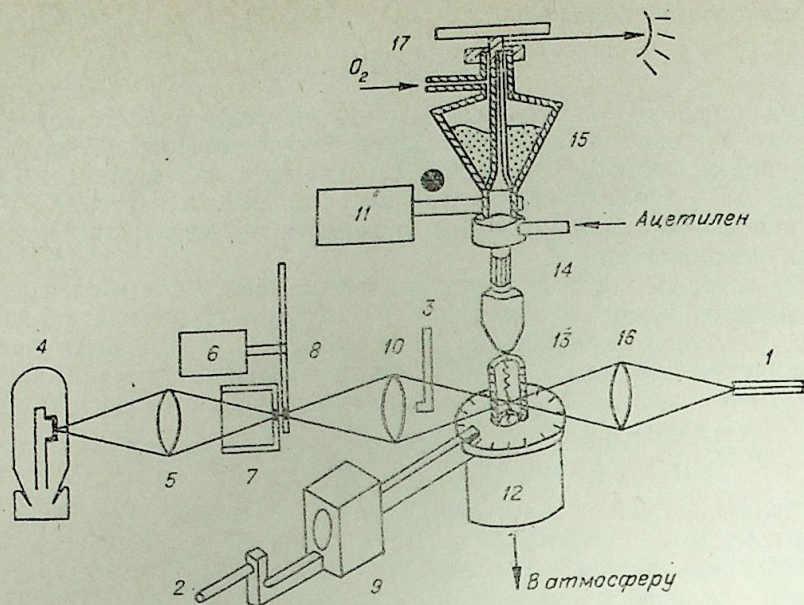


Рис. 1. Оптическая схема экспериментальной установки.

Степень черноты в этих условиях определяется соотношением вида [4]

$$\varepsilon_v = 1 - 2K_3(h_{0v}), \quad (10)$$

где  $h_{0v} = \alpha_v \Delta S$ ,  $K_3(x) = \int_0^1 e^{-x/\mu} \mu d\mu$ ,  $\alpha_v$  — коэффициент объемного поглощения «сплошной» среды. Определяя экспериментальное значение  $\varepsilon_v$  из (9) с помощью (10), вычисляем значение коэффициента объемного поглощения. Введем безразмерный коэффициент поглощения [5]

$$\kappa_v = \alpha_v / F\mu. \quad (11)$$

Здесь  $F$  — удельная поверхность частиц, содержащихся в грамме вещества конденсированной фазы,  $\text{см}^2/\text{г}$ ;  $\mu$  — весовая концентрация частиц,  $\text{г}/\text{см}^3$ .

Из экспериментальных измерений представляется возможным определить мнимую часть комплексного показателя преломления  $m = n - i_x$ . Следуя [6], для крупных почти прозрачных частиц между безразмерным коэффициентом поглощения  $\kappa_v$  и показателем поглощения  $\chi_v$  устанавливается следующая связь:

$$\kappa_v = \frac{8}{3} a(n) \chi_v \rho.$$

Здесь в области значений  $1,6 < n < 2,0$  коэффициент  $a(n) = 1,37$ , ( $\rho = \pi D/\lambda$ ,  $D$  — диаметр частицы) [6].

Исследования оптических свойств окиси бериллия проводились на установке, схема которой представлена на рис. 1. Установка позволяет нагревать исследуемый поток частиц, измерять оптические характеристики в спектральном интервале длин волн  $0,3-1,2$  мкм, температуру и концентрацию частиц. В эксперименте измеряются прошедшее через исследуемый дисперсный поток, рассеянное под различными углами и испускаемое частицами излучения. Для разделения указанных потоков излучения используется модуляционный метод. При измерении слабых сигналов, вызываемых рассеянным излучением, используется принцип

Тип	Плавная окись бериллия	Литература
Плотность	3 г/см <sup>3</sup>	[11]
Средний диаметр частицы	$7 \cdot 10^{-1}$ см	[11]
Температура плавления	2815 К	[11]
Показатель преломления	1,72	[11]

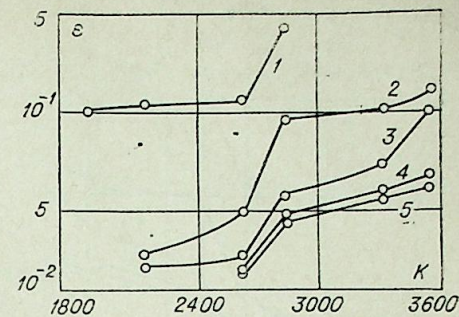


Рис. 2. Коэффициент излучения потока частиц окиси бериллия  $F_\mu = 0,912$  1/см. На рис. 2—4  $\lambda = 0,4$  (1);  $0,6$  (2);  $0,9$  (3);  $1,1$  (4);  $1,2$  мкм (5).

синхронного детектирования. В качестве эталонного источника применялась вольфрамовая лампа типа Си-10-300, предварительно проградированная по исходным образцам в СибНИИМе. Для измерения истинной температуры излучающихся частиц используется метод сравнения излучения среды, заполненной частицами, с излучением эталона по закону Вина, а также метод цветового пирометра [7]. В используемом цветовом пирометре применено оригинальное переключающее устройство [8]. Порошок окиси бериллия нагревается с помощью высокотемпературного нагревателя, основанного на применении кислородно-ацетиленовой горелки. Конструкция и работа нагревающего устройства с питателем описаны в [9]. Работа установки и методика обработки экспериментальных результатов описаны в [10].

Основные свойства частиц окиси бериллия, используемого в эксперименте, представлены в таблице.

На рис. 2 приведено экспериментальное значение степени черноты потока частиц окиси бериллия для  $F_\mu = 0,912$  1/см при различных температурах в видимой области спектра. Наблюдается значительный рост излучательной способности дисперсного потока с уменьшением длины волны излучения. Так в диапазоне изменения  $\lambda = 1,2-0,4$  мкм коэффициент излучения возрастает почти на порядок. С ростом температуры происходит небольшое увеличение степени черноты. В области плавления окиси бериллия для всех измеренных длин волн отмечается интенсивный рост излучательной способности. Так при изменении температуры в диапазоне  $2600-2850$  К степень черноты увеличивается в среднем в 5 раз.

На рис. 3,4 приведены значения безразмерного коэффициента поглощения  $\kappa_v$  и показателя поглощения  $\chi_v$ . Здесь также отмечается существенная зависимость  $\kappa_v$  и  $\chi_v$  от длины волны и температуры. Область плавления выделяется интенсивным изменением рассматриваемых характеристик. На рис. 4 для сравнения представлены результаты работы [2]. Данные Адамса относятся к температурам, находящимся выше точки плавления при длине волны  $0,6$  мкм. Можно отметить аналогичное изменение показателя поглощения при возрастании температуры. В количественном отношении наши данные и результаты, представленные в [2], расходятся почти на порядок. Следует однако отметить, что результаты работы [2] являются завышенными, так как коэффициент поглощения в этих измерениях приравнивался к коэффициенту ослабления. Наши измерения показали, что процесс ослабления излучения в таких системах в значительной степени определяется рассеянием и коэффициент ослабления оказывается существенно больше коэффициента поглощения. Сравните наши данные по коэффициенту ослабления с результатами работы [2], к сожалению, не представляется

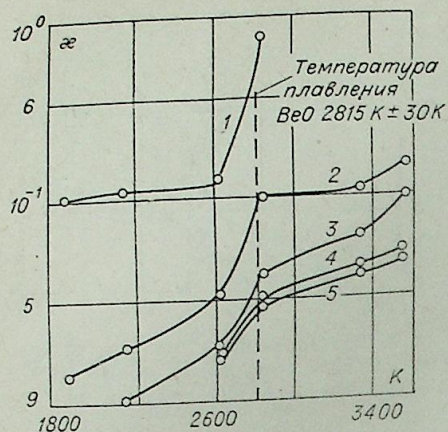


Рис. 3. Коэффициент поглощения окиси бериллия в области температур плавления.

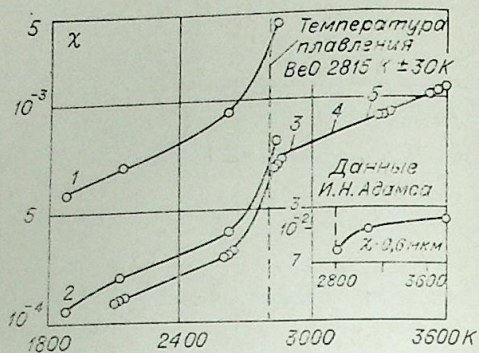


Рис. 4. Показатель поглощения окиси бериллия при переходе через точку плавления.

возможным, так как характерный размер частиц конденсированной фазы в экспериментах Адамса был примерно на порядок меньше характерного размера частиц, используемых в наших экспериментах.

#### ВЫВОДЫ

Процесс плавления окиси бериллия сопровождается резким увеличением мнимой части комплексного показателя преломления (показатель поглощения излучения,  $\chi_v$ ). Это обстоятельство свидетельствует о качественной перестройке кристаллической структуры окиси бериллия при переходе через точку плавления.

Институт теплофизики  
СО АН СССР,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
26/VI 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Adams J. M. Apparent absorption index of molten beryllium oxide.— JOST, 1969, v. 9, p. 237—244.
2. Adams J. M. The measurement of gas particle temperatures in rocker motor chambers and exhaust plumes.— *Pyrodynamics*, 1968, v. 6, p. 1—28.
3. Иванов А. П., Хайруллина А. Я. Об определении коэффициента экстинкции мутных сред.— *Изв. АН СССР. Сер. физика атмосферы и океана*, 1966, 11, № 7, с. 721—728.
4. Рубцов Н. А. Исследования радиационного и комбинированного переноса тепла. Докт. дис. Новосибирск, 1970.
5. Блох А. Г. Тепловое излучение в котельных установках. Л., Энергия, 327 с.
6. Попов Ю. А. Излучение слоя крупных частиц окиси алюминия.— *ИФЖ*, 1976, 31, № 6, с. 896—899.
7. Гордов А. Н. Измерение температур газовых потоков. Л., Машгиз, 1962, с. 136.
8. Гошмер Б. А., Емельянов А. А. Переключающее устройство пирометра цветной температуры. Авт. свид. СССР № 572661.— *Бюл. изобр.*, 1977, № 34.
9. Емельянов А. А. Применение высокотемпературных нагревателей при изучении оптических свойств дисперсной среды.— В кн.: *Теплообмен излучением*. Новосибирск, ИТФ СО АН СССР, 1977, с. 117.
10. Рубцов Н. А., Емельянов А. А. Экспериментальное исследование оптических свойств потока частиц окиси алюминия при высоких температурах. Препринт 25-78. Новосибирск, 1978. 38 с.
11. Кржижановский Р. Э., Штерн З. Ю. Теплофизические свойства неметаллических материалов. Л., Энергия, 1973, 336 с.

В. А. ЛЕБЕДЕВ

### ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ УГЛОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ НЕКОТОРЫХ ИЗЛУЧАЮЩИХ СИСТЕМ

В связи с постоянным расширением круга инженерных задач теплообмена излучением каждый раз возникает необходимость в вычислении угловых коэффициентов, которые определяют долю испускаемого излучения, достигающую облучаемой поверхности.

В настоящее время не существует справочного издания, содержащего в достаточном для инженерной практики объеме сведения о значениях угловых коэффициентов излучения, несмотря на большое количество данных, полученных в этой области советскими и зарубежными исследователями.

Сведения, касающиеся аналитической или численной формы представления угловых коэффициентов для конкретных конфигураций излучающих систем, наиболее полно приведены в монографии Р. Зигеля и Дж. Хауэлла [1]. В ней дается таблица ссылок на литературные источники, содержащие определение более 170 угловых коэффициентов, в приложении к книге помещено около 30 значений некоторых угловых коэффициентов в виде достаточно простых формул.

При анализе помещенных в монографии [1] угловых коэффициентов можно отметить, что многие из них либо обладают свойствами инвариантности и нет необходимости ссылаться на различные источники для получения их численных значений или аналитических выражений, либо одни угловые коэффициенты легко выражаются через другие с помощью так называемой алгебры угловых коэффициентов.

В частности, для углового коэффициента излучения элементарной полосы конечной длины на перпендикулярный ей круглый диск, расположенный у одного края полосы (рис. 1, а), в монографии дается ссылка на работы [2, 3], а для углового коэффициента излучения внутренней поверхности стенок цилиндра конечных размеров на его торцы (рис. 1, б) дана ссылка на работы [4, 5].

Следует отметить, что эти угловые коэффициенты имеют одинаковую аналитическую форму представления. Другими словами, доля излученной энергии, попавшей на диск  $A_2$  либо с элементарной полосы  $dA_1$ , лежащей на образующей цилиндра, либо с части цилиндрической стенки между двумя любыми образующими и основаниями (рис. 1, в), или со всей поверхности стенки цилиндра  $A_1$ , будет одной и той же. Это вытекает из свойств взаимности и замыкаемости угловых коэффициентов.

Используя обозначения, принятые в работе [1], проведем анализ интегральных угловых коэффициентов для дискретного случая. Коэффициенты излучения, падающего с одного торца цилиндра на другой,  $F_{2-3}$  и на боковые стенки  $F_{2-1}$ , связаны соотношением, которое характеризует свойство замкнутости

$$F_{2-1} + F_{2-3} = 1. \quad (1)$$

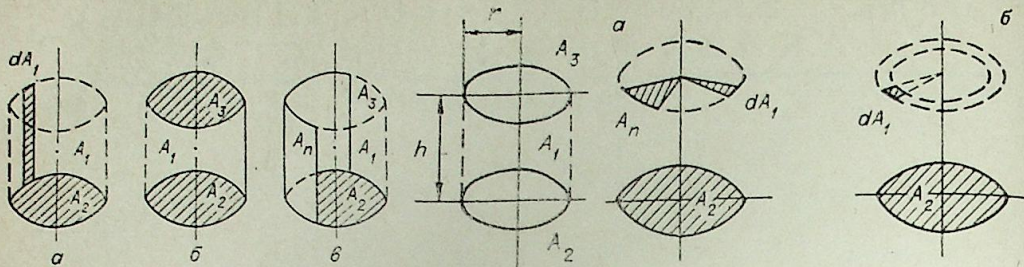


Рис. 1.

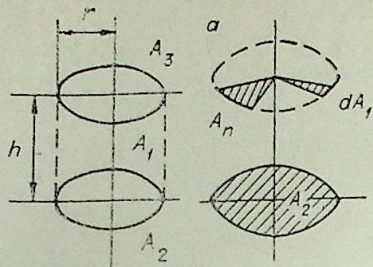


Рис. 2.

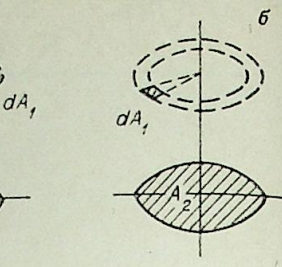


Рис. 3.

Разбив поверхность  $A_1$  на  $n$  равных частей  $A_n = A_1/n$ , расположенных между образующими и основаниями цилиндра, представим равенство (1) в виде

$$F_{2-3} + \sum_n F_{2-n} = 1 \quad (2)$$

или

$$F_{2-n} = (1 - F_{2-3})/n, \quad (3)$$

что очевидно в силу осесимметричности излучающей системы. Используя соотношения свойства взаимности  $A_n F_{2-n} = A_2 F_{n-2}$ , из (3) получаем коэффициент излучения, падающего с  $A_n$  на  $A_2$ ,

$$F_{n-2} = \frac{(1 - F_{2-3}) A_2}{n A_n}$$

или

$$F_{n-2} = (1 - F_{2-3}) \frac{A_2}{A_1}, \quad (4)$$

который не зависит от числа разбиений  $n$  и переходит в локальный коэффициент излучения  $F_{d1-2}$  для данной конфигурации системы при  $n \rightarrow \infty$ .

Для анализа углового коэффициента излучения  $F_{d1-2}$  от элементарной полосы  $dA_1$  вдоль всей образующей стенки цилиндра  $A_1$  на основание цилиндра  $A_2$  следует вначале записать равенство, справедливое для взаимных поверхностей  $H_{1-2}$  и  $H_{2-1}$  излучающей системы «основание цилиндра — его стенка»  $H_{2-1} + H_{2-3} = A_2$  или, так как  $H_{2-1} = H_{1-2} = \int_{A_1} F_{d1-2} dA_1$ ,

$$\int_{A_1} F_{d1-2} dA_1 + H_{2-3} = A_2. \quad (5)$$

Поскольку  $H_{2-3} = F_{2-3} \cdot A_2$ , то (5) запишется в виде

$$\frac{1}{A_2} \int_{A_1} F_{d1-2} dA_1 + F_{2-3} = 1,$$

откуда

$$\int_{A_1} F_{d1-2} dA_1 = A_2 (1 - F_{2-3}). \quad (6)$$

Подставив в уравнение (6) значение  $H_{1-2} = \int_{A_1} F_{d1-2} dA_1$ , его можно записать в виде

$$\begin{aligned} H_{1-2} &= A_2 (1 - F_{2-3}) \\ \text{или} \\ A_1 F_{1-2} &= A_2 (1 - F_{2-3}), \end{aligned} \quad (7)$$

откуда получаем значение интегрального коэффициента излучения от стенки цилиндра на его основание

$$F_{1-2} = \frac{A_2}{A_1} (1 - F_{2-3}). \quad (8)$$

Локальный коэффициент излучения  $F_{d1-2}$  от элементарной полосы  $dA_1$  на образующей цилиндра  $A_1$  по определению зависит от величины площади  $A_2$  и от ориентации  $dA_1$  относительно  $A_2$ . Из постоянства  $A_2$  и осесимметричности излучающей системы следует, что  $F_{d1-2} = \text{const}$ , и из (6) следует

$$F_{d1-2} = \frac{A_2}{A_1} (1 - F_{2-3}). \quad (9)$$

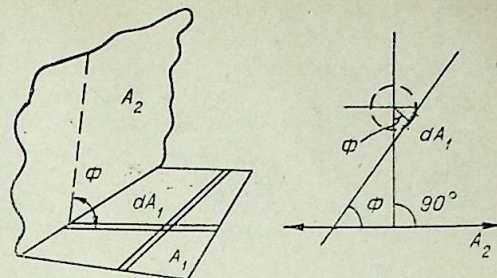


Рис. 4.

Из сравнения выражений (4), (8), (9) видно, что  $F_{1-2} = F_{d1-2} = F_{n-2} = \text{inv}$  и зависят от радиуса диска  $A_2$  и от высоты образующей цилиндра  $A_1$ , так как  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $F_{2-3}$  зависят от этих геометрических параметров.

С целью получения инвариантной формулы углового коэффициента для указанных конфигураций (см. рис. 1) следует воспользоваться данной в работе [1] формулой для углового коэффициента между двумя дисками равного диаметра (рис. 2)

$$F_{2-3} = F_{3-2} = \frac{1}{2} [X - \sqrt{X^2 - 4}], \quad X = 2 + \frac{1}{R^2}, \quad R = \frac{r}{h},$$

откуда легко получаем

$$F_{n-2} = F_{1-2} = F_{d1-2} = \frac{1}{4r} (\sqrt{4r^2 + h^2} - h). \quad (10)$$

Из приведенных выше соображений следует и инвариантность угловых коэффициентов двух следующих излучающих систем: «секторный элемент круглого диска — диск в параллельной плоскости» (рис. 3, а), «два круглых диска в параллельных плоскостях», а также инвариантность угловых коэффициентов трех систем: «радиальный элемент круглого диска — параллельный диск», «кольцо элементарной ширины — параллельный диск», «элемент плоскости — параллельный диск» (рис. 3, б). Последний приведен в [1].

Соображения об инвариантности угловых коэффициентов справедливы также для излучающих систем элемент плоской поверхности — бесконечно протяженная плоскость, составляющая с плоскостью элемента угол  $\Phi$  (указанный элемент может представлять собой полосу любой кривизны и протяженности при элементарной ширине), «плоская фигура любой конфигурации и площади — бесконечно протяженная плоскость, составляющая с плоскостью фигуры угол  $\Phi$ » (рис. 4, а), «бесконечно длинная или конечной длины полоса элементарной ширины на поверхности цилиндра — параллельная цилиндру бесконечная плоскость» (рис. 4, б). Для последней системы в [1] приведена формула для углового коэффициента  $F_{d1-2} = \frac{1}{2} (1 + \cos \Phi)$ .

Рассмотрим следующие системы: 1) элемент или элементарная полоса плоской поверхности любой длины — плоскость конечной ширины и бесконечной длины (рис 5, а), 2) бесконечно длинная элементарная полоса и параллельный ей полуцилиндр (рис. 5, б), 3) элементар-

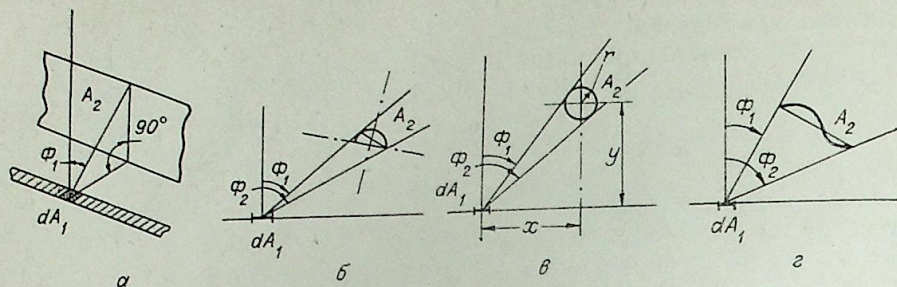


Рис. 5.

ная полоса любой длины — бесконечно длинный цилиндр (рис. 5, в), 4) элемент или элементарная полоса плоской поверхности любой длины — бесконечно длинная поверхность произвольной формы, образованная линией, перемещающейся параллельно самой себе и плоскости элемента (рис. 5, г). В [1] даны угловые коэффициенты для системы 3  $F_{d2-1} = \frac{Y}{X^2 + Y^2}$ ,  $X = x/r$ ,  $Y = y/r$  и системы 4  $F_{d1-2} = \frac{1}{2} (\sin \Phi_2 - \sin \Phi_1)$ .

Из рис. 5 видно, что угловой коэффициент  $F_{d1-2} = \frac{1}{2} (\sin \Phi_2 - \sin \Phi_1)$  справедлив для всех четырех систем.

Таким образом, ряд примеров, который может быть продолжен свидетельствует о том, что во многих случаях для определения угловых коэффициентов в излучающих системах некоторых конфигураций нет необходимости в вычислении угловых коэффициентов или в поиске опубликованных данных. В частности, приведенные выше угловые коэффициенты характеризуют все упомянутые здесь излучающие системы, тогда как авторы [1], не учитывая свойства инвариантности, отсылают своих читателей к работам [2—10].

Широко пользуясь алгеброй угловых коэффициентов, можно при описанном подходе в значительной степени сократить количество необходимых ссылок на литературные источники при систематизации угловых коэффициентов или работе с ними.

## ВЫВОДЫ

1. Доказана инвариантность ряда локальных и интегральных угловых коэффициентов излучения для частных случаев осесимметричных излучающих систем и систем, содержащих бесконечно протяженные поверхности.

2. Показан подход к выявлению инвариантности угловых коэффициентов излучения для систем различной конфигурации с привлечением свойств взаимности и замкнутости угловых коэффициентов при анализе каждого частного случая.

Институт теплофизики  
СО АН СССР, Новосибирск

Поступила в редакцию  
5/1 1979

## ЛИТЕРАТУРА

1. Зигель Р., Хауэлл Дж. Теплообмен излучением. М., Мир, 1975.
2. Stevenson J. A., Grafton J. C. Radiation Heat Transfer Analysis for Space Vehicles Rept. SID-61-91, North American Aviation (AFASD TR-61-119, pt. 1), 1961, Sept. 9.

3. Leuenberger H., Person P. A. Compilation of Radiation Shape Factors for Cylindrical Assemblies, paper N 56-A-44, ASME, Nov, 1956.
4. Bien D. D. Configuration Factors for Thermal Radiation from Isothermal Inner Walls of Cones... J. Spacecraft Rockets, 1966, 4, 1.
5. Buschman A. J., Pittman C. M. Configuration Factors for Exchange of Radiant Energy between Axisymmetrical Sections of Cylinders, Cones and Hemispheres and Their Bases. NAAS TND-944, 1961.
6. Hottel H. C., Sarofim A. F. Radiant Transfer, Mc Graw-Hill, N.—Y., 1967.
7. Hamilton D. C., Morgan W. R. Radiant — Interchange Configuration Factors. NASA TN-2836, 1952.
8. Kreith S. Radiant Heat Transfer, International Texbook Co., Scranton, Pa., 1962, 236.
9. Wiebelt J. A. Engineering Radiation Heat Transfer, Holt, Rinehart and Winston, Inc. N. Y., 1966.
10. Спэрроу Э. М., Эккерт Э. Р. Г. Взаимное влияние ребра и базовой поверхности в процессе излучения. Труды амер. о-ва инж.-мех. Сер. С, Теплопередача, 1962, 84, № 1, p. 17—25.



эквивалентную систему (5), (6), получаем начально-краевую задачу

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t^0} - \frac{zf'_x}{f} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial z} + \frac{1}{Pr} \left[ u \left( \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{zf'_x}{f} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right) + \frac{v}{f} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right] = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} - \frac{2zf'_x}{f} -$$

$$- \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial z} + \frac{2f'_x{}^2 - f''_x \cdot f}{f^2} \cdot z \frac{\partial \Omega}{\partial z} + \left( \frac{1}{f^2} + \frac{z^2 f'_x{}^2}{f^2} \right) \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} +$$

$$+ Gr \cdot Pr \times \left[ \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{zf'_x}{f} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \cos \alpha - \frac{1}{f} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} \sin \alpha \right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{zf'_x}{f} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{f} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = 0; \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{2zf'_x}{f} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{2f'_x{}^2 - f''_x \cdot f}{f^2} \cdot z \frac{\partial u}{\partial z} + \left( \frac{1}{f^2} + \frac{z^2 f'_x{}^2}{f^2} \right) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = - \frac{1}{f} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial z},$$

которая решается в области  $\{0 \leq x \leq 0,5; 0 \leq z \leq 0,5\}$  при начальных условиях  $\Omega|_{t^0=0} = 0, f(x, 0) = 0,5$  и краевых условиях  $u = v = 0$ , и начально-краевую задачу

$$(\rho^0 c^0 + m \delta (\theta - \theta_\Phi)) \frac{\partial \theta}{\partial t^0} + \frac{1}{Pr} \left( u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \frac{\lambda^0}{Pr} \Delta \theta + \bar{\Phi}^0,$$

$$\theta|_{t^0=0} = \frac{T_H - T_C}{T_H - T_\Phi} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}} = 0, \quad \theta \Big|_{0 < x < \frac{1}{4}} = 0,$$

где

$$m = \frac{M}{\rho_{жф} c_{ж}}, \quad Gr = \frac{8g\beta (T_H - T_\Phi) L^3 \rho_{жф}^2}{\mu^2},$$

$$Ec = \left( \frac{\lambda_{жк}}{2\rho_{жф} c_{ж} L} \right)^2 \cdot \frac{1}{c_{ж} (T_H - T_\Phi)}, \quad Pr^{-1} = \frac{\lambda_{жк}}{\mu c_{ж}},$$

если

$$\theta > \theta_\Phi, \quad \rho^0 c^0 = 1, \quad \lambda^0 = 1, \quad \bar{\Phi}^0 = Ec \left[ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \text{ при}$$

$$\theta < \theta_\Phi, \quad \rho^0 c^0 = \rho_T c_T / (\rho_{жф} c_{ж}),$$

$$\lambda^0 = \lambda_T^0, \quad \bar{\Phi}^0 = 0, \quad u = v \equiv 0.$$

Для решения системы (8), (9) применена разностная схема переменных направлений [5, 6], аппроксимация конвективных членов построена по методике [7, 8], краевые условия аппроксимировались трехточечными формулами. В целом схема имеет 2-й порядок погрешностей по пространственным переменным и 1-й по времени. Решение разностных аналогов 2-го и 3-го уравнений системы (8) проводилось итерационным методом минимальных невязок. Для пересчета  $\theta$  из области  $\{0 \leq x \leq 0,5; 0 \leq y \leq 0,5\}$  в  $\{0 \leq x \leq 0,05; 0 \leq z \leq 0,5\}$  и компонент скорости в обратном порядке применялась кубическая сплайновая интерполяция [9].

Расчеты проведены на сетке  $11 \times 11$  (контрольные — на сетке  $16 \times 16$ ) с шагом по времени 0,005 для значений параметров

$$Pr = 10; \quad \theta_\Phi = 0,245; \quad \theta_n = 0,25; \quad \alpha = \pi/2; \quad \lambda_T^0 = 1;$$

$$\rho_T c_T / (\rho_{жф} c_{ж}) = 1, \quad m = 0,6, \quad Ec = 0, \quad Gr = 10^6; 10^4.$$

Сила тяжести ортогональна направлению фронта фазового перехода, что приводит к возникновению конвективного движения в жидкой фазе. На рис. 1 представлены положения фронта затвердевания  $Gr = 10^4$  и различных моментов безразмерного времени. Здесь же нанесены линии тока для моментов времени  $t^0 = 0,045; 0,075; 0,105$ . С уменьшением области жидкой фазы интенсивность конвективного движения возрастает и в последние моменты времени перед полным затвердеванием происходит разделение конвективного движения на два замкнутых движения, затем их слияние и повторное разделение, что иллюстрируется на рис. 2, 3 графиками  $y$  составляющей скорости для  $Gr = 10^4$  и  $Gr = 10^6$  в различные моменты времени. Эпюра 3 соответствует моменту разделения на два замкнутых движения. На рис. 4 представлена эпюра безразмерной температуры  $\theta$  в сечении  $y = 0,3$  при  $t^0 = 0,075, Gr = 10^6$ . Численные расчеты при  $Ec = 0$  показали, что число Грасхора влияет на скорости конвективного движения в сторону их возрастания, при  $Ec \neq 0$ , как и следовало ожидать, энергия вязкой диссипации приводит к повышению температуры жидкости, что замедляет процесс затвердевания при данном температурном режиме.

Некоторые результаты численного решения аналогичной задачи в полости, у которой вся верхняя плоскость  $x_2 = L, 0 \leq x_1 \leq L$  поддерживается при постоянной температуре  $T_c < T_\Phi$  приведены на рис. 5—7 для  $Gr = 10^6, Pr = 10, \alpha = \pi/2, Ec = 0, \theta_\Phi = 0,245, \theta_n = 0,25$ , шаг по времени был выбран равным 0,0005.

На рис. 5 построены линии тока на момент времени  $t^0 = 0,042$ , при этом жидкая фаза занимает область безразмерных переменных  $0 \leq x \leq 0,5, 0 \leq y \leq 0,265$ . Максимум функции тока является возрастающей функцией времени, фронт фазового перехода на каждый момент времени является плоскостью (прямой линией плоскости  $xoy$ ), параллельной оси  $ox$ . Зависимость положения фронта фазового перехода от времени  $t^0$  представлена на рис. 6, из которого видно, что, начиная с момента времени, которому соответствует выпуклость графика, скорость продвижения фронта фазового перехода значительно снижается по сравнению со скоростью в начале процесса. Это объясняется уменьшением теплоотвода через верхнюю плоскость полости в силу наличия корки твердой фазы и подтверждается графиком зависимости от времени среднего числа Нуссельта на верхней плоскости полости на рис. 7. Как видно, с течением времени теплоотвод через верхнюю плоскость снижается, что приводит к замедлению процесса затвердевания.

Относительно примененных разностных схем переменных направлений при решении уравнений для вихря скорости и (9) следует указать на абсолютную устойчивость этих схем, что позволило выбрать шаг по времени, исходя из требований точности и соответствия физическому процессу кристаллизации. Для ускорения сходимости итераций по мето-

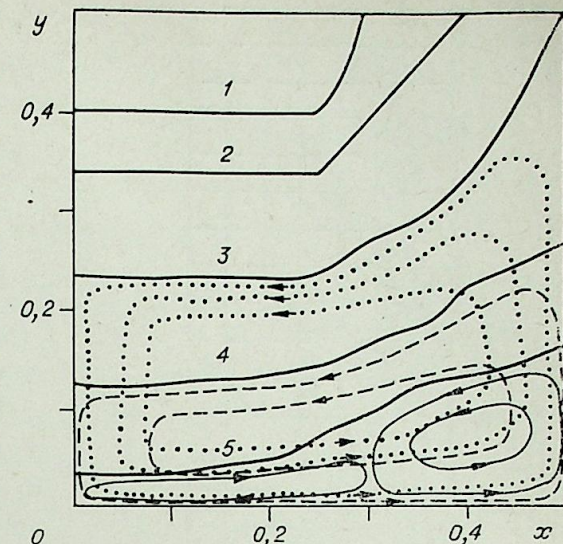


Рис. 1. Положения фронта затвердевания для  $Gr = 10^4$  и моментов безразмерного времени.  $t^0 = 0,05$  (1); 0,015 (2); 0,045 (3); 0,075 (4); 0,105 (5).

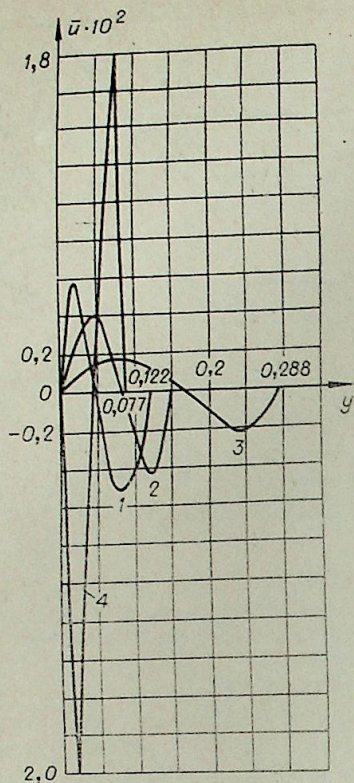


Рис. 2. График составляющей скорости для  $Gr=10^6$  в различные моменты времени.  $t^0=0,075$  (1);  $0,045$  (2);  $0,015$  (3);  $0,105$  (4).

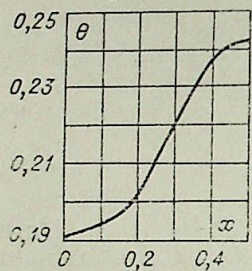


Рис. 4. Эпюра безразмерной температуры  $\theta$ .  $y=0,3$ ,  $t^0=0,075$ ,  $Gr=10^6$ .

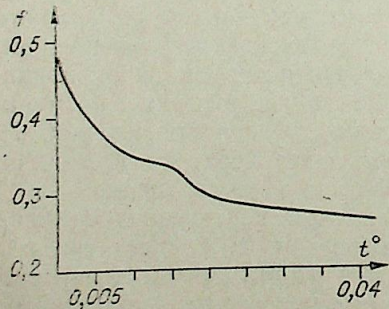


Рис. 6. Зависимость положения фронта фазового перехода от времени  $t^0$ .

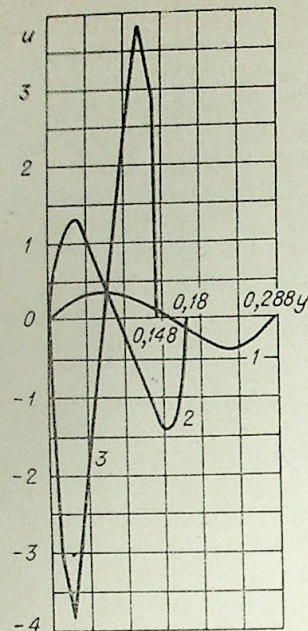


Рис. 3. График составляющей скорости для  $Gr=10^6$  в различные моменты времени.  $t^0=0,030$  (1);  $0,060$  (2);  $0,075$  (3).

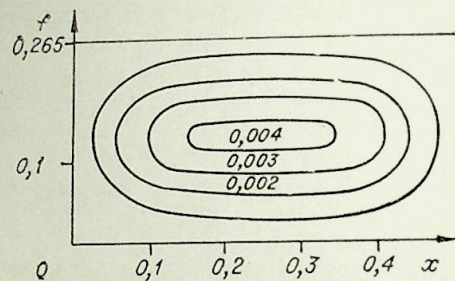


Рис. 5. Линии тока на момент времени  $t^0=0,042$ .

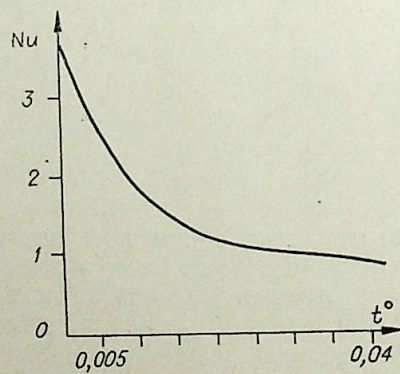


Рис. 7. Зависимость от времени среднего числа Нуссельта.

ду минимальных невязок применено двуциклическое ускорение  $u^{k+2} = \gamma u^{k+1} + (1-\gamma)u^{k-i+1}$ ,  $i=2, 3, \dots, k+1$ . Здесь  $k$  — номер итерации,  $\gamma = -(R^{k-i+1}, R^{k+1} - R^{k-i+1}) / \|R^{k+1} - R^{k-i+1}\|^2$ , где  $R^k$  — невязка  $k$ -й итерации.

Казахский государственный университет им. С. М. Кирова, Алма-Ата

Поступила в редакцию 7/III 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Коздоба Л. А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. М., 1975.
2. Самарский А. А., Моисеенко Б. Д. — ЖВММФ, 1965, 5, № 5, с. 816—827.
3. Будак Б. М., Соловьева Е. Н., Успенский А. Б. — ЖВММФ, 1965, 5, № 5, с. 828—840.
4. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., 1972.
5. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, 1967.
6. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М., 1971.
7. Самарский А. А. — ЖВММФ, 1965, 5, № 3, с. 548—551.
8. Джакупов Ж. Б. В кн.: Численные методы механики сплошной среды, т. 2, № 1, Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1971, с. 17—26.
9. Завьялов Ю. С. В кн.: Вычислительные системы, вып. 38, Новосибирск, 1970.
10. Джакупов К. Б. К расчету двухмерных течений гидродинамики и теплообмена вязкой жидкости. — Изв. СО АН СССР, 1972, № 3. Сер. техн. наук, вып. 1, с. 23—33.
11. Джакупов К. Б. Численный расчет ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости в кожухе с вращающимися дисками. — Изв. СО АН СССР, 1977, № 3. Сер. техн. наук, вып. 1, с. 18—28.
12. Мызникова Б. И., Тарунин Е. Л. Свободная конвекция в расплавленных металлах при кристаллизации. Мат. методы исследования процессов спец. электромет. Труды всесоюз. семинара по мат. мет. электромет. Киев, Наукова думка, 1976, с. 129—135.

А. Р. ДОРОХОВ, В. И. КАЗАКОВ

ГАЗСОДЕРЖАНИЕ  
В ТОНКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ ДВУХФАЗНЫХ СЛОЯХ  
ПРИ ПОНИЖЕННЫХ ДАВЛЕНИЯХ

Среднее газосодержание  $\varphi$  динамического двухфазного (пенного) слоя обычно определяют как

$$\varphi = 1 - \frac{h_0}{H}, \quad (1)$$

где  $H$  — полная высота пенного слоя,  $h_0$  — исходная высота слоя жидкости, иначе высота «светлого» слоя жидкости. Знание  $\varphi$  важно для определения геометрических параметров слоя и для оценки поверхности контакта фаз при тепло- и массопереносе. Для расчета среднего газосодержания в [1, 2] предлагается зависимость

$$\varphi = A \cdot Fr^m, \quad (2)$$

где  $A$  и  $m$  — постоянные коэффициенты,  $Fr = \frac{\omega^2}{gh_0}$  — критерий Фруда,  $\omega$  — скорость газа, отнесенная к свободному сечению колонны, м/с,  $g$  — ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>.

Однако эта зависимость становится несправедливой для условий, когда давление газа меньше атмосферного, а его плотность отличается в 10 ÷ 100 раз от плотности воздуха при нормальных условиях. Анализ и обобщение экспериментального материала позволили авторам [3] получить зависимость

$$\frac{\varphi}{1 - \varphi} = B \cdot Fr_m^n, \quad (3)$$

где  $B = 12,63$ ,  $n = 0,292$ ,  $Fr_m = Fr \cdot \frac{\rho''}{\rho'}$  — модифицированный критерий Фруда,  $\rho''$ ,  $\rho'$  — плотность газовой и жидкой фаз соответственно, кг/м<sup>3</sup>.

При протекании процессов тепло- и массопереноса в пенном слое возможно поглощение в нем значительной доли газа в результате, например, абсорбции или конденсации. Зависимости (2), (3) этого эффекта не учитывают.

В настоящей работе приведены результаты экспериментального исследования величины среднего газосодержания динамического двухфазного слоя в случае пропускания через слой водного раствора бромистого лития ( $h_0 = 10 \div 50$  мм) воздуха при давлении, близком к атмосферному, или водяного пара при давлении ( $y = 0,67 \div 67$  кПа). Опыты проводились как с поглощением пара в пенном слое в результате его абсорбции, так и без поглощения.

Принципиальная схема экспериментальных стендов приведена на рис. 1. На первом стенде (рис. 1, а) газосодержание определяли в пенном слое, образованном на решетке 1 при пропускании воздуха через

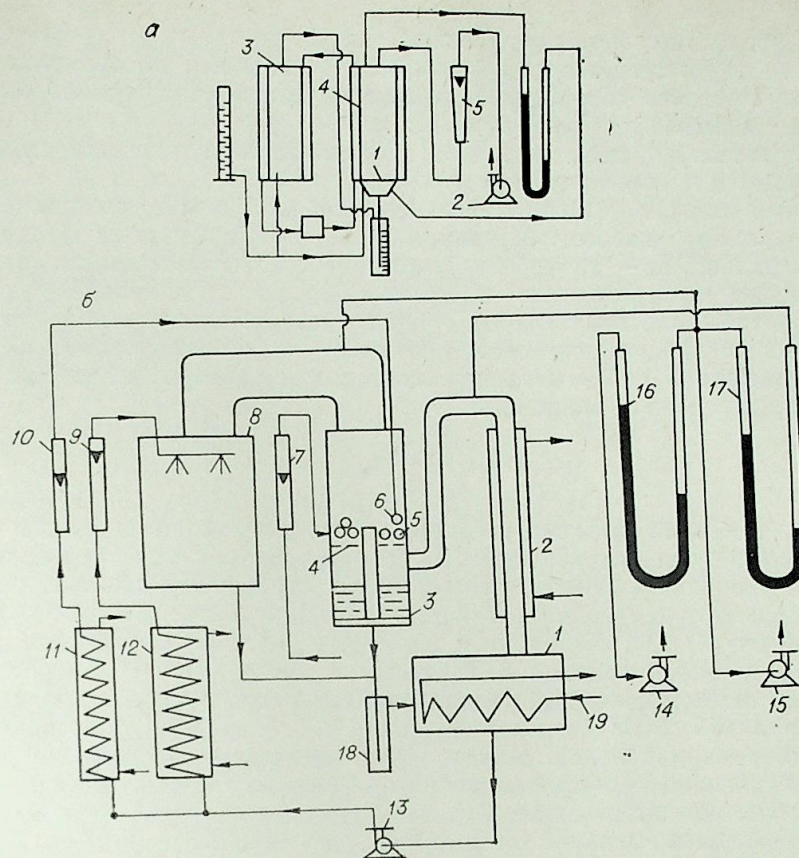


Рис. 1. Принципиальные схемы экспериментальных установок.  
а — первый стенд, б — второй стенд. Обозначения те же, что в [4].

водный раствор бромистого лития. Воздух отсасывался из атмосферы вакуумным насосом 2 через вспомогательную барботажную колонку 3, где доводился до состояния, равновесного параметрам жидкости в рабочей колонке 4. Давление воздуха перед решеткой 1 незначительно (на 1 ÷ 2%) отличалось от атмосферного. Поэтому в дальнейшем при расчетах физические свойства воздуха брали при  $p = 98$  кПа. Диаметр барботажных колонок 55, высота 400 мм. Расход воздуха определяли предварительно протарированным ротаметром 5. Уровень светлой жидкости  $h_0$  определяли по объему заливаемой жидкости, а высоту пены  $H$  — визуально. В опытах в широком диапазоне изменялись геометрические параметры решеток: диаметр отверстий  $d_0$ , относительная площадь отверстий  $s = n \cdot F_i / F_k$ ,  $F_i$  — площадь одного отверстия,  $F_k$  — площадь решетки. Более подробное описание стенда и методики измерения дано в [4].

Принципиальная схема второго стенда изображена на рис. 1, б. Водяной пар выпаривался из водного раствора бромистого лития в генераторе 1 с помощью теплообменника 19, обогреваемого паром. Крепкий раствор подавался насосом 13 из генератора через теплообменник 11, где происходило его охлаждение, и через ротаметр 10 в экспериментальный абсорбер 3 — стеклянную колонку внутренним диаметром 155 мм и высотой 300 мм.

Над решеткой 4 ( $d_0 = 2,5$  мм,  $s = 0,12$ ) расположен спиральный теплообменник 5, трубка из нержавеющей стали диаметром 12/18 мм, длиной 1,2 м и кольцевой распределитель раствора 6. Раствор сливался

через отверстие по центру решетки диаметром 30 мм с регулируемой высотой порога. Проходящий через слой пены пар абсорбировался во вспомогательном абсорбере 8 переохлажденным раствором бромистого лития, распыляемого форсунками.

Температуру пены измеряли двумя нихром-константановыми термомпарами и лабораторным термометром с ценой деления 0,1° С. Давление измеряли U-образным манометром 16, на одном из концов которого поддерживался насосом 14 вакуум ~10 Па. Высоту пены  $H$  определяли визуально,  $h_0$  — по уровню «светлой» жидкости в капилляре, нижний конец которого был на одном уровне с ситчатой решеткой.

Расходы раствора  $G_{p1}$ ,  $G_{p2}$  через экспериментальный и вспомогательный абсорберы соответственно измеряли ротаметрами 9, 10, а количество пара  $G_{n1}$ ,  $G_{n2}$ , поглощаемого в каждом абсорбере, рассчитывали по балансовому соотношению

$$G_{ni} = G_{pi} \frac{\xi_{1i} - \xi_{2i}}{\xi_{2i}}, \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

где  $\xi_{1i}$ ,  $\xi_{2i}$  — концентрация раствора на входе и выходе в каждом из абсорберов соответственно. Затем по суммарному расходу пара определяли его среднюю скорость, отнесенную к свободному сечению пенного абсорбера. Концентрация раствора определялась по известным зависимостям  $\xi = \rho', T$  [5], при этом плотность раствора определяли денсиметрами с ценой деления 0,001 г/см<sup>3</sup>, а температуру — лабораторным ртутным термометром. Для приготовления раствора использовали бромистый литий LiBr (соответствующий ТУ 6-22-14-74), растворимый дистиллированной водой. Начальная концентрация раствора  $\xi_1 = 59\%$ . Теплофизические свойства раствора при расчетах брали по данным [6].

Опыты по определению среднего газосодержания на первом стенде проведены при изменении скорости газа в пределах  $w = 0,1 \div 0,7$  м/с и  $h_0 = 10 \div 50$  мм. Результаты опытов обобщены в координатах (2) и определены значения постоянных  $A = 0,6$ ,  $m = 0,1$ . В пределах погрешности эксперимента полученные данные удовлетворительно совпали с данными [1, 2].

Результаты опытов по определению  $\varphi$  на втором стенде в случае, когда поглощение пара в слое отсутствовало, не обобщались однозначно зависимостью (2).

На рис. 2 представлены данные по среднему газосодержанию, полученные с воздухом и паром при отсутствии массообмена в слое. Обозначения точек (3, 4) и условия проведения опытов приведены в таблице. С разбросом  $\pm 10\%$  они обобщаются зависимостью

$$\varphi = 1,2 Fr_M^{0,1}. \quad (5)$$

Расчеты по формулам (3), (5), как это следует из рис. 2, практически

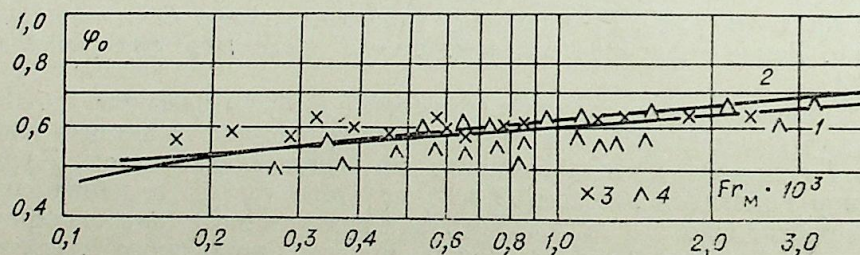


Рис. 2. Зависимость среднего газосодержания динамического двухфазного слоя  $\varphi$  от числа Фруда  $Fr_M = \frac{w^2 \cdot \rho''}{g h_0 \cdot \rho'}$  при отсутствии поглощения газа в слое.

1 — расчет по (5); 2 — расчет по (3); 3, 4 — данные опыта (см. табл.).

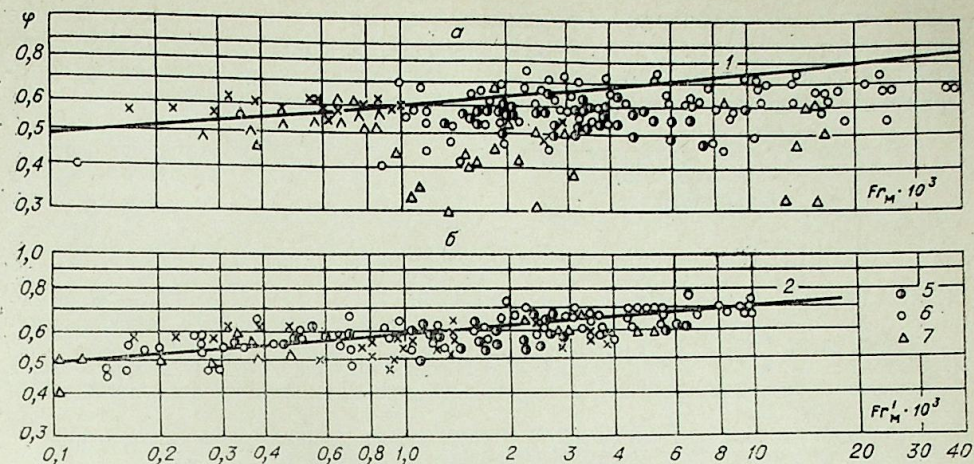


Рис. 3. Зависимость среднего газосодержания  $\varphi$  от числа Фруда при абсорбции газа в слое.

а — число Фруда рассчитано по скорости пара на входе в абсорбер  $Fr_M = \frac{w^2 \cdot \rho''}{g h_0 \cdot \rho'}$ ; б — число

Фруда рассчитано по скорости пара на выходе из пенного слоя  $Fr'_M = \frac{w_*^2 \cdot \rho''}{g h_0 \cdot \rho'}$ .

совпадают между собой. Однако формула (5) более проста и удобна для инженерных расчетов.

На рис. 3, а приведены данные по  $\varphi$ , полученные при различных режимах абсорбции в пенном слое (см. таблицу). В частности, точки 5 получены при адиабатической абсорбции, без отвода тепла из пенного слоя. В этом случае на решетку подавался переохлажденный раствор. Точки 6, 7 получены, когда тепло, выделяющееся при абсорбции, отводилось теплообменником, по которому протекала вода, имеющая среднюю температуру  $t_w$ . Видно, что массообмен между паром и жидкостью в слое влияет на величину  $\varphi$  и экспериментальные данные не обобщаются однозначно по формуле (5).

Замечено, что если число Фруда определять по скорости пара на выходе из пенного слоя  $w_*$ , т. е. в виде  $Fr'_M = \frac{w_*^2 \cdot \rho''}{g h_0 \cdot \rho'}$ , то при  $w_* \leq 0,2$  опытные данные вполне удовлетворительно обобщаются в координатах  $\varphi \div Fr'_M$  (рис. 3, б) и для случая массообмена в пенном слое. Линия 2 на рис. 3, б осредняет с точностью  $\pm 15\%$  опытные данные и описывается зависимостью

$$\varphi = 1,2 Fr'_M{}^{0,1}.$$

При большей относительной доле поглощаемого пара в слое приведенная зависимость не обобщает полученные данные. В этом случае следует ожидать влияния на среднее газосодержание величины переохлаждения раствора,  $h_0$  и т. д. Для выяснения влияния этих факторов необходимо более детально исследовать структуру динамического двухфазного слоя.

Таким образом, в работе приведены экспериментальные данные по среднему газосодержанию при барботаже воздуха и водяного пара через тонкие

Точки на рис. 2, 3	$w$ , м/с	$t_w$ , °С	$p$ , кПа	Газ
3	0,1—0,7	—	102	Воздух
4	1,0—10	—	0,8÷4,0	Водяной пар
5	2—15	—	0,8÷4,0	То же
6	5—30	20	0,8÷4,0	»
7	6—20	6	0,8÷4,0	»

слои водного раствора бромистого лития в широком диапазоне изменения скорости газа и его плотности. Получена зависимость (6) для расчета среднего газосодержания в тонких динамических двухфазных слоях при массообмене в этом слое.

Специальное конструкторское бюро  
«Энергохиммаш»,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
27/Х1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Родионов А. И., Петрушинский Л. П., Лекае В. М., Семену-хин А. М. Гидравлические характеристики клапанных тарелок.— Тр. Моск. химико-технол. ин-та, 1972, вып. 69, с. 228—231.
2. Родионов А. И., Кочетов И. М., Владимиров А. И. О гидродинамике колпачково-ситчатых тарелок.— Изв. вузов. Химия и химическая технология, 1975, № 7, с. 163—166.
3. Колтунова Л. Н., Позин Л. С. Расчет газосодержания пенного слоя на провальных тарелках.— Химическая промышленность, 1975, № 6, с. 53—55.
4. Казаков В. И., Юст В. А. О влиянии геометрии решеток на гидравлическое сопротивление ситчатых решеток.— В кн.: Физическая гидродинамика и теплообмен. Новосибирск, ИТФ СО АН СССР, 1978, с. 80—84.
5. Lower H. Thermodynamische und physikalische Eigenschaften der wässrigen Lithiumbromid Lösung. Dissertation, Karlsruhe, 1960, 10 p.
6. Исследование теплофизических свойств жидких растворов и расплавов. Новосибирск, ИТФ СО АН СССР, 1977. 146 с.

Ю. С. ДАНИЕЛЯН, П. А. ЯНИЦКИЙ

#### О КИНЕТИКЕ ЗАМЕРЗАНИЯ ВОДЫ ВО ВЛАЖНЫХ ГРУНТАХ

Расчеты многих задач теплофизики промерзающих или оттаивающих грунтов в настоящее время обычно сводятся к математической постановке и решению так называемых задач типа Стефана [1—3]. Во всех известных нам работах принимается, что фазовый переход вода — лед происходит мгновенно. Между тем в ряде исследований (см., например [4]) доказывается, что для достижения равновесия между льдом и незамерзающей водой в грунте при отрицательных температурах требуется довольно значительное время. В настоящей статье описывается способ экспериментального определения характерного времени кристаллизации на основе предложенной кинетической модели и приводится математическая постановка задачи промораживания с учетом этого времени.

Известно, что замерзание воды в дисперсных породах происходит в определенном диапазоне отрицательных температур, причём равновесное количество незамерзающей воды описывается некоторой зависимостью [3], обычно получаемой экспериментально.

$$W = W_n(T),$$

где  $W_n$  — количество незамерзающей воды;  $T$  — температура грунта, °С. Вид этой зависимости определяется свойствами грунта. Если принять, что существует некоторое характерное время кристаллизации  $\tau$ , то можно предположить, что скорость установления равновесия пропорциональна величине отклонения системы от положения равновесия, т. е. разности между текущей влажностью и равновесной

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{\tau} (W - W_n(T)), \quad (1)$$

где  $W = W(t)$  — влажность грунта.

Для проверки адекватности этой кинетической модели были поставлены эксперименты на установке, изображенной на рис. 1. Опыты проводились следующим образом. Цилиндрический образец исследуемого грунта 1 высотой 5 мм и диаметром 27,8 мм в камере 2 помещался в теплоизоляционный кожух 3 и включался криостат 7. При этом на вторичные приборы выдавались показания от датчиков температуры 4 и теплового потока 5. Всего проведено 3 опыта. Для исследования использовали суглинок (средний пылеватый): частиц диаметром  $0,01 \div 0,05$  мм — 13,6%,  $0,05 \div 0,1$  мм — 46,4%,  $0,1 \div 0,25$  мм — 40%. Пористость образца — 43%, объемный вес скелета —  $1,52$  г/см<sup>3</sup>, влажность 28,3% (анализ грунта выполнен ст. инженером Э. В. Шуклиной). Теплоизоляционный кожух 3 сделан из пенопласта толщиной 20 мм. В качестве охлаждающего агента применялся спиртовой раствор, прокачиваемый через устройство охлаждения 6. Температура хладагента поддерживалась в диапазоне  $-4 \div 8^\circ$  с помощью криостата 7. В опытах

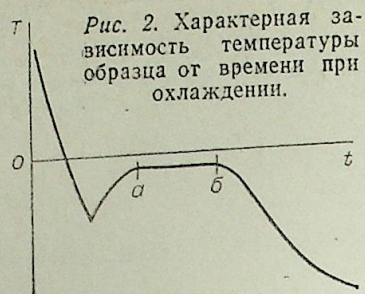
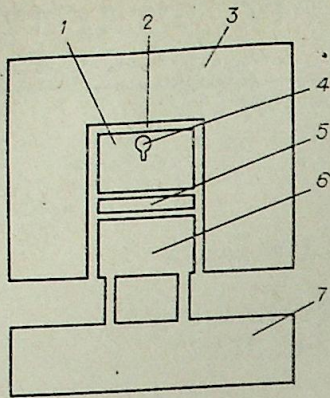


Рис. 1. Схема прибора.

использовали хромелькапелевую термопару 4 и датчик теплового потока 5 типа ДТП-4626. Сигнал от датчика 4 регистрировался самопишущим потенциометром КСП-4, а от ДТП-4626 — цифровым прибором. Зависимость  $T-T(t)$  в каждом из опытов качественно имела вид, изображенный на рис. 2. Характерным для этой зависимости является наличие горизонтальной «полочки»  $a-b$ .

Данные обрабатывались в соответствии со следующими соображениями. Интегральный закон сохранения энергии для образца грунта, очевидно, выглядит так:

$$V \cdot \left( c \frac{dT}{dt} + \kappa \frac{dW}{dt} \right) = \alpha \cdot S \cdot q, \quad (2)$$

где  $c$  — объемная теплоемкость грунта, ккал/м<sup>3</sup>, град;  $\kappa$  — скрытая теплота фазового перехода, ккал/м<sup>3</sup>;  $V$  — объем образца, м<sup>3</sup>;  $S$  — площадь поверхности теплоотвода, м<sup>2</sup>;  $q$  — тепловой поток; мВ;  $\alpha$  — переводной коэффициент датчика теплового потока, ккал/(с · м<sup>2</sup> · мВ).

Поскольку теплоемкость  $c$  сложным образом зависит от фазового состояния влаги в грунте, для обработки выбрали промежуток времени  $a-b$  (рис. 2), в течение которого температура не менялась, т. е.  $dT/dt = 0$ . Для облегчения обработки отсчет времени проводился от точки  $a$  (см. рис. 2), т. е. момент времени  $t=0$  соответствует точке  $a$ . Данные изменения теплового потока в этот промежуток времени приведены в таблице. Выражение (2) в этом случае переходит в более простое

$$\alpha \cdot q = H \kappa \frac{dW}{dt}, \quad (3)$$

где  $H$  — высота образца, м.

Принтегрируем обе части уравнения (3) по времени

$$\alpha \int_0^t q(\tau) d\tau = H \cdot \kappa \cdot (W_H(T) - W(0)) + H \cdot \kappa \cdot (W(t) - W_H(T)).$$

Последний член в правой части можно преобразовать с учетом (1) и (3):

$$H \kappa \cdot (W(t) - W_H(T)) = -H \kappa \tau \frac{dW}{dt} = -\alpha \tau q.$$

Окончательно основное уравнение для обработки экспериментальных данных имеет вид

$$Q(t) = -\tau \cdot q + \frac{H \kappa}{\alpha} [W_H(T) - W_0], \quad (4)$$

где

$$Q(t) = \int_0^t q(\xi) d\xi; \quad W_0 = W(0); \quad (5)$$

$W_0$  — влажность в начале исследуемого отрезка времени.

В координатах  $Q, q$  выражение (4) представляет собой уравнение прямой с угловым коэффициентом  $\tau$ . Результаты эксперимента обрабатывались в осях  $Q, q$ , причем величина  $Q(t)$  при каждом вычислялась по формуле (5) с помощью метода трапеций (рис. 3). Хорошее расположение экспериментальных точек относительно прямой говорит в пользу адекватности предложенной модели (1). Значения  $\tau$  получились равными 1000, 1205,667 с. Такие измерения можно использовать при экспериментальном нахождении равновесной кривой незамерзшей воды для определения необходимого времени выдержки грунта при заданной температуре. Разброс в полученных значениях объясняется, видимо, зависимостью от неучтенных условий эксперимента, например от времени предварительной выдержки образца при положительной температуре (памяти), скорости охлаждения и величины переохлаждения, степени уплотнения грунта и т. д. В дальнейшем предполагается выяснить степень влияния этих факторов на величину  $\tau$ .

Полученные результаты позволяют учесть время кристаллизации в задаче промерзания влажных грунтов на основе следующей постановки:

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \kappa \cdot \sigma (T_{H3} - T) \cdot \frac{\partial W}{\partial t}, \quad (6)$$

где

$$\sigma(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{при } \xi \leq 0 \\ 1 & \text{при } \xi > 0, \end{cases} \quad W = W(x, t).$$

$x$  — пространственная координата,  $T_{H3}$  — температура начала замерзания при начальной влажности. Здесь для простоты не учитываются миграционные процессы.

Величина  $\partial W/\partial t$  вычисляется по решению уравнения (1), имеющему вид

$$W = \frac{1}{\tau} \int_{t_{H3}}^t W_H(T) \cdot \exp\left(\frac{\xi - t}{\tau}\right) d\xi + W_0 \cdot \exp\left(-\frac{t - t_{H3}}{\tau}\right),$$

где  $W_0$  — начальная влажность грунта;  $t_{H3}$  — момент времени, соответствующий началу замерзания в рассматриваемой точке грунта.

После соответствующей подстановки уравнение (6) переходит в следующее:

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \sigma (T_{H3} - T) \cdot \frac{\kappa}{\tau} \cdot \left\{ -\frac{1}{\tau} \int_{t_{H3}}^t W_H(T) \times \right. \\ \left. \times \exp\left(\frac{\xi - t}{\tau}\right) d\xi - W_0 \cdot \exp\left(-\frac{t - t_{H3}}{\tau}\right) + W_H(T) \right\}.$$

Граничные и начальные условия записываются в традиционной форме. Можно показать, что при  $\tau \rightarrow 0$  это уравнение сводится к известной задаче (см., например, [5]), не учитывающей кинетику.

I опыт		II опыт		III опыт	
t, с	q, мВ	t, с	q, мВ	t, с	q, мВ
0	14,50	0	21,16	0	23,02
10	14,32	20	20,60	10	22,63
20	14,14	40	20,18	20	22,30
30	13,97	60	19,74	30	21,99
40	13,83	80	19,38	40	21,70
50	13,68	100	19,07		
60	13,55	120	18,76		
70	13,42	140	18,47		
80	13,30	160	18,25		
90	13,19	180	18,03		
100	13,07				

И. Н. ГЛАЗКОВ, К. П. КАДОМСКАЯ,  
Е. В. КУЛЬКОВА, М. Л. ЛЕВИНШТЕЙН

К ВОПРОСУ  
О СРАВНИТЕЛЬНОЙ ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ  
И УСТОЙЧИВОСТИ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ  
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

В настоящей статье сделана попытка установить на основании анализа результатов численных расчетов сравнительной эффективности различных методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, находящихся применение при решении проблемы устойчивости параллельной работы электрических станций.

В дальнейшем будем ориентироваться (как на эталонный) на расчетный метод Рунге — Кутта четвертого порядка с достаточно малым шагом интегрирования. Поскольку этот метод требует на каждом шаге расчета четырехкратного вычисления правых частей уравнений, записанных в форме Коши, то представляет интерес выяснение целесообразности использования для расчетов устойчивости экстраполяционных методов (например, метода Адамса или комбинации методов Адамса и Штермера), не требующих проведения подобных операций [1—3].

Недостатком этих методов является необходимость осуществления начальной стадии расчета с помощью алгоритма, отличного от применяемого в последующей части расчета и требующего выполнения ряда итераций. Если исследуемый переходный процесс состоит из нескольких этапов (например, нормальный режим — режим короткого замыкания — отключение аварийной линии — повторное включение аварийной линии), то необходимость изменения алгоритма решения возникает после каждого изменения схемы или режима системы.

Эту трудность можно преодолеть, если расчет переходного процесса в начальной части каждого этапа проводить методом Рунге — Кутта, используя получаемые данные для последующего расчета каким-либо экстраполяционным методом. Если число изменений схемы режима относительно невелико и, следовательно, суммарный интервал времени, на котором используется метод Рунге — Кутта, невелик по сравнению с общим временем расчета, то можно ожидать, что использование комбинаций обоих методов (разностного и Рунге — Кутта) даст выигрыш в затрачиваемом на расчет машинном времени (при одинаковой точности расчета).

Рассмотрим методы Адамса и Штермера, сравнивая их с методом Рунге — Кутта четвертого порядка, а также с широко распространенными в инженерной практике расчетов устойчивости методом Эйлера и методом последовательных интервалов, сочетающимся с методом Эйлера (см. приложение).

Расчеты переходных процессов проводились применительно к схеме (рис. 1, а), отвечающей работе удаленной станции через двухцепную высоковольтную линию (ВЛ) на приемную систему бесконечной мощ-

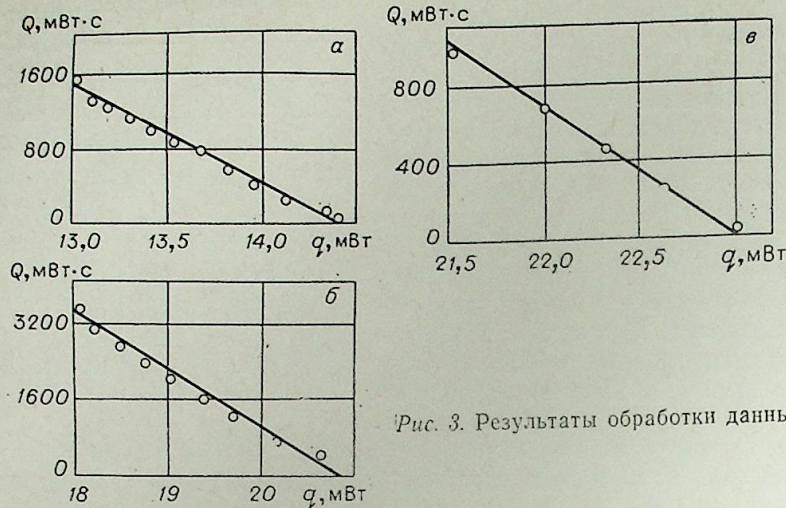


Рис. 3. Результаты обработки данных.

Приведенная постановка задачи позволяет предположить, что существуют два характерных фронта промерзания. Один фронт представляет собой положение «нулевой» изотермы, за которой начинается фазовый переход. Второй фронт — это граница прифронтной области, в которой кристаллизация в основном закончена. Экспериментальное определение времени кристаллизации позволяет при известной скорости промерзания оценить расстояние между фронтами.

Таким образом, при анализе и прогнозировании процессов промерзания влажных грунтов необходимо учитывать кинетику кристаллизации влаги. Один из способов такого учета может служить схема расчета, предложенная в настоящей статье.

Гипротюменнефтегаз

Поступила в редакцию  
17/XI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., Наука, 1972.
2. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М., Наука, 1964.
3. Достовалов Б. Н., Кудрявцев В. А. Общее мерзлотоведение. М., МГУ, 1967.
4. Фролов А. Д. Электрические и упругие свойства криогенных пород. М., Недра, 1966.
5. Колесников А. Г., Мартынов Г. А. О расчете глубин промерзания грунтов. — В кн.: Материалы по лабораторным исследованиям мерзлых грунтов, сб. 1. М., 1953.



Таблица 2

Результаты расчетов переходного процесса при совместном использовании экстраполяционных методов Адамса и Штермера

$h, c$	$p$	$\delta_{\max 1},$ рад	$t_{\max 1},$ с	$\delta_{\min 1},$ рад	$t_{\min 1},$ с	$\delta_{\max 2},$ рад	$t_{\max 2},$ с	$\delta_{\max 3},$ рад	$t_{\max 3},$ с	$\delta_{\min 3},$ рад	$t_{\min 3},$ с		
0,01	1	1,4344	0,42	0,7657	0,93	1,3928	1,44	0,7965	1,94	1,3565	2,44	0,8239	2,95
0,01	2	1,4345	0,42	0,7656	0,93	1,3929	1,44	0,7964	1,94	1,3566	2,45	0,8238	2,95
0,01	3	1,4345	0,42	0,7656	0,93	1,3929	1,44	0,7964	1,94	1,3567	2,45	0,8238	2,95
0,01	4	1,4345	0,42	0,7656	0,93	1,3929	1,44	0,7964	1,94	1,3567	2,45	0,8238	2,95
0,01	5	1,4345	0,42	0,7656	0,93	1,3929	1,44	0,7964	1,94	1,3567	2,45	0,8238	2,95
0,01	6	1,4345	0,42	0,7656	0,93	1,3929	1,44	0,7964	1,94	1,3567	2,45	0,8238	2,95
0,02	1	1,4135	0,42	0,7803	0,92	1,3740	1,44	0,8096	1,94	1,3404	2,44	0,8357	2,94
0,02	2	1,4137	0,42	0,7798	0,92	1,3744	1,44	0,8091	1,94	1,3407	2,44	0,8352	2,94
0,02	3	1,4137	0,42	0,7798	0,92	1,3745	1,44	0,8088	1,94	1,3410	2,44	0,8349	2,94
0,02	4	1,4137	0,42	0,7798	0,92	1,3745	1,44	0,8088	1,94	1,3410	2,44	0,8349	2,94
0,02	5	1,4137	0,42	0,7798	0,92	1,3745	1,44	0,8088	1,94	1,3410	2,44	0,8349	2,94
0,02	6	1,4137	0,42	0,7798	0,92	1,3745	1,44	0,8088	1,94	1,3410	2,44	0,8349	2,94
0,05	1	1,4502	0,40	0,7566	0,95	1,4074	1,45	0,7887	1,95	1,3687	2,45	0,8180	2,95
0,05	2	1,4514	0,45	0,7542	0,95	1,4083	1,45	0,7876	1,95	1,3684	2,45	0,8183	2,95
0,05	3	1,4518	0,45	0,7522	0,95	1,4111	1,45	0,7834	1,95	1,3729	2,45	0,8126	2,95
0,05	4	1,4518	0,45	0,7523	0,95	1,4113	1,45	0,7831	1,95	1,3734	2,45	0,8120	2,95
0,05	5	1,4518	0,45	0,7525	0,95	1,4111	1,45	0,7835	1,95	1,3731	2,45	0,8124	2,95
0,05	6	1,4518	0,45	0,7525	0,95	1,4111	1,45	0,7835	1,95	1,3730	2,45	0,8125	2,95
0,10	1	1,4470	0,40	0,7676	0,90	1,3984	1,40	0,8031	1,90	1,3573	2,40	0,8340	2,90
0,10	2	1,4510	0,40	0,7698	0,90	1,3829	1,40	0,8232	1,90	1,3285	2,40	0,8653	2,90
0,10	3	1,4510	0,40	0,7623	0,90	1,3929	1,40	0,8009	2,00	1,3555	2,50	0,8278	3,00
0,10	4	1,4510	0,40	0,7567	0,90	1,4028	1,40	0,7885	2,00	1,3707	2,50	0,8073	3,00
0,10	5	1,4510	0,40	0,7568	0,90	1,401	1,40	0,7910	1,90	1,3648	2,50	0,8143	3,00
0,10	6	1,4510	0,40	0,7586	0,90	1,4001	1,40	0,7944	1,90	1,3609	2,40	0,8157	2,90

Допустимое в конкретном расчете значение  $p$  определяется отношением периода изменения угла  $\delta$  к шагу решения. Чем больше это отношение, тем большее число членов может быть удержано в формуле Адамса. Предельное значение  $P$  с запасом предварительно может быть оценено по теореме Котельникова  $p \leq T/(8h)$ , где  $T$  — период колебаний на наибольшей частоте исследуемого процесса. Окончательный выбор  $p$  должен производиться на основе вычислительных экспериментов. Из табл. 1 следует, что начиная с некоторого значения  $p$  дальнейшее уточнение в области устойчивых решений нецелесообразно. Для рассматриваемого примера при всех принятых в расчетах шагах можно ограничиться  $p = 3$ .

Решения уравнения движения второго порядка методом Штермера и уравнения контура возбуждения первого порядка методом Адамса оказываются более устойчивыми по сравнению с результатами решения трех уравнений первого порядка по методу Адамса (см. табл. 1). Большая устойчивость последнего способа решения исходных уравнений обусловлена меньшим числом переменных, определяемых приближенно. Как и в методе Адамса, порядок старшей разности, удерживаемой в формулах Адамса и Штермера, может быть ограничен с запасом  $p = 3$  (табл. 2).

В табл. 3 представлены результаты расчетов переходных процессов, произведенных пятью различными способами.

В рассматриваемом примере метод Эйлера при принятых шагах интегрирования не может быть рекомендован для расчета переходного процесса, так как приводит даже в зоне устойчивых решений к большим погрешностям расчета. Очевидно, что при практическом приме-

Таблица 3

Результаты расчетов переходного процесса различными методами

$h, c$	$\delta_{\max 1'}$ рад	$t_{\max 1'}$ с	$\delta_{\min 1'}$ рад	$t_{\min 1'}$ с	$\delta_{\max 2'}$ рад	$t_{\max 2'}$ с	$\delta_{\min 2'}$ рад	$t_{\min 2'}$ с	$\delta_{\max 3'}$ рад	$t_{\max 3'}$ рад	$\delta_{\min 3'}$ рад	$t_{\min 3'}$ с
--------	---------------------------	--------------------	---------------------------	--------------------	---------------------------	--------------------	---------------------------	--------------------	---------------------------	----------------------	---------------------------	--------------------

Метод Рунге-Кутты четвертого порядка

0,01	1,4345	0,42	0,7656	0,93	1,3929	1,44	0,7964	1,94	1,3567	2,45	0,8238	2,95
0,02	1,4137	0,42	0,7798	0,92	1,3746	1,44	0,8088	1,94	1,3410	2,44	0,8349	2,94
0,05	1,4518	0,45	0,7525	0,95	1,4111	1,45	0,7835	1,95	1,3729	2,45	0,8126	2,95
0,10	1,4510	0,40	0,7599	0,90	1,3989	1,40	0,7990	1,90	1,3589	2,50	0,8232	3,00

Экстраполяционный метод Адамса ( $p=3$ )

0,01	1,4345	0,42	0,7656	0,93	1,3929	1,44	0,7964	1,94	1,3567	2,45	0,8238	2,95
0,02	1,4137	0,42	0,7798	0,92	1,3745	1,44	0,8088	1,94	1,3410	2,44	0,8349	2,94
0,05	1,4519	0,45	0,7529	0,95	1,4088	1,45	0,7869	1,95	1,3681	2,45	0,8186	2,95
0,10	1,4510	0,40	0,7785	1,00	1,3751	1,50	0,7721	2,00	Потеря устойчивости решения при $t=2,2$ с			

Совместное использование экстраполяционных методов Адамса и Штермера ( $p=3$ )

0,01	1,4345	0,42	0,7656	0,93	1,3929	1,44	0,7964	1,94	1,3567	2,45	0,8238	2,95
0,02	1,4137	0,42	0,7798	0,92	1,3745	1,44	0,8088	1,94	1,3410	2,44	0,8349	2,94
0,05	1,4518	0,45	0,7522	0,95	1,4111	1,45	0,7834	1,95	1,3729	2,45	0,8126	2,95
0,10	1,4510	0,40	0,7623	0,90	1,3929	1,40	0,8008	2,00	1,3555	2,50	0,8278	3,00

Метод Эйлера

0,01	1,4510	0,43	0,7114	0,94	1,4737	1,45	0,6717	1,96	1,4994	2,47	0,6301	2,99
0,02	1,4467	0,44	0,6670	0,94	1,5500	1,46	0,5201	1,98	1,6797	2,52	0,3297	3,06
0,05	1,5507	0,45	0,3609	1,00	Потеря устойчивости решения при $t=1,4$ с							
0,10	1,6725	0,50	0,1913	1,00	тоже $t=1,3$ с							

Совместное использование метода последовательных интервалов и метода Эйлера

0,01	1,4557	0,44	0,7512	0,94	1,4114	1,45	0,7836	1,96	1,3728	2,46	0,8125	2,96
0,02	1,4559	0,42	0,7511	0,94	1,4115	1,44	0,7836	1,94	1,3725	2,44	0,8127	2,96
0,05	1,4543	0,45	0,7541	0,95	1,4116	1,50	0,7825	2,00	1,3734	2,50	0,8114	3,00
0,10	1,4662	0,40	0,7406	0,90	1,4217	1,40	0,7729	1,90	1,3831	2,40	0,8024	2,90

нении метода Эйлера в данной задаче шаг интегрирования должен быть взят весьма малым ( $h_{\text{доп}} < 0,04T/2\pi$ ). Скорость расчета по методу Эйлера и методу последовательных интервалов в совокупности с методом Эйлера, дающим в рассматриваемом диапазоне  $h$  устойчивое решение, практически одинакова, поэтому применение метода Эйлера с уменьшенным шагом интегрирования нецелесообразно.

Сравнительная точность остальных методов решения переходных процессов иллюстрируется графиками. На рис. 2, 3 приведены кривые относительных погрешностей расчета первых двух максимумов угла  $\delta$  по отношению к их значениям, определенным по методу Рунге — Кутта при шаге интегрирования  $h = 0,002$  с; точками отмечены значения погрешностей при принятых в расчетах шагах интегрирования  $h$ . Погрешности методов Рунге — Кутта, Адамса и Штермера ( $p = 3$ ) для первого максимума колебаний угла практически совпадают, а для его второго максимума весьма близки между собой. Минимальные значения погрешностей при  $h = 0,025, 0,05$  и  $0,10$  с объясняются тем, что в рассматриваемом примере четверть периода колебаний угла  $\delta$  составляет величину, кратную этим значениям шагов, что соответствует требованиям выбора шага по теореме Котельникова.

Анализ кривых (см. рис. 2 и 3) не выявляет относительных преимуществ рассмотренных методов. Данные табл. 3 показывают преимущества названных методов Адамса и Штермера вследствие их большей

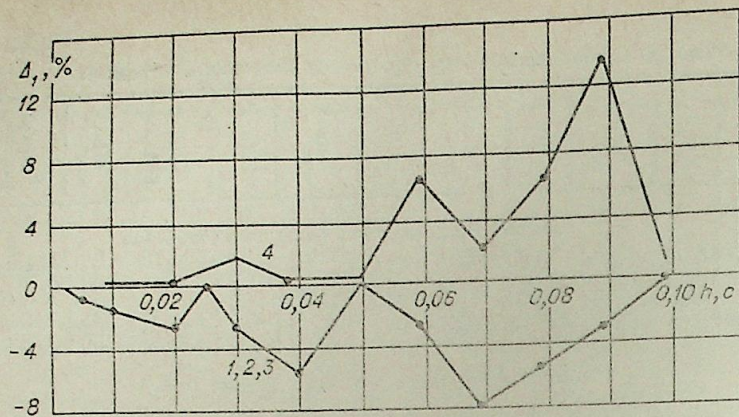


Рис. 2. Относительные погрешности  $\Delta_1$  расчета первого максимума колебаний угла  $\delta$  в зависимости от шага интегрирования  $h$  при различных численных методах.

1 — метод Рунге — Кутты четвертого порядка; 2 — метод Адамса; 3 — комбинированный метод Адамса — Штермера; 4 — комбинированный метод последовательных интервалов и Эйлера.

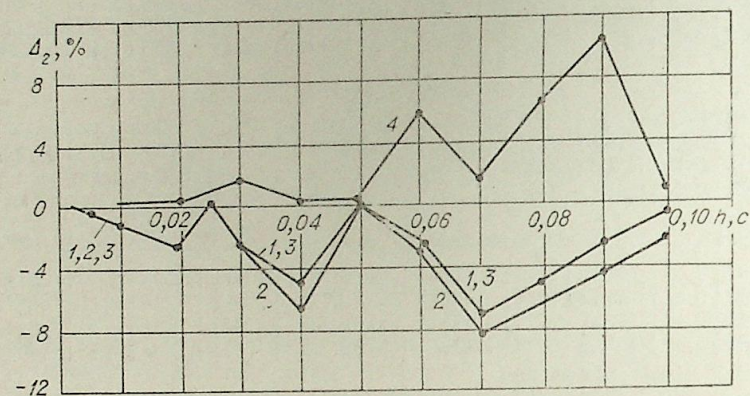


Рис. 3. Относительные погрешности  $\Delta_2$  расчета второго максимума колебаний угла  $\delta$  в зависимости от шага интегрирования  $h$  при различных численных методах.

Обозначения те же, что и на рис. 2.

устойчивости сравнительно с методом Адамса и большей точности по сравнению с комбинированным методом на основе метода последовательных интервалов (по устойчивости эти методы практически равноценны).

Целесообразность использования того или иного метода при решении задач на цифровой ЭВМ оценивается также затратами времени. Проведенный анализ показал, что время расчета методом Рунге — Кутты четвертого порядка примерно в 4 раза превышает время расчета методом Эйлера и последовательных интервалов и, примерно, в 3 раза — время при использовании методов Адамса и Штермера, если в вычислительных алгоритмах последних третьи старшие разности.

Таким образом, из полученных результатов, относящихся к переходным процессам в простейшей схеме электропередачи, видно, что при проведении практических расчетов устойчивости использование метода Рунге — Кутты четвертого порядка не является оптимальным. Практически та же точность, что и в методе Рунге — Кутты (табл. 3), может быть достигнута при применении комбинированного метода Адамса —

Штермера, обладающего высокой степенью устойчивости решения при значительно меньших затратах машинного времени.

Проведенные исследования позволяют поставить вопрос о целесообразности использования комбинированного метода Адамса — Штермера при автоматизации расчетов устойчивости в сложных энергетических системах.

## Приложение

### ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

#### Совместное использование методов Адамса и Штермера

Введя переменные  $z_1 = E_q' - \frac{k_\delta}{T_r} \delta$ ;  $z_2 = \delta$ , перепишем систему (2) в виде

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{1}{T_r} \left[ E_{r0} - k_\delta \delta_0 - \frac{x_d}{x_d'} z_1 + \left( k_\delta - \frac{x_d k_\delta'}{x_d' T_r} \right) z_2 + \frac{x_d - x_d'}{x_d'} U_\vartheta \cos z_2 \right] = \psi_1(z_1, z_2); \quad (1П)$$

$$\frac{d^2 z_2}{dt^2} = \frac{\omega_0}{T_j} \left[ P_T - \left( \frac{z_1}{x_d'} + \frac{k_\delta'}{x_d' T_r} z_2 - \frac{x_d - x_d'}{x_d x_d'} U_\vartheta \cos z_2 \right) U_\vartheta \sin z_2 \right] = \psi_2(z_1, z_2). \quad (2П)$$

Обозначим  $z_i(mh) = z_{i,m}$  ( $i = 1, 2$ ). Тогда при известных значениях переменных  $z_{i,m}$ ;  $i = 1, 2$ ;  $m = n, n+1, \dots, n+p$  значения  $z_{1,n+p+1}$  вычисляются по формуле Адамса, а значения  $z_{2,n+p+1}$  — по формуле Штермера:

$$z_{1,n+p+1} = z_{1,n+p} + h[\psi_{1,n+p} + a_1 \Delta \psi_{1,n+p-1} + a_2 \Delta^2 \psi_{1,n+p-2} + \dots + a_p \Delta^p \psi_{1,n}], \quad (3П)$$

$$z_{2,n+p+1} = 2z_{2,n+p} - z_{2,n+p-1} + h^2[\psi_{2,n+p} + b_2 \Delta^2 \psi_{2,n+p-2} + \dots + b_p \Delta^p \psi_{2,n}], \quad (4П)$$

где

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{5}{12}, \quad a_3 = \frac{3}{8}, \quad a_4 = \frac{251}{720}, \quad a_5 = \frac{95}{288}, \quad a_6 = \frac{19087}{60480};$$

$$b_2 = b_3 = \frac{1}{12}, \quad b_4 = \frac{19}{240}, \quad b_5 = \frac{3}{40}, \quad b_6 = \frac{863}{12096}.$$

В (3П) и (4П) обозначено  $\psi_{i,m} = \psi_i(z_{1,m}; z_{2,m})$ .

Совместное использование методов Эйлера и последовательных интервалов (*step by step*)

Решение уравнения (1П) в этом случае производится по методу Эйлера (методу Адамса (3П) при  $p = 0$ )

$$z_{1,n+1} = z_{1,n} + h\psi_{1,n}. \quad (5П)$$

Уравнение (2П) решается во всех интервалах, не следующих за моментами изменения схемы, по формуле Штермера (4П) при  $p=0$

$$z_{2,n+1} = 2z_{2,n} - z_{2,n-1} + h^2 \psi_{2,n}. \quad (6П)$$

Значения  $z_2$  в конце интервалов, началам которых отвечает изменение схемы, вычисляются по формуле

$$z_{2,n+1} = 2z_{2,n} - z_{2,n-1} + \frac{h^2}{2} (\psi_{2,n}^{(1)} + \psi_{2,n}^{(2)}), \quad (7П)$$

где  $\psi_{2,n}^{(1)}$  и  $\psi_{2,n}^{(2)}$  — значения  $\psi_2$ , рассчитанные при  $z_1 = z_{1,n}$  и  $z_2 = z_{2,n}$  и параметрах схемы до и после ее изменения соответственно.

Сибирский научно-исследовательский  
институт энергетики  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
15/III 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М., Наука, 1965. 383 с.
2. Хемминг Р. В. Численные методы. М., Наука, 1972. 400 с.
3. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. М., Физматгиз, 1963. 400 с.

Е. А. ЕРКАЕВА, Н. Д. ДЕМИДЕНКО

### КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ПРОЦЕСС ТЕПЛОМАСООБМЕНА В ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ АППАРАТАХ

Для описания объектов с распределенными параметрами в настоящее время используются системы дифференциальных уравнений частных производных [1]. Однако стремление наиболее полно учесть характерные особенности таких процессов приводит к существенному отличию рассматриваемых задач от классических задач математической физики. В соответствии с требованиями практики при решении таких задач основное внимание уделяется получению тем или иным (как правило, численным) методом различных характеристик процесса, а вопросы корректности часто не изучаются.

В данной работе рассматривается модель, связанная не с конкретным технологическим аппаратом, а общая для целого класса объектов с распределенными параметрами. Характерная и важная особенность модели в том, что по всей длине объекта параметры считаются распределенными, а на его концах имеются сосредоточенные элементы. Последнее выражается в постановке своеобразных граничных условий. В ректификационных установках такая модель позволяет наиболее полно учесть особенности технологического процесса. С математической же точки зрения модификация граничных условий делает обязательным выяснение вопросов корректности задачи. В работе рассматривается смешанная задача для гиперболической системы

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} - a(l, t) \frac{\partial x}{\partial l} &= m_{11}x + m_{12}y + f_1, \\ \frac{\partial y}{\partial t} + b(l, t) \frac{\partial y}{\partial l} &= m_{21}x + m_{22}y + f_2, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $m_{ij}$ ,  $f_1$  и  $f_2$  — функции  $l$  и  $t$  в области  $D = \{0 \leq l \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$  с заданными начальными условиями

$$x(0, l) = \varphi_1(l), \quad y(0, l) = \varphi_2(l) \quad (2)$$

и условиями на границах

$$\begin{aligned} \alpha_1 \frac{dx}{dt} + \beta_1 \frac{dy}{dt} &= \gamma_{11}x + \gamma_{12}y, \quad l=0; \quad x(0, 0) = \varphi_1(0), \quad y(0, 0) = \varphi_2(0), \\ \alpha_2 \frac{dx}{dt} + \beta_2 \frac{dy}{dt} &= \gamma_{21}x + \gamma_{22}y, \quad l=1; \quad x(0, 1) = \varphi_1(1), \quad y(0, 1) = \varphi_2(1), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_{ij}$  — функция времени.

Выделены значения коэффициентов  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ , при которых такая задача поставлена некорректно, а для остальных значений  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  построен диссипативный интеграл энергии, доказана единственность решения, а также непрерывная зависимость его от начальных данных. Предложена простейшая разностная схема для численного решения системы

и приведены результаты расчетов для конкретного промышленного объекта.

**Теорема единственности.** Покажем единственность решения задачи (1)–(3), считая коэффициенты и начальные данные достаточно гладкими и при следующих ограничениях на  $\alpha_i, \beta_i$ :

1. Исключаем случай, когда все четыре коэффициента  $\alpha_i, \beta_i$  обращаются в нуль, так как в этом случае граничные условия имеют классический вид.
2. Не рассматриваем случай, когда в нуль обращается любая пара коэффициентов  $\alpha_1, \beta_1$  или  $\alpha_2, \beta_2$ , так как дифференцированием соответствующего граничного условия мы снова приводим его к виду (3). Итак, потребуем, чтобы выполнялись условия:

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0. \quad (4)$$

Для доказательства построим диссипативный интеграл энергии. Для этого введем новые функции  $\varphi(l, t)$  и  $\psi(l, t)$  следующим образом:

$$\eta_1 \varphi + \eta_2 \psi = \mu \alpha_1 x_t + \beta_1 y_t - \gamma_{11} x - \gamma_{12} y, \quad (5)$$

$$\xi_1 \varphi + \xi_2 \psi = \nu \alpha_2 x_t + \beta_2 y_t - \gamma_{21} x - \gamma_{22} y.$$

Коэффициенты  $\eta_i(l, t), \xi_i(l, t)$  определим в дальнейшем. Функции  $\mu(l, t)$  и  $\nu(l, t)$  введены для того, чтобы продолжить  $\alpha_1(t)$  и  $\alpha_2(t)$  на всю область  $D$ . Выберем  $\mu(0, t) = 1, \nu(1, t) = 1$ , а внутри  $D$  положим их произвольными гладкими функциями. Коэффициенты  $\beta_i(t)$  и  $\gamma_{ij}(t)$  для простоты будем считать постоянными по  $l$ . Граничные условия теперь можем записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \eta_1 \varphi + \eta_2 \psi &= 0, & l &= 0, \\ \xi_1 \varphi + \xi_2 \psi &= 0, & l &= 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Вместо исходной системы (1) рассмотрим расширенную систему, которая получается следующим образом. Из (5) найдем выражение для  $x_t, y_t$

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{\beta_2 \eta_1 - \beta_1 \xi_1}{\alpha_1 \mu \beta_2 - \beta_1 \nu \alpha_2} \varphi + \frac{\beta_2 \eta_2 - \beta_1 \xi_2}{\alpha_1 \mu \beta_2 - \beta_1 \nu \alpha_2} \psi + \frac{\beta_2 \gamma_{11} - \beta_1 \gamma_{21}}{\alpha_1 \mu \beta_2 - \beta_1 \nu \alpha_2} x + \frac{\beta_2 \gamma_{12} - \beta_1 \gamma_{22}}{\alpha_1 \mu \beta_2 - \beta_1 \nu \alpha_2} y, \\ y_t &= \frac{\nu \alpha_2 \eta_1 - \mu \alpha_1 \xi_1}{\beta_1 \nu \alpha_2 - \alpha_1 \mu \beta_2} \varphi + \frac{\nu \alpha_2 \eta_2 - \mu \alpha_1 \xi_2}{\beta_1 \nu \alpha_2 - \alpha_1 \mu \beta_2} \psi + \frac{\nu \alpha_2 \gamma_{11} - \mu \alpha_1 \gamma_{21}}{\beta_1 \nu \alpha_2 - \alpha_1 \mu \beta_2} x + \frac{\nu \alpha_2 \gamma_{12} - \mu \alpha_1 \gamma_{22}}{\beta_1 \nu \alpha_2 - \alpha_1 \mu \beta_2} y. \end{aligned}$$

Учитывая ограничения на  $\alpha_i, \beta_i$ , видим, что знаменатель может обратиться в нуль только в случае, когда  $\mu \alpha_1 \beta_2 = \nu \alpha_2 \beta_1$ , но этого легко избежать за счет выбора функций  $\mu(l, t)$  и  $\nu(l, t)$ . Для простоты введем коэффициенты  $c_i, d_i$  и запишем

$$x_t = c_1 \varphi + c_2 \psi + c_3 x + c_4 y, \quad y_t = d_1 \varphi + d_2 \psi + d_3 x + d_4 y. \quad (7)$$

Из системы (1) найдем выражения для  $x_t, y_t$  (учитывая (7)):

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{c_1}{a} \varphi + \frac{c_2}{a} \psi + \frac{c_3 - m_{11}}{a} x + \frac{c_4 - m_{12}}{a} y - \frac{f_1}{a}, \\ y_t &= -\frac{d_1}{b} \varphi - \frac{d_2}{b} \psi + \frac{m_{21} - d_3}{b} x + \frac{m_{22} - d_4}{b} y - \frac{f_2}{b}. \end{aligned}$$

Продифференцируем исходную систему по  $t$  и подставим в нее найденные значения  $x_t, y_t, x, y$ :

$$\begin{aligned} c_1 \varphi_t - c_1 (a\varphi)_t + \left( \dot{c}_1 - ac'_1 - m_{11}c_1 - m_{12}d_1 + c_1 c_3 - \frac{\dot{a} + ac_3}{a} c_1 + \right. \\ \left. + c_4 d_1 + \frac{ac_4 d_1}{b} - c_1 a' \right) \varphi + c_2 \psi_t - ac_2 \psi_t + \left( \dot{c}_2 - ac'_2 - m_{11}c_2 - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - m_{12}d_2 + c_2 c_3 - \frac{\dot{a} + ac_3}{a} c_2 + c_4 d_2 + \frac{ac_4 d_2}{b} \Big) \psi + \\ + \left( c_3^2 - \frac{(\dot{a} + ac_3)(c_3 - m_{11})}{a} + c_3 - ac'_3 - m_{11}c_3 - m_{12}d_3 - \dot{m}_{11} + \right. \\ \left. + c_4 d_3 - \frac{ac_4(m_{21} - d_3)}{b} \right) x + \left( c_3 c_4 - \frac{(\dot{a} + ac_3)(c_4 - m_{12})}{a} + \dot{c}_4 - ac'_4 - \right. \\ \left. - m_{11}c_4 - m_{12}d_4 - \dot{m}_{12} + c_4 d_4 - \frac{ac_4(m_{22} - d_4)}{b} \right) y + \frac{\dot{a} + ac_4}{a} f_1 - \frac{ac_4}{b} \dot{f}_2 = \dot{f}_1, \\ d_1 \varphi_t + bd_1 \varphi_t + \left( \dot{d}_1 + bd'_1 - m_{21}c_1 - m_{22}d_1 - d_3 c_1 + \frac{bd_3 c_1}{a} + d_1 d_4 - \right. \\ \left. - \frac{\dot{b} + bd_4}{b} d_1 \right) \varphi + d_2 \psi_t + d_2 (b\psi)_t + \left( \dot{d}_2 + bd'_2 - m_{21}c_2 - m_{22}d_2 + d_3 c_2 + \right. \\ \left. + \frac{bd_3 c_2}{a} + d_2 d_4 - \frac{\dot{b} + bd_4}{b} d_2 + d_2 b' \right) \psi + \left( d_3 c_3 + \frac{bd_3(c_3 - m_{11})}{a} + \dot{d}_3 + bd'_3 - \right. \\ \left. - m_{21}c_3 - m_{22}d_3 - \dot{m}_{21} + d_4 d_3 - \frac{(\dot{b} + bd_4)(m_{21} - d_3)}{b} \right) x + \\ + \left( d_3 c_4 + \frac{bd_3(c_4 - m_{12})}{a} + \dot{d}_4 + bd'_4 + m_{21}c_4 - m_{22}d_4 - \dot{m}_{22} + d_4^2 + \right. \\ \left. + \frac{(\dot{b} + bd_4)(m_{22} - d_4)}{b} \right) y - bd_3 \frac{f_1}{a} - \frac{\dot{b} + bd_4}{b} \dot{f}_2 = \dot{f}_2, \end{aligned}$$

где точка означает дифференцирование по  $t$ , а штрих — по  $l$ . Потребуем, чтобы система была записана в канонической форме, т. е. в первом уравнении положим  $c_2 = 0$ , а во втором —  $d_1 = 0$ . Иначе

$$\eta_2 / \xi_2 = \beta_1 / \beta_2, \quad \mu \xi_1 / \nu \eta_1 = \alpha_2 / \alpha_1, \quad (8)$$

что можно сделать за счет свободы выбора  $\eta_i, \xi_i$ . Поскольку для определения  $\eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2$  есть только два уравнения, мы имеем еще некоторый произвол в выборе коэффициентов, что будет полезно в дальнейшем. Поделим первое уравнение на  $c_1$ , второе — на  $d_2$ , введем новые коэффициенты  $a_{ij}$  и запишем расширенную систему

$$\begin{aligned} \varphi_t - (a\varphi)_t &= a_{11}\varphi + a_{12}\psi + a_{13}x + a_{14}y + a_{15}\dot{f}_1 + a_{16}f_1 + a_{17}\dot{f}_2, \\ \psi_t + (b\psi)_t &= a_{21}\varphi + a_{22}\psi + a_{23}x + a_{24}y + a_{25}\dot{f}_2 + a_{26}f_1 + a_{27}\dot{f}_2, \\ x_t &= c_1\varphi + c_2\psi + c_3x + c_4y, \\ y_t &= d_1\varphi + d_2\psi + d_3x + d_4y. \end{aligned} \quad (9)$$

Граничных условий (6) для этой системы достаточно, так как два последних уравнения имеют вертикальные характеристики и условий для  $x$  и  $y$  на границе задавать не нужно. Начальные условия (2) нужно дополнить условиями для  $\varphi$  и  $\psi$ . Пользуясь соотношениями (5), причем  $x_t$  и  $y_t$  при  $t = 0$  можно определить из (1).

Умножим уравнения системы соответственно на  $\varphi, \psi, x$  и  $y$ , сложим их и проинтегрируем результат от одной границы до другой

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 (\varphi^2 + \psi^2 + x^2 + y^2) dl + \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{\partial(b\psi^2)}{\partial l} - \frac{\partial(a\varphi^2)}{\partial l} \right) dl = \\ = \int_0^1 \bar{X}' Q \bar{X} dl + \int_0^1 \{ (a_{15}\dot{f}_1 + a_{16}f_1 + a_{17}\dot{f}_2) \varphi + (a_{25}\dot{f}_2 + a_{26}f_1 + a_{27}\dot{f}_2) \psi \} dl, \quad (10) \end{aligned}$$

где  $\bar{X}$  — вектор с компонентами  $\varphi, \psi, x, y$ ;  $\bar{X}'$  — транспонированный ему,

$$Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & c_1 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 & d_2 \\ a_{13} & a_{23} & c_3 & d_3 \\ a_{14} & a_{24} & c_4 & d_4 \end{pmatrix}.$$

Назовем это тождество интегралом энергии и рассмотрим условия, при которых он будет диссипативным. Из граничных условий (6) найдем

$$\psi|_{l=0} = -\frac{\eta_1}{\eta_2} \varphi|_{l=0}, \quad \psi|_{l=1} = -\frac{\xi_1}{\xi_2} \varphi|_{l=1}.$$

Рассмотрим отдельно второй интеграл

$$F = \int_0^1 \left( \frac{\partial(b\psi^2)}{\partial l} - \frac{\partial(a\varphi^2)}{\partial l} \right) dl = (b\psi^2 - a\varphi^2)|_{l=1} - (b\psi^2 - a\varphi^2)|_{l=0} = \\ = \varphi^2(1, t) \left( b \left( \frac{\xi_1}{\xi_2} \right)^2 - a \right) - \varphi^2(0, t) \left( b \left( \frac{\eta_1}{\eta_2} \right)^2 - a \right).$$

Граничные условия (и интеграл энергии) назовем диссипативными [3], если форма  $F \geq 0$ , т. е. если

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} \Big|_{l=1} > \sqrt{\frac{a}{b}} \Big|_{l=1}, \quad \frac{\eta_1}{\eta_2} \Big|_{l=0} < \sqrt{\frac{a}{b}} \Big|_{l=0}.$$

Этого всегда можно добиться, выбрав соответствующим образом  $\eta_i, \xi_i$ , за исключением случая, когда либо  $\xi_i = 0$ , либо  $\eta_i = 0$ , что соответствует равенству нулю либо  $\alpha_2$ , либо  $\beta_1$  (из (8)). Итак, в случае  $\alpha_2 \cdot \beta_1 = 0$  диссипативный интеграл энергии построить нельзя. Обозначим  $Y(t) =$

$= \int_0^1 (\varphi^2 + \psi^2 + x^2 + y^2) dl$  и вернемся к равенству (10). Считая, что  $F \geq 0$ , проинтегрируем его по  $t$  от  $t_1$  до  $t_2$

$$\frac{1}{2} (Y(t_2) - Y(t_1)) \leq - \int_{t_1}^{t_2} F dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 \bar{X}' Q \bar{X} dl dt + \\ + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 \{ (a_{15} \dot{f}_1 + a_{16} f_1 + a_{17} f_2) \varphi + (a_{25} \dot{f}_2 + a_{26} f_1 + a_{27} f_2) \psi \} dl dt.$$

Отбросив неположительный член  $-\int_{t_1}^{t_2} F dt$  получим неравенство

$$\frac{1}{2} (Y(t_2) - Y(t_1)) \leq \int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 \bar{X}' Q \bar{X} dl dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 \{ (\dot{f}_1 + f_1 + f_2) \varphi + \\ + (\dot{f}_2 + f_1 + f_2) \psi \} R dl dt,$$

где постоянная  $R \geq \max_{i, i, j} \{a_{ij}\}$ .

Пусть постоянные  $M$  и  $N$  оценивают сверху соответственно матрицу  $Q$  и вектор, составленный из свободных членов и их производных, тогда окончательно имеем неравенство

$$\frac{1}{2} (Y(t_2) - Y(t_1)) \leq \int_{t_1}^{t_2} M Y(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} R N \sqrt{Y(t)} dt,$$

откуда по лемме об интегральном неравенстве [2] имеем оценку

$$\sqrt{Y(t)} \leq \sqrt{Y(0)} e^{Mt} + R N \frac{e^{Mt} - 1}{M}. \quad (11)$$

Теорема единственности следует из (11). Действительно, пусть существуют два решения исходной системы (1). Тогда их разность удовлетворяет однородной системе с нулевыми начальными данными. Следовательно, в (11)  $N = 0$  и  $Y(0) = 0$ , а отсюда и  $Y(t) = 0$ , т. е. норма разности двух решений равна нулю, что и требуется для единственности.

Введя норму  $\|Y\| = \max_{T \geq t \geq 0} \sqrt{\int_0^1 (\varphi^2 + \psi^2 + x^2 + y^2) dl}$ , полученную оценку можем записать так:

$$\|Y\| \leq \text{const} [\|Y\|_0 + \|f\|],$$

где  $\|Y\|_0$  — норма начального условия, а  $\|f\|$  — норма правой части. Последнее неравенство и означает непрерывную зависимость решения от начальных данных. Таким образом, имеем теорему Теорема. Для достаточно гладких коэффициентов и начальных условий решение задачи (1) — (3) в прямоугольнике  $D = \{0 \leq l \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$  единственно при  $\alpha_2 \beta_1 \neq 0$  и непрерывно зависит от начальных данных.

Чтобы показать, что при  $\alpha_2 \cdot \beta_1 = 0$  задача некорректна, построим пример типа Адамара. Для простоты ограничимся случаем однородной системы с постоянными коэффициентами, т. е. в (1)  $f_1 = f_2 = 0$ ,  $a, b, m_{ij}$  не зависят от  $l$  и  $t$ . Решение будем искать в виде  $x = e^{\lambda t} x(l)$ ,  $y = e^{\lambda t} y(l)$ . Подставим его в систему и получим краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Ее общее решение

$$x(l) = c_1 e^{q_1 l} + c_2 e^{q_2 l}, \\ y(l) = a_1 c_1 e^{q_1 l} + a_2 c_2 e^{q_2 l},$$

где  $q_{1,2}$  — корни характеристического уравнения

$$q^2 - q \left( \frac{\lambda - m_{11}}{a} + \frac{m_{22} - \lambda}{b} \right) + \frac{\lambda - m_{11}}{a} \cdot \frac{m_{22} - \lambda}{b} + \frac{m_{12} \cdot m_{21}}{ab} = 0, \quad (12)$$

зависящие от  $\lambda$  и коэффициентов системы,  $a_i = \left( \frac{\lambda - m_{11}}{a} - q_i \right) \frac{a}{m_{12}}$ . Для определения  $c_1, c_2$  подставим решение в граничные условия и получим однородную линейную алгебраическую систему

$$c_1 (\lambda (\alpha_1 + a_1 \beta_1) - \gamma_{11} - a_1 \gamma_{12}) + c_2 (\lambda (\alpha_1 + a_2 \beta_1) - \gamma_{11} - a_2 \gamma_{12}) = 0, \\ c_2 e^{q_1} (\lambda (\alpha_2 + a_1 \beta_2) - \gamma_{21} - a_{11} \gamma_{22}) + c_2 e^{q_2} (\lambda (\alpha_2 + a_2 \beta_2) - \gamma_{21} - a_2 \gamma_{22}) = 0.$$

Чтобы эта система имела нетривиальное решение, ее определитель должен быть равен нулю, т. е.

$$D(\lambda) = \frac{(\lambda (\alpha_1 + a_1 \beta_1) - \gamma_{11} - a_1 \gamma_{12}) (\lambda (\alpha_2 + a_2 \beta_2) - \gamma_{21} - a_2 \gamma_{22})}{(\lambda (\alpha_2 + a_1 \beta_2) - \gamma_{21} - a_{11} \gamma_{22}) (\lambda (\alpha_1 + a_2 \beta_1) - \gamma_{11} - a_2 \gamma_{12})} e^{q_1 - q_2} = 0. \quad (13)$$

Исследуем корни уравнения  $D(\lambda) = 0$ . При  $\alpha_2 \cdot \beta_1 = 0$  это уравнение имеет бесконечно большой по модулю корень  $\lambda$ . Действительно, пусть, например,  $\alpha_2 = 0$ . Рассмотрим  $D(\lambda)$  при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ . Из характеристического уравнения (12) найдем, что в этом случае  $q_1 \sim -\frac{\lambda}{b}$ ,  $q_2 \sim \frac{\lambda}{a}$ ,  $a_1 \sim$

$\sim \frac{\lambda(a+b)}{b m_{12}}$ ,  $a_2 \sim 0 \left( \frac{1}{\lambda} \right)$ . Отбрасывая члены, не содержащие  $\lambda$ , получим

$$D(\infty) \sim \frac{\lambda \left( \alpha_1 - \frac{(a+b) \gamma_{12}}{b m_{12}} + a_1 \beta_1 \right) \lambda a_2 \beta_2}{\lambda \left( a_1 \beta_2 - \frac{(a+b) \gamma_{22}}{b m_{12}} \right) \lambda \alpha_1} e^{-\lambda \frac{a+b}{ab}} \sim \frac{\beta_1}{\alpha_1} \lambda^{-1} - e^{-\lambda \frac{a+b}{ab}}.$$

Найдем корень уравнения  $\frac{\beta_1}{\alpha_1 \lambda} - e^{-\lambda \frac{a+b}{ab}} = 0$ . Имея в виду, что  $\lambda$  — комплексное ( $\lambda = u + iv$ ) это уравнение запишем в виде системы

$$\frac{\beta_1 u}{\alpha_1 u^2 + v^2} = e^{-u \frac{a+b}{ab}} \cos v, \quad (14)$$

$$\frac{\beta_1 v}{\alpha_1 u^2 + v^2} = -e^{-u \frac{a+b}{ab}} \sin v.$$

Поделим первое уравнение системы на второе и затем умножим его на  $u$ , получим:

$$\begin{aligned} u/v &= -\operatorname{ctg} v, \\ \frac{\beta_1}{\alpha_1} \cdot \frac{u^2}{u^2 + v^2} &= ue^{-u \frac{a+b}{ab}} \cos v. \end{aligned} \quad (15)$$

Если  $u \rightarrow \infty$ , тогда во втором уравнении  $u \cdot e^{-u \frac{a+b}{ab}} \rightarrow 0$ , поэтому, поскольку  $\cos v$  — ограниченная величина,  $\frac{\beta_1}{\alpha_1} \cdot \frac{u^2}{u^2 + v^2} \rightarrow 0$ , откуда  $\frac{u^2}{v^2} \rightarrow 0$ . Следовательно, при  $u \rightarrow \infty$   $\operatorname{ctg} v \rightarrow 0$  (из первого уравнения в (15)), что реализуется на последовательности  $v_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$  при  $n \rightarrow \infty$ . Подставим найденное значение  $v_n$  во второе уравнение системы (14) и получим, что  $\sin v = \pm 1$ . Если, например, левая часть уравнения положительна, тогда окончательно имеем  $v_n = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$ . Найдем теперь соответствующее  $u$

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} \frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi n}{u^2 + \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)^2} = e^{-u \frac{a+b}{ab}}.$$

Поскольку, как было показано выше, отношение  $u/v \rightarrow 0$ , то  $u$  мало по сравнению с  $v$  и членом  $u^2$  в знаменателе можем пренебречь. Итак, для  $u$  получаем уравнение  $e^{-u \frac{a+b}{ab}} = \frac{\beta_1}{\alpha_1 \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)}$ , откуда  $u_n = \frac{ab}{a+b} \times$

$\times \ln \left( \frac{\alpha_1 \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)}{\beta_1} \right)$ , т. е. в плоскости  $(u, v)$  при  $u \rightarrow \infty$  все корни урав-

нения  $D(\lambda) = 0$  расположены на кривой  $v = \frac{\alpha_1}{\beta_1} u \frac{a+b}{ab}$ . Теперь легко построить пример некорректности. Выделяя действительную часть  $\lambda$ , рассмотрим решение

$$x = \frac{1}{\ln n} e^{\frac{ab}{a+b} \ln \left( \frac{\alpha_1}{\beta_1} \left( t - \frac{l}{b} \right) 2\pi n \right)} \cos \left( 2\pi n \left( t - \frac{l}{b} \right) \right).$$

При  $n \rightarrow \infty$  начальные данные близки к нулю ( $t = 0$ ), но решение  $x_n(l, t)$  при любом  $t$  не ограничено. Случай  $\alpha_2 = 0$  соответствует тому, что на правой границе задаются граничные условия, в то время как характеристики туда «приходят». Аналогично можно показать, что задача некорректна при  $\beta_1 = 0$ .

Сделаем замечание об обратимости задачи. Иногда нужно узнать, как ведет себя решение не при  $t \geq 0$ , а при  $t < 0$ . Задачи, которые разрешимы как в сторону отрицательных, так и положительных  $t$ , называ-

ются обратимыми. Решать задачу в сторону  $t > 0$  и одновременно в сторону  $t < 0$  можно только в том случае, когда число характеристик с отрицательным наклоном равно числу характеристик с положительным наклоном. В нашем случае это условие характеристик с положительным наклоном выполняется только тогда, когда все коэффициенты  $\alpha_i, \beta_i$  отличны от нуля. Если же  $\alpha_1 \cdot \beta_2 = 0$ , то задача необратима, так как в этом случае обратная задача некорректна, как показано выше.

В качестве примера приведем результаты расчета для ректификационной колонны К-6 ЦГФУ, которая описывается следующей системой уравнений [1]:

$$\frac{\partial (H_x x)}{\partial t} - \frac{\partial (Lx)}{\partial l} = K_y (y - kx) + \Phi_x,$$

$$\frac{\partial (H_y y)}{\partial t} + \frac{\partial (Vy)}{\partial l} = K_y (kx - y) + \Phi_y$$

с заданными граничными условиями

$$\frac{d(H_{x_h} y(0, t))}{dt} = Lx - (V + W)y, \quad l = 0;$$

$$\begin{cases} \frac{d(H_{x_d} x_d(t))}{dt} = V_d y - (L_d + D)x_d, & l = l_0, \\ (V_d - V)y = L_d x_d - Lx. \end{cases}$$

Коэффициенты системы таковы, что она легко может быть приведена к виду (1), нужно лишь отметить особую ситуацию, получающуюся при  $k(l, t) = 1$ . В этом случае система уравнений статики (отсутствуют правые части и производные по времени) имеет семейство решений  $x = y = \text{const}$ , т. е. стационарное состояние неединственно. Численным методом решать задачу нельзя, поскольку ошибка, внесенная входными данными или вычислительной погрешностью, может повлечь за собой переход решения на каждом шаге из одного состояния в другое, и верной картины процесса мы не получим.

Итак, при  $k(l, t) \neq 1$  задача поставлена корректно и может быть решена численным методом. Для расчета использовалась неявная схема [2], с помощью которой решение исходной системы было сведено к решению разностной системы

$$\frac{H_x^{mn+1} x^{mn+1} - H_x^{mn} x^{mn}}{\tau} - \frac{L^{m+1n+1} x^{m+1n+1} - L^{mn+1} x^{mn+1}}{h} =$$

$$= K_y^{mn} (y^{mn} - k^{mn} x^{mn}) + \Phi_x^{mn},$$

$$\frac{H_y^{mn+1} y^{mn+1} - H_y^{mn} y^{mn}}{\tau} + \frac{V^{m+1n+1} y^{m+1n+1} - V^{m-1n+1} y^{m-1n+1}}{h} =$$

$$= K_y^{mn} (k^{mn} x^{mn} - y^{mn}) + \Phi_y^{mn}$$

с граничными условиями

$$\left( \frac{H_{x_h}^{0n+1}}{\tau} + V^{0n+1} + W^{0n+1} \right) y^{0n+1} - L^{0n+1} x^{0n+1} = \frac{H_{x_h}^{0n}}{\tau} y^{0n},$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{H_{x_d} (V_d - V)}{\tau L_d} - V_d + \frac{(L_d + D)(V_d - V)}{L_d} \right]^{Mn+1} y^{Mn+1} + \left[ \frac{H_{x_d} L}{\tau L_d} + \right. \\ & \left. + \frac{(L_d + D)L}{L_d} \right]^{Mn+1} x^{Mn+1} = \left[ \frac{H_{x_d} (V_d - V)}{L_d \tau} \right]^{Mn} y^{Mn} + \left[ \frac{H_{x_d} L}{L_d \tau} \right]^{Mn} x^{Mn}, \end{aligned}$$

где  $m$  — пространственный индекс, а  $n$  — временной. В качестве начальных условий был задан установившийся режим при  $L = 687$  кмоль/ч,

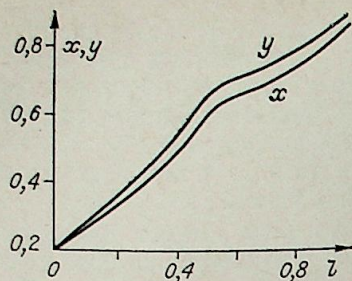


Рис. 1. График распределения концентраций изопентана в жидкой ( $x$ ) и паровой ( $y$ ) фазах по длине колонны в стационарном режиме. Длина и время в безразмерных единицах.

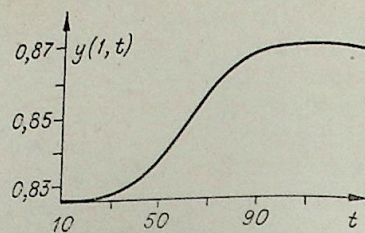


Рис. 2. График изменения во времени концентрации изопентана на выходе колонны.

$D = 80,9$  кмоль/ч,  $V = 767,9$  кмоль/ч,  $W = 91,3$  кмоль/ч, и методом прогонки просчитано изменение во времени концентраций при возмущении  $\Phi_x$ . Результаты расчетов показаны на рис. 1, 2. Расчетные данные хорошо согласуются с экспериментальными [1].

Авторы выражают благодарность Еркаеву Н. В. и Денисенко В. В. за полезные замечания и обсуждение полученных результатов.

Вычислительный центр СО АН СССР,  
Красноярск

Поступила в редакцию  
20/II 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Демиденко Н. Д., Ушатинская Н. П. Моделирование, распределенный контроль и управление процессами ректификации. Новосибирск, Наука, 1978.
2. Годунов С. К. Уравнения математической физики. М., Наука, 1971.
3. Годунов С. К., Гордиенко В. М. Смешанная задача для волнового уравнения. Препринт ВЦ СО АН СССР. Новосибирск, 1977.

С. Н. РЫЧКОВ

### ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЗИСТИВНОГО КОЛЬЦА, ЗАМКНУТОГО ДЖОЗЕФСОНОВСКИМ КОНТАКТОМ С МАЛОЙ ЕМКОСТЬЮ

Системы с джозефсоновскими контактами имеют широкое применение в качестве очень чувствительных датчиков магнитометров, гальванометров и градиентометров с чувствительностью соответственно  $10^{-8}$  Гс,  $10^{-17}$  В,  $10^{-11}$  Гс/см [1, 2]. Исключительно высокая частота переключений ( $10^{11}$ — $10^{12}$  с $^{-1}$ ), плотность компоновки ( $10^5$ — $10^6$  элементов на 1 см $^2$ ), а также чрезвычайно малая энергия переключения ( $10^{-19}$ — $10^{-18}$  Дж) таких элементов — основа для создания больших интегральных схем различного назначения [3]. Причем, как отмечают В. Н. Губанков и К. К. Лихарев, возможно функционирование ЭВМ на новых принципах, «поскольку время срабатывания элементов может быть много меньше времени распространения сигнала между процессором и оперативным запоминающим устройством ОЗУ» [4].

Резистивный контур, замкнутый джозефсоновским контактом, — хорошо известная система, используемая в перечисленных выше измерительных устройствах [1, 2]. Кроме того, эта система составляет основу одного из вариантов разрабатываемых логических элементов для операционных устройств [3]. Статистические свойства системы изучены достаточно хорошо [1]. Кольцо с малым сопротивлением, на котором падает фиксированное напряжение, описывается нелинейным дифференциальным уравнением 1-го порядка [1].

В работе исследуется динамика резистивного кольца (сопротивление произвольное), замкнутого джозефсоновским контактом с малой емкостью. Для описания контакта использована резистивная модель [2]. Анализ сводится к изучению системы двух нелинейных дифференциальных уравнений 1-го порядка. Поскольку в подобных устройствах большую роль играют автоколебательные процессы, основное внимание будет уделено периодическим решениям, их устойчивости, а также процессам перехода от состояния равновесия (предельного цикла) к предельному циклу (состоянию равновесия).

1. Схема элемента. Уравнения движения. Схема элемента дана на рис. 1, а, эквивалентная схема — на рис. 1, б. Здесь  $I$  — ток питания,  $R$  — сопротивление контакта в нормальном состоянии,  $I_c \sin \varphi$  — сверхпроводящий джозефсоновский ток.  $\varphi$  — разность фаз сверхпроводника по обе стороны контакта,  $L$  — индуктивность контура,  $R_L$  — сопротивление, включенное в контур.

Принимая за независимые переменные  $\varphi$ ,  $I_L$ , согласно рис. 1, б, получим

$$\dot{\varphi} = \gamma - \alpha z - \sin \varphi = P(\varphi, z); \quad (1)$$

$$\dot{z} = \gamma - \beta z - \sin \varphi = Q(\varphi, z), \quad (\dot{\phantom{x}}) \equiv (d/d\tau),$$

где  $\tau = RI_c/\Phi$ ,  $z = LI_L/\Phi$ ,  $\alpha = \Phi/LI_c$ ,  $\beta = \alpha(1+r)$ ,  $r = R_L/R$ ,  $\Phi = \Phi_0/2\pi$ ,  $\Phi_0$  — квант потока,  $\gamma = I/I_c$ .

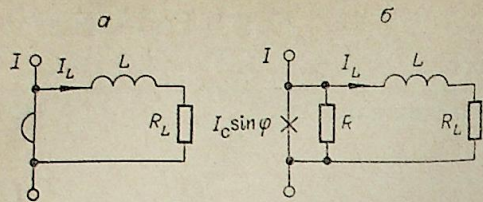


Рис. 1.

Отметим, что  $r > 0$  (схема, изображенная на рис. 1, а, при  $R_L = 0$  рассмотрена в [5]),  $\beta > \alpha$ ,  $\gamma \geq 0$ . Система (1) остается инвариантной по отношению к преобразованию

$$\varphi \rightarrow -\varphi', \quad z \rightarrow -z', \quad \gamma \rightarrow -\gamma'. \quad (2)$$

Фазовое пространство системы (2) представляет собой топологическое произведение поверхности цилиндра  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$  с отождествленными краями и прямой  $z$ .

2. Состояния равновесия. Система (1) при  $\gamma < 1$  имеет два состояния равновесия:  $O_1(\arcsin \gamma, 0)$  — устойчивый узел и  $O_2(\pi - \arcsin \gamma, 0)$  седло. При  $\gamma = 1$  состояния равновесия  $O_1$  и  $O_2$  сливаются, образуя сложную особую точку седло-узел. Значение  $\gamma = 1$  является бифуркационным. При  $\gamma > 1$  состояния равновесия отсутствуют.

3. Поведение в бесконечности. Из системы (1) устанавливаем, что  $\dot{z} > 0$  при  $z < (\gamma - \sin \varphi)/\beta$  и  $\dot{z} < 0$  при  $z > (\gamma - \sin \varphi)/\beta$ . Построим в фазовом пространстве прямоугольник со сторонами  $\varphi = \pm \pi$ ,  $z = z_1$ ,  $z = z_2$ , где  $z_1 < (\gamma - 1)/\beta$ ,  $z_2 > (\gamma + 1)/\beta$ . Очевидно, что все траектории системы (1) будут с возрастанием  $\tau$  входить внутрь этого прямоугольника. Следовательно, поведение в бесконечности при любых значениях параметров будет неустойчивым.

4. Отсутствие предельных циклов первого рода. Рассмотрим область  $D_1$ , ограниченную кривыми

$$L_0 = z = 0, \quad L_1 = \alpha z + \sin \varphi - \gamma = 0, \quad L_2 = \varphi + \pi = 0.$$

Нетрудно видеть, что цикл первого рода должен пересечь область  $D_1$ . На кривых  $L_0$ ,  $L_1$ ,  $L_2$  имеем (исключая узловую точку)

$$\frac{dL_0}{d\tau} = \dot{z} > 0, \quad \frac{dL_1}{d\tau} = \alpha \dot{z} < 0, \quad \frac{dL_2}{d\tau} \geq 0, \quad (3)$$

причем  $\varphi = 0$  в единственной точке  $(-\pi, \gamma/\alpha)$ . Неравенства (3) показывают, что из области  $D_1$  не выходит ни одной траектории системы (1). Фазовая точка, попав в  $D_1$ , стремится к устойчивому узлу, что и доказывает отсутствие циклов первого рода.

5. Отсутствие циклов второго рода при  $0 \leq \gamma < 1$ . Из (1) имеем

$$\dot{\varphi} = z + \alpha r z. \quad (4)$$

Пусть имеется цикл, охватывающий цилиндр, т. е.  $z(\tau) = z(\tau + T)$ , где  $T$  — период. Интегрируя (4) от 0 до  $T$ , получим  $(\varphi(-\pi, z \leq 0) \geq 0)$ :

$$\int_0^T \dot{\varphi} d\tau = \int_0^T (z + \alpha r z) d\tau = \alpha r \int_0^T z d\tau. \quad (5)$$

При  $z \leq 0$  равенство (5) невыполнимо, т. е. на нижнем полуцилиндре циклов нет.

Покажем, что цикл не может пересечь прямую  $z = 0$ . Разобьем прямую  $z = 0$  на отрезки  $l_1 = [-\pi, \varphi_1]$ ,  $l_2 = [\varphi_1, \varphi_2]$ ,  $l_3 = [\varphi_2, \pi]$ , где  $\varphi_1 = \arcsin \gamma$ ,  $\varphi_2 = \pi - \varphi_1$ . Траектория, попавшая на  $l_1$  или  $l_2$  (исключая седло), уйдет в устойчивый узел, а отрезок  $l_3$  не может быть пересечен дважды, поскольку на нем  $\varphi$  сохраняет знак, а именно  $\varphi > 0$ .

Покажем, что на верхнем полуцилиндре циклов тоже нет. Если бы такой цикл был, он должен пересечь кривую

$$L_3 = \gamma - \sin \varphi - \beta z = z = 0. \quad (6)$$

Но в полуинтервалах  $[-\pi, \varphi_1)$ ,  $(\varphi_2, \pi]$  мы имеем  $L_3 \equiv z(\varphi) < z(\varphi) \in L_1$ , т. е. цикл обязан пройти через область  $D_1$ . Выше показано, что траектория, вошедшая в  $D_1$ , не может далее ее покинуть. Полученное противоречие и доказывает отсутствие циклов, охватывающих верхний полуцилиндр при  $0 \leq \gamma < 1$ , а тем самым и отсутствие вообще циклов 2-го рода при  $0 \leq \gamma < 1$  и произвольных  $\alpha$  и  $\beta$ .

6. Периодические решения при  $\gamma \geq 1$ . Для случая  $\gamma = 1$  существует единственное разбиение фазового пространства на траекторию. Имеется замкнутая интегральная кривая, проходящая через особую точку седло-узел. Эта кривая является сепаратрисой, стремящейся при  $\tau \rightarrow +\infty$  и при  $\tau \rightarrow -\infty$  к седло-узлу. Увеличение  $\gamma$  от значения  $\gamma = 1$  приведет к рождению от этой сепаратрисы единственного предельного цикла и притом устойчивого, так как в седло-узле  $P'_\varphi + Q'_z = -\beta < 0$ . Далее полагаем  $\gamma > 1$ .

Покажем, что при любом  $\gamma > 1$  система (1) имеет цикл. Установим наличие таких двух решений  $z_1$  и  $z_2$ , чтобы

$$z_1(\varphi_0 + 2\pi) \leq z_1(\varphi_0), \quad z_2(\varphi_0 + 2\pi) \geq z_2(\varphi_0), \quad (7)$$

Возьмем  $z_2 \leq (\gamma - 1)/\beta$ , где  $\dot{z}(\varphi_0) \geq 0$  и, следовательно

$$z_2(\varphi_0 + 2\pi) \geq z_2(\varphi_0). \quad (8)$$

Для начальных точек  $z_1 \geq (\gamma + 1)/\beta$ , где  $\dot{z}(\varphi_0) \leq 0$ , мы получим

$$z_1(\varphi_0 + 2\pi) \leq z_1(\varphi_0). \quad (9)$$

Из (7)–(9) устанавливаем, что система (1) в полосе

$$(\gamma - 1)/\beta \leq z \leq (\gamma + 1)/\beta \quad (10)$$

имеет периодическое решение. Для доказательства, что оно единственное подберем такую функцию  $B(\varphi, z)$ , чтобы выражение

$$\sigma = \frac{\partial}{\partial \varphi} (BP) + \frac{\partial}{\partial z} (BQ) \quad (11)$$

сохраняло знак в полосе (10). Возьмем функцию

$$B(\varphi, z) = \exp(m_1 \varphi) \exp(m_2 z), \quad (12)$$

где  $m_1 = -\beta n$ ,  $m_2 = \alpha n$ ,  $n > 0$ . Подставляя (12) в (11), находим

$$\sigma = -B(\varphi, z) [\beta + \cos \varphi + n(\beta - \alpha)(\gamma - \sin \varphi)]. \quad (13)$$

Чтобы выражение (13) не меняло знака при любых  $\varphi$ , достаточно взять

$$n > n_0 = \frac{1 - \beta}{(\beta - \alpha)(\gamma - 1)}.$$

При  $n > n_0$  имеем  $\sigma < 0$ , так как  $\beta > \alpha$ ,  $\gamma > 1$ . Разумеется, при  $\beta \geq 1$  можно положить  $n = 0$ . Итак, в полосе (10) имеется единственный цикл.

Очевидно, что этот цикл устойчив, поскольку из полосы (10) не выходит ни одной траектории при возрастании  $\tau$  [6]. Таким образом, система (1) при  $\gamma > 1$  имеет единственный устойчивый предельный цикл, охватывающий верхний полуцилиндр.

7. Анализ системы (1) при  $\alpha \gg 1$ . Условие  $\alpha \gg 1$  равносильно неравенству  $LI_c \ll 3,2 \cdot 10^{-16}$  Вб. При  $I_c = 2 \cdot 10^{-5}$  А (величина, характерная для мостика переменной толщины [7]) будем иметь  $L \ll 1,6 \cdot 10^{-11}$  Г. Можно ожидать, что при  $\alpha \gg 1$  решение системы (1) будет близко к решению для изолированного контакта (подключенного к источнику тока), у которого сопротивление в нормальном состоянии равно  $RR_L/(R + R_L)$ . Ниже мы покажем, что это действительно так.

В системе (1) сделаем замену переменных  $u = \alpha z$ :

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \gamma - \sin \varphi - u, \\ \varepsilon \dot{u} &= \gamma - \sin \varphi - r_1 u = f(\varphi, u), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\varepsilon = 1/\alpha \ll 1$ ,  $r_1 = 1 + r$ .

Система (14) относится к классу систем с малым параметром при производных [8]. Она распадается на вырожденную систему

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \gamma - \sin \varphi - u, \\ f(\varphi, u) &= \gamma - \sin \varphi - r_1 u = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

и уравнение быстрых движений

$$\varepsilon \dot{u} = \gamma - \sin \varphi - r_1 u, \quad (16)$$

где  $\varphi$  выступает в качестве параметра.

Все траектории вырожденной системы (15) лежат на кривой  $\Gamma$ :  $u = (\gamma - \sin \varphi)/r_1$ , причем, поскольку  $\partial f/\partial u = -r_1 < 0$ , все точки кривой  $\Gamma$  устойчивые.

Пусть  $M_0(\varphi_0, u_0)$  — начальная точка движения, расположенная на конечном расстоянии от кривой  $\Gamma$ . Согласно (16), движение по траектории системы (14) будет близким к движению по прямой  $\varphi = \varphi_0$ . Приблизившись к кривой  $\Gamma$  (на расстояние порядка  $\varepsilon$ ), фазовая точка начнет медленное движение в  $\varepsilon$ -окрестности кривой  $\Gamma$  в сторону увеличения  $\varphi$ , согласно вырожденной системе (15), пока не придет в точку  $(\pi, \gamma/r_1)$ . Поскольку точки  $(-\pi, \gamma/r_1)$  и  $(\pi, \gamma/r_1)$  отождествлены, мы будем иметь замкнутую траекторию, целиком лежащую в  $\varepsilon$ -окрестности кривой медленных движений  $\Gamma$ .

На кривой  $\Gamma$ , согласно (15), имеем

$$(1+r)\dot{\varphi} = r(\gamma - \sin \varphi). \quad (17)$$

Уравнение (17) интегрируется:

$$\varphi = 2 \operatorname{arctg} \left[ \frac{1}{\gamma} + \frac{\omega_0}{\gamma} \operatorname{tg} \frac{\omega_0 \tau}{2(1+r)} \right], \quad (18)$$

где постоянная интегрирования положена равной нулю,  $\omega_0 = \sqrt{\gamma^2 - 1}$ .

Обозначая через  $\bar{x}$  среднее за период  $T$  значение периодической функции  $x(t) = x(t+T)$ , имеем следующие выражения для частоты колебаний  $f$ , среднего тока  $\bar{I}_L$ , среднего напряжения на контакте  $\bar{V}$ , а также средней энергии  $\bar{W}$ , диссипируемой элементом

$$f = \frac{R_L I_c \omega_0}{r_1 \Phi_0}, \quad \bar{I}_L = \frac{f \Phi_0}{R_L}, \quad \bar{V} = R_L \bar{I}_L, \quad \bar{W} = I \Phi_0. \quad (19)$$

Полагая  $I = 1,5 \cdot 10^{-5}$  А, получим  $\bar{W} = 3 \cdot 10^{-20}$  Дж — исключительно малая величина.

На рис. 2, а приведены кривые зависимости  $\varphi$ ,  $I_L/I$ ,  $V/IR$  от параметра  $\theta = 2\pi ft$  при  $r = 0,5$ ,  $\gamma = \sqrt{2}$ . Отметим, что при изменении  $\gamma$  от  $\gamma = 1 + 0$  до  $\gamma \rightarrow +\infty$   $\varphi(\theta)$  меняется от ступенчатой функции

$$\varphi(\theta) = \begin{cases} \pi/2 & \text{при } 0 \leq \theta < \pi, \\ 5\pi/2 & \text{при } 2\pi \geq \theta > \pi \end{cases} \quad (20)$$

до линейной  $\varphi(\theta) = \theta$ .

8. Анализ системы (1) при  $\alpha \ll 1$ . Неравенство  $\alpha \ll 1$  для значения  $I_c = 2 \cdot 10^{-5}$  А приводит к  $L \geq 2 \cdot 10^{-10}$  Г, т. е. обычной для контуров величине, поэтому анализ этого режима имеет самостоятельный практический интерес.

В системе (14) фаза  $\varphi$  является быстровращающейся по отношению к движению по  $u$ . Следовательно, для анализа (14) можно применить метод усреднения [9]. Полагая в (14)  $\alpha = 0$ , получаем вырожденную систему, решение которой с начальными условиями  $u(0) = u_0$ ,  $\varphi(0) = 2 \operatorname{arctg} (\gamma - u_0)^{-1}$  будет

$$u = u_0, \quad \varphi = 2 \operatorname{arctg} [(\gamma - u_0)^{-1} (1 + \Omega \operatorname{tg} (\Omega \tau / 2))], \quad (21)$$

где

$$\Omega = \sqrt{(\gamma - u_0)^2 - 1}.$$

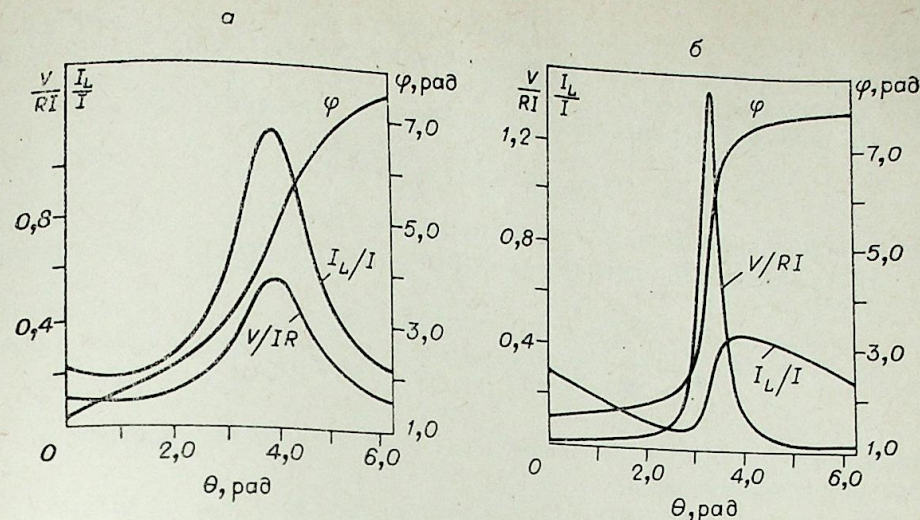


Рис. 2.

а)  $\Phi_0/2\pi LI > 1$ ,  $I/I_c = \sqrt{2}$ ,  $R_L/R = 0,5$ ;

б)  $\Phi_0/2\pi LI = 0,1$ ,  $I/I_c = \sqrt{2}$ ,  $R_L/R = 0,5$

Усредняя в системе (14) правую часть уравнения для  $u$  вдоль траектории (21), находим уравнение первого приближения для  $\bar{u}$

$$\dot{\bar{u}} = \alpha \left( \sqrt{(\gamma - \bar{u})^2 - 1} - r\bar{u} \right). \quad (22)$$

Устойчивому состоянию равновесия уравнения (22)

$$\bar{u} = u^* = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma + \sqrt{1 + r^2(\gamma^2 - 1)}} \quad (23)$$

соответствует устойчивый цикл второго рода системы (14) с круговой частотой

$$\omega = \sqrt{(\gamma - u^*)^2 - 1} = ru^*. \quad (24)$$

Подставляя в (21)  $u_0 = u^*$ ,  $\Omega = \omega$ , найдем из (14)  $u(\tau)$  с точностью до  $\alpha$

$$u = u^* + \alpha [\varphi(\tau) - \varphi(0) - \omega \tau]. \quad (25)$$

Физический смысл соотношения (23), (24) в том, что эквивалентная схема на рис. 1, б заменяется схемой изолированного контакта, подключенного к источнику тока  $I - \bar{I}_L = I - f\Phi_0/R_L$ . Достаточно для частоты колебаний  $f$  воспользоваться выражением (19), в котором необходимо положить  $R_L = \infty$  и заменить  $\gamma$  на величину  $\gamma - \bar{I}_L/I_c$ , чтобы получить (23) и (24).

Выражения (23) и (24) приводят к следующим расчетным формулам:

$$f = R_L I_c u^* / \Phi_0, \quad \bar{I}_L = I_c u^*, \quad \bar{V} = R_L I_c u^*, \quad \bar{W} = I \Phi_0. \quad (26)$$

Зависимости  $\varphi$ ,  $I_L/I$ ,  $V/IR$  от параметра  $\theta = 2\pi ft$  при  $r = 0,5$  и  $\gamma = \sqrt{2}$  даны на рис. 2, б.

Фаза  $\varphi(\theta)$  меняется от ступенчатой функции (20) до линейной  $\varphi(\theta) = \theta$  при изменении  $\gamma$  от  $\gamma = 1 + 0$  до  $\gamma \rightarrow \infty$ .

9. Переходные процессы при  $\alpha \gg 1$ . В этом и следующем разделе мы ограничимся рассмотрением процессов установления тока  $I_L$ .

Пусть имеется установившийся периодический режим с некоторым  $\gamma_1 > 1$ . В некоторый момент времени управляющий сигнал увеличивает  $I_c$ , и мы имеем  $\gamma = \gamma_0 < 1$ , пусть  $\varphi = \varphi_0$ ,  $u = u_0$ . Согласно (16) фазовая

точка за время порядка  $\varepsilon = \alpha^{-1} \ll 1$  войдет в  $\varepsilon$ -окрестность с уравнением  $\gamma - \sin \varphi - r_1 u = 0$  и далее будет двигаться в соответствии с уравнением (17) к устойчивому узлу.

На кривой  $\Gamma$  переменная  $u$  удовлетворяет уравнению

$$(1+r) \dot{u} = \mp ru \sqrt{1 - (\gamma_0 - r_1 u)^2}, \quad (27)$$

где знак плюс при  $\cos \varphi_0 \leq 0$ , знак минус при  $\cos \varphi_0 \geq 0$ .

Интегрируя (27), находим время переходного процесса  $\tau_{п0}$  (считаем  $\cos \varphi_0 \geq 0$ )

$$\tau_{п0}' = \frac{r_1}{rm} \ln \frac{(m \sqrt{1 - (\gamma_0 - r_1 u_k)^2} + m^2 + r_1 \gamma_0 u_k) u_k'}{(m \sqrt{1 - (\gamma_0 - r_1 u_n')^2} + m^2 + r_1 \gamma_0 u_n') u_k}, \quad (28)$$

где  $m = \sqrt{1 - \gamma_0^2}$ ,  $u_n' = (\gamma_0 - \sin \varphi_0)/r_1$  — начальная точка процесса,  $u_k$  — конечная точка процесса.

При  $\cos \varphi_0 \leq 0$  из (27) получаем время перехода  $\tau_{п0}''$  от начальной точки  $u = u_n''$  до  $u_{к1,2} = (\gamma \mp 1)/r_1$  (знак плюс при  $-\pi \leq \varphi \leq -\pi/2$ , знак минус при  $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi$ ):

$$\tau_{п0}'' = \frac{r_1}{rm} \ln \frac{m \sqrt{1 - (\gamma_0 - r_1 u_n'')^2} + m^2 + r_1 \gamma_0 u_n''}{r_1 u_n''}. \quad (29)$$

В общем случае полное время переходного процесса  $\tau_{п0} = \tau_{п0}' + \tau_{п0}''$ .

Считая  $u_n'$ ,  $u_n''$  случайными величинами, равномерно распределенными на отрезке  $[u_{к1}, u_{к2}]$ , найдем из (28), (29) математическое ожидание длительности процесса установления  $\tau_{п0}$ :

$$\bar{\tau}_{п0} = \frac{1+r}{rm} \ln \frac{m \sqrt{1 - (\gamma_0 - r_1 u_k)^2} + m^2 + r_1 \gamma_0 u_k}{r_1 u_k}. \quad (30)$$

Максимальное время  $\tau_{п0}$  найдем из (28) и (29), полагая  $u_n' = u_{к1,2}$ ,  $u_n'' = u_k$  (переход из седла в узел), что дает  $\tau_{п0 \max} = 2\bar{\tau}_{п0}$ .

Величина  $u_k$  в (30) — это критерий окончания переходного процесса. Например,  $u_k = 0,1 (\gamma_0 + 1)/r_1$  означает переходной процесс от  $u = 10u_k$  до  $u = u_k$ . Если же  $u_k$  не связывать с  $u_n$ , то ее можно положить равной требуемой малой величине, например  $u_k = 0,02 m/r_1$ . Такой критерий обеспечивает в конце переходного процесса  $\varphi = \mp 0,02 + \arcsin \gamma_0$ . Он взят для расчета, приведенного ниже графика  $\tau_{п0}$ .

Время переходного процесса  $\tau_{п1}$  от устойчивого узла  $O_1(\varphi_1, 0)$  к периодическому режиму найдем, интегрируя уравнение (16) от  $u = 0$  до  $u = 0,9 (\gamma - \sin \varphi)/(1+r)$  при  $\varphi = \varphi_1$ ,  $\gamma = \gamma_1 > 1$ :

$$\tau_{п1} = \frac{\ln 10}{\alpha(1+r)}.$$

Графики зависимости  $R\bar{t}_{п0}/100L$  и  $R\bar{t}_{п1}/L$  от параметра  $\varkappa = 1/\gamma$  при  $I = \text{const}$ ,  $\Phi/LI = 10$ ,  $r = 0,5; 1,0; 2,0$  даны на рис. 3, а, из которого видно, что  $t_{п1} \ll \bar{t}_{п0}$ .

10. Переходные процессы при  $\alpha \ll 1$ . В системе (14) сделаем замену  $\tau_1 = \alpha\tau$ :

$$\alpha \frac{d\varphi}{d\tau_1} = \gamma - \sin \varphi - u, \quad \frac{du}{d\tau_1} = \gamma - \sin \varphi - r_1 u. \quad (31)$$

Пусть имеется периодический режим с некоторым  $1,5 > \gamma_1 > 1$  и в некоторый момент времени  $\tau_1 = \tau_{10}$  сигнал управления переключает  $\gamma$

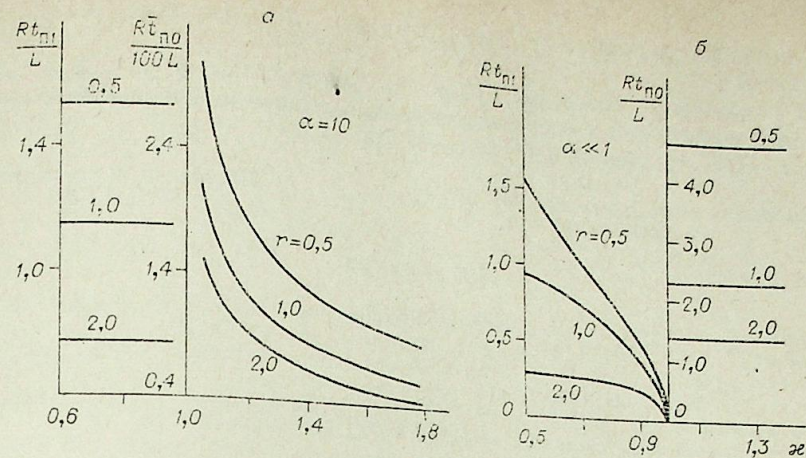


Рис. 3.

до величины  $1 > \gamma_0 > 0,5$ . Согласно уравнению быстрых движений системы (31)

$$\alpha \frac{d\varphi}{d\tau_1} = \gamma_0 - \sin \varphi - u_0,$$

где  $u_0 = u(\tau_{10}) = \text{const}$ , фазовая точка за время порядка  $\alpha$  попадет в устойчивую  $\alpha$ -окрестность кривой медленных движений  $\gamma_0 - \sin \varphi - u = 0$  и далее будет двигаться по этой кривой в соответствии с уравнением

$$du/d\tau_1 = -ru \quad (32)$$

к устойчивому состоянию равновесия  $u = 0$ . Считая переходный процесс законченным при  $u = 0,1 u_0$ , из (32) получаем

$$\tau_{п0} = \frac{\ln 10}{\alpha r}.$$

Время переходного процесса  $\tau_{п1}$  от устойчивого узла  $O_1(\varphi_1, 0)$  к периодическому режиму при  $\gamma > 1$  найдем, интегрируя уравнение (22) от  $\bar{u} = 0$  до  $\bar{u} = 0,9 u^*$ :

$$\tau_{п1} \approx \frac{1}{\alpha r_1} \left[ \left(1 - \frac{r_1}{kp}\right) \ln \frac{d+rm-k}{0,1rp} + \frac{r_1}{1-r} \ln \frac{r_1^d}{p} - \frac{r(\gamma+k)}{k(1-r)} \ln \frac{r_1^{d-p}}{2k} \right],$$

где  $m = \sqrt{\gamma^2 - 1}$ ,  $k = \sqrt{1 + r^2 m^2}$ ,  $p = k + r\gamma$ ,  $d = m + \gamma$ .

На рис. 3, б приведены зависимости  $Rt_{п0}/L$  и  $Rt_{п1}/L$  от параметра  $\varkappa$  при  $I = \text{const}$ ,  $r = 0,5; 1,0; 2,0$ . Можно видеть, что  $t_{п1} < t_{п0}$ .

11. Заменой переменных систему (1) можно привести к виду  $\dot{\varphi} = 1 - x - \varkappa \sin \varphi$ ,  $\dot{x} = a(1 - r_1 x - \varkappa \sin \varphi)$  ( $\cdot = d/d\tau$ ), где  $\tau = RIt/\Phi$ ;  $x = I_L/I$ ;  $a = \alpha\kappa$ . Результаты анализа этой системы при  $a \gg 1$  и  $a \ll 1$  будут аналогичны результатам 7-го и 8-го разделов, причем для ситуации  $a \ll 1$ ,  $\alpha \gg 1$ , т. е.  $\gamma \gg 1$ , формулы (19) и (26) совпадут.

С учетом этого замечания мы приводим на рис. 4 рассчитанные по формулам (19), (26) графики зависимости  $\bar{I}_L/I$ ;  $\bar{V}/R_L I$ ;  $\bar{j}_{\Phi_0}/R_L I$  от параметра  $\varkappa$

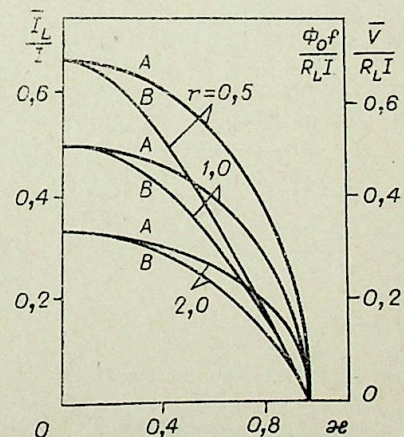


Рис. 4.

(ток питания фиксирован) для случаев  $a \gg 1$ . (кривые А) и  $a \ll 1$  (кривые В).

В заключение отметим, что наши результаты на рис. 2, б, 3, б, 4 хорошо согласуются с результатами численного расчета системы при  $a \ll 1$ ,  $r = 0,5$ , проведенного в работе [10].

Вычислительный центр СО АН СССР,  
Красноярск

Поступила в редакцию  
13/II 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Солимар Л. Туннельный эффект в сверхпроводниках и его применение. М., Мир, 1974. 432 с.
2. Кулик И. О., Янсон И. К. Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах. М., Наука, 1970. 272 с.
3. Войтович И. Д., Ченцов Р. А. Эффект Джозефсона в вычислительной технике.— Управляющие системы и машины, 1975, № 2, с. 71—78.
4. Губанков В. Н., Лихарев К. К. Сверхпроводниковая электроника (обзор).— Радиотехника и электроника, 1975, XX, вып. 1, с. 1—27.
5. Лихарев К. К. Свойства сверхпроводящего кольца, замкнутого слабым контактом, как элемента с несколькими устойчивыми состояниями.— Радиотехника и электроника, 1974, XIX, № 7, с. 1494—1502.
6. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М., Физматгиз, 1959. 916 с.
7. Губанков В. Н., Кошелев В. П., Овсянников Г. А. Свойства джозефсоновских тонкопленочных микромостиков переменной толщины.— ЖЭТФ, 1977, 73, вып. 4 (10), с. 1435—1444.
8. Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М., Наука, 1975. 248 с.
9. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Наука, 1974. 504 с.
10. Chan H. W. K., Duzez T. Van. Josephson nonlatching logic circuits.— IEEE J. Solid-state circuits, 1977, v. sc-12, N 1, p. 73—79.

УДК 621.3.083.7

А. Н. БОРИСОВ,  
И. А. ПЕТРАКОВСКИЙ, Р. Г. ХЛЕБОПРОС

### РЕГИСТРАЦИЯ ГРАНИЦ ФОТОИЗОБРАЖЕНИЯ ОБЪЕКТОВ

Изучение природной среды с помощью аэрофотосъемки — один из самых распространенных и развитых методов. Наряду с многими преимуществами аэрофотосъемка обладает и существенным недостатком, так как требует громадного количества времени при камеральной обработке (дешифрировании). Поэтому в последнее время предпринимаются многочисленные попытки автоматизировать процесс интерпретации фотоснимков. Следует отметить, что в связи со значительной трудностью решения задачи в целом имеются лишь частные успехи при решении отдельных конкретных задач.

В настоящей работе предлагается метод обработки аэроснимков с помощью телевизионного дискретного денситометра «Фосдак-1000», позволяющий получать контуры имеющихся на снимке объектов. Этот метод может быть полезен при решении таких задач, как развитие и миграция облачного покрова, динамика таяния снежного покрова, изучение водного режима рек, распространение вредителей леса и т. д.

Фотографическое изображение объекта представляет собой поле распределения оптической плотности  $D$ , соответствующее полю распределения яркостей фотографируемого объекта:

$$D = D(x, y),$$

где  $x$  и  $y$  — пространственные координаты.

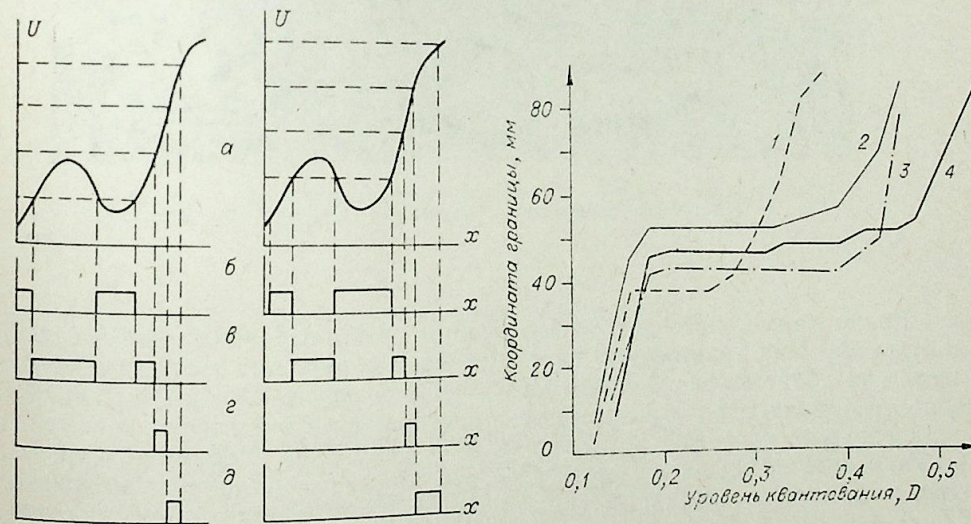


Рис. 1. Квантование одномерной реализации распределения оптических плотностей при различных положениях начального уровня квантования.

Рис. 2. Перемещение квантованного сигнала при смещении уровня квантования. Объекты с различиями в оптических плотностях:  $\Delta D = 0,1$  (1); 0,17 (2); 0,21 (3); 0,27 (4).

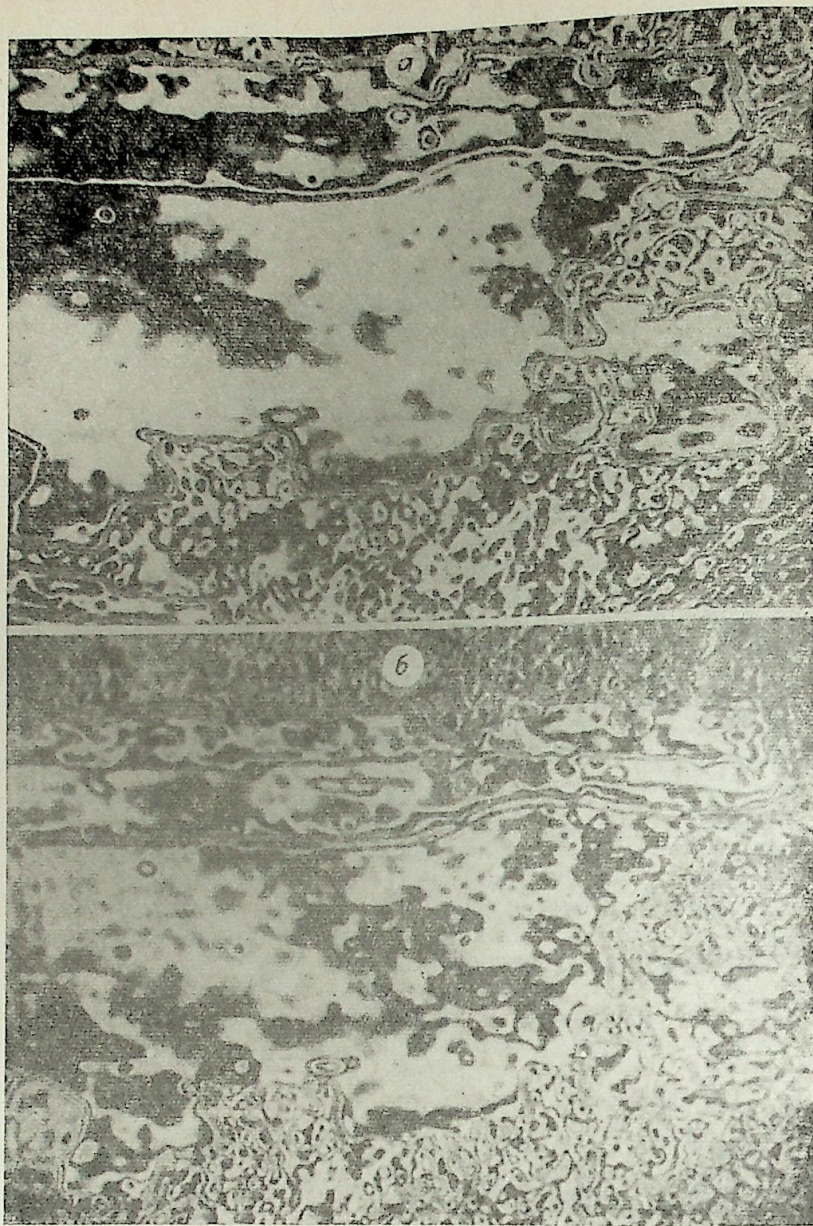
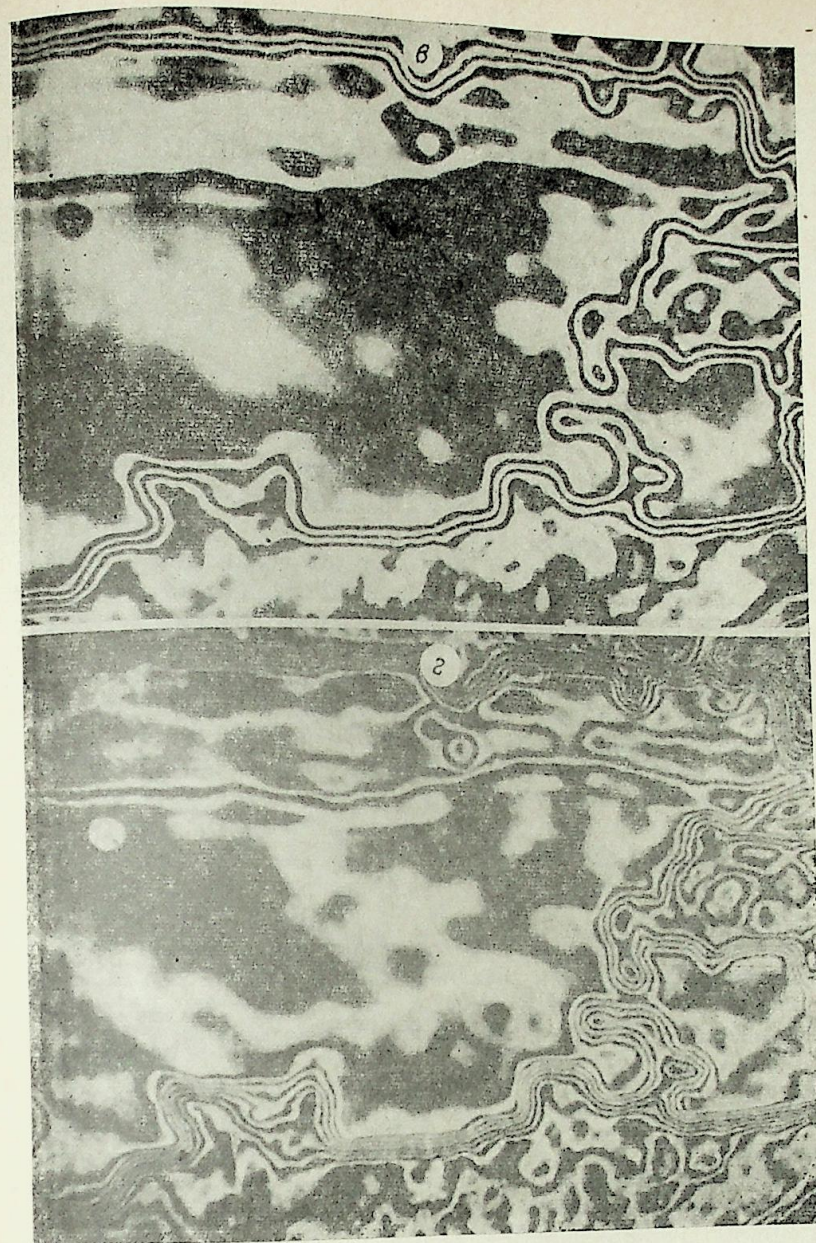


Рис. 3. Фотографии аэроснимка, полученные с экрана «Фосдака-1000» при изобра-

Рассмотрим одномерную реализацию распределения оптических плотностей. При квантовании видеосигнала изображение сигнала разбивается на области (рис. 1, б—г). При этом оптические плотности каждой области попадают в соответствующие интервалы оптических плотностей, определяемых уровнями квантования 1—4, (рис. 1, а). Перемещая уровни квантования по шкале плотностей, мы вызываем изменение положения и размеров соответствующих областей на координатной шкале [1, 2]. Скорость движения границ по оси  $Ox$  при равномерном перемещении уровней квантования по шкале плотностей определяется видом конкретной реализации. Она минимальна при максимальных перепадах плотностей, т. е. на границе между фотоизображениями



различном шаге квантования и степени расфокусировки исходного явления.

двух объектов, имеющих различные плотности:

$$V(x_0) = \frac{\Delta x_0}{\Delta D} \rightarrow \min(\Delta x_0).$$

Таким образом, контролируя скорость движения границы по оси  $Ox$  при сканировании уровнем квантования по оси  $Oy$ , можно получить информацию о положении ее между двумя объектами.

Из рис. 1 видно, что, изменяя ширину уровня квантования, возможно регистрировать более мелкие или более крупные контрасты плотностей и в зависимости от контраста обнаруживаемого объекта с фоном. Для отработки методики регистрации границ по этому принципу

Объект	Почва серая сухая	Почва серая сухая с травяным покровом	Почва заболоченная	Шоссе	Береза	Ель	Луг	Крыша железная красная	Дорога по серой почве
Почва серая сухая	0,05	0,005	0,067	0,80	0,59	0,11	0,19	0,46	0,57
Почва серая сухая с травяным покровом			0,08	0,80	0,60	0,10	0,19	0,46	0,57
Почва заболоченная				0,72	0,52	0,18	0,11	0,39	0,49
Шоссе					-0,21	-0,90	-0,61	-0,34	-0,23
Береза						-0,70	-0,57	-0,13	-0,03
Ель							0,30	0,50	0,67
Луг								0,37	0,38
Крыша железная красная									-0,11

и определения возможностей предложенного метода мы использовали цветной дискретный денситометр «Фосдак-1000»\*. Использование денситометра позволяет высветить на экране только ту область фотоизображения, оптические плотности которой находятся в заданном диапазоне плотностей. Специальное устройство позволяет сканировать этот диапазон по всей шкале плотностей от 0 до  $2D$  путем плавного изменения уровней квантования.

Для выявления возможностей регистрации границ между объектами «Фосдак-1000» предложенным способом были обработаны фотоизображения объектов с различными значениями оптических плотностей. Результаты приведены на рис. 2. По оси абсцисс откладывалось положение уровня квантования, а по оси ординат — положение границы области при данном положении уровня квантования. Кривые I—IV соответствуют объектам с различными значениями оптических плотностей.

Значения плотностей фотоизображения измерялись на регистрирующем микрофотометре ИФО-451. Из рис. 2 видно, что все кривые имеют три участка — два наклонных, располагающихся во внутренних областях объектов, и горизонтальное плато, соответствующее границе между двумя объектами. На горизонтальном участке перемещения границы при движении уровня квантования практически не происходит, т. е.  $ds/dD \approx 0$ ,  $s$  — смещение.

Координата плато соответствует координате границы, а длина плато соответствует перепаду плотностей между граничащими объектами. Плато со ступеньками на кривой IV соответствует размытой границе. Крутизна наклонных участков определяется распределением плотностей изображения внутренних областей объектов и зависит от характеристики самого объекта, равномерности его освещенности и искажений в процессе фотографирования, изготовления фотоматериалов и телеобработки. В идеальном случае (для однородного объекта и при отсутствии всех видов искажений) эти участки кривых будут вертикальными. На горизонтальный участок кривой названные факторы влияния не оказывают. При искусственном усилении неоднородности освещения экрана положение границы и длина плато не менялись. Следовательно, при регистрации границ данным методом можно не учитывать искажений изображения, связанных с природно-техническими условиями аэрофотосъемки и телевизионной обработки фотоматериалов.

\* Денситометр «Фосдак-1000» преобразует черно-белое изображение в цветное благодаря квантованию выбранного диапазона оптических плотностей на 12 поддиапазоны и окрашиванию их соответственно в 12 цветов. Меняя шаг квантования и сдвигая уровни квантования по плотности, достаточно контрастное изображение разделяют на 50—60 градаций. По отношению к оригиналу можно получать изображения на экране в масштабе от 1:1 до 1:12. Обработывают на денситометре как позитивные, так и негативные материалы.

Анализ кривой I (рис. 2) показывает, что для  $\Delta D = 0,1$  на область границы приходится 5 отсчетов через  $0,021 D$ . Для  $\Delta D = 0,05$  3 отсчета, достаточны для уверенного фиксирования границы. Таким образом, при шаге квантования  $0,021 D$  визуально можно разрешить границу между изображениями, отличающимися по плотности на  $0,05 D$ . Такое разрешение позволяет разделить почти все объекты указанные в таблице [3].

Для обработки аэроснимков естественных образований использовался снимок участка лесостепной зоны масштаба 1:20 000. На рис. 3, а—г показаны фотографии этого участка, обработанного на «Фосдак-1000» данным методом. Снимки сделаны с телеэкрана «Фосдак-1000» при смещении уровня квантования через каждые  $0,07 D$  (см. рис. 3, а, в) и через  $0,035 D$  (рис. 3, б, г). Ширина полос  $\Delta s$  соответствует смещению границы при смещении уровня квантования на  $\Delta D$ , следовательно можно узнать скорость смещения границы  $V = \Delta s / \Delta D$ . Области с максимальной густотой линий соответствуют границам между объектами. Для наглядности эти границы расширены путем расфокусировки изображения аэроснимка на телеэкране. Фотографии на рис. 3, в, г получены при большей расфокусировке, чем на рис. 3, а, б. На рис. 4 показаны границы, восстановленные по оригиналу.

Из сравнения рис. 3, а, в с рис. 3, б, г видно, что границы с большими значениями  $\Delta D$  хорошо различаются при большом шаге квантования и большой расфокусировке. В то же время для малых  $\Delta D$  необходима небольшая расфокусировка и малый шаг квантования.

Следует заметить, что расфокусировка изображения лишь увеличивает наглядность получения границ и не является необходимым условием их фиксации.

Проведенные работы показали, что с помощью данного метода довольно хорошо выделяются две основные компоненты местности — поля разного типа, леса, поляны, просеки и т. д.

#### ВЫВОДЫ

1. Контролируя скорость перемещения границ изображения при сканировании заданным уровнем квантования по всей области оптических плотностей фотоснимка, можно регистрировать границы относительно однородных природных образований.
2. Подробность выделения однородных объектов определяется шириной уровня квантования.
3. Возможности данного метода позволяют выделять основные компоненты фотоизображений различных природных образований.
4. Простота алгоритма метода позволяет его реализацию на ЭВМ, что несомненно повысит скорость и точность обнаружения границ.

Институт леса и древесины  
им. В. Н. Сукачева, Красноярск

Поступила в редакцию  
16/Х 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Смолдов В. Б. Полупроводниковые кодирующие и декодирующие преобразователи. Л., Энергия, 1967.
2. Либенсон М. Н., Хесин А. Я., Янсон Б. А. Автоматизация распознавания телевизионных изображений. М., Энергия, 1975.
3. Богомоллов Л. А. Дешифрирование аэроснимков. М., Недра, 1976.

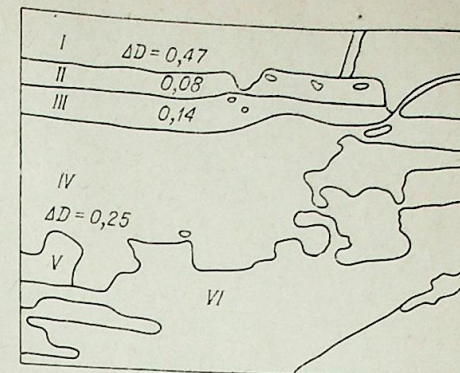


Рис. 4. Схема границ участка лесостепной зоны, полученная при дешифрировании аэроснимка.  
I, VI — смешанный лес; II, III — поля; IV — пашня; V — луг.

УДК 621.315.1

В. М. МАКАРОВ

### АЛГОРИТМ И ПРОГРАММА РАСЧЕТА ПЕРВИЧНЫХ ПАРАМЕТРОВ МНОГОЦЕПНЫХ ЛИНИЙ ЭЛЕКТРОПЕРЕДАЧИ

В настоящее время при проведении электротехнических расчетов, связанных с определением первичных параметров линии электропередачи (ЛЭП), последние определяются или путем «ручного счета», что обуславливает применение упрощенных формул, или с помощью программ, разработанных непосредственно в организациях, проводящих такие расчеты. Эти программы реализуют, как правило, расчет только поперечных или только продольных параметров ЛЭП, число цепей в которой равно 1, 2, редко больше.

Данных о программе расчета параметров многоцепной линии с тросами, одиночными и расщепленными проводниками, позволяющей рассчитывать параметры с требуемой точностью в широком диапазоне исходных данных, с учетом сезонного состояния трассы ЛЭП и т. д., в литературе не приводится. (Описание более узких аналогов этой программы дано в [1, 2].)

Внедрение программ в практику научно-исследовательских и проектных организаций сопряжено с рядом трудностей, к главным из которых, видимо, можно отнести следующие: удовлетворение требований конкретной организации, использующей программу, к виду информации, получаемой с помощью этой программы; составление исходных данных и приближение их структуры к информации, имеющейся в этом предприятии, или к общепринятым справочным данным о ЛЭП (провода, опоры, тросы и т. д.); привязка программы к ЭВМ ВЦ данного предприятия.

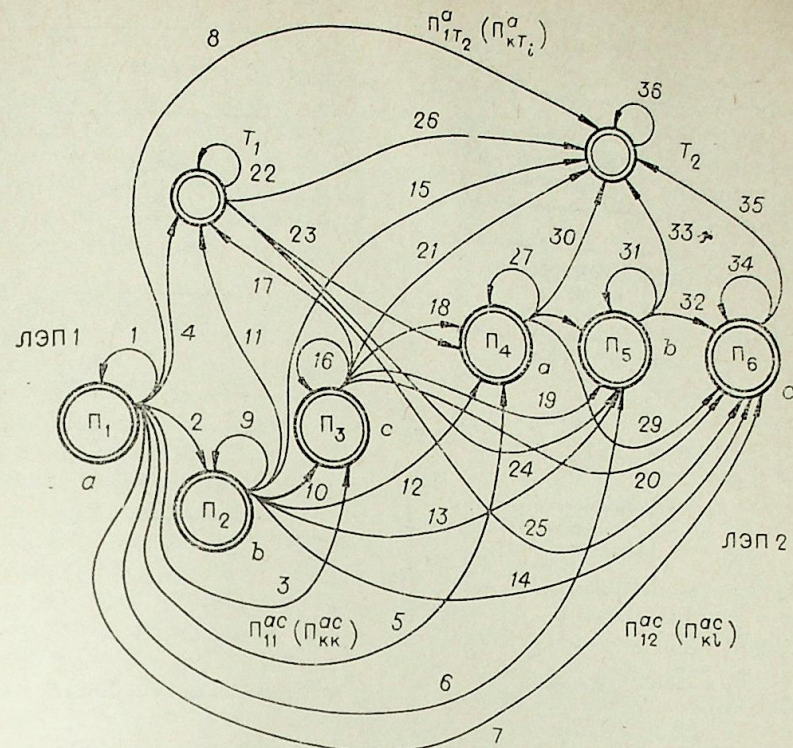
Кроме того, учитывая, что программа расчета первичных параметров ЛЭП выступает, как правило, в роли вспомогательной (промежуточной), необходимо использовать в ней максимально меньшее количество устройств внешней и внутренней памяти ЭВМ, которые могут понадобиться для более общих расчетов.

Все эти требования и замечания учтены при разработке описываемой в настоящей работе программы расчета первичных параметров многоцепной линии электропередачи с тросами или без них (ПЛТ). Программа прошла испытания и внедрена в 16 энергосистемах СССР. Она удобна и не вызывает затруднений при освоении.

Прежде чем перейти к описанию ПЛТ, остановимся на исходных формулах, положенных в ее основу. Определение продольных (активных и индуктивных) параметров ЛЭП проводится в более совершенной (нежели модель обратного земляного провода) модели, основные теоретические положения которой приведены в [3, 4].

Расчет поперечных (емкостных) параметров выполнен на базе обобщенных формул потенциальных коэффициентов, учитывающих возможную неоднородность диэлектрика в поле линии — снег, песок и т. д. [5].

Программа построена на входном языке «Автокод», и после трансляции получена рабочая программа применительно к ЦВМ М-220,



П <sub>1</sub>	П <sub>2</sub>	П <sub>3</sub>	П <sub>4</sub>	П <sub>5</sub>	П <sub>6</sub>	Т <sub>1</sub>	Т <sub>2</sub>	
1	2	3	5	6	7	4	8	П <sub>1</sub>
	9	10	12	13	14	11	15	П <sub>2</sub>
		16	18	19	20	17	21	П <sub>3</sub>
			27	28	29	23	30	П <sub>4</sub>
				31	32	24	33	П <sub>5</sub>
					34	25	35	П <sub>6</sub>
						22	26	Т <sub>1</sub>
							36	Т <sub>2</sub>

Рис. 1. Схема расположения проводов ЛЭП и тросов (а); верхний угол матрицы электромагнитных связей многопроводной системы ЛЭП с тросами (б).

Т<sub>1</sub>, Т<sub>2</sub> — тросы; П<sub>1</sub>, ..., П<sub>6</sub> — провода ЛЭП; П<sub>л</sub> — матрица электромагнитных связей между проводами ЛЭП; П<sub>т</sub> — матрица электромагнитных связей между тросами; П<sub>лт</sub> — матрица электромагнитных связей между системой проводов ЛЭП и системой тросов; 1, ..., 36 — номера связей в общей многопроводной системе, присваиваемые в порядке очередности расчета; — метка связей с тросом типа Г.

М-220М, М-222, БЭСМ-4, БЭСМ-4М (с однотипной системой команд внутреннего языка). Исходные данные программы состоят из четырех динамических массивов, содержащих информацию о конструктивно-геометрических характеристиках линии (высот подвеса и взаимного расположения проводов, тросов и их марок), условиях прохождения линии по трассе (проводимости земли, наличии слоя снега, песка), количестве ча-

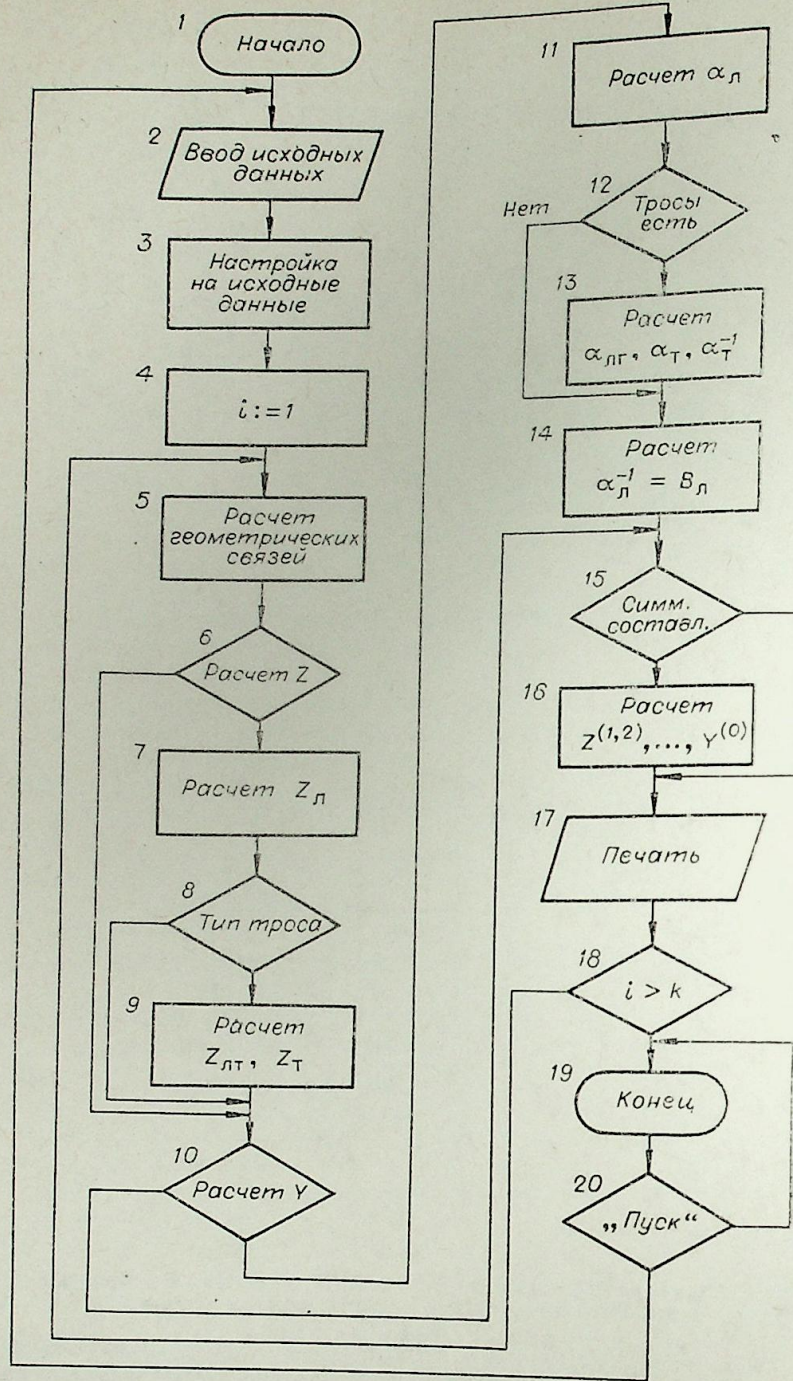


Рис. 2. Блок-схема программы.

$z$  — продольные параметры,  $Y$  — поперечные параметры,  $\alpha$  — потенциальные коэффициенты,  $k$  — число частот, для которых необходимо провести расчет.

стот и длин отрезков линии, для которых требуется проводить расчет параметров, а также о виде и количестве выдаваемой (рассчитанной) информации.

Пусть рассматриваемая многоцепная ЛЭП состоит из  $n$  трехфазных цепей, и  $m$  из них имеют грозозащитные тросы (рис. 1). Матрица параметров электромагнитных связей (ПЭС — далее под таким названием

имеются в виду продольные или поперечные параметры) многопроводной системы является симметричной и поэтому, в целях экономии места в памяти ЭВМ, проводился расчет верхнего угла с диагональю этих матриц (см. рис. 1). Для размещения матрицы ПЭС в памяти ЭВМ отводилось три поля (шесть для обоих видов параметров) для частей  $\Pi_{л}(Z_{л}, \alpha_{л})$ ,  $\Pi_{лт}(Z_{лт}, \alpha_{лт})$ ,  $\Pi_{т}(Z_{т}, \alpha_{т})$  этой матрицы, порожденных разбиением многопроводной системы на провода линии и провода тросов (в дальнейшем рассматриваются два типа тросов: 1) тип Г — трос заземлен с одного конца и изолирован во всех других точках; 2) тип П — трос заземлен с обоих концов, образуя с землей и опорами проводящий контур).

В целях достижения удобства при формировании исходных данных о геометрии расположения проводов многопроводной системы геометрическое расположение проводов и тросов каждой цепи задается в произвольной выбранной системе координат этой цепи, и связь между цепями осуществляется заданием расстояния между осями ординат систем координат ближайших цепей.

Формирование последовательности расчета координат, а также сам расчет этих координат является функцией работы пятого макроблока (общая блок-схема программы представлена на рис. 2).

Тросы конструкции заземления типа Г не оказывают влияния на эквивалентные продольные параметры ЛЭП. Это приводит к тому, что столбец в матрицах  $Z_{лт}$  и  $Z_{т}$ , соответствующий тросу с конструкцией заземления типа Г, в отличие от матриц  $\alpha_{лт}$ ,  $\alpha_{т}$ , отсутствует.

Таким образом, при расчете продольных параметров необходим анализ конструкции заземления проводов. Этот анализ, а также формирование матриц  $\Pi_{л}$ ,  $\Pi_{т}$ ,  $\Pi_{лт}$  выполняют 8, 9 и 12, 13 макроблоки. Эти макроблоки содержат три основные ветви: одна «выполняет» формирование и расчет элементов матрицы  $\Pi_{л}$ , другая —  $\Pi_{лт}$  и третья —  $\Pi_{т}$ . В каждой ветви находится обращение к макроблокам, выполняющим расчет собственных и взаимных сопротивлений и потенциальных коэффициентов. Далее выполняется преобразование матриц  $\Pi_{л}$ ,  $\Pi_{лт}$ ,  $\Pi_{т}$  и проводится выдача на АЦПУ или перфоратор матриц эквивалентных удельных продольных и поперечных параметров ЛЭП.

Описания процедуры могут быть использованы при расчетах в условиях несимметричного расположения фаз цепей линии относительно земли или тросов и относительно друг друга, которое, как известно, приводит к несимметрии напряжений и токов в фазах. Чтобы избавиться от этой несимметрии, проводят транспонирование цепей ЛЭП. Вся цепь делится на несколько участков, называемых циклами транспозиции, каждый из которых в свою очередь разбивается на три (по числу фаз) равных отрезка, называемых шагом транспозиции, на которых фазы меняются местами по правилу круговой перестановки. (Иногда применяется деление на неравные отрезки — так называемый полный (двойной) цикл транспозиции, однако изложенное справедливо и в этом случае.)

В этом случае цепи ЛЭП становятся симметричными в среднем по циклу транспозиции, а их параметры определяются следующим образом:

а) собственные и взаимные ПЭС фаз цепей ЛЭП:

$$P_{kk} = \frac{1}{3} (P_{kk}^{aa} + P_{kk}^{bb} + P_{kk}^{cc}), \quad (1)$$

$$P_{hk} = \frac{1}{3} (P_{hk}^{ab} + P_{hk}^{ac} + P_{hk}^{bc}), \quad (2)$$

$$P_{kl} = \frac{1}{9} (P_{kl}^{aa} + P_{kl}^{ab} + P_{kl}^{ac} + P_{kl}^{ba} + P_{kl}^{bb} + P_{kl}^{bc} + P_{kl}^{ca} + P_{kl}^{cb} + P_{kl}^{cc}); \quad (3)$$

б) взаимные ПЭС между фазами транспонированной цепи и тросом:

$$P_{kT_i} = \frac{1}{3} (P_{kT_i}^a + P_{kT_i}^b + P_{kT_i}^c), \quad (4)$$

где  $P_{kk}^a, \dots, P_{kk}^c$  — собственные параметры фаз  $a, b, c$   $k$ -й линии;  $P_{kk}^{ab}, \dots, P_{kk}^{bc}$  — взаимные параметры между фазами  $a, b, c$   $k$ -й линии;  $P_{kl}^a, \dots, P_{kl}^c$  — взаимные параметры между фазами  $k$ -й и  $l$ -й линий;  $P_{kT_i}^a, \dots, P_{kT_i}^c$  — взаимные параметры между фазами  $k$ -й линии и  $i$ -м тросом.

Программа на основании равенств (1)–(3) формирует удельные параметры транспонированных ЛЭП без тросов, матрицы которых, если разбить их на блоки ( $3 \times 3$ ), имеют следующую структуру: блок с индексами  $(k, k)$ , соответствующий  $k$ -й цепи, имеет по диагонали величины, определенные по (1), а вне диагонали — по (2); блок с индексами  $(k, l)$ , соответствующий связи между  $k$ -й и  $l$ -й цепями, состоит из одинаковых элементов, определенных по формуле (3).

Применяя к этим матрицам преобразование перехода к симметричным составляющим, получим формулы для определения симметричных составляющих параметров транспонированных линий без тросов:

а) прямой (обратной) последовательности  $k$ -й цепи

$$P_k^{(1,2)} = P_k - P_{kk}; \quad (5)$$

б) нулевой последовательности (собственные параметры  $k$ -й цепи и взаимные между  $k$ -й и  $l$ -й цепями)

$$P_k^{(0)} = P_k + 2P_{kk}, \quad (6)$$

$$P_{kl}^{(0)} = 3P_{kl}. \quad (7)$$

Параметры линий с тросами отличаются от параметров этой линии без тросов матрицами  $P_{лт}$ ,  $P_{тл}^{-1}$ ,  $P_{лтл}$ . Применяя к этой матрице преобразование транспозиции  $S = (S_{ij} = 1)$ , получим следующее выражение для

$$D = SP_{лт}P_{тл}^{-1}P_{лтл}S = (d_{ij} = d_{i,j}) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k P_{1T_i} \left( \sum_{j=1}^k t_{ij} P_{1j} \right) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \dots \\ \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^k P_{nT_i} \left( \sum_{j=1}^k t_{ij} P_{1j} \right) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \dots \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где  $t_{ij}$  элементы матрицы  $P_{тл}^{-1}$ .

Из (8) следует, что матрица  $D$  распадается на блоки ( $3 \times 3$ ), состоящие из одинаковых элементов. Выбирая из этих блоков по одному элементу, можно составить матрицу, которая в точности равна матрице  $\bar{P}_{лт}P_{тл}^{-1}P_{лтл}$ , где  $\bar{P}_{лт}$  ( $\bar{P}_{лтл}$ ) матрица порядка  $(n \times k)$  ( $k$  — число учитываемых тросов), полученная из  $P_{лт}$  заменой в ней блока ( $1 \times 3$ ), соответствующего ПЭС трех фаз некоторой цепи с каким-либо тросом, элементом, равным среднему арифметическому от элементов блока. Последнее существенно с точки зрения экономии времени счета на ЭВМ: порядок матрицы  $\bar{P}_{лт}$  —  $(n \times k)$ , а  $P_{лт}$  —  $(3n \times k)$  и, следовательно, затраты времени, даже с учетом действия по (4) при расчете матрицы  $\bar{P}_{лт}P_{тл}^{-1}\bar{P}_{лтл}$ , значительно меньше по сравнению с затратами времени при расчете матрицы  $P_{лт}P_{тл}^{-1}P_{лтл}$ .

Из линейности преобразования перехода к симметричным составляющим следует, что параметры симметричных составляющих прямой (обратной) последовательности линий с тросами не изменяются по срав-

нению с соответствующими параметрами линии без тросов, а параметры симметричных составляющих нулевой последовательности линий с тросами увеличиваются по сравнению с параметрами линии без тросов на утроенную величину соответствующего элемента матрицы  $P_{лт}$ :

$$P_k^{(0)(T)} = P_k^{(0)} + 3P_{kk}^{(лт)} = P_k + 2P_{kk} + 3P_{kk}^{(лт)}, \quad (9)$$

$$P_{kl}^{(0)(T)} = P_{kl}^{(0)} + 3P_{kl}^{(лт)} = 3P_{kl} + 3P_{kl}^{(лт)}. \quad (10)$$

Таким образом, вычисление параметров симметричных составляющих ЛЭП с тросами алгоритмически не отличается от расчета этих параметров в случае линии без тросов, за исключением дополнительных вычислений, выполняемых с помощью соответствующего макроблока по формуле (4).

В таблице приведены затраты времени при расчете 4-цепной ЛЭП, когда: 1) линия не имеет тросов; 2) вторая и третья цепи имеют два и один трос соответственно. Для этих случаев в таблице приведено затрачиваемое время при двух модификациях расчета: а) определялись симметричные составляющие параметров линии (ССП); б) определялись удельные (на единицу длины) продольные и поперечные первичные параметры линии (УП). Время дано в секундах.

Расчеты проводились на ЭВМ БЭСМ-4 ВЦ СибНИИЭ.

Описываемая программа позволяет рассчитывать продольные и поперечные параметры в зависимости от частоты проводимости земли, высот подвеса проводов, числа цепей ЛЭП ( $n \leq 12$ ), расщепления проводов, наличия тросов различных конструкций заземления и материала исполнения на каждой цепи. При расчете емкостных параметров возможен учет слоя диэлектрика — песка, снега, лежащего на проводящем грунте, а в случае снега — и температурного режима слоя.

Программа позволяет выдавать на печать или перфорацию симметричные составляющие нулевой, прямой (обратной) последовательностей продольных и поперечных параметров ЛЭП, а также удельные продольные и поперечные параметры — матрицы электромагнитных связей провод — провод, провод — земля в реальной многопроводной системе линии электропередачи.

В зависимости от исходных данных расчет и выдача описанных параметров могут быть проведены для  $m$  частот и  $k$  погонных длин ( $m, k \leq 10$ ), т. е. для каждой частоты будет проведен расчет параметров для участков линии заданной длины (суммарные параметры участка линии).

При работе программы используются интерпретирующая система ИС-2, стандартные программы СП-3 ( $e^x$ ), СП-4 ( $\ln x$ ), СП-6 ( $\arcsin z$ ), СП-42 (Перевод 10-2), СП-170 (арифметические операции с комплексными числами).

При выдаче материала на АЦПУ массивы чисел именуются. Например, исходная информация о линиях электропередачи идет под общим названием «ЛЭП» с интервальным разграничением отдельных цепей; матрица параметров выводится на печать с наименованиями и указанием координат, в которых проводился расчет (фазные координаты или симметричные составляющие). Строка, соответствующая фазному проводу (или цепи в расчетах симметричных составляющих), отделена интервалами от других строк.

Операция	Линия без тросов		Линия с тросами	
	УП	ССП	УП	ССП
Печать исходных данных и их обработка	10	10	20	20
Время чистого счета, определяемое визуально по секундомеру	20	25	35	40
Печать	35	15	35	15
Общее время	65	50	90	75

## ВЫВОДЫ

1. Разработаны алгоритмы и составлена программа расчета на ЭВМ первичных параметров многоцепных линий электропередачи с однопольными и расщепленными проводами, с тросами и без них. Программа позволяет учитывать частоту, проводимость земли, неоднородность диэлектрика (наличие слоя песка, снега, мерзлоты) в поле линии, а в случае слоя снега и учитывать температурный режим этого слоя (диэлектрическая проницаемость снега зависит от его температуры).

2. Программа может быть использована при выполнении проектных и научно-исследовательских работ по оптимизации конструкций линий электропередачи, при расчетах режимов энергосистем и токов короткого замыкания, при определении уставок релейной защиты и места повреждения по линии электропередачи.

3. Применение программ позволяет увеличить скорость расчетов и их достоверность по сравнению с «ручным счетом», и, следовательно, ее использование увеличивает экономическую эффективность затрачиваемых средств при решении различных научно-технических задач, связанных с определением параметров линии электропередачи.

Сибирский научно-исследовательский  
институт энергетики,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
28/1 1977

## ЛИТЕРАТУРА

1. Hesse M. H. Electromagnetic and electrostatic transmission line parameters by digital computer.— IEEE Trans. Power. App. Syst., 1963, v. pas. 88.
2. Кнеллер И. О., Яковенко В. И., Фоменко А. А. Расчет на ЦВМ параметров высоковольтных линий электропередачи.— Проблемы техн. электродинамики (АН УССР), 1973, вып. 42, с. 96—99.
3. Шалимов М. Г. Вектор — потенциальная функция бесконечно длинной, воздушной линии провод — однородная земля.— Научн. тр. ОМИИТа, 1969, 10, ч. 1.
4. Заславская Т. Б., Макаров В. М. Собственные и взаимные параметры одиночных и расщепленных проводов.— Тр. СибНИИЭ, 1973, вып. 24.
5. Заславская Т. Б., Макаров В. М. Емкостные параметры линий электропередач с учетом двухслойной структуры диэлектрика в поле линии.— Изв. СО АН СССР, 1974, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2, с. 102—109.

Г. В. ИВАНОВА, Н. В. ИВАНОВА

## УРАВНЕНИЯ ОДНОФАЗНОГО АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИНДУКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Однофазные асинхронные двигатели с неравномерным воздушным зазором описываются дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами, появление которых обусловлено изменением магнитной проводимости зазора и магнитной индукции в функции пространственной координаты  $x$ :

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_k \cos 2kx; \quad (1)$$

$$B = B_0 \cos \omega_2 t \cos x + B_k \cos \omega_2 t \cos [(2k-1)x + 2k\gamma], \quad (2)$$

где  $\gamma = \int \omega_\lambda dt$  — относительное пространственное смещение одной из фаз двигателя и максимума кривой проводимости, совпадающего с началом отсчета;  $B$  — магнитная индукция, характеризующая поле одной из фаз.

Ниже предлагаются уравнения двигателей с постоянными коэффициентами, переход к которым значительно упрощает исследования и расчеты. Уравнения получены в результате обобщения известного способа преобразования координат [1] на рассматриваемые двигатели. Для этого обмотка с переменными индуктивностями заменяется моделью со щетками, скорость вращения которых, а также скорость вращения осей  $d$  и  $q$  в отличие от [1] составляет  $k\omega_\lambda$  (в эл. рад./с).

Согласно (2) переменные индуктивности двухфазной обмотки представляют тригонометрические функции  $\gamma$

$$L_\alpha = L_0 + L_m \cos 2k\gamma; \quad L_\beta = L_0 - L_m \cos 2k\gamma; \quad (3)$$

$$M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha} = L_m \sin 2k\gamma.$$

На основе детального анализа соотношений между токами, ЭДС, потокосцеплениями и переменными индуктивностями для рассматриваемых двигателей получены следующие формулы преобразований:

$$\Psi_d = \Psi_\alpha \cos k\gamma + \Psi_\beta \sin k\gamma; \quad e_d = e_\alpha \cos k\gamma + e_\beta \sin k\gamma; \quad (4)$$

$$\Psi_q = \Psi_\alpha \sin k\gamma - \Psi_\beta \cos k\gamma; \quad e_q = e_\alpha \sin k\gamma - e_\beta \cos k\gamma.$$

При этом в преобразованных напряжениях были выделены следующие токи в осях  $d$  и  $q$ :

$$i_d = i_\alpha \cos k\gamma + i_\beta \sin k\gamma; \quad i_q = i_\alpha \sin k\gamma - i_\beta \cos k\gamma. \quad (5)$$

Уравнения напряжений обмоток модели имеют вид

$$e_d = i_d r_2 + L_d \frac{di_d}{dt} + k\omega_\lambda L_q i_q; \quad (6)$$

$$e_q = i_q r_2 + L_q \frac{di_q}{dt} - k\omega_\lambda L_d i_d,$$

где

$$L_d = L_0 + L_m; L_q = L_0 - L_m. \quad (7)$$

$e_a, e_b$  — э.д.с., наводимые круговым вращающимся полем статора. Уравнения для обмоток статора записываются как обычно.

Таким образом, если коэффициенты индуктивности представляют собой тригонометрические функции угла  $2k\gamma$ , то коэффициенты преобразования — функции  $k\gamma$  ( $k = 1/2, 1, 2, 3, \dots$ ). Этот вывод справедлив для любых гармоник н.с.

Например, в двигателях с катящимся ротором, имеющих две системы обмоток на статоре с числами пар полюсов  $2p_I = 2$  и  $2p_{II} = 4$  номера рабочих гармоник н.с. —  $\nu_I = 1$  и  $\nu_{II} = 2$ , а  $k = 1/2$ . При этом уравнения с постоянными коэффициентами получены в следующем виде.

$$U_D = i_D r_I + L_{0I} \frac{di_D}{dt} + \frac{\omega_\lambda}{2} L_{0I} i_Q + L_{1I} \frac{di_d}{dt} - \frac{\omega_\lambda}{2} L_{1I} i_q;$$

$$U_Q = i_Q r_I + L_{0I} \frac{di_Q}{dt} - \frac{\omega_\lambda}{2} L_{0I} i_D - L_{1I} \frac{di_q}{dt} - \frac{\omega_\lambda}{2} L_{1I} i_d;$$

$$U_d = i_d r_{II} + L_{0II} \frac{di_d}{dt} + \frac{\omega_\lambda}{2} L_{0II} i_{q_{II}} + L_{1II} \frac{di_D}{dt} - \frac{\omega_\lambda}{2} L_{1II} i_Q;$$

$$U_q = i_q r_{II} + L_{0II} \frac{di_q}{dt} - \frac{\omega_\lambda}{2} L_{0II} i_d - L_{1II} \frac{di_Q}{dt} - \frac{\omega_\lambda}{2} L_{1II} i_D,$$

где

$$i_D = i_{\alpha I} \cos \frac{\omega_\lambda t}{2} - i_{\beta I} \sin \frac{\omega_\lambda t}{2}; \quad U_D = U_{\alpha I} \cos \frac{\omega_\lambda t}{2} - U_{\beta I} \sin \frac{\omega_\lambda t}{2};$$

$$i_Q = i_{\alpha I} \sin \frac{\omega_\lambda t}{2} + i_{\beta I} \cos \frac{\omega_\lambda t}{2}; \quad U_Q = U_{\alpha I} \sin \frac{\omega_\lambda t}{2} + U_{\beta I} \cos \frac{\omega_\lambda t}{2};$$

$$i_d = i_{\alpha II} \cos \frac{\omega_\lambda t}{2} + i_{\beta II} \sin \frac{\omega_\lambda t}{2}; \quad U_d = U_{\alpha II} \cos \frac{\omega_\lambda t}{2} + U_{\beta II} \sin \frac{\omega_\lambda t}{2};$$

$$i_q = i_{\alpha II} \sin \frac{\omega_\lambda t}{2} - i_{\beta II} \cos \frac{\omega_\lambda t}{2}; \quad U_q = U_{\alpha II} \sin \frac{\omega_\lambda t}{2} - U_{\beta II} \cos \frac{\omega_\lambda t}{2}.$$

$L_{0I}, L_{0II}$  — индуктивности обмоток, соответствующие постоянной составляющей магнитной проводимости воздушного зазора  $\lambda_0$  и проводимости рассеяния;  $L_{1I}, L_{1II}$  — коэффициенты взаимной индукции между обмотками I и II, соответствующие переменной составляющей магнитной проводимости воздушного зазора с амплитудой  $\lambda_1$  (максимальные значения);  $\omega_\lambda$  — угловая скорость перемещения кривой проводимости воздушного зазора.

Новосибирский  
электротехнический институт

Поступила в редакцию  
8/VIII 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Важнов А. И. Основы теории переходных процессов синхронной машины. М., 1960, с. 35—56.

УДК 621.313

Ю. К. ГОРБУНОВ, И. Н. СВАРОВСКИЙ

### РАСЧЕТ ИМПУЛЬСНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА ПРОДОЛЬНУЮ ИЗОЛЯЦИЮ ОБМОТОК ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН ПО МНОГОЭЛЕМЕНТНЫМ СХЕМАМ ЗАМЕЩЕНИЯ

Импульсные напряжения, воздействующие на корпусную изоляцию обмоток электрических машин, с достаточной степенью точности можно вычислить при замене обмотки цепью с распределенными параметрами [1]. При определении импульсных напряжений, воздействующих на продольную изоляцию (витковую и междукатушечную), необходимо учитывать активно-индуктивные и емкостные связи между элементами обмотки, замененной многоэлементной схемой замещения.

Примем за элемент схемы замещения многовитковой катушечной обмотки асинхронных и синхронных машин малой и средней мощностей катушку или катушечную группу. Для расчета продольных напряжений в обмотке воспользуемся методом разложения по собственным режимам, развитым применительно к обмоткам трансформаторов в работах [2, 3], учитывая при этом особенности волновых параметров обмоток электрических машин.

Схема замещения обмотки электрической машины будет состоять из собственных и взаимных активных сопротивлений и индуктивностей, соединенных между собой последовательно; емкостей и проводимостей изоляции, соединенных параллельно. Полагаем, что к обмотке подключена емкость  $C_{II}$  с проводимостью изоляции  $G_{II}$ .

Согласно [4] исходные дифференциальные уравнения для переходного процесса в обмотке электрической машины в форме изображений будут иметь вид

$$T \vec{u} = (r + pL) \vec{I} - u_c \vec{T}_0, \quad (1)$$

$$-T^* \vec{I} = (G + pC) \vec{u} + u_c (\vec{G}_0 + p\vec{C}_0),$$

где  $\vec{u}$  — вектор изображений узловых напряжений размерности  $m$ ,  $\vec{I}$  — вектор изображений токов размерности  $n$ ,  $m$  — число узлов схемы,  $n$  — число активно-индуктивных элементов.

Примеры матриц индуктивностей  $L$ , емкостей  $C$ , соединений  $T$  и емкостных  $\vec{C}_0$  связей с точкой приложения импульса  $u_0$  для асинхронного двигателя А 61/4 и особенности составления матриц  $C$ ,  $T$ ,  $T_0$ ,  $\vec{C}_0$  для различных схем соединения обмоток трехфазных электрических машин приведены в приложении.

В электрических машинах собственные и взаимные активные сопротивления элементов обмоток зависят от частоты и определяются в основном потерями в шихтованной стали, окружающей обмотку в области паза. Как показали расчеты, для фиксированной частоты  $\omega$  отношения

активных сопротивлений к индуктивностям элементов обмотки и активных сопротивлений к индуктивностям между различными элементами, близки между собою. Поэтому в первом приближении можно полагать, что при частоте  $\omega$  все элементы матрицы  $r$  отличаются от соответствующих элементов матрицы  $L$  на постоянный множитель  $2\sigma_1$ , т. е.

$$r = 2\sigma_1 L. \quad (2)$$

Зависимость коэффициента  $2\sigma_1$  от частоты  $\omega$  может быть вычислена при расчете активно-индуктивных волновых параметров обмоток как отношение суммы всех членов матрицы  $r$  при различных частотах к сумме всех членов матрицы  $L$  и задана либо в виде графика  $2\sigma_1 = f(\omega)$ , либо эмпирической формулой.

Аналогично при частоте  $\omega$  в первом приближении можно принять одинаковым угол потерь  $\delta$  для всех емкостей матрицы  $C$  (в том числе и для  $C_H$ ). Тогда

$$G = 2\sigma_2 C. \quad (3)$$

Поскольку поведение изоляции обмоток электрических машин при высоких частотах исследовано недостаточно полно, при расчетах можно полагать, что  $\text{tg } \delta$  изоляции не зависит от частоты и лежит в пределах от нуля до 0,1. Тогда коэффициент  $2\sigma_2 = (0-0,1)\omega$ .

Подставим соотношения (2) и (3) в (1) и решим полученную систему уравнений по методике, изложенной в работе Б. А. Бахвалова с соавторами, заменяя симметричную матрицу  $C$  на две вещественные треугольные  $C = S^*S$ .

После соответствующих преобразований получим  $(-\lambda E + M)S\vec{u} = \vec{u}_0(-\vec{m}_1 + \lambda\vec{m}_2)$ , где  $\lambda$  — собственные значения матрицы  $M$ ,

$$\lambda = -(2\sigma_1 + \rho)(2\sigma_2 + \rho), \quad M = (TS^{-1})^*L^{-1}(TS^{-1}),$$

$$\vec{m}_1 = (TS^{-1})^*L^{-1}\vec{T}_0, \quad \vec{m}_2 = (S^{-1})^*\vec{C}_0,$$

$E$  — единичная матрица. Определяем собственные числа  $\lambda_i$  и собственные векторы  $\vec{R}_i$  матрицы  $M$  и разлагаем векторы  $\vec{m}_1$  и  $\vec{m}_2$  по базису, образованному собственными векторами  $\vec{R}_i$  матрицы  $M$   $\vec{m}_1 = \sum_{i=1}^m m_{1i}\vec{R}_i$ ;

$\vec{m}_2 = \sum_{i=1}^m m_{2i}\vec{R}_i$ , и, согласно [3], определяем

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^m \frac{m_{1i} - \lambda m_{2i}}{\lambda - \lambda_i} u_0 S^{-1} \vec{R}_i.$$

Или, поскольку  $-\lambda = (2\sigma_1 + \rho)(2\sigma_2 + \rho)$ , при воздействии на обмотку дельта-импульса будем иметь

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda m_{2i} - m_{1i}}{\rho^2 + 2\rho(\sigma_1 + \sigma_2) + 4\sigma_1\sigma_2 + \lambda_i} S^{-1} \vec{R}_i.$$

Осуществляя далее по теореме разложения переход от изображения  $\vec{u}$  к оригиналу, определим импульсную характеристику цепи  $\vec{h}_\delta(t)$

$$\vec{h}_\delta(t) = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i m_{2i} - m_{1i}}{\omega_i} S^{-1} \vec{R}_i e^{-\sigma_i t} \sin \omega_i t,$$

где  $\omega_i = \sqrt{\lambda_i + 4\sigma_{1i}\sigma_{2i} - \sigma_i^2}$ ;  $\sigma_i = \sigma_{1i} + \sigma_{2i}$ ,

$\sigma_i$  — затухание, соответствующее частоте  $\omega_i$ .

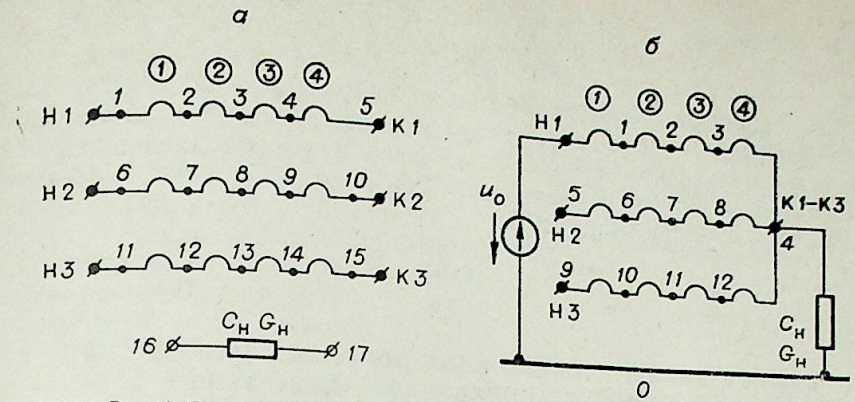


Рис. 1. Схемы соединения фаз обмотки статора двигателя А 61/4. а — исходная схема, б — рассматриваемая схема. На схемах обозначены номера узлов и катушечных групп.

При воздействии на обмотку электрической машины напряжения  $u_0(t) = e^{-\alpha t}$  напряжение  $u(t)$  будет равно

$$\vec{u}(t) = \int_0^t \vec{h}_\delta(\tau) u_0(t - \tau) d\tau = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i m_{2i} - m_{1i}}{(\alpha - \sigma_i)^2 + \omega_i^2} S^{-1} \vec{R}_i \left[ e^{-\alpha t} \left( \cos \omega_i t - \frac{\alpha - \sigma_i}{\omega_i} \sin \omega_i t \right) e^{-\sigma_i t} \right]. \quad (4)$$

При расчете собственных значений  $\lambda_i$  и собственных векторов  $\vec{R}_i$  матрицы  $M$  учет зависимостей индуктивностей обмотки от частоты может быть произведен методом аппроксимации. Для этого достаточно вычислить  $\lambda_i$  и  $\vec{R}_i$  при значениях индуктивностей матрицы  $L$ , соответствующих трем-четырем значениям частоты  $\omega$ , охватывающим диапазон частот  $\omega_i$ , и по ним скорректировать значения  $\lambda_i$  и  $\vec{R}_i$  таким образом, чтобы каждой частоте  $\omega_i$  соответствовали свои индуктивности матрицы  $L$ .

В приложении дан расчет напряжений на катушечных группах обмотки статора двигателя А 61/4 при соединении фаз по схеме (рис. 1, б)

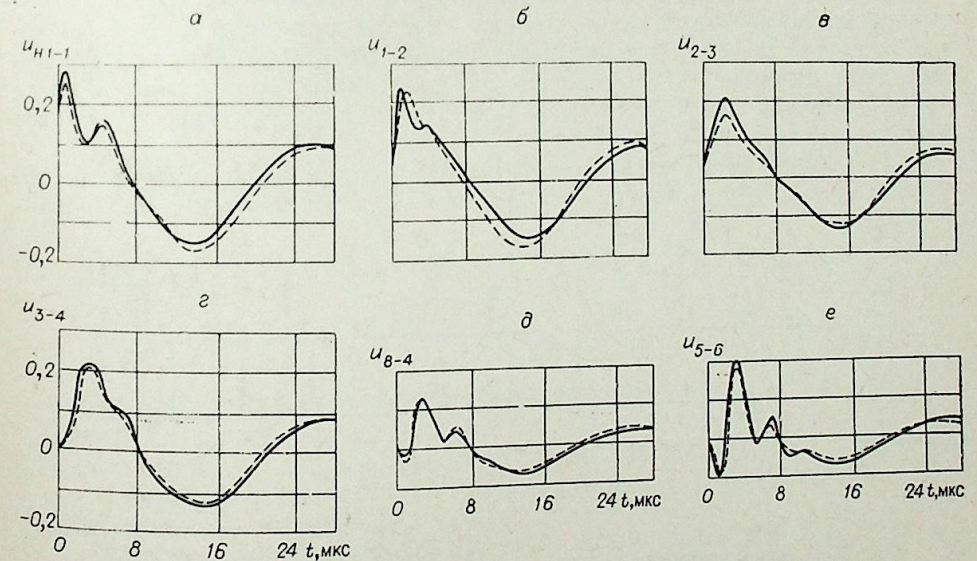


Рис. 2. Значения напряжений на катушечных группах первой и второй фаз обмотки двигателя А 61/4. — расчет, - - - эксперимент.

и воздействии на обмотку экспоненциального импульса

$$u(t) = e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}. \quad (5)$$

На рис. 2 приведены результаты этих расчетов, расхождения при сопоставлении расчетов с экспериментом незначительны. Это свидетельствует о возможности применения изложенной выше методики для расчета продольных волновых напряжений в асинхронных и синхронных машинах малой и средней мощностей.

### Приложение

#### ПРИМЕР РАСЧЕТА ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛНОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ОБМОТКЕ АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ

В качестве примера рассмотрим расчет распределения импульсного напряжения по обмотке трехфазного асинхронного двигателя А 61/4, мощностью 10 кВт при соединении обмоток, например, по схеме рис. 1, б. Для упрощения расчета за элемент схемы замещения обмотки примем катушечную группу (4 катушечных группы в фазе, 3 катушки в катушечной группе). Схема расположения катушечных групп в пазах статора двигателя А61/4 показана на рис. 3.

Учитывая взаимное расположение катушечных групп в пазах и лобовых частях статора, матрица индуктивностей  $L$  обмотки двигателя А 61/4 размерности  $(12 \times 12)$  будет иметь вид

$$L = \begin{bmatrix} L_{\phi} & L_{12\phi} & L_{13\phi} \\ L_{12\phi}^* & L_{\phi} & L_{23\phi} \\ L_{13\phi}^* & L_{12\phi}^* & L_{\phi} \end{bmatrix}, \quad \text{где } L_{\phi} = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_4 \\ L_2 & L_1 & L_2 \\ L_4 & L_2 & L_1 \end{bmatrix},$$

$$L_{12\phi} = L_{23\phi} = \begin{bmatrix} L_3 & L_4 \\ L_4 & L_3 \\ L_4 & L_3 \\ L_4 & L_3 \end{bmatrix}; \quad L_{13\phi} = \begin{bmatrix} L_3 & L_4 \\ L_3 & L_4 \\ L_3 & L_4 \\ L_3 & L_4 \end{bmatrix}.$$

Собственные и взаимные индуктивности катушечных групп  $L_1-L_4$  вычислены по конструктивным данным статора двигателя А 61/4 (ротор вынут), и их значения в зависимости от частоты приведены на рис. 4. Методика вычисления индуктивностей и активных сопротивлений элементов обмоток электрических машин по их конструктивным данным приведена в [4].

На основании расчета по конструктивным данным двигателя собственных и взаимных активных сопротивлений катушечных групп по из-

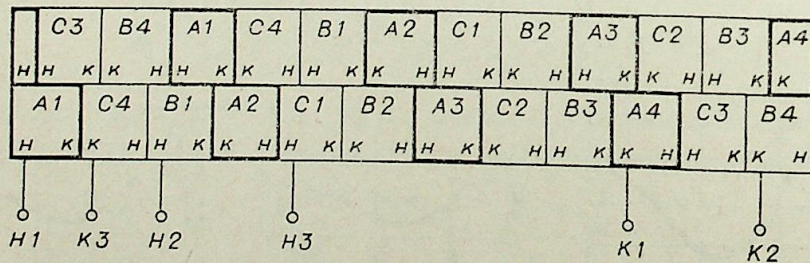


Рис. 3. Схема расположения катушечных групп обмотки в пазах статора двигателя А 61/4.

Начала катушечных групп — н; концы — к.

ложенной выше методике были вычислены коэффициенты  $\sigma_{1i}$ . Их зависимость от частоты  $\omega_i$  для двигателя А 61/4 может быть описана эмпирической формулой  $\sigma_{1i} = 0,16\omega_i + 10^{-8}\omega_i^2$ .

Поскольку порядок и расположение элементов матриц емкостей  $C$  и соединений  $T$  зависит от конкретной схемы соединения обмоток трехфазных электрических машин, целесообразно сначала составить данные матрицы для схемы соединения обмоток и нагрузок, показанной на рис. 1, а, т. е. в предположении, что отдельные фазы обмотки и нагрузка  $C_n$  не имеют между собою гальванических связей. Тогда число узлов в схеме (см. рис. 1, а) при четырех катушечных группах в фазе двигателя А 61/4 и учетом  $C_n$  будет равно 17. Если учесть взаимное расположение катушечных групп в пазах статора двигателя А 61/4 (см. рис. 3), матрица емкостей  $C$  примет вид

$$C' = \begin{bmatrix} C_{\phi} & -C_{12\phi} & -C_{13\phi} \\ -C_{12\phi}^* & C_{\phi} & -C_{23\phi} \\ -C_{13\phi}^* & -C_{23\phi}^* & C_{\phi} \end{bmatrix}, \quad \text{где } C_{\phi} = \begin{bmatrix} 0,5C_1 & -C_2 & -C_5 \\ -C_2 & C_1 & -C_3 \\ -C_5 & -C_3 & C_1 \end{bmatrix},$$

$$C_{12\phi} = C_{23\phi} = \begin{bmatrix} C_{10} & C_6 & C_7 \\ C_9 & C_{10} & C_6 \\ C_{10} & C_8 & C_{10} \end{bmatrix}; \quad C_{13\phi} = \begin{bmatrix} C_7 & C_6 & C_{10} & C_8 \\ C_{10} & C_6 & C_{10} & C_8 \\ C_6 & C_9 & C_{10} & C_8 \\ C_5 & C_9 & C_{10} & C_8 \end{bmatrix},$$

$$C_n = \begin{bmatrix} C_n \\ C_n \end{bmatrix}.$$

Параметры емкостей  $C_1-C_{10}$  вычислены по конструктивным данным двигателя А 61/4 и равны:  $C_1 = 331$  пФ,  $C_2 = 16$ ,  $C_3 = 26$ ,  $C_4 = 21$ ,  $C_5 = 5$ ,  $C_6 = 13,4$ ,  $C_7 = 45$ ,  $C_8 = 58,4$ ,  $C_9 = 103,4$ ,  $C_{10} = 6,7$  пФ. При расчетах продольных напряжений полагалось, что  $\sigma_{2i} = 0,02 \omega_i$ .

Матрица соединений  $T'$  размерности  $(12 \times 17)$  для двигателя А 61/4 при соединении его обмоток по схеме рис. 1, а, имеет вид

$$T' = \begin{bmatrix} T_1 & & & & \\ & T_1 & & & \\ & & T_1 & 0 & 0 \\ & & & T_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{где } T_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & 1 & -1 & \\ & & & 1 & -1 \\ & & & & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Для перехода к конкретной схеме соединения обмоток двигателя, например по схеме, представленной на рис. 1, б, имеющей 12 узлов, не считая узлов, к которым подключен источник импульсного напряжения  $u_0$ , необходимо составить матрицу соединения фаз  $A$  и матрицу  $A_0$  подключения источника  $u_0$  к схеме.

Матрица соединения фаз  $A$  имеет размерность  $(m \times m')$ , где  $m$  — число узлов в рассматриваемой схеме (см. рис. 1, б),  $m'$  — число узлов в исходной схеме (см. рис. 1, а), и содержит единицы в тех строках и

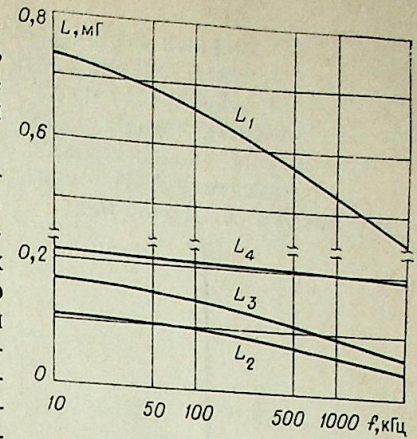


Рис. 4. Значения собственных и взаимных индуктивностей катушечных групп обмотки двигателя А 61/4.



Результаты анализа ТЭП энергосистем

Параметры	Предельные погрешности планирований, %				Законы распределения погрешностей планирования	Характеристики переменных Кузбассэнерго
	Новосибирскэнерго		Кузбассэнерго			
	$\delta_{\max}$	$\delta_{\min}$	$\delta_{\max}$	$\delta_{\min}$		
Э	15	-15	2	-16	Равномерный	Зависимая
Q	-4	-17	2	-16	»	»
P <sub>Q</sub>	-5	-19	-2	-10	Нормальный	»
CH <sub>3</sub>	-5	-22	4	-22	Экспоненциальный	»
CH <sub>Q</sub>	0	-16	4	-9	Равномерный	»
I <sub>Э</sub>	-2	-17	12	-6	Грамма — Шарлье	»
I <sub>Q</sub>	15	-38	25	8	Нормальный	Независимая
ε <sub>Э</sub>	-3	-3	0	-4	Равномерный	»
ε <sub>Q</sub>	1	-2	0	-1	Нормальный	»
ЭТЭС	-3	-17	2	-16	Грамма — Шарлье	»
П <sub>Э</sub>	-1	-11	-12	-24	Нормальный	»
Ц <sub>Э</sub>	1	-6	0	-5	»	»
Ц <sub>Q</sub>	-2	-5	5	-2	»	»

Рассмотрим методику оценки ошибок прогнозирования ТЭП энергосистемы и моделирования на этой основе обобщенных показателей на примере себестоимости производства электрической  $S_e$  и тепловой  $S_q$  энергии.

Исследования проводились на примере следующих показателей районной энергосистемы, определяемых на стадии проекта плана при текущем планировании:

1) выработка электрической Э и тепловой Q энергии энергосистемы; 2) удельные расходы условного топлива на производство электрической  $b_e$  и тепловой  $b_q$  энергии; 3) выработка электрической энергии на тепловых станциях системы ЭТЭС; 4) потери энергии в электрических П<sub>э</sub> и тепловых П<sub>q</sub> сетях; 5) потребление электрической CH<sub>3</sub> и тепловой CH<sub>q</sub> энергии на собственные нужды; 6) цена одной тонны условного топлива на производство электрической Ц<sub>э</sub> и тепловой Ц<sub>q</sub> энергии; 7) суммарные условно-постоянные расходы на производство электрической I<sub>э</sub> и тепловой I<sub>q</sub> энергии.

Первые пять показателей определяются технической деятельностью энергосистем и в настоящее время для их предвидения используются как методы прямого счета, так и статистика эксплуатации. Два последних характеризуются производственно-хозяйственной деятельностью предприятий и рассчитываются только методами прямого счета. Качество плановых расчетов в настоящее время (в частности, на стадии проекта плана) вообще не учитывается, что снижает роль планов и их обоснованность.

Оценка погрешностей планирования ТЭП энергосистем производилась путем сравнения плановых  $\hat{Y}(t)$  и фактических  $Y(t)$  показателей на основе ретроспективной информации Новосибирской и Кузбасской энергосистем. Частично использовались данные Красноярской и Иркутской энергосистем при определении функций распределения ошибок планирования. Ошибки определялись следующим образом:

$$\delta_i(t) = \frac{Y_i(t) - \hat{Y}(t)}{Y_i(t)}, \quad (2)$$

где  $i = 1, 2, \dots, N$  — номер исследуемого параметра,  $t = 1, 2, \dots, T$  — номер анализируемого этапа ретроспекции. Все множество  $\delta_i(t)$ , полученное на каждом этапе планирования для  $i$ -го параметра, пред-

ставляет собой возможные случайные отклонения, определяющие достоверность планов.

Для выделения границ зоны неопределенностей выбираются предельные погрешности планирования  $\delta_{i\max}$  и  $\delta_{i\min}$ , характеризующие естественный интервал возможных прогнозов. Разумеется, нельзя гарантировать при последующих реализациях планов отсутствия значений, не укладывающихся в полученный интервал  $\Delta_1 + \Delta_2$  (рис. 1). Однако возможно использовать правило прогнозирования при отсутствии статистических данных: «завтра то же, что сегодня», которое оказывается верным в 70% случаев [5].

Предельные погрешности необходимо корректировать, если в дальнейших реализациях появляется значение, превышающее полученный интервал. В случае смешанных энергосистем, имеющих ГЭС, необходимо вводить поправку для  $\delta_{i\max}$  на величину  $\Delta'$  (3), если исключаемые колебания и соответствующие изменения выработки электроэнергии на ГЭС системы. Например, погрешности величин ЭТЭС, CH<sub>3</sub>,  $b_e$ , Э будут больше, если ГЭС не работала в крайне маловодных или многоводных условиях на рассматриваемом интервале ретроспекции. В этом случае необходимо пересчитать предельные погрешности. Так, если выработка ГЭС может быть увеличена на величину  $\Delta_{\text{ГЭС}}$ , то соответственно изменится конденсационная мощность ТЭС, снизится расход топлива и т. д. В результате измененная предельная погрешность определится как

$$|\delta'_{\text{ЭТЭС}}| = \delta_{\text{ЭТЭС}\max} + \Delta', \quad (3)$$

где

$$\Delta' = \frac{\Delta_{\text{ЭТЭС}}^k}{\text{ЭТЭС}^k}. \quad (4)$$

$\text{ЭТЭС}^k$  — конденсационная мощность ТЭС в период максимальной погрешности планирования без учета предельной водности ГЭС.  $\Delta_{\text{ЭТЭС}}^k$  — изменения конденсационной выработки при учете предельной водности, определяемые как

$$\Delta_{\text{ЭТЭС}}^k = \text{ЭТЭС}^k \pm \Delta_{\text{ГЭС}}. \quad (5)$$

Например, для Новосибирской энергосистемы за исследуемый период 1970—1975 гг. не наблюдалась минимальная выработка ГЭС, однако при пересчете величина  $\delta'_{\text{ЭТЭС}}$  изменилась на 0,03%.

Рассчитанные таким образом  $\delta_{i\max}$  и  $\delta_{i\min}$  при планировании на год с округлением до целых значений приведены в таблице. Анализ погрешностей для рассматриваемых энергосистем показал, что они однородны по своей структуре и среди них нет доминирующих величин.

Чтобы определить вероятностные значения искомой величины в зоне предельных погрешностей (см. рис. 1), необходимо знать  $P(\delta)$  функцию распределения вероятностей ошибок ее прогноза  $P[\delta_{\min} \leq \delta \leq \delta_{\max}] = P[\varphi(t + \Delta t) - \Delta_2 \leq Y(t + \Delta t) \leq \varphi(t + \Delta t) + \Delta_1]$ .

Для определения функции распределения в исследуемой зоне неопределенностей, необходимо иметь репрезентативную выборку по каждому  $i$  параметру. Обычно статистика одной энергосистемы выборка достаточна, но в то же время наблюдается однородность объединенных различных систем. Расширение информации достигается объединением элементарных выборок объема  $n$  каждой энергосистемы, полученных на разных этапах планирования, в одну выборку объема  $n_k$ . Объединение выборок производится с помощью перехода от величины  $\delta$  к показателю общности [6]:

$$\eta_i = \frac{\tau_i \sqrt{n_k - 2}}{\sqrt{n_k - 1 - \tau_i}} \quad (6)$$

где

$$\tau_i = \frac{\delta_{ik} - \bar{\delta}_i}{S_{ik}} \quad (7)$$

$\delta_{ik}$  — наблюдение из  $i$ -й выборки объема  $n_k$ ;  $\bar{\delta}_i$  — среднее арифметическое той же выборки;  $S_{ik}$  — оценка среднеарифметического отклонения той же выборки.

Полученные  $\eta_i$  располагаются в вариационный ряд и для каждого отдельного наблюдения рассчитываются эмпирические значения функции распределения  $F_0(\eta_i)$ . Гипотеза соответствия  $F_0(\eta_i)$  требуемому теоретическому распределению проверяется с помощью критерия  $n\omega^2$ , согласно [7].

$$n\omega^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left\{ F_0(\eta_i) - \frac{2i-1}{2n} \right\}^2 \quad (8)$$

Значения  $n\omega^2$  вычислялись для уровня значимости  $q = 5\%$ . Если при этом распределение какого-либо показателя не соответствовало ни одному из рассматриваемых теоретических распределений, то оно принималось равномерным. Принятые законы распределения для исследуемых величин представлены в таблице.

Знание законов распределения в интервале неопределенности планирования позволяет определить вероятностную характеристику прогноза рассматриваемого параметра, а также моделировать обобщенные показатели. Например, отпуск электрической и тепловой энергии включает показатели 1, 2, 3; себестоимость отпущенной энергии — все шесть и т. д. Вероятностная погрешность прогноза обобщенных показателей определялась при статистическом моделировании отдельных величин с использованием известных параметров распределения их погрешностей.

Независимое моделирование взаимосвязанных величин приводит к увеличенной области неопределенности. Например, для двух независимых параметров  $X$  и  $Y$  область ограничена квадратом  $abcd$  (рис. 2). Ее можно уменьшить, если между  $X$  и  $Y$  имеется корреляционная связь. В этом случае можно рассчитать усеченную зону неопределенностей, описанную площадкой  $eljk$ , с осью, определяемой как условное математическое ожидание  $M[Y/X]$  зависимых величин. Зона ограничена дисперсией ошибок аргумента ( $\sigma_x^2$ ). Моделируя значения функции  $X_i$  на интервале неопределенности планирования, рассчитываем по уравнению регрессии в каждой полученной точке значение математического ожидания аргумента  $Y_i$ . Поскольку квадрат  $abcd$  описывается предельными погрешностями, то дисперсия аргумента, в пределах которой производится моделирование (интервал  $el$  и  $jk$ ) не может выйти за его пределы  $\delta_{imax}$  и  $\delta_{imin}$ .

В качестве примера на рис. 2 представлена область, ограниченная предельными погрешностями планируемой с годовой заблаговременностью величины потерь тепловой энергии  $\Pi_0$  в системе Кузбассэнерго (независимая переменная  $X$ ) и выработки тепловой энергии в системе (аргумент  $Y$ ). Между этими параметрами существует линейная связь, представляющая ось усеченной зоны (пунктирная линия на рис. 2). Моделирование величин  $\Pi_0$  производится на интервале  $\Delta X_{max} \div \Delta X_{min}$ , соответствующих предельным погрешностям (см. таблицу). Закон распределения аргумента  $Q$  характеризуется параметрами  $M[Q/\Pi_0]$  и  $\sigma_Q = 6,9$ , тогда как предельные ошибки планирования определены интервалом  $\Delta Y_{max} \div \Delta Y_{min}$  (см. таблицу).

Выделение зависимых и независимых переменных из всего множества рассматриваемых величин достигается методами корреляционного анализа [6, 7]. Вначале определяется матрица парных корреляций для всех исследуемых показателей и среди них выбираются элементы, имеющие значимый коэффициент корреляции, который принимается равным не менее 0,6 при объеме выборки не менее 50 значений. В этом случае такой коэффициент практически можно считать значимым без дополнительных проверок [7]. Из числа зависимых переменных необходимо выбрать независимо моделируемые (функционалы) и зависимые (аргументы). Одним из таких фильтров является оценка значимости критерия согласия  $n\omega^2$ . Те величины, для которых закон распределения не определен по критерию согласия ( $n\omega^2 > 0,4614$ ), принимаются за аргументы. Все остальные переменные могут независимо моделироваться и служить функционалами.

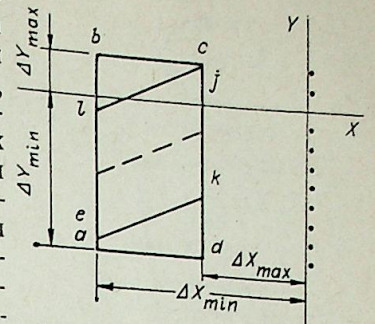


Рис. 2. К определению зоны неопределенностей при моделировании.

Для окончательного определения независимо моделируемых величин из оставшихся переменных выделяются показатели, коррелирующие с наибольшим числом элементов ( $L$ ). За независимый принимается показатель, для которого  $L = \max$ . Если выделенная независимая переменная не входит в другие коррелирующие группы, то среди них проводится аналогичная операция по фильтрации независимых переменных. Так формируется вектор зависимых и независимых переменных, на основе которого моделируются рассматриваемые показатели.

Расчет комплексных показателей проводится с помощью метода статистических испытаний (Монте-Карло) на основе существующих зависимостей между комплексными величинами и их составляющими. Значения, полученные при каждом испытании, формируют массивы комплексных переменных, на основе которых рассчитываются их статистические параметры и вероятностные характеристики.

Опробование предложенной модели проводилось на примере моделирования себестоимости производства электрической и тепловой энергии в районных энергосистемах Новосибирскэнерго и Кузбассэнерго. Моделировались тринадцать составляющих себестоимости по соответствующим законам распределения (см. таблицу). Расчеты на ЕС-1020 показали, что плановые значения показателей не выходят за пределы расчетного интервала неопределенностей, а погрешности математического ожидания себестоимости ниже существующих средних погрешностей планирования. Блок-схема приведена на рис. 3.

Таким образом, применение предлагаемой модели позволяет определить область, в которой находятся возможные варианты планов энергосистем и оценить их вероятностные характеристики в условиях автоматизации плановых расчетов. Учет качества планирования ТЭП энергосистем повысит научную и мобилизующую роль планов.

Новосибирский электротехнический институт

Поступила в редакцию  
3/IV 1978

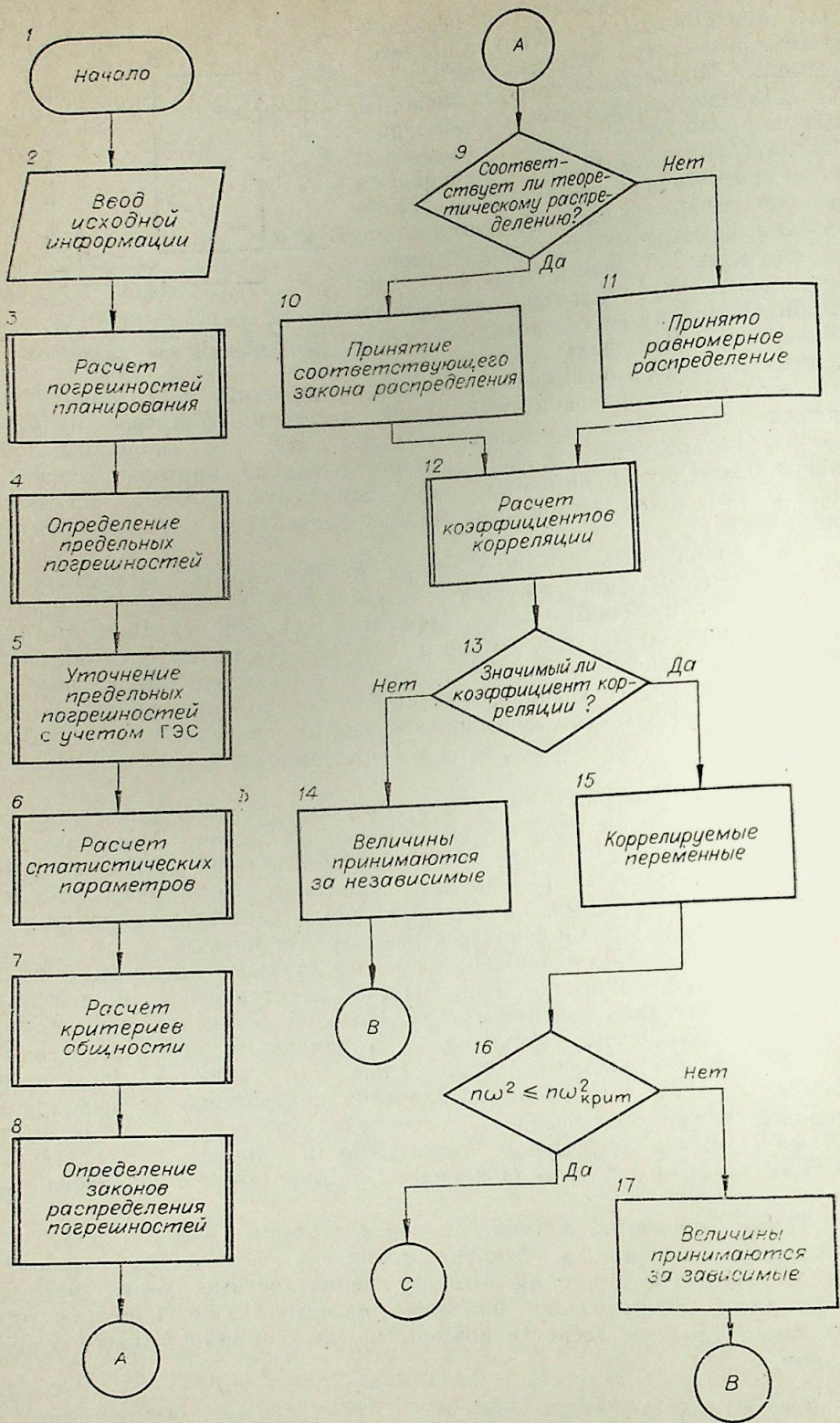
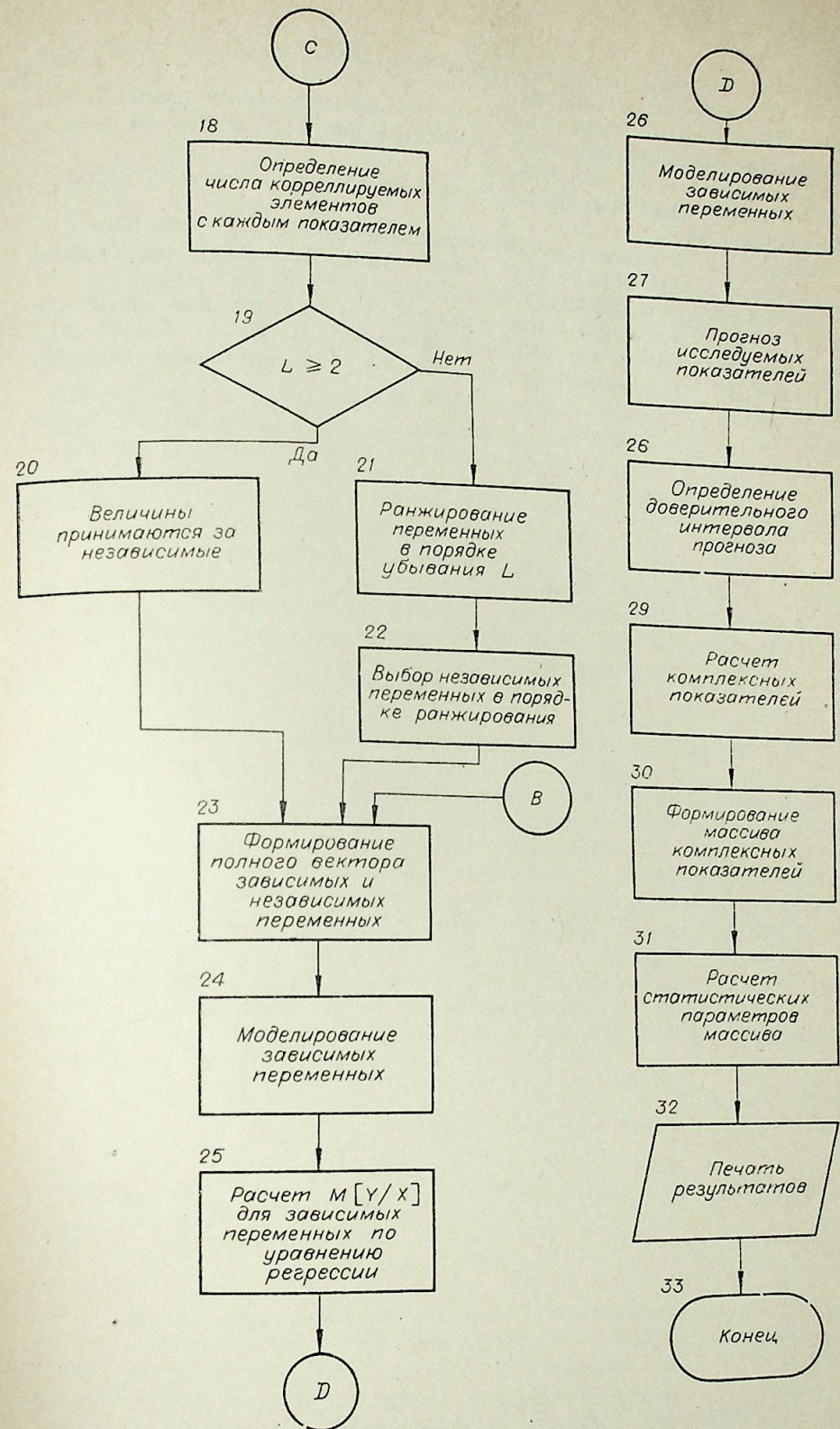


Рис. 3. Блок-схема анализа



и моделирования ТЭП ЭЭС.

1. Мелентьев Л. А. Оптимизация развития и управления больших систем энергетики. М., Высшая школа, 1976. 336 с.
2. Филиппова Т. А., Турецкий А. М. Математическая модель прогнозирования технико-экономических показателей энергосистем. Тез. докл. на Всесоюз. семинаре «АСУ в энергетике». М., 1976, с. 36—38.
3. Кендалл М. Дж. Многомерный статистический анализ и временные ряды. М., Наука, 1976. 736 с.
4. Андерсен Т. Статистический анализ временных рядов. М., Мир, 1976. 756 с.
5. Ивахненко А. Г., Лаппа В. Г. Кибернетические предсказывающие устройства. Киев, Наукова думка, 1965. 214 с.
6. Смирнов Н. В., Дунин-Борковский И. В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. М., Физматгиз, 1969. 511 с.
7. Длин А. М. Математическая статистика в технике. М., Советская наука, 1958. 466 с.

Э. С. ЛУКАШОВ

 ПРИМЕНЕНИЕ ОСНОВНЫХ ПОЛОЖЕНИЙ МЕХАНИКИ  
 К ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ

При исследовании режимов и устойчивости электроэнергетических систем значительное внимание уделяется электромеханическим переходным процессам, в основе которых лежит механическое движение роторов генераторов системы под действием электромеханических и механических сил. Электроэнергетическая система в этом смысле может рассматриваться как материальная система, если понимать под этим термином совокупность материальных точек, движение которых взаимосвязано и между которыми существуют силы взаимодействия [1]. При этом возникают вопросы о месте электроэнергетических систем в общей науке о механических системах, об особенностях электроэнергетических систем и о возможности применения для них основных положений теории механических систем.

Электроэнергетическая система (ЭЭС) включает в себя генераторы электрической энергии, электрическую сеть и потребителей электроэнергии самого различного устройства и назначения. Генераторы — это обычно электрические машины, приводимые во вращение паровыми или гидравлическими турбинами. При исследовании самых общих свойств ЭЭС принято электрическую сеть вместе с нагрузкой рассматривать как некоторую электрическую схему с неизменными параметрами, включающую в себя и электрическое сопротивление генераторов. Жестко связанные между собой роторы турбины и генератора рассматриваются как материальные тела, на которые действуют два главных момента: вращающий момент турбины и момент электромагнитных сил, действующих на ротор генератора. В соответствии с этим ЭЭС в так называемой позиционной идеализации [2] описывается следующими уравнениями:

$$T_i \frac{d^2 \delta_i}{dt^2} = P_{Ti} - P_{\Delta Mi}; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (1)$$

$$P_{\Delta Mi} = E_i \left( E_i g_{ii} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n g_{ij} (E_i - E_j \cos \delta_{ij}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n E_j b_{ij} \sin \delta_{ij} \right); \quad (2)$$

$$\delta_{ij} = \delta_i - \delta_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

где  $n$  — число генераторов в системе,  $T_i$  — постоянная времени механической инерции ротора  $i$ -го генератора,  $P_T$  — момент турбины,  $P_{\Delta M}$  — момент электромагнитных сил,  $\delta_i$  — абсолютный угол, определяющий положение в пространстве ротора  $i$ -го генератора,  $\delta_{ij}$  — взаимный угол между осями  $i$ -го и  $j$ -го генераторов,  $E$  — ЭДС генератора,  $g_{ii}$ ,  $g_{ij}$  — собственные и взаимные активные проводимости электрической схемы системы относительно узлов с присоединением ЭДС,  $b_{ij}$  — взаимная реактивная проводимость.

Уравнения (1)—(3) описывают электромеханические переходные процессы ЭЭС при небольших отклонениях от некоторого исходного установившегося режима при синхронной частоте. Применяется система относительных единиц, в которой используется синхронное время, измеряемое в радианах. При этом синхронная угловая скорость равна единице и моменты и мощности выражаются одинаковыми числами. Абсолютные углы  $\delta_i$  отсчитываются от воображаемых осей, вращающихся в пространстве с синхронной скоростью.

Таким образом, электрическая система, согласно (1)—(3), может рассматриваться как совокупность  $n$  материальных точек, совершающих движение под действием внешних сил и сил взаимодействия. Силы, действующие на каждую материальную точку, определяются расстояниями этой точки от всех других точек системы и согласно (2) существенно нелинейны.

Ротор каждого генератора представляет собой некоторое тело, имеющее лишь одну степень свободы, пять других ограничены наложенными связями. Однако удобнее рассматривать ЭЭС в пространстве одного измерения, где положение материальной точки, соответствующей некоторому генератору, определяется лишь одной координатой и связи отсутствуют. Любой генератор может занимать любое положение в этом воображаемом пространстве и, в принципе, любую скорость, что позволяет рассматривать ЭЭС как свободную систему с числом степеней свободы, равном числу генераторов. Отсутствие связей приводит к тривиальности многих положений механики применительно к электроэнергетическим системам (например, принцип виртуальных перемещений).

В механике принято рассматривать все действующие в системе силы двояко как внутренние и внешние, или как задаваемые и реакции связей. Так как в ЭЭС связи отсутствуют, то все силы — задаваемые, и имеет смысл делить их лишь на внешние и внутренние. К каждому генератору приложена одна внешняя сила — вращающий момент турбины и одна внутренняя — момент электромагнитных сил, действующих на ротор. Именно внутренние силы, функционально зависящие от положения всех роторов генераторов, и обеспечивают их объединение в систему.

Существенной характеристикой механических систем является равенство сил взаимодействия между всеми телами или точками системы. Главная особенность электрических систем — неуравновешенность связей, когда два тела одной системы действуют друг на друга с разными силами. Например, силы взаимодействия в электрической системе, состоящей из двух машин с равными ЭДС  $E$ , соединенных активно-индуктивным сопротивлением  $z = r + jx$ , согласно (2), следующим образом зависят от угла  $\delta$  между их роторами:

$$P_1 = \frac{E^2}{2^2} [x \sin \delta + r(1 - \cos \delta)]; \quad (4)$$

$$P_2 = \frac{E^2}{2^2} [-x \sin \delta + r(1 - \cos \delta)]. \quad (5)$$

Если бы в (4) и (5) отсутствовали вторые слагаемые в скобках, то моменты  $P_1$  и  $P_2$  были бы равны и противоположны. Наличие в схеме активного сопротивления приводит к неуравновешенности связи, когда генератор 1 воздействует через электрическую схему на ротор генератора 2 с моментом, не равным воздействию генератора 2 на ротор генератора 1. Таким образом, вследствие потерь энергии в активном сопротивлении возникает неравенство моментов взаимодействия между генераторами системы.

В любой механической системе все внутренние силы попарно равны и противоположно направлены, вследствие чего общая сумма всех внутренних сил равна нулю. В ЭЭС, во-первых, сгруппировать силы не равна нулю и соответствует активной мощности, потребляемой в электрической схеме. Действительно, просуммировав выражения (2), получаем

$$P_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n P_{\text{эм}i} = \sum_{i=1}^n E_i^2 g_i + \sum_{i=1}^n E_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (E_j - E_j \cos \delta_{ij}) g_{ij}, \quad (6)$$

где  $g_i$  — активная проводимость узла  $i$ .

Сумма моментов внутренних сил  $P_{\Sigma}$  может быть равна нулю только в том случае, когда активная нагрузка в системе отсутствует ( $g_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$ ) и все активные составляющие взаимных проводимостей между узлами схемы равны нулю, или если все векторы ЭДС генераторов равны между собой, т. е. в режиме холостого хода схемы. Следует подчеркнуть, что так называемая консервативная электрическая система, схема которой составлена только из реактивных сопротивлений, удовлетворяет первому условию и связи в этой системе уравновешены.

Одно из основных положений теории механических систем — закон движения центра инерции системы. В соответствии с ним центр инерции движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и к которой приложены все внешние силы. Это положение опирается на равенство нулю суммы всех внутренних сил. В рассматриваемом случае, просуммировав все уравнения (1), умножив и

разделив левую часть полученного равенства на  $T_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n T_i$ , получим

$$T_{\Sigma} \cdot \frac{d^2 \delta_0}{dt^2} = P_{T\Sigma} - P_{\Sigma}, \quad (7)$$

где  $\delta_0$  — координата центра инерции системы,  $P_{T\Sigma}$  — сумма вращающих моментов турбин (сумма внешних сил), а  $P_{\Sigma}$  — согласно (6) момент, пропорциональный суммарному потреблению активной мощности в схеме системы. Таким образом, в классическом виде закон движения центра инерции системы для ЭЭС неприменим, так как центр инерции ЭЭС движется как материальная точка, в которой сосредоточена вся масса системы и к которой приложены все внешние силы и сумма сил внутренних. Для консервативной ЭЭС закон движения центра инерции справедлив.

Другим не менее важным положением теории механических систем является закон количества движения: приращение суммы количеств движения точек системы за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов всех внешних сил за тот же промежуток времени. Этот закон так же, как и закон движения центра инерции, справедлив только в тех случаях, когда сумма внутренних сил равна нулю, а следовательно, неприменим для ЭЭС в позиционной идеализации и применим для консервативной ЭЭС.

И, наконец, третий краеугольный камень теории механических систем — закон кинетической энергии, устанавливающий равенство изменения кинетической энергии системы и суммы работ задаваемых сил, приложенных к точкам системы. В число задаваемых сил для ЭЭС включаются как внешние, так и внутренние силы взаимодействия между элементами системы. Поэтому закон кинетической энергии для ЭЭС применим, хотя при этом система как бы распадается на совокупность отдельных, не связанных между собой материальных

точек, и формулировка закона кинетической энергии становится очевидной и тривиальной. Понятие кинетической энергии системы является тем не менее одним из основных применительно к ЭЭС и может быть использовано при исследовании режимов системы. Все положения механики в этой области оказываются применимыми и достаточно важными для ЭЭС, например следующее: дифференциал кинетической энергии системы в ее движении относительно центра масс равен сумме элементарных работ всех внутренних и внешних сил на перемещении их точек приложения по отношению к центру масс.

Основное следствие закона движения центра инерции системы, заключающееся в том, что движение центра инерции системы под действием только внутренних сил невозможно, для электрических систем также не выполняется. При отсутствии внешних сил центр инерции системы может совершать движение, естественно, только в сторону замедления первоначального синхронного движения роторов генератора. При этом кинетическая энергия вращения генераторов преобразуется и поглощается в активных сопротивлениях электрической схемы.

Рассмотрим в качестве примера простейшую электрическую систему из двух одинаковых генераторов, соединенных активно-индуктивным сопротивлением и работающих в исходном режиме без нагрузки ( $P_{r1} = 0$ ,  $P_{r2} = 0$ ), т. е. при отсутствии внешних сил. Исследуем движение системы при колебаниях роторов генераторов около положения равновесия. Уравнения системы:

$$T\ddot{\delta}_1 + P_{\Sigma 1} = 0; \quad (8)$$

$$T\ddot{\delta}_2 + P_{\Sigma 2} = 0; \quad (9)$$

$$\delta_1 - \delta_2 = \delta. \quad (10)$$

Вычитая (9) из (8), используя (4), (5) и (10), получаем

$$T\ddot{\delta} + 2\frac{E^2 x}{z^2} \sin \delta = 0. \quad (11)$$

Решение (11) соответствует свободным незатухающим нелинейным колебаниям взаимного угла  $\delta$  между роторами машин. Имеется видимое противоречие с тем, что при  $\delta \neq 0$  по сопротивлению связи будет протекать ток, связанный с потерями энергии в активном сопротивлении. Казалось бы, при этом колебания не могут быть незатухающими.

Определим движение центра инерции системы. Складываем (8) и (9), помножив и разделив на  $T_{\Sigma} = 2T$  первое слагаемое найденной суммы, получаем

$$T_{\Sigma}\ddot{\delta}_0 + 2\frac{E^2 r}{z^2} (1 - \cos \delta) = 0, \quad (12)$$

где  $\delta_0$  — координата центра инерции системы. Таким образом, полное представление о движении системы можно получить, решив уравнение (11) для взаимного угла. Используя полученную зависимость взаимного угла от времени при решении (12), можно получить движение центра инерции системы. В общем виде эти операции вряд ли можно выполнить, а численное решение труда не представляет. С точки зрения узких поставленных задач можно ограничиться только общим анализом (12).

Центр инерции рассматриваемой системы при отсутствии внешних сил может находиться в состоянии покоя лишь в том случае, когда либо  $r = 0$ , т. е. система консервативна, либо при  $\delta = 0$ , когда отсутствует взаимное движение генераторов. Взаимные колебания роторов согласно (12) вызывают движение центра инерции системы, причем

при любом знаке  $\delta$  второе слагаемое (12) положительно, т. е. любой фазе взаимных колебаний соответствует электромагнитный момент, тормозящий движение центра инерции системы. Таким образом, по уменьшения кинетической энергии роторов генераторов. Очевидно, что бесконечно долго это движение продолжаться не может. Через некоторое время система выйдет за границы, определяемые основным допущением — предположением о незначительности отклонений частоты (скорости вращения генераторов) от номинальной, а принятая математическая модель станет неприемлемой. При  $P_{ri} \neq 0$  возможны случаи, когда движение центра инерции системы не замедляется, а ускоряется [3].

Механическая система, согласно [4], — это совокупность конечного или бесконечного числа материальных точек (или тел), взаимодействующих между собой в соответствии с третьим законом Ньютона. Основная особенность электромеханических процессов в ЭЭС заключается в том, что объединение генераторов в общую систему происходит при помощи электромагнитных сил, неподчиняющихся третьему закону Ньютона. Основная особенность ЭЭС — неуравновешенность связей между генераторами. Вследствие этого ЭЭС в принципе не является механической системой и некоторые законы механических систем, опирающиеся на равенство нулю суммы внутренних сил, на ЭЭС не распространяются.

Сибирский научно-исследовательский  
институт энергетики,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
1/VI 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бутенин Н. В. Введение в аналитическую механику. М., Наука, 1971. 264 с.
2. Жданов И. С. Устойчивость электрических систем. ГЭИ, М., 1948. 399 с.
3. Лукашов Э. С. О некоторых свойствах позиционной модели электрических систем — Электричество, 1977, № 10, с. 26—29.
4. Белецкий И. М. Введение в аналитическую механику. М., Высшая школа, 1964. 324 с.

СПИСОК СТАТЕЙ, ОПУБЛИКОВАННЫХ  
В СЕРИИ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК В 1979 г.

- Алексеев А. М., Зыричев Н. А., Родимов Ю. Л., Цветков Е. П. Перспективы использования генераторов низкотемпературной плазмы в химической промышленности.— № 8, вып. 2.
- Андреев В. М., Жаркова Г. М., Фокин Е. П., Хачатурян В. М. Стабилизация термоиндикаторных полимерных пленок.— № 8, вып. 2.
- Атаманова Г. Б., Каложный А. Х., Лукашов Э. С. О статистической устойчивости сложных электроэнергетических систем, включающих настроенные электропередачи.— № 8, вып. 2.
- Базанов В. А., Кутателадзе С. С., Рубцов Н. А. Распространение излучения в турбулентном потоке жидкости при внешней изотермичности.— № 3, вып. 1.
- Белолипецкий В. М. О приближенном способе расчета гиперзвукового течения около тонких притупленных тел.— № 3, вып. 1.
- Белолипецкий В. М. О предельных пространственных гиперзвуковых течениях вязкого газа.— № 3, вып. 1.
- Бердичевский М. Г., Марусин В. В. Неравновесность и механизм ионизации азотной плазмы безэлектродного ВЧ-емкостного разряда при средних давлениях.— № 8, вып. 2.
- Битюков В. К., Латышев Л. Н., Петров В. А., Степанов С. В. Об определении коэффициента теплопроводности частично прозрачных материалов при высоких температурах.— № 13, вып. 3.
- Блохин А. М. Смешанная задача для системы уравнений акустики с граничными условиями на ударной волне.— № 13, вып. 3.
- Болановский Б. Некоторые вопросы импульсной модели прикатодной зоны электрической дуги.— № 8, вып. 2.
- Борисов А. Н., Петраковский И. А., Хлебопрос Р. Г. Регистрация границ фотоизображения объектов.— № 13, вып. 3.
- Бурдуковская В. П., Ковалев Б. И., Левинштейн М. Л., Милевский А. К. Статистическая оценка восстанавливающихся напряжений на контактах выключателей с учетом нестационарности отключаемых токов.— № 8, вып. 2.
- Бурдуков А. П., Буфетов Н. С., Дорохов А. Р. Абсорбция на стекающей пленке жидкости.— № 13, вып. 3.
- Бушик А. И., Мицкевич М. К., Некрашевич И. Г., Бакуто И. А. Проявление ретроградного движения катодных пятен при импульсном разряде в магнитном поле.— № 8, вып. 2.
- Васенко И. П. Расчет магнитного поля, создаваемого элементами магнитной системы подогревателя коаксиального типа.— № 13, вып. 3.
- Геллер В. М., Панджакидзе Д. А. Оптимизация энергопараметров СВЧ широкополосных распределенных усилителей мощности.— № 8, вып. 2.
- Глазков И. Н., Кадомская К. П., Кулькова Е. В., Левинштейн М. Л. К вопросу о сравнительной оценке точности и устойчивости численных методов решения задачи Коши.— № 13, вып. 3.
- Гольдфарб В. М. Некоторые новые возможности диагностики однофазных и двухфазных плазменных струй.— № 3, вып. 1.
- Гольфельд М. А., Затолока В. В. Об улучшении отрывных свойств турбулентного пограничного слоя в результате воздействия скачка уплотнения.— № 13, вып. 3.
- Горбунов Ю. К., Сваровский И. Н. Расчет импульсных воздействий на продольную изоляцию обмоток электрических машин по многоэлементным схемам замещения.— № 13, вып. 3.
- Гороховский В. И. Вариационные методы в динамике термической плазмы.— № 3, вып. 1.
- Гросман Э. Р., Шаврин В. С., Псахис Б. И. Экспериментальное исследование высокотемпературного генератора бромистолитиевой абсорбционной холодильной установки со ступенчатой регенерацией раствора.— № 8, вып. 2.
- Гужков В. В., Хвесюк В. И. Прямое измерение плотности ионного тока на поверхности катодов.— № 3, вып. 1.
- Гужков В. В., Зимин А. М., Козлов Н. П., Розанов А. Г., Хвесюк В. И. Динамика температурных полей электродов частотных импульсных ламп.— № 13, вып. 3.
- Гулько Ю. П., Мажуль И. И. Исследование режимов обтекания верхней поверхности v-образных крыльев с отсоединенным от передних кромок скачком уплотнения.— № 3, вып. 1.
- Даниэлян Ю. С., Яницкий П. А. О кинетике замерзания воды во влажных грунтах.— № 13, вып. 3.
- Деграф Э. Д. Диагностика приэлектродных плазменных струй в коаксиальном плазмотроне.— № 8, вып. 2.
- Джакупов К. П. О влиянии фазового перехода на конвективное движение вязкой жидкости в замкнутой полости.— № 13, вып. 3.
- Джеймс К. Р., Мильрей Р. Д., Кэпьяк К. Е. Инфракрасный плазменный параметрический усилитель.— № 3, вып. 1.
- Добринский Э. К., Урюков Б. А., Фридрих А. Э. Исследование стабилизации плазменной струи газовым вихрем.— № 8, вып. 2.
- Дорохов А. Р., Казаков В. И. Газосодержание в тонких динамических двухфазных слоях при пониженных давлениях.— № 13, вып. 3.
- Еркаева Е. А., Демиденко Н. Д. Качественный анализ гиперболической системы, описывающей процесс теплообмена в технологических аппаратах.— № 13, вып. 3.
- Жуков М. Ф., Засыпкин И. М., Мишне И. И., Сазонов М. И. Теплообмен в выходном электроде плазмотрона с межэлектродной вставкой.— № 8, вып. 2.
- Жуков М. Ф., Анышаков А. С., Дандарон Г.-Н. Б., Эскин Г. Г. Несамостоятельный разряд вблизи поверхности межэлектродной вставки.— № 13, вып. 3.
- Засыпкин И. П., Попок Н. И. Оптические исследования электрической дуги в турбулентном потоке воздуха.— № 8, вып. 2.
- Зауличный Е. Г., Лебедев А. С., Рафиков Р. В. Расчет газодинамических параметров в длинном цилиндрическом нестационарно прогреваемом канале перед соплом Лаваля.— № 13, вып. 3.
- Зауличный Е. Г., Рягин Б. А., Шевченко В. И. О влиянии формы торца штока на коэффициент расхода клапана.— № 3, вып. 1.
- Зимин А. М., Козлов Н. П., Хвесюк В. И. О критерии подобия температурных полей катодов.— № 3, вып. 1.
- Зимин А. М., Козлов Н. П., Хвесюк В. И. К расчету термоэмиссионного катода.— № 8, вып. 2.
- Иванова Г. В., Иванова Н. В. Уравнения однофазного асинхронного двигателя и преобразование индуктивных параметров.— № 13, вып. 3.
- Каплун А. Б., Крутько М. Ф. Вязкость расплавленного германия вблизи температуры затвердевания.— № 8, вып. 2.
- Кимблин К. В. Исследования явлений эрозии и ионизационных процессов в приэлектродных областях вакуумных дуг при атмосферном давлении.— № 8, вып. 2.
- Кэмпкенс Х., Уленбуш Дж. Измерение коэффициента пропускной способности вблизи критической частоты с помощью инфракрасного луча.— № 3, вып. 1.
- Лебедев А. Д., Щербик Н. М. К вопросу об измерениях температуры в «турбулентных» дугах.— № 3, вып. 1.
- Лебедев В. А. Об инвариантности угловых коэффициентов некоторых излучающих систем.— № 13, вып. 3.
- Лукашов Э. С. Применение основных положений механики к электроэнергетическим системам.— № 13, вып. 3.
- Макаренко Ю. Ф., Немировский Ю. В., Хейнлоо Я. Л. Об одном классе неустановившихся турбулентных течений в круглых трубах и плоских каналах.— № 3, вып. 1.
- Макаров В. М. Алгоритм и программа расчета первичных параметров многоцепных линий электропередачи.— № 13, вып. 3.
- Мельникова Т. С., Попенко В. Г., Уланов И. П. Влияние аксиального магнитного поля на электрическую дугу.— № 3, вып. 1.
- Налетов М. С., Соколовский В. Л. Электродинамика сверхпроводников в резистивном состоянии.— № 8, вып. 2.
- Нейман В. Спектроскопическое исследование диссоциационной неравновесности в сильноточной плазменной струе.— № 3, вып. 1.
- Пахомов Е. П. Винтовая форма дуги, область существования и характеристики.— № 3, вып. 1.
- Пономарев Н. Н. О решении задач переноса лучистой энергии модифицированным методом средних потоков.— № 13, вып. 3.
- Путько В. Ф., Соболев В. С., Суяров Н. Ю. Управление движением опорного пятна электрической дуги по рабочей поверхности магнитного поля.— № 13, вып. 3.
- Расторгуева Н. М. Экспериментальное исследование интегральных полусферических излучательных способностей материалов в области температур 78÷150 К.— № 13, вып. 3.

- Розенфельд Л. М., Кузьмицкий Ю. В. Термодинамические циклы теплоиспользующих абсорбционных бромистолитиевых холодильных машин для опреснения соленых вод.— № 8, вып. 2.
- Ротер В., Бергманн В., Руппе Р. Проблемы измерения с помощью электрических зондов в потоках плазмы высокого давления.— № 3, вып. 1.
- Рубцов Н. А., Емельянов А. А. Исследование оптических свойств окиси бериллия в области температур плавления.— № 13, вып. 3.
- Рычков С. Н. Исследование резистивного кольца, замкнутого джозефсоновским контактом с малой емкостью.— № 13, вып. 3.
- Селиверстова И. Ф., Цыганков Н. В. Исследование влияния типа опорного пятна на структуру следа.— № 3, вып. 1.
- Синицын А. Т. Определение амплитудно-частотных характеристик термоакустических колебаний в жидкости сверхкритического давления.— № 8 вып. 2.
- Стихановский В. Н., Стихановская Л. М. Емкостный датчик с ударной электризацией для измерения параметров удара тел.— № 8, вып. 2.
- Суюшев В. А. О переносе скалярного поля свободной турбулентностью.— № 3, вып. 1.
- Суяров Н. Ю., Зулфикаров М. Н. Основные параметры вращающегося плазменного кольца в скрещенных магнитном и электрическом полях.— № 8, вып. 2.
- Филиппова Т. А., Турецкий А. М. Моделирование технико-экономических показателей энергосистем и оценка погрешностей их планирования.— № 13, вып. 3.
- Хозе А. Н., Захаров А. С. Экспериментальное исследование конденсации водяного пара в проточном динамическом двухфазном слое.— № 8, вып. 2.
- Эккер Г. К. Описание катодных явлений.— № 8, вып. 2.

УДК 533.924+537.523.001.5

Жуков М. Ф., Аньшаков А. С., Дандарон Г.-Н. Б., Эскин Г. Г. Несамостоятельный разряд вблизи поверхности межэлектродной вставки.— Изв. СО АН СССР, 1979, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.

В работе исследуется механизм несамостоятельного разряда между секцией МЭВ и столбом дуги. Показано, что при измерении распределения потенциала дуги необходимо учитывать соответствие измеряемого потенциала потенциалу дуги с координатой  $x = -l/2$  от кромки секции.

Получено уравнение, позволяющее определить координату пространства, где потенциал соответствует потенциалу секции. Рис. 4, библи. 7.

УДК 537.526.5

Путько В. Ф., Соболев В. С., Суяров Н. Ю. Управление движением опорного пятна электрической дуги по рабочей поверхности электродов с помощью внешнего поперечного вращающегося магнитного поля.— Изв. СО АН СССР, 1979, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.

В работе приведены результаты исследования воздействия поперечного вращающегося магнитного поля на движение опорного пятна электрической дуги по рабочей поверхности анода плазменной установки, дана попытка теоретического объяснения наблюдаемых эффектов, зарегистрированных посредством скоростной киносъемки движения приэлектродных участков дуги. Рис. 4, библи. 2.

УДК 629.7.018.1 : 533.6.071.1 : 62—69

Васенко И. П. Расчет магнитного поля, создаваемого элементами магнитной системы подогревателя коаксиального типа.— Изв. СО АН СССР, 1979, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.

Изложена методика расчета магнитного поля магнитной системы электродового подогревателя коаксиального типа, состоящей из магнитовода П-образного сечения, охватывающего электромагнитную катушку, и ферромагнитного элемента, расположенного в головке центрального электрода под его охлаждаемой поверхностью. В процессе расчета магнитовод заменяется системой магнитных зарядов, расположенных на цилиндрических поверхностях осевых отверстий его торцевых дисков, а элемент одним или системой магнитных диполей. Магнитное поле, создаваемое элементарными зарядами или диполями, определяется по закону Кулона. На основании сравнения с экспериментом указывается область применения предложенной методики. Рис. 5, библи. 11.

УДК 621.327

Гужков В. В., Зимин А. М., Козлов Н. П., Розанов А. Г., Хвесюк В. И. Динамика температурных полей электродов частотных импульсных ламп.— Изв. СО АН СССР, 1979, № 13. Сер. хим. наук, вып. 3.

В работе проведено экспериментальное исследование теплового состояния электродов импульсных источников плазмы, работающих в частотном режиме. Температурные измерения выполнялись с высоким пространственным ( $\sim 0,3$  мм) и временным ( $\sim 10^{-6}$  с) разрешением. Проанализирована динамика температурных полей электродов на различных режимах работы устройства. Рис. 5, библи. 6.

УДК 517.946

Блохин А. М. Смешанная задача для системы уравнений акустики с граничными условиями на ударной волне.— Изв. СО АН СССР, 1979, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.

Изучается смешанная задача для линеаризованной системы уравнений газовой динамики с граничными условиями, заданными на фронте ударной волны. Вопрос о корректной постановке данной задачи изучался ранее с помощью метода Фурье и преобразования Лапласа.

В настоящей работе этот вопрос рассматривается с помощью техники интегралов энергии. Если такой интеграл удастся построить, то из него будет следовать корректность постановки смешанной задачи в том или ином функциональном пространстве. Рис. 1, библи. 8.

**Зауличный Е. Г., Лебедев А. С., Рафиков Р. В.** Расчет газодинамических параметров в длинном цилиндрическом нестационарно прогреваемом канале перед соплом Лавалю.— Изв. СО АН СССР, 1979, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.

В работе приводится метод расчета газодинамических параметров совместно с параметрами трения и теплообмена на нестационарно прогреваемых стенках длинных каналов-газопроводов, расположенных перед соплом Лавалю. Канал может быть как постоянных геометрических размеров, так и изменяться за счет перемещения влево от сопла фронта горения твердого топлива. Учет влияния тепловых потерь в многослойную стенку канала, а также потерь за счет трения потока дает возможность привести в удовлетворительное соответствие предлагаемый метод расчета с экспериментальными данными. Метод расчета реализован на ЭВМ БЭСМ-6. Рис. 6, библиограф. 8.

УДК 532.526

**Гольдфельд М. А., Затолока В. В.** Об улучшении отрывных свойств турбулентного пограничного слоя в результате воздействия скачка уплотнения.— Изв. СО АН СССР, 1979, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.

На основании анализа экспериментальных данных о профилях скоростей турбулентного пограничного слоя расчетом показано, что протекание пограничного слоя через скачок уплотнения должно улучшить его способность противостоять отрыву при воздействии следующего скачка, несмотря на то, что сразу после воздействия первого скачка наполненность профиля уменьшается. Экспериментальная проверка, проведенная в диапазонах чисел Маха от 2 до 4 и углов клиньев (генераторов первого и второго скачков) от 11 до 18°, это подтвердила и показала, что предварительное воздействие скачка увеличивает безотрывный угол клина не менее, чем на 5°. Рис. 9, табл. 1, библиограф. 7.

УДК 532.52 : 542.63

**Бурдуков А. П., Буфетов Н. С., Дорохов А. Р.** Абсорбция на стекающей пленке жидкости.— Изв. СО АН СССР, 1979, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.

Приведены результаты экспериментального исследования неизотермической абсорбции на пленке жидкости, стекающей по вертикальной охлаждаемой трубе. Абсорбировался водяной пар водным раствором бромистого лития при давлениях  $p_a = 0,93 \div 2,0$  кПа, температуре охлаждающей воды  $T_w = 24^\circ\text{C}$ , концентрации крепкого раствора  $\xi = 58 \div 60\%$  в диапазоне чисел Рейнольдса пленки  $Re = 30 \div 120$ . Результаты эксперимента обобщены в безразмерных координатах и сопоставлены с расчетной зависимостью. Рис. 5, библиограф. 7.

УДК 536.2.08+ (536.3 : 535.34)

**Битюков В. К., Латышев Л. Н., Петров В. А., Степанов С. В.** Об определении коэффициента теплопроводности частично прозрачных материалов при высоких температурах.— Изв. СО АН СССР, 1979, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.

На базе строгого решения уравнений радиационно-кондуктивного теплопереноса для плоского слоя частично прозрачной среды с непрозрачными зеркально отражающими границами исследовано влияние погрешностей экспериментально измеряемых величин и погрешностей оптических свойств слоя, нагревателя и холодильника на точность определения коэффициента теплопроводности при высоких температурах. Рис. 1, табл. 4, библиограф. 21.

УДК 536.48

**Расторгуева Н. М.** Экспериментальное исследование интегральных полусферических излучательных способностей материалов в области температур 78÷150 К.— Изв. СО АН СССР, 1979, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.

В работе приводятся результаты экспериментальных исследований интегральных излучательных способностей материалов в диапазоне температур 78÷150 К, полученные на двух установках с привлечением разных методов измерения: калориметрического и радиационно-калориметрического.

Калориметрический метод измерения применялся в области температур от 110 до 150 К. В области более низких температур (78÷90 К) использовался радиационно-калориметрический метод. Предусмотрены специальные меры, снижающие теплопроводные потоки, имеющиеся в любой системе и обычно сопоставимые с предельно низкими значениями плотностей потоков излучения. Рис. 1, табл. 1, библиограф. 6.

**Пономарев Н. Н.** О решении задач переноса лучистой энергии модифицированным методом средних потоков.— Изв. СО АН СССР, 1979, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.

Рассмотрено решение линейного интегродифференциального уравнения, описывающего перенос монохроматического излучения в плоском слое поглощающей и анизотропно-рассеивающей среды методом средних потоков. Произведена модификация данного метода путем исключения угловой переменной из итерационного процесса. В результате получена нелинейная система, коэффициенты которой имеют компактный вид. Индикатриса однократного рассеивания представлена тремя первыми членами разложения по полиномам Лежандра. Показана быстрая сходимость метода во всех рассмотренных случаях. Данная модификация позволяет получать непосредственно в процессе решения полный набор точных значений характеристик поля излучения, что делает ее использование весьма удобным в задачах радиационного теплообмена. Рис. 1, библиограф. 7.

УДК 536.24

**Рубцов Н. А., Емельянов А. А.** Исследование оптических свойств окиси бериллия в области температур плавления.— Изв. СО АН СССР, 1979, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.

В работе приводятся экспериментальные результаты по свойствам излучения потока частиц окиси бериллия, а также полученной в результате расчетов мнимой части комплексного показателя преломления. Эксперименты выполнены впервые на специальной установке при температурах 1800—3600 К в видимом участке спектра. В области плавления окиси бериллия наблюдается сильная зависимость свойств излучения от длины волны. Рис. 4, табл. 1, библиограф. 11.

УДК 536.3

**Лебедев В. А.** Об инвариантности угловых коэффициентов некоторых излучающих систем.— Изв. СО АН СССР, 1979, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.

Анализируя некоторые справочные данные из книги Р. Зигеля и Дж. Хауэла [1], автор показал инвариантность ряда локальных и интегральных угловых коэффициентов излучения для цилиндрических излучающих систем и систем с бесконечно протяженными поверхностями. Рис. 5, библиограф. 10.

УДК 532.516

**Джакупов К. Б.** О влиянии фазового перехода на конвективное движение вязкой жидкости в замкнутой полости.— Изв. СО АН СССР, 1979, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.

В работе численно решается задача о влиянии затвердевания вязкой жидкости в замкнутой полости на конвективное движение на основе полных двумерных уравнений Навье — Стокса и уравнения теплопроводности, для которой возникает задача Стефана. Для расчета конвективного движения применяется система уравнений для вихря скорости и компонент скорости, для определения фронта фазового перехода и распределения температуры применяется схема сквозного счета. Приведены положения фронта фазового перехода в различные моменты времени, картины линий тока, эпюры скоростей, температуры, полученные при различных значениях чисел Грасхофа, Эккерта, Прандтля. Рис. 7, библиограф. 12.

УДК 66.047.355.048.37

**Дорохов А. Р., Казаков В. И.** Газосодержание в тонких динамических двухфазных слоях при пониженных давлениях.— Изв. СО АН СССР, 1979, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.

Приведено описание экспериментального стенда, методики измерений среднего газосодержания динамического двухфазного (пенного) слоя на ситчатых решетках. Экспериментальные данные получены для пенного слоя, образованного при пропускании воздуха атмосферного давления и водяного пара при пониженных ( $p < 1$  атм) давлениях через водный раствор бромистого лития.

Показано, что величина среднего газосодержания определяется не только скоростью газа, плотностью газовой и жидкой фаз, исходной высотой «светлого» слоя жидкости, но и интенсивностью поглощения газа в пенном слое в результате абсорбции. Полученные данные сопоставлены с литературными зависимостями. Рис. 3, табл. 1, библиограф. 6.

Даниелян Ю. С., Яницкий П. А. О кинетике замерзания воды во влажных грунтах.— Изв. СО АН СССР, 1979, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.

Предложено использовать кинетическое уравнение для описания динамики кристаллизации влаги в грунтах. Экспериментальные исследования показали хорошее соответствие модельного уравнения данным опыта.

На основе кинетической модели поставлена новая математическая задача промерзания влажных грунтов, учитывающая конечное время кристаллизации воды. Рис. 3, табл. 1, библ. 5.

Глазков И. Н., Кадомская К. П., Кулькова Е. В., Левинштейн М. Л. К вопросу о сравнительной оценке точности и устойчивости численных методов решения задачи Коши.— Изв. СО АН СССР, 1979, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.

Приведен анализ эффективности различных численных методов интегрирования дифференциальных уравнений с точки зрения их устойчивости, точности и времени решения на ЦВМ. Дифференциальные уравнения описывают электромеханические переходные процессы в простейшей схеме электропередачи. Рассмотрено пять методов: Рунге — Кутта четвертого порядка, Адамса, Адамса — Штермера, Эйлера, последовательных интервалов. Показана целесообразность использования при автоматизации расчетов комбинированного метода Адамса — Штермера. Рис. 3, табл. 3, библ. 3.

Еркаева Е. А., Демиденко Н. Д. Качественный анализ гиперболической системы, описывающей процесс теплообмена в технологических аппаратах.— Изв. СО АН СССР, 1979, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.

Исследуется краевая задача для гиперболической системы уравнений со сложными граничными условиями в виде обыкновенных дифференциальных уравнений. Такие граничные условия имеют место для технологических аппаратов с рециркулирующей взаимодействующих потоков. Доказывается единственность решения и определяются ограничения на коэффициенты системы уравнений, гарантирующие корректность краевой задачи. Предложен численный метод решения таких задач. Приведен численный расчет промышленной ректификационной колонны для разделения бинарных смесей. Рис. 2, библ. 3.

Рычков С. Н. Исследование резистивного кольца, замкнутого джоуфсоновским контактом с малой емкостью.— Изв. СО АН СССР, 1979, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.

Выполнен анализ резистивного кольца, замкнутого слабым контактом с малой емкостью. Для описания контакта использовалась резистивная модель. Проведено полное качественное исследование системы двух нелинейных дифференциальных уравнений, описывающей резистивный контур, замкнутый слабым контактом. Для случая, когда характерное значение эффективной индуктивности контакта много больше (меньше) индуктивности контура, получены аналитические выражения для частоты колебаний, времени переходных процессов и др. величин. Результаты анализа могут быть использованы при исследовании и проектировании измерительных устройств, вычислительной техники, а также других систем с джоуфсоновскими контактами. Рис. 4, библ. 10.

Борисов А. Н., Петраковский И. А., Хлебопрос Р. Г. Регистрация границ фотоизображений объектов.— Изв. СО АН СССР, 1979, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.

Предлагается способ регистрации границ фотоизображений природных образований. Практическая реализация алгоритма осуществлена с помощью телевизионного денситометра «Фосдак-1000». Показано, что способ обладает достаточной чувствительностью для разделения различных подстилающих поверхностей. Алгоритм способа легко может быть реализован на ЭВМ. Рис. 4, табл. 1, библ. 3.

Макаров В. М. Алгоритм и программа расчета первичных параметров многоцепных линий электропередач.— Изв. СО АН СССР, 1979, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.

В работе описываются основные характеристики программы-расчета первичных параметров многоцепных линий электропередачи с тросами (или без них) — ПЛТ и исходных положений, принятых при разработке программы. Программа разработана применительно к вычислительным машинам класса М-220, имеющих однотипную систему команд внутреннего языка.

Программа позволяет рассчитывать параметры многоцепной линии (с числом цепей до 12) для нескольких значений частот, в зависимости от типа опор, марки проводов (одночных и расщепленных), способа заземления тросов, проводимости земли, длины исследуемого участка линии. Расчет может проводиться как в симметричных составляющих, так и в фазных координатах (по желанию). Вывод осуществляется по выбору на перфорирующее или печатающее устройство. Рис. 2, табл. 1, библ. 5.

Иванова Н. В., Иванова Г. В. Уравнения однофазного асинхронного двигателя и преобразование индуктивных параметров.— Изв. СО АН СССР, 1979, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.

Предлагается способ преобразования уравнений однофазных асинхронных двигателей, позволяющий исключить переменные коэффициенты индуктивности. Библ. 1.

Горбунов Ю. К., Сваровский И. Н. Расчет импульсных воздействий на продольную изоляцию обмоток электрических машин по многоэлементным схемам замещения.— Изв. СО АН СССР, 1979, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.

Дана методика расчета напряжений на катушечных группах и катушках обмоток асинхронных и синхронных электрических машин малой и средней мощности при воздействии на их обмотки импульсных напряжений. Расчет основан на замене обмоток многоэлементными схемами замещения и использовании известного метода разложения по собственным режимам в предположении, что матрица активных сопротивлений  $r$  обмотки подобна матрице индуктивностей  $L$  и матрица проводимости изоляции  $G$  подобна матрице емкостей  $C$ . Предполагается, что все элементы матриц  $r$  и  $L$ ,  $G$  и  $C$  при фиксированной частоте отличаются на один и те же множители.

В приложении дан расчет импульсных напряжений на катушечных группах асинхронного двигателя для одной из возможных схем соединения фаз обмотки. Переход к различным схемам соединения обмотки трехфазной электрической машины осуществляется с помощью матриц соединения фаз обмотки, методика составления которых описана в работе. Рис. 4, библ. 4.

Филиппова Т. А., Турецкий А. М. Моделирование технико-экономических показателей энергосистем и оценка погрешностей их планирования.— Изв. СО АН СССР, 1979, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.

Дается анализ точности существующих методов текущего планирования технико-экономических показателей (ТЭП) районных энергосистем на примере Кузбассэнерго и Новосибирскэнерго. Определены погрешности планирования показателей и их статистические параметры. Рассматривается возможность моделирования исследуемых величин в интервале предельных погрешностей их планирования. Приведена блок-схема анализа и моделирования ТЭП, которая может быть использована как на стадии оценки проектов планов энергосистем, так и при их прогнозировании для определения области, в которой с заданной вероятностью будет находиться будущее значение показателя. Рис. 3, табл. 1, библ. 7.

Лукашов Э. С. Применение основных положений механики к электроэнергетическим системам.— Изв. СО АН СССР, 1979, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.

Рассматривается возможность использования при исследовании электромеханических переходных процессов электроэнергетических систем — закона движения центра инерции, закона количества движения и закона кинетической энергии. Установлено, что в электроэнергетической системе связи между материальными телами устанавливаются электромагнитными силами, не подчиняющимися третьему закону Ньютона. Основное свойство электроэнергетических систем — неуравновешенность связей, вследствие чего закон движения центра инерции и закон количества движения механических систем, опирающегося на равенство нулю суммы внутренних сил, на электроэнергетические системы не распространяются. Приведен пример движения простейшей электроэнергетической системы под действием внутренних сил. Библ. 4.

## ИЗВЕСТИЯ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

Главный редактор журнала чл.-кор. М. Ф. Жуков

Заместитель главного редактора д-р физ.-мат. наук В. Г. Дулов

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ СЕРИИ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

Ответственный редактор серии чл.-кор. М. Ф. Жуков

Чл.-кор. О. Ф. Васильев, д-р техн. наук Б. Н. Девятов, д-р физ.-мат. наук В. Г. Дулов, чл.-кор. Н. А. Желтухин (зам. ответственного редактора), д-р техн. наук В. Е. Накоряков, д-р техн. наук Н. А. Рубцов (ответственный секретарь серии), д-р техн. наук Б. А. Урюков, д-р техн. наук В. К. Щербаков

Адрес редакции. 630099, Новосибирск, 99, Советская, 18. комн. 331.  
Тел. 22-00-44

Редактор Н. Н. Стригун  
Художественный редактор Э. С. Филонычева  
Технический редактор Т. К. Овчинникова  
Корректоры А. А. Надточий, Т. О. Негодова

Сдано в набор 27.07.79. Подписано к печати 23.10.79. МН-10289. Формат 70×108<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Высокая печать.  
Усл. печ. л. 14. Уч.-изд. л. 14. Тираж 2050 экз. Заказ № 614.

Издательство «Наука», Сибирское отделение. 630099, Новосибирск, 99, Советская, 18.  
4-я типография издательства «Наука». 630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25.

**СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
ИЗДАТЕЛЬСТВА «НАУКА»**

готовит к выпуску в 1980 г. следующие книги:

- Крумм Л. А.** Методы оптимизации при управлении электро-энергетическими системами. 20 л. 3 р. 30 к.  
**Системный** подход при управлении развитием электроэнергетики. 20 л. 3 р. 30 к.  
**Воропай Н. И.** Упрощение математических моделей динамики электроэнергетических систем. 8 л. 1 р. 20 к.  
**Асимптотические** методы в динамике систем. 11 л. 1 р. 70 к.

*Книги высылаются наложенным платежом. Заказы направляйте по адресу: 630090, Новосибирск, 90, Морской пр., 22, магазин «Наука».*

**СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
ИЗДАТЕЛЬСТВА «НАУКА»**

готовит к выпуску в 1979 г. следующие книги:

- Хрилев Л. С.** Теплофикация и топливно-энергетический комплекс. 20 л. 3 р. 50 к.  
**Строительство** и эксплуатация гидротехнических сооружений в Западной Якутии. 6 л. 90 к.  
**Кобзев А. В.** Многозонная импульсная модуляция (теория и применение в системах преобразования параметров электрической энергии). 20 л. 3 р. 50 к.  
**Матросов В. М., Анапольский Л. Ю., Васильев С. Н.** Метод сравнения в математической теории систем. 25 л. 4 р. 30 к.

*Книги высылаются наложенным платежом. Заказы направляйте по адресу: 630090, Новосибирск, 90, Морской пр., 22, магазин «Наука».*

**Замеченные опечатки**

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
79	2 снизу	$\{0 \geq x \geq 0,5, \leq y \leq y_{\Phi}\}$	$\{0 \leq x \leq 0,5, 0 \leq y \leq y_{\Phi}\}$
80	7 снизу	$\{0 \leq x \leq 0,05; 0 \leq z \leq 0,5\}$	$\{0 \leq x \leq 0,5, 0 \leq y \leq y_{\Phi}\}$

«Известия СО АН СССР», 1979, № 13. Сер. техн. наук, вып. 3.