

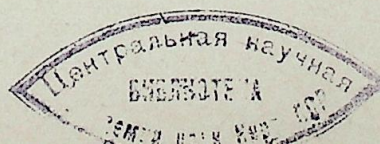
# ИЗВЕСТИЯ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

СЕРИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

Год основания журнала 1957 Год основания серии 1963	Периодичность журнала 15 номеров в год Периодичность серии 3 номера в год	№ 13 (298) вып. 3	Октябрь 1978
--	--	----------------------	-----------------

## СОДЕРЖАНИЕ

М. Ф. Жуков, Н. П. Козлов, А. С. Аньшаков, А. В. Пустогаров, Г.-Н. Б. Дандарон, В. И. Хвестюк. Исследования термоэмиссионных катодов	3
Б. А. Урюков. Вероятностная модель электрической дуги в турбулентном потоке	21
Т. С. Мельникова, В. В. Пикалов. Измерение локальных температур нестационарной асимметричной дуги	26
Ю. Е. Филиппов, Ю. П. Малков. Исследование дугового пористого термокатода	32
М. П. Стронгин, И. Я. Яцкарь. Численное исследование нестационарной электрической дуги	37
А. Д. Лебедев, В. И. Назарук, В. А. Гапонов. Некоторые аспекты гармонического анализа пульсаций «турбулентной» дуги	42
В. М. Батенин. Возможности СВЧ-метода генерации плазмы	46
И. А. Горбань, Ю. В. Липовцев. Конечно-разностное решение нестационарных краевых задач лучисто-кондуктивного теплообмена и оценка точности двухпоточкового приближения для конденсированных сред	51
Э. П. Волчков, С. Ю. Спотарь, В. И. Терехов. Тепломассообмен в неизотермическом турбулентном пограничном слое с положительным градиентом давления	60
Ю. В. Немировский, Я. Л. Хейнлоо. Локально-вихревой подход при описании вращательно-неизотропных турбулентных потоков. I. Основные уравнения	66
Ю. В. Немировский, Я. Л. Хейнлоо. Локально-вихревой подход при описании вращательно-неизотропных турбулентных потоков. II. Турбулентные течения в плоском канале, в круглой трубе и между вращающимися цилиндрами	74
М. Д. Бродецкий, А. И. Максимов, А. М. Харитонов. Методика экспериментальных исследований аэродинамической интерференции небольших надстроек с несущей поверхностью	81
А. М. Блохин, Е. И. Роменский. Устойчивость предельного стационарного решения при обтекании кругового конуса	87
О. Н. Лебедев, О. П. Солоненко. Расчет нестационарной турбулентной двухфазной струи распыленной жидкости	98
Б. Ш. Альбазаров. Геометрические характеристики сверхзвуковой недорасширенной струи	107
В. П. Зайцев. Расчет обтекания прямой решетки произвольных профилей стационарным потоком газа	112
Н. Д. Демиденко. Оптимизация системы контроля управляемых технологических процессов теплообмена	118
С. И. Вашуков, В. В. Марусин. Некоторые вопросы моделирования ВЧ-разряда	127
А. Н. Валиуллин, В. И. Паасонен, Н. Е. Сапунов, Р. И. Сафин. Расчет теплового режима ледопородных емкостей в фильтрующих пластах	140
А. А. Кирияненко. Исследование вязкости разбавленных растворов полиэтиленоксида	147
И. М. Грач. Метод расчета распределения потенциала вдоль оси симметрии поля	150
А. Х. Каложный, Ю. В. Соколов. Исследование установившихся и квазиустановившихся послеаварийных режимов с учетом динамики частоты	158
Б. И. Ковалев, А. К. Милевский. Влияние поверхностного эффекта в земле на восстанавливающиеся напряжения при отключении удаленных коротких замыканий	163
Ц. Т. Жанаев, Т. Б. Заславская. Уравнения параметров режима в промежуточных точках электропередачи	169



ИЗВЕСТИЯ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

Главный редактор журнала член-кор. М. Ф. Жуков

Заместитель главного редактора д-р физ.-мат. наук В. Г. Дулов

РЕДАКЦИОННАЯ СЕРИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

Ответственный редактор серии чл.-кор. М. Ф. Жуков

Чл.-кор. О. Ф. Васильев, д-р техн. наук Б. Н. Девятов, д-р физ.-мат. наук В. Г. Дулов, чл.-кор. Н. А. Желтухин (зам. ответственного редактора), д-р техн. наук В. Е. Накоряков, д-р техн. наук Н. А. Рубцов (ответственный секретарь серии), д-р техн. наук Б. А. Урюков, д-р техн. наук В. К. Щербаков

Адрес редакции: 630099, Новосибирск, 99, Советская, 18, комн. 331.  
Тел. 22-00-44.

УДК 533.924

М. Ф. ЖУКОВ, Н. П. КОЗЛОВ, А. С. АНЬШАКОВ,  
А. В. ПУСТОГАРОВ, Г.-Н. Б. ДАНДАРОН, В. И. ХВЕСЮК

ИССЛЕДОВАНИЯ ТЕРМОЭМИССИОННЫХ КАТОДОВ

В последние годы ведется интенсивное исследование катодных процессов электрических дуг. Интерес к ним вызван следующими обстоятельствами. С научной точки зрения катодные процессы представляют собой сложный и многоплановый раздел фундаментальной проблемы взаимодействия низкотемпературной плазмы с твердой стенкой. Практическая же необходимость изучения катодных процессов диктуется тем, что ресурс — одна из важнейших характеристик работы электродуговых устройств — часто определяется эрозийной стойкостью катода.

Из-за сложности и многообразия процессов, происходящих в приэлектродных областях, и трудностей экспериментального исследования их локальных характеристик в настоящее время не совсем ясны механизмы приэлектродных процессов. Особенно это относится к дуговому разряду с «холодным» катодом, когда на его поверхности наблюдаются быстроперемещающиеся пятна. Значительно подробнее исследованы дуги с так называемыми «термокатодами».

Названия «холодные» и «горячие», или «термические», катоды условны и своим происхождением обязаны представлениям о механизме эмиссии в разных типах дугового разряда. В действительности даже в дугах с нестационарными пятнами температура катода в зоне пятна достигает значений, при которых термоэмиссия нельзя пренебречь. Поэтому ниже под «термокатодами» будем понимать такие электроды, в прикатодных областях которых процессы развиваются в основном в газе, а под «холодными» — такие катоды, когда эти процессы происходят в парах материала электрода. Следует заметить, что данное определение также недостаточно полно отражает основные особенности различных катодов. Так, например, на катодах из материалов с низкой упругостью пара даже при горении дуг с нестационарными пятнами процессы определяются совокупностью явлений в газе и парах металла.

Несмотря на большое количество экспериментальных и теоретических работ, физическая сущность приэлектродных процессов раскрыта недостаточно полно. Такое положение объясняется, во-первых, большими трудностями экспериментального и теоретического исследования катодных процессов, во-вторых, отрывочным характером большинства работ, посвященных катодным процессам. Так, почти нет экспериментальных работ по выявлению наиболее общих закономерностей катодных процессов. Теоретические работы главным образом посвящены качественному изучению тех или иных сторон катодных процессов. Мало работ, в которых проблема ставилась бы комплексно с привлечением современной вычислительной техники. И совсем отсутствуют глубокие экспериментально-теоретические исследования.

С целью развития теории и расширения наших представлений о катодных процессах необходимо широко применять численные расчеты физических моделей на ЭВМ, которые заменяют трудновыполнимые эксперименты, проводить комплексные эксперименты с одновременным контролем и фиксацией многих характеристик прикатодной области, вскрывающие наиболее общие закономерности внутреннего механизма объекта.

Цель данной работы — обобщение наиболее интересных результатов экспериментальных и теоретических исследований термоэмиссионных катодов, что позволит более четко представить проблему в целом и наметить пути дальнейшего исследования.

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Экстремальные условия, реализующиеся в прикатодной зоне разряда, ограничивают возможность постановки эксперимента для изучения области в непосредственной близости от поверхности катода. Поэтому исследователи вынуждены изучать лишь ее интегральные характеристики. При этом основная информация о явлениях в прикатодной зоне проявляется в виде реакции той или иной ее интегральной характеристики на изменение параметров разряда. В качестве основных обычно принимают пять характеристик прикатодной области дуги, которые из них достаточно надежно могут быть определены из эксперимента. Это — распределение температур по катоду  $T$ , плотность тока на поверхности катода  $j$ , тепловой поток в катод  $Q$ , удельная (на единицу заряда) эрозия  $G$  и прикатодное падение потенциала  $u_k$ . Важность изучения перечисленных характеристик очевидна как с научных, так и с практических позиций. Действительно, прикатодное падение потенциала  $u_k$  обеспечивает всю энергетику прикатодной области. При этом все физические модели и теоретические расчеты, как будет показано ниже, базируются или же начинаются с выяснения механизма установления электрического поля перед катодом. С этой точки зрения важно знать характер распределения электрического поля перед катодом. Представление о характере прикатодных процессов позволяют получить также данные по плотности тока на катод  $j$ . От температуры сильно зависят многие процессы как на поверхности, так и внутри катода: эмиссия электронов, сорбция и испарение, процессы рекристаллизации, диффузия присадок и т. д. Величины  $Q$  и  $G$  характеризуют процессы тепломассопереноса в прикатодной области и определяют требования к системе охлаждения и ресурсу непрерывной работы катода.

Прикатодное падение потенциала. Зондовые измерения распределения электрического поля в дуге позволили выявить три основные зоны падения напряжения: вблизи электродов, получившие название катодного и анодного падений потенциалов, и на столбе дуги. Резкое изменение потенциала перед катодом впервые объяснено в работах Ленгмюра и развито затем в работах Маккоуна. Суть объяснения заключается в том, что за счет различия в подвижностях электронов и ионов перед катодом образуется нескомпенсированный объемный заряд ионов и этот слой приводит к резкому изменению потенциала в зоне катода. По данной модели протяженность объемного заряда меньше длины свободного пробега частиц. Это позволяет проводить измерения потенциала либо распределение  $u(z)$  перед катодом и путем экстраполяции полученных данных к поверхности находить величину  $u_k$ .

Полезно применение зондовой диагностики. Однако следует отметить, что использование стационарных зондов для измерений в плот-

ной плазме встречает определенные трудности, а при измерении сильноточных разрядов высокого давления практически невозможно. Поэтому в литературе встречаются лишь отрывочные данные по  $u_k$ , полученные разными методами, например, с использованием подвижного зонда. Измеренные величины прикатодного падения в азотной дуге с вольфрамовым катодом в диапазоне токов от 50 до 200 А составляют  $7 \pm 2$  В [1], при 200 А в угольной дуге  $u_k = 3 \pm 1$  В [2], в ксеноновых дугах высокого давления  $u_k$  обнаруживает тенденцию к уменьшению с ростом давления [3, 4]. При увеличении тока дуги  $u_k$  также уменьшается, что иллюстрируется графиком на рис. 1. Для более детального анализа необходимы данные по  $u_k$ , полученные в разных условиях горения дуги, в широком диапазоне изменения параметров разряда.

Температура катода. Измерение распределения температуры по поверхности катода в связи с большими градиентами температур в зоне привязки дуги, изменением микрорельефа поверхности и агрегатного состояния материала, влияния излучения плазмы и т. д. встречает значительные трудности. Их обычно обходят одним из следующих методов: а) измерения проводят вне пределов привязки дуги, приравнявая затем температуры на границе пятна и внутри его; б) применяют специальные светофильтры с узкой полосой пропускания, где излучением плазмы можно пренебречь; в) используют метод отключения дуги (отсечки тока), при котором за время порядка  $(5-10) \cdot 10^{-6}$  с излучение плазмы падает до нуля.

Первый из указанных методов применим в тех случаях, когда градиенты температур у границы привязки малы. Второй — если удастся отыскать соответствующие окна в спектре частот, где плазма не излучает. Наконец, третий метод — при достаточно малом времени охлаждения плазмы. Отметим также особый случай, когда температуру катода, изготовленного из вольфрамовой фольги, определяют с его тыльной стороны. При этом излучение плазмы полностью экранируется самим катодом.

Рассмотрим наиболее интересные закономерности, которые наблюдаются в эксперименте. Например, по данным [4, 5], температура катода вне зоны привязки дуги обычно растет с ростом тока. Характер изменения температуры в этом случае приведен на рис. 2. В работе [6] определена зависимость температуры катода от давления окружающей среды (рис. 3). Следует заметить, что из полученных данных трудно сделать какие-либо выводы, поскольку диапазон изменения давления незначителен, и в силу этого характер прикатодных процессов остается практически постоянным. Как уже указывалось, вышеприведенные измерения сделаны вне зоны привязки дуги.

Несомненно, большой интерес представляет характер распределения температуры в самой зоне привязки дуги. Распределение температуры по рабочей поверхности катода показано на рис. 4. Кривые 1 и 2 получены в условиях горения дуги на катодах разных геометрических размеров (кривая 1 —  $d_k = 2 \cdot 10^{-3}$  м и  $l_k = 2 \cdot 10^{-3}$  м, кривая 2 —  $d_k = 4 \cdot 10^{-3}$  м и  $l_k = 15 \cdot 10^{-3}$  м). Как видно, уменьшение термического сопротивления катода приводит к контрагированию зоны привязки дуги к электроду. В результате температура на оси катода значительно превышает температуру плавления материала. Об увеличении температуры рабочей поверхности катода с уменьшением длины его выступающей части свидетельствуют данные, полученные методом отключения дуги (рис. 5). В ряде работ, например [7], описаны немонотонные распределения температуры по радиусу с максимумами на некотором расстоянии от оси.

Подобные распределения температуры обнаружены также по боковой поверхности катода [8, 9]. По данным этих работ, максимум

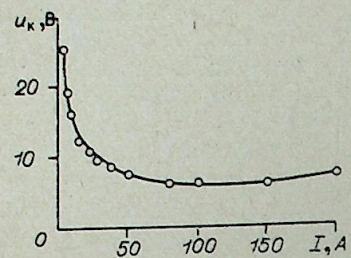


Рис. 1. Зависимость прикатодного падения потенциала от тока дуги в аргоне [1].

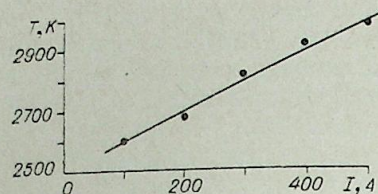


Рис. 2. Зависимость температуры катода от тока дуги.  $P = 510$  тор [5].

Ar: 1 — 600, 2 — 800 А;  $N_2$ : 3 — 400, 4 — 600, 5 — 800, 6 — 1000 А.

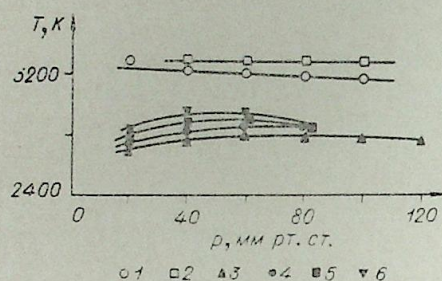


Рис. 3. Зависимость температуры поверхности катода от давления [6].

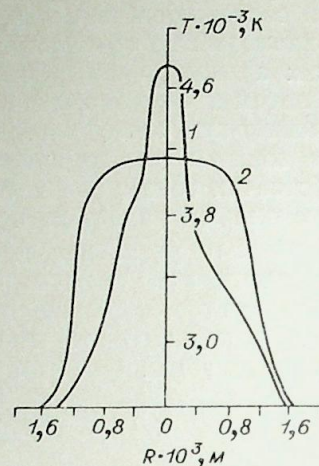


Рис. 4. Радиальное распределение температуры по торцу вольфрамового катода.  $I = 150$  А. Рабочий газ — гелий.

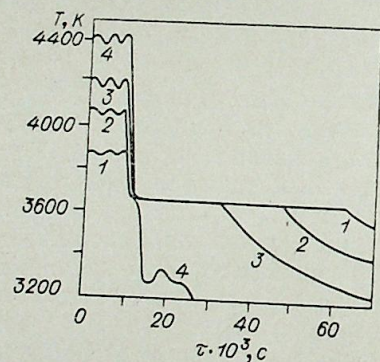


Рис. 5. Измерение температуры катода при отключении тока.

$I = 150$  А,  $d_k = 4 \cdot 10^{-3}$  м. Рабочий газ — гелий. 1 —  $l_k = 15 \cdot 10^{-3}$  м; 2 —  $l_k = 10 \cdot 10^{-3}$  м; 3 —  $l_k = 8 \cdot 10^{-3}$  м; 4 —  $l_k = 4 \cdot 10^{-3}$  м.

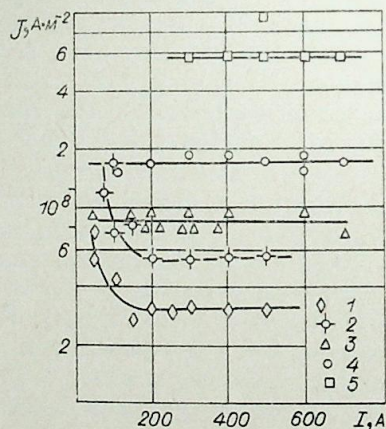


Рис. 6. Зависимость плотности тока на вольфрамовом катоде от тока дуги.  $d_k = 5 \cdot 10^{-3}$  м.

1 —  $l_k = 6 \cdot 10^{-2}$  м, газ Ar; 2 —  $l_k = 6 \cdot 10^{-2}$  м, газ  $N_2$ ; 3 —  $l_k = 0$ , газ Ar; 4 —  $l_k = 0$ , газ  $N_2$ ; 5 —  $l_k = 0$ , газ  $H_2$ .

температуры достигается на некотором расстоянии от рабочей поверхности катода. Причиной такого распределения температур является значительное джоулево тепловыделение внутри катода и сильное эмиссионное охлаждение его в месте привязки дуги [8, 10]. Отдельные данные по распределению температуры в зоне привязки дуги к угольному катоду [11] дают величину  $T$  порядка  $3200 \div 4000$  К при токе около 400 А.

Таким образом, на основе экспериментальных данных можно сделать следующие выводы: а) с увеличением тока температура катода растет; б) при больших токах джоулево тепловыделение в твердом теле оказывает значительное влияние на профиль распределения температуры по оси и радиусу катода; в) изменение геометрических размеров катода и тем самым условий охлаждения зоны привязки дуги приводит к изменению температуры и характера ее распределения по поверхности.

Плотность тока. Надежное экспериментальное определение плотности тока является трудной задачей. Сложность состоит в определении истинной площади привязки дуги к поверхности электрода (метод автографов) или площади сечения столба дуги, непосредственно примыкающего к поверхности (по световому диаметру).

В основе вышеназванных методов лежит предположение о равномерном распределении плотности тока в прикатодной области дуги. При этом метод автографов позволяет оценить величину плотности тока снизу, поскольку размеры термического воздействия дуги больше размеров прикатодной области, а метод, основанный на измерении светового диаметра, — сверху, потому что размеры светящейся зоны во многом определяются выбором метода измерения и оказываются меньше истинных размеров исследуемой области.

На рис. 6 приведена зависимость плотности тока от тока дуги. Катодами служили вольфрамовые стержни разной длины, рабочая среда — аргон, азот и водород. С ростом длины выступающей части катода  $l_k$  и с увеличением тока при постоянной длине ( $l_k = 6 \cdot 10^{-2}$  м) плотность тока  $j$  уменьшается. В азоте и водороде плотность тока выше, чем в аргоне. Влияние длины выступающей части катода на  $j$  представлено на рис. 7. Зависимости получены как методом автографа, так и по световому диаметру. При малых длинах выступающей части катода значения плотности тока, полученные двумя методами, сильно различаются, но общая тенденция увеличения  $j$  с уменьшением  $l_k$  (усиление охлаждения катода) сохраняется.

На рис. 8 приведены зависимости плотности тока на катоде от давления в аргоне и водороде [6]. В аргоне плотность тока в исследованном диапазоне его изменения практически не зависит от силы тока, что качественно согласуется с данными, приведенными на рис. 6. Литературные данные по плотности тока в водороде в зависимости от силы тока различны (см. рис. 6 и 8). По-видимому, разногласие объясняется специфическими условиями проведения экспериментов. Плотности тока на вольфрамовом катоде в аргоне и азоте линейно зависят от давления окружающей среды.

Широкое распространение получил метод определения плотности тока по яркосветящейся зоне на поверхности электрода, которая может и не совпадать с зоной свечения плазмы. Размеры яркосветящейся зоны определяются косвенно по величине проекции ее изображения на экран [12, 13]. В некоторых случаях удается определить не только границу пятна, но и распределение температуры внутри него, что позволяет расчетным путем найти распределение плотности тока по катоду. При этом очевидно, что характер распределения  $j = j(R)$  должен совпадать с распределением  $T = T(R)$  (см. рис. 4).

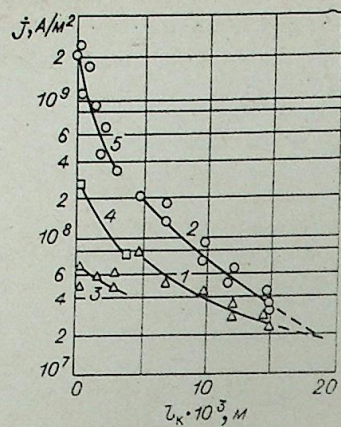


Рис. 7. Зависимость плотности тока от длины вольфрамового катода и диаметра при  $I=150$  А в гелии. 1, 3 — определена по методу автографов, 2, 5 — по свечению плазмы; 4 — по полю температуры;

1, 2 —  $l_k < 5 \cdot 10^{-3}$  м,  $d_k = 4 \cdot 10^{-3}$  м; 3 —  $l_k < 5 \cdot 10^{-3}$  м,  $d_k = 2 \cdot 10^{-3}$  м.

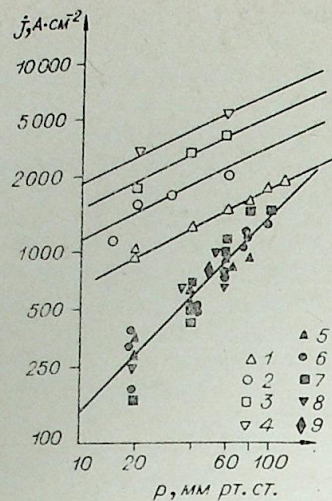


Рис. 8. Зависимость плотности тока на катоде от давлений [6].

$H_2$ : 1 — 400, 2 — 600, 3 — 800, 4 — 1000 А; Ar: 5 — 400, 6 — 600, 7 — 800, 8 — 1000, 9 — 1200 А.

Распределение плотности тока на электроде можно также найти по плотности тока в сечении столба дуги вблизи поверхности. Хотя точность рассматриваемого метода возрастает с приближением к поверхности электрода, но при этом усложняется определение  $T(R)$  и радиального распределения электропроводности плазмы  $\sigma(R)$  в связи с отклонением от ЛТР в прикатодной зоне. На рис. 9 представлено распределение температуры по радиусу и рассчитано по этим данным распределение плотности тока в плазме на расстоянии  $0,2 \cdot 10^{-3}$  м от поверхности стержневого вольфрамового катода диаметром  $3 \cdot 10^{-3}$  и длиной  $25 \cdot 10^{-3}$  м с тепловым «пережатием» на расстоянии  $3 \cdot 10^{-3}$  м от торца [14]. При измерении радиального распределения температуры в данном эксперименте предполагались осевая симметрия, отсутствие реабсорбции излучения и наличие ЛТР в исследуемой зоне.

Представляет интерес совместный анализ экспериментальных и расчетных данных по температуре и плотности тока на вольфрамовых катодах. На рис. 10 приведены зависимости плотности тока от температуры катода, полученные расчетным путем (по уравнению Ричардсона — Дешмена) при значении постоянной Ричардсона  $A = 120 \cdot 10^4$  А·м<sup>-2</sup> К<sup>-2</sup> и без учета эффекта Шоттки (кривые 1—6). Здесь же представлены данные по плотности тока, когда одновременно удавалось измерить и температуру катода. Несколько необычный характер зависимости  $j=j(T)$  для катодов из торированного (ВТ-15) и лантанированного (ВЛ-10) вольфрама объясняется тем, что в процессе работы происходит интенсивная диффузия легкоионизирующихся активирующих присадок из глубоких слоев к поверхности металла и их испарение. Это приводит сначала к обеднению металла активатором, а через некоторое время и к полному его исчезновению в прилегающих к поверхности слоях. С этого момента эмиссионные характеристики в прикатодной области уже определяются величиной работы выхода чистого металла.

Таким образом, в зависимости от геометрии электрода и условий его охлаждения плотность тока на вольфрамовом катоде при горении

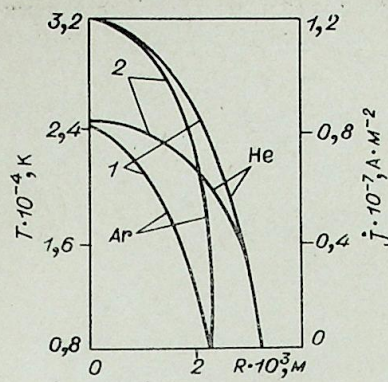


Рис. 9. Радиальное распределение температуры  $T$  (1) и плотности тока  $j$  (2) в плазме на расстоянии  $0,2 \cdot 10^{-3}$  м от поверхности катода.  $I=150$  А.

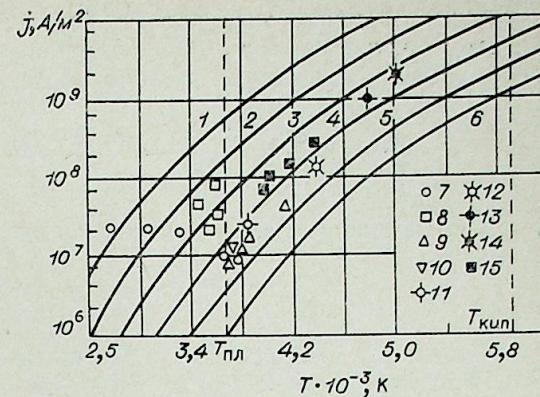


Рис. 10. Зависимость плотности тока от температуры катода.

Расчетные зависимости: 1 —  $\phi=3,2$  эВ; 2 — 3,6 эВ; 3 — 4,0 эВ; 4 — 4,4 эВ; 5 — 4,8 эВ; 6 — 5,2 эВ; Экспериментальные данные: 7 — ВТ — 15 В He; 8 — ВЛ — 10 В Ar; 9, 12 — W в He; 10 — W в Ar; 11 — W в  $H_2$ ; 13 — W в He ( $d_k = 2 \cdot 10^{-3}$  м,  $l_k = 2 \cdot 10^{-3}$  м); 14 — W в He ( $d_k = 2 \cdot 10^{-3}$  м,  $l_k = 0$ ), 15 — W.

дуги в гелиевой среде и токе дуги  $I=150$  А изменяется от  $8 \cdot 10^6$  до  $2 \cdot 10^9$  А·м<sup>-2</sup>. При этом температура рабочей поверхности катода повышается до  $5 \cdot 10^3$  К. Сравнение экспериментальных данных с расчетными свидетельствует о том, что эмиссия электронов в основном определяется законом Ричардсона — Дешмена. Однако нельзя делать окончательного вывода из приведенных результатов о законе эмиссии электронов, так как постоянная Ричардсона и работа выхода могут изменяться при изменении температуры и агрегатного состояния материала электрода. Это подтверждается в работе [15], в которой отмечено отклонение механизма выхода электронов от термоэмиссионного механизма в дуговом разряде низкого давления. В настоящее время «аномальная» эмиссия электронов исследована слабо. Поэтому ограничимся только упоминанием о ней.

На основе выполненных исследований можно сделать следующие выводы: 1) плотность тока на катоде растет с ростом давления окружающей среды; 2) уменьшение длины выступающей части катода, т. е. усиление охлаждения катода, приводит к росту плотности тока; 3) плотность тока в аргоне при прочих равных условиях меньше, чем в азоте, а в азоте меньше, чем в водороде.

Тепловой поток. Тепловой поток в катод в основном определяется калориметрированием охлаждающей воды. В ряде работ, например [16], приведены данные калориметрических измерений тепловых потоков через охлаждаемый торец вольфрамовых катодов плазменных горелок. На рис. 11 показана зависимость теплового потока через охлаждаемый торец катода от тока дуги для разных геометрических размеров катода. Экспериментально доказано, что расход газа оказывает слабое влияние на величину теплового потока, а геометрические размеры катода являются определяющими. Данные рис. 1 характеризуют количество тепла, поступающего через охлаждаемый конец стержня, и отличаются от теплового потока через зону привязки дуги, что связано с внутренним джоулевым тепловыделением. Влияние на величину  $Q$  различных процессов теплообмена, в том числе джоулева тепла, интересно проследить на примере определения теплового потока в катод экспериментально-теоретическим методом.

Так, в работе [4] тепловой поток в катод через пятно дуги найден расчетным путем. При этом использовалось лишь распределение тем-

пературы по длине электрода, найденное из эксперимента. Для стержневого электрода достаточно большой относительной длины уравнение теплопроводности можно записать в виде [17]

$$\frac{d}{dz} \left( \lambda \frac{dT}{dz} \right) + \frac{16\rho I^2}{\pi^2 d_K^4} - \frac{4\alpha(T-T_0)}{d_K} - \frac{4\varepsilon\sigma(T^4 - T_0^4)}{d_K} = 0.$$

Граничные условия для данного случая таковы:

$$z = z_1, T = T_1; z = z_2, T = T_2.$$

Расчет проводился для стержневого лантанированного катода ВЛ-10 диаметром  $d_K = 1,9 \cdot 10^{-3}$  м и длиной  $l_K = 25 \cdot 10^{-3}$  м (рис. 12). Рабочая среда — аргон. Из расчета следует, что тепловой поток в направлении к холодному концу (кривая 4) возрастает, т. е. тепловой поток через зону привязки дуги может быть меньше, чем калориметрируемый в сечении его заделки в охлаждаемый корпус (держатель). Однако температура стержня  $T$  вдоль его длины в направлении к холодному концу заметно уменьшается. Данный метод позволяет провести детальный анализ составляющих теплового баланса и оценить их вклад в общий баланс энергии. В работе [14] приведены данные по удельному тепловому потоку в вольфрамовый катод в зависимости от длины выступающей части стержня (рис. 13) для двух диаметров катода. Здесь тепловой поток определялся калориметрированием, а размеры зоны привязки дуги — по световому диаметру. Величина удельного теплового потока в катод уменьшается с ростом длины выступающей части электрода. Аналогичные результаты получены также и в работе [18].

На рис. 14 приведены данные по тепловому потоку в стержневой катод в зависимости от тока дуги в аргоне. Аналогичные данные получены для других газовых сред. В процессе экспериментов были измерены конвективная и лучистая составляющие теплового потока. Джоулево тепловыделение в объеме стержня рассчитывалось по уравнению теплопроводности, приведенному выше. Штриховые кривые на рис. 14 означают предельное состояние поверхности катода, когда наступает плавление металла. Они также получены расчетным путем. При токах больше 100 А тепловой поток в катод имеет практически линейную зависимость от тока разряда. Поэтому можно пользоваться так называемым вольтовым эквивалентом теплового потока  $u_0$  как постоянной величиной. Величина теплового потока уменьшается с рос-

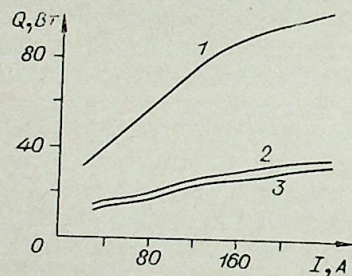


Рис. 11. Зависимость теплового потока в катод от тока дуги.  $l_K = 10 \cdot 10^{-3}$  м, газ — аргон. 1 —  $d_K = 10 \cdot 10^{-3}$  м, 2 —  $d_K = 6 \cdot 10^{-3}$  м, 3 —  $d_K = 2 \cdot 10^{-3}$  м.

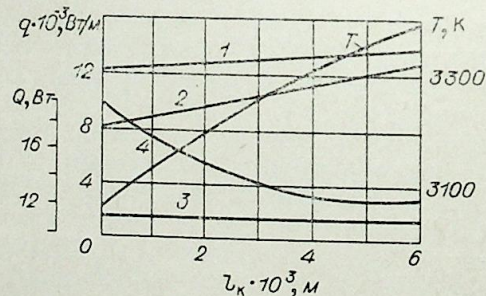


Рис. 12. Тепловой баланс термоэлектрода. Газ — аргон,  $I = 150$  А,  $d_K = 1,5 \cdot 10^{-3}$  м,  $l_K = 25 \cdot 10^{-3}$  м. 1, 2, 3 — внутреннее тепловыделение на единицу длины: лучистого потока энергии, конвективного потока соответственно; 4 — кондуктивный поток тепла  $Q$ .

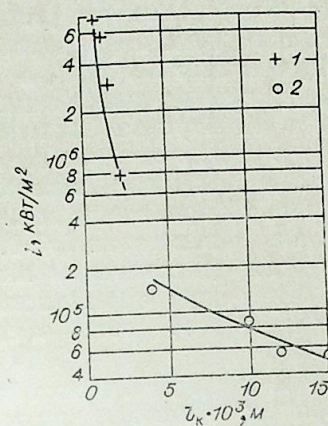


Рис. 13. Зависимость удельного теплового потока в вольфрамовый катод от длины стержня. Газ — гелий,  $I = 150$  А. 1 —  $d_K = 2 \cdot 10^{-3}$  м; 2 —  $d_K = 4 \cdot 10^{-3}$  м.

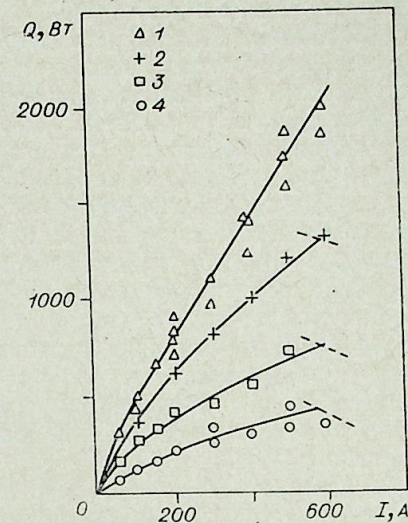


Рис. 14. Зависимость теплового потока в катод от тока дуги в аргоне;  $d_K = 5 \cdot 10^{-3}$  м. 1 —  $l_K = 0$ ; 2 —  $6 \cdot 10^{-3}$  м; 3 —  $12 \cdot 10^{-3}$  м; 4 —  $60 \cdot 10^{-3}$  м.

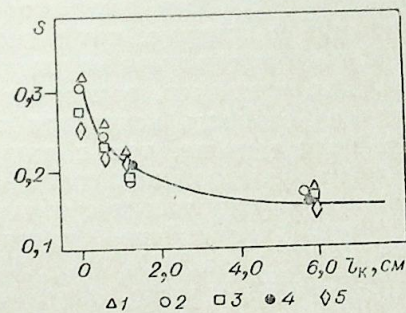


Рис. 15. Зависимость доли ионного тока от длины вольфрамового стержня. 1 —  $I = 100$  А, 2 — 200 А, 3 — 300 А, 4 — 400 А, 5 — 500 А.

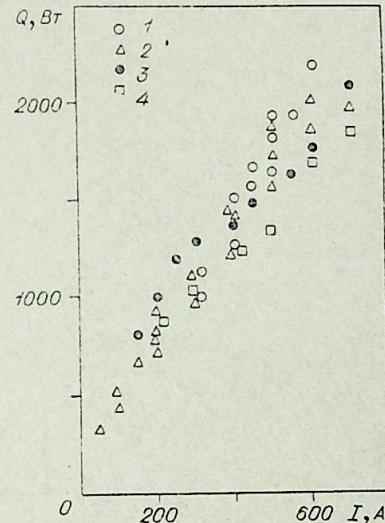


Рис. 16. Зависимость теплового потока в катод от тока дуги.  $l_K = 0$ . 1 — аргон, 2 — водород, 3 — гелий, 4 — азот.

том длины выступающей части  $l_k$ , так как растет термическое сопротивление катода. В силу этого для поддержания температуры рабочей поверхности на уровне, обеспечивающем термоэмиссию, необходимо меньшее количество тепла.

Предполагая, что основными переносчиками энергии на катод являются ионы, а поверхность охлаждается за счет эмиссии электронов, из данных по определению теплового потока легко рассчитать величину доли ионного тока  $S$ . Обработка данных по  $Q$  показала, что доля ионного тока сильно зависит от  $l_k$  и слабо от тока дуги и рода рабочего газа, в котором горит дуга (рис. 15). Эксперименты с аргоном, а также с гелием, азотом и водородом показывают, что величина теплового потока в молекулярных средах выше, чем в атомарных. Связано это, по-видимому, с тем, что при горении дуги в молекулярных газах на поверхности катода происходит рекомбинация молекул с выделением энергии, равной энергии диссоциации. На рис. 16 приведены зависимости  $Q=f(I)$  при горении дуги в вышеперечисленных газах  $l_k=0$ . Для молекулярных газов (азот и водород) энергия диссоциации вычитается из интегрального теплового потока. В этом случае независимо от рода газа можно говорить (с некоторой степенью точности) о единой зависимости  $Q=f(I)$ .

Это свидетельствует о том, что основные процессы, происходящие в прикатодных областях дуг (исключая процесс рекомбинации на поверхности) в разных газах, практически одинаковы.

**Эрозия электродов.** Механизмами эрозии материала катода могут быть: 1) распыление металла под действием бомбардировки его заряженными частицами, 2) испарение, 3) окисление и др. виды химического взаимодействия рабочего газа с металлом, 4) унос материала в капельном виде (разбрызгивание при кипении), 5) унос частиц металла вследствие потери механической прочности, 6) взрывообразный локальный выброс материала вследствие интенсивного газовыделения в объеме и т. д. В ряде случаев бывает затруднительно определить влияние того или иного механизма на эрозию электрода.

В условиях высоких температур, реализующихся на электродах плазмотронов, определяющую роль в эрозии, видимо, играют процессы испарения и окисления материала. Последнее связано с тем, что даже при использовании инертных газов в них всегда присутствуют в том или ином количестве кислород или его соединения.

Представление о скорости испарения и окисления дают графики, приведенные на рис. 17. Скорость испарения в вакууме, как известно, определяется законом Ленгмюра [19]. С ростом давления окружающей среды скорость испарения уменьшается. Так, например, при атмосферном давлении скорость испарения вольфрама в азоте меньше, чем в вакууме.

В кислородсодержащей среде вольфрам интенсивно окисляется с образованием соединений, неустойчивых при высокой температуре, типа  $WO_2$ ,  $WO_3$ ,  $WO_{2,9}$ ,  $WO_{2,72}$ . В результате этого даже незначительное содержание кислорода в рабочей среде существенно увеличивает скорость уноса материала электрода.

При испарительном (или окислительном) механизме эрозия в основном

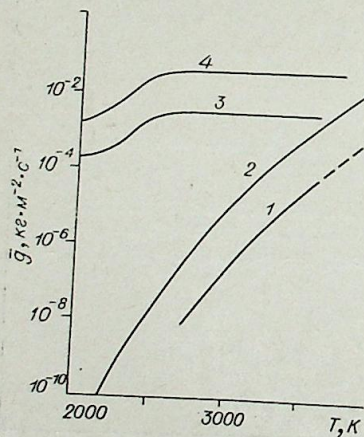


Рис. 17. Зависимость скорости испарения вольфрама от температуры.  
1 — азот,  $p=10^5$  Па; 2 — вакуум; 3 — кислород,  $p=1,3$  Па; 4 — кислород,  $p=133,3$  Па.

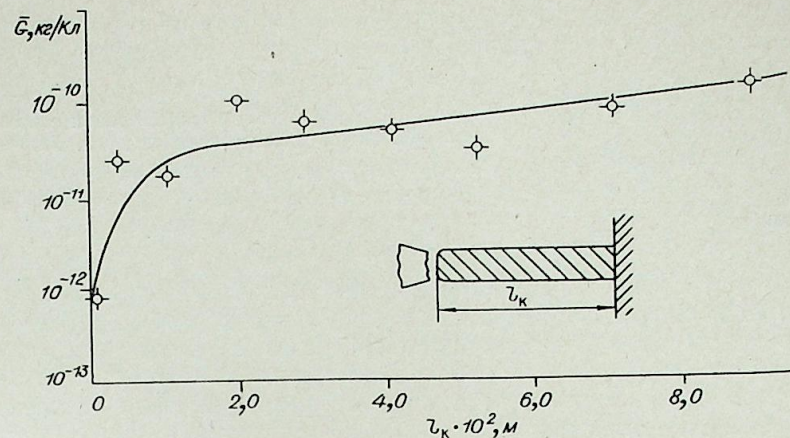


Рис. 18. Зависимость удельной эрозии вольфрамового катода от длины стержня. Газ — аргон,  $d_k=5 \cdot 10^{-3}$  м,  $I=680$  А.

определяется температурным режимом работы катода, который, в свою очередь, зависит (как было показано выше) от параметров разряда.

При длительной работе на величину эрозии начинают сильно влиять геометрические размеры катода. На рис. 18 представлена лишь зависимость  $\bar{G}=\bar{G}(l_k)$ , полученная при работе в аргоне. При  $l_k=0$  эрозия катода оказывается минимальной. В интервале  $0 \leq l_k < 1,5 \cdot 10^{-2}$  м с ростом  $l_k$  эрозия катода увеличивается значительно быстрее, чем при  $l_k > 1,5 \cdot 10^{-2}$  м. Увеличение  $\bar{G}$  с ростом  $l_k$  связано с увеличением поверхности катода, с которой происходит интенсивное испарение и окисление металла. Унос металла в этом случае происходит в основном с боковой поверхности электрода. Поэтому длина электрода, даже при длительном эксперименте (несколько часов), практически остается неизменной. Полученный результат легко объяснить, если справедлива гипотеза о циркуляции ионов металла в прикатодной зоне [20]. Суть ее заключается в следующем: испарившиеся атомы металла поступают в прикатодную зону и вследствие больших по сравнению с атомами рабочего газа сечений ионизации и под действием электрического поля возвращаются на поверхность электрода.

Высказанная гипотеза подтверждается результатами спектральных исследований. Так, по данным работы [14], несмотря на высокую температуру поверхности катода, близкую к температуре плавления, и, следовательно, большую скорость испарения в спектре излучения плазмы вблизи поверхности ( $\sim 5 \times 10^{-5}$  м), линии вольфрама не обнаруживаются.

Рис. 19 иллюстрирует не только зависимость удельной эрозии катода от диаметра вольфрамового стержня, но и существование некоторого оптимума по диаметру. Если диаметр катода меньше опти-

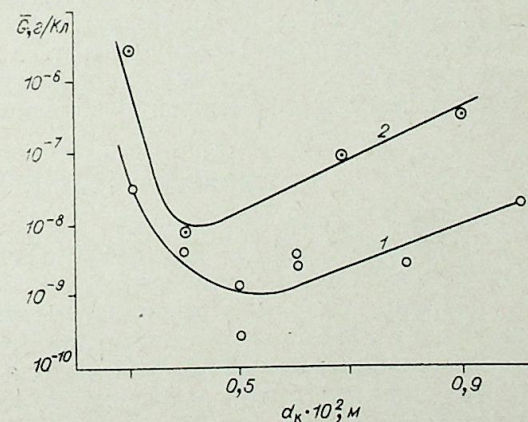


Рис. 19. Зависимость удельной эрозии катода от диаметра вольфрамового стержня,  $l_k=0$ .  
1 — водород,  $I=370 \pm 400$  А, 2 — азот,  $I=1000$  А.

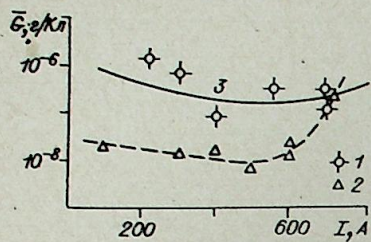


Рис. 20. Зависимость удельной эрозии стержневого вольфрамового катода от тока дуги. Газ — аргон.  
 1 —  $I_K = 6 \cdot 10^{-2}$  м,  $d_K = 0,5 \cdot 10^{-2}$  м; 2 —  $I_K = 1,5 \cdot 10^{-2}$  м,  $d_K = 0,4 \cdot 10^{-2}$ ; 3 — расчет:  $d_K = 0,5 \cdot 10^{-2}$  м,  $I_K = 6 \cdot 10^{-2}$  м.

мального, то рост эрозии связан вначале с увеличением удельного теплового потока в силу контрагирования разряда, а в дальнейшем — в связи с переходом дуги в нестационарный режим. Увеличение удельной эрозии при значениях  $d_K$ , больших оптимального, связано с повышением температуры поверхности катода в зоне привязки дуги к электроду из-за ухудшения теплоотвода.

Основные закономерности влияния тока дуги на эрозию стержневого катода при  $I_K > 0$  поясняются на рис. 20. Он также иллюстрирует наличие оптимума по току дуги. С ростом тока эрозия катода сначала немного уменьшается, затем достигает минимума и при дальнейшем увеличении тока вновь растет. Согласно [21], при малых токах дуги экспериментально измеренный удельный тепловой поток значительно превышает величину критического теплового потока, при котором поверхность катода должна расплавиться, что и объясняет поведение  $\bar{G} = \bar{G}(I)$  при токах, меньших оптимального. Увеличение эрозии при токах, больших оптимального, по-видимому, связано с ростом температуры, а также с выравниванием поля температуры по поверхности катода под действием джоулева тепловыделения и соответственно с ростом скорости испарения металла.

По-иному ведет себя вольфрамовый катод, заделанный заподлицо с держателем. Если размеры катода близки к оптимальным, то в пределах существующего разброса экспериментальных данных не удается обнаружить заметного влияния тока дуги на удельную эрозию. Следовательно, для заданного тока необходимо рассчитывать и проектировать отдельный катод, который может обеспечить минимальную эрозию и соответственно максимальный ресурс непрерывной работы.

Выше были кратко рассмотрены основные результаты экспериментальных исследований. Из них видно, что прикатодная зона дуги является динамической саморегулирующейся системой, т. е. при любом изменении параметров разряда, например тока дуги, длины выступающей части катода, рода газа и т. д., прикатодная область дуги как бы подстраивается под новые условия, и это проявляется в изменении интегральных характеристик рассматриваемой области. Так, усиление охлаждения поверхности катода, например, путем уменьшения его длины  $l_K$  приводит к контракции дуги и соответственно к росту температуры в зоне привязки разряда и т. д., что свидетельствует о тесной взаимосвязи всех явлений, происходящих как в самой прикатодной области, так и в плазме дуги, и в твердом теле.

#### ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

В ряде работ [22—26] было показано, что прикатодные процессы электрической дуги можно разделить на три взаимосвязанные группы:

- 1) процессы, происходящие внутри катода, — теплопроводность, джоулево тепловыделение, диффузия присадки и др.;
- 2) процессы на поверхности катода, — такие, например, как взаимодействие частиц с поверхностью, эмиссия электронов, нейтрализация частиц и т. д.;

3) процессы формирования пространственного заряда, движения частиц, их упругие и неупругие взаимодействия и другие процессы, происходящие вблизи поверхности катода.

К этим группам можно добавить еще одну группу явлений, происходящих в столбе дуги, примаикающем к прикатодной области.

В настоящее время теоретически изучаются как отдельные явления или некоторые их совокупности, так и катодные процессы в полной их взаимосвязи. Исследуем задачу полностью с учетом большинства известных процессов. В этом случае представляется возможным установить влияние на катодные процессы таких факторов, как давление и род газа, геометрия катода, свойства его материала и условия охлаждения. Такой общий подход позволит создать метод расчета оптимальных геометрических размеров катодного узла и условий его охлаждения и определить требования к материалу катода. Для дальнейшего уточнения общей системы уравнений необходимо расширение и углубление исследований отдельных явлений.

Совершенно очевидна целесообразность одновременного развития как упрощенных, так и более строгих методов расчета катодных процессов. При этом первые служат для оценки и создания упрощенных полуэмпирических методов. Проведение численных расчетов в сочетании с хорошо продуманными экспериментальными исследованиями позволит выявить неизвестные еще закономерности катодных процессов и вскрыть их глубинные механизмы. Учитывая сказанное, вначале изложим простую модель, а затем перейдем к полной системе уравнений.

В упрощенных моделях процессы в прикатодной области обычно учитываются с помощью простых интегральных соотношений [22—24, 26]. Такие теории отличаются простотой и вместе с тем весьма наглядно иллюстрируют влияние и роль отдельных катодных процессов, дают результаты, качественно согласующиеся с экспериментом.

Не вдаваясь в подробный обзор различных теорий такого типа, ограничимся лишь анализом их общей структуры. Для этого достаточно записать уравнения в простейшем виде, включая в них лишь наиболее важные члены. Подробная запись этих уравнений приведена в работе [10].

Уравнение теплопроводности без учета джоулева тепловыделения для определения поля температур в катоде записывается в виде

$$\nabla^2 T = 0. \quad (1)$$

Граничное условие в пределах зоны контакта электрода с дугой имеет вид

$$q = -\lambda \nabla T = S j (u_K + u_i) - j \varphi_{эфф}. \quad (2)$$

Здесь  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности материала катода;  $u_K$  — катодное падение потенциала;  $u_i$  — потенциал ионизации газа;  $\varphi_{эфф}$  — эффективная работа выхода.

Плотность тока эмиссии электронов на поверхности катода определяется по уравнению Ричардсона

$$(1-S) j = A T^2 \exp[-e \varphi_{эфф} / (kT)], \quad (3)$$

где  $(1-S)$  — доля электронного тока;  $j$  — полная плотность тока;  $A$  — постоянная Ричардсона. Плотность ионного тока в прикатодной области определяется по уравнению

$$S j = \frac{1}{4} e n_i v_i, \quad (4)$$

где  $n_i$ ,  $v_i$  — концентрация и тепловая скорость ионов у поверхности като-

да. Плотность тока  $j$  и площадь контакта дуги с катодом  $\Sigma$  находятся из соотношений

$$j = AT^2 \exp[-e\varphi_{эфф}/(kT)] + \frac{1}{4} en_i v_i, \quad (5)$$

$$I = j\Sigma. \quad (6)$$

Для расчета  $\varphi_{эфф} = \varphi - \sqrt{e^3 E}$  с учетом эффекта Шоттки используется уравнение Маккоуна

$$E^2 = 16\pi \left[ \left( \frac{M}{2e} \right)^{1/2} j_i + \left( \frac{m}{2e} \right)^{1/2} j_e \right] \sqrt{u_k}. \quad (7)$$

где  $m$  — масса электрона,  $M$  — масса иона. Катодное падение потенциала определяется из элементарного баланса энергии для электронов в прикатодной области [22]

$$(1-S)u_k = Su_i. \quad (8)$$

Как уже упоминалось, проведенные в работах [22—24] численные исследования показали, что подобные теории позволяют получать данные, которые качественно согласуются с экспериментальными данными. Поэтому упрощенные теории плодотворны для различного рода качественных оценок катодных процессов.

Однако при столь простой постановке задачи не удается ответить на ряд вопросов. Так, из системы (1)—(8) нельзя найти величину  $en_i v_i/4$ . Авторы определяют  $n_i$  и  $v_i$  по параметрам плазмы в столбе дуги [23, 24]. Эксперименты [27, 28] показывают существенное отличие параметров прикатодной плазмы от параметров в столбе дуги (например, отклонение от ЛТР). Далее, в простой теории не учитывается количественная зависимость процессов ионизации от энергии электронов, рода и давления газа и др. Например, конечный результат существенно зависит от того, какой тип ионизации — прямая или ступенчатая — является определяющим.

Таким образом, для развития строгих методов расчета необходимо более полно учитывать процессы, происходящие в прикатодной области. Соответствующие подходы развивались в работах [29—35].

Строгое решение задачи возможно на основе кинетических уравнений. Однако прямое решение их для всей прикатодной области встречает значительные трудности. Поэтому в теоретических работах используются различные модели, более или менее полно отражающие процессы в прикатодной области. Общим для таких работ является разделение области на два слоя: первый — слой избыточного пространственного заряда, второй — ионизационный слой, где плазма квазинейтральна [10, 34, 35].

В первом слое происходит формирование положительного пространственного заряда и ускорение электронов по направлению ко второму слою, а ионов — к катоду. В формировании пространственного заряда участвуют три группы частиц: электроны, эмитируемые катодом, ионы и электроны, поступающие из второго слоя. Для первого слоя задача сводится к решению кинетических уравнений для электронов и ионов и уравнения Пуассона. Интегрирование кинетических уравнений в приближении бесстолкновительного движения дают выражения для потоков частиц [36]. С учетом их уравнение Пуассона (считаем, что на поверхности катода потенциал  $u_k$  равен нулю) записывается в виде

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 4\pi \left[ j_i \sqrt{\frac{\pi M}{2kT_i}} \exp\left[\frac{e(u_k - u(x))}{kT_i}\right] \Phi^* \left( \sqrt{\frac{e(u_k - u(x))}{kT_i}} \right) - \right.$$

$$\left. - j_e^{\text{эм}} \sqrt{\frac{\pi m}{2kT_e}} \exp\left[\frac{eu(x)}{kT_e}\right] \Phi^* \left( \sqrt{\frac{eu(x)}{kT_e}} \right) - j_e^{\text{пл}} \sqrt{\frac{\pi m}{2kT_e}} \times \right. \\ \left. \times \exp\left[-\frac{e(u_k - u(x))}{kT_e}\right] \left[ 2 - \Phi^* \left( \sqrt{\frac{eu(x)}{kT_e}} \right) \right] \right]. \quad (9)$$

Здесь первое слагаемое — концентрация ионов; второе — электронов, эмиттированных катодом; третье — электронов, движущихся из второго слоя;  $T_e$ ,  $T_i$ ,  $T_k$  — температуры электронов, ионов и рабочей поверхности катода соответственно;  $u_k$  — катодное падение потенциала;  $\Phi^*(z) =$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-t^2} dt; \quad z = \sqrt{\frac{eu(x)}{kT_{e,i,k}}}$$

Уравнение (9) получено в предположении, что все попадающие на катод электроны поглощаются им. При  $T_e \neq 0$  и при условии, что все электроны отражаются катодом, последнее слагаемое обычно записывается в форме  $n_e^{\text{пл}} \exp\left[-\frac{e(u_k - u(x))}{kT_e}\right]$ . Заметим, что предельный переход в (9) при  $T_e, T_i, T_k \rightarrow 0$  позволяет существенно упростить уравнение, решение которого известно под названием уравнения Маккоуна [37].

Во втором слое происходит интенсивная ионизация и перераспределение доли ионного и электронного токов. Поэтому здесь необходим учет упругих и неупругих процессов взаимодействия частиц друг с другом. Прямое решение кинетических уравнений для этого слоя затруднительно. Для получения приближенного решения в таких случаях используется метод сведения каждого кинетического уравнения к системе уравнений моментов [29—32]. Первыми моментами функций распределения являются обычные уравнения газовой динамики.

Впервые использование таких моментных уравнений для описания процессов в ионизационном слое прикатодной области было проведено в работе [29]. Задача решалась для термоэмиссионного катода в диффузионном приближении. В этом случае, пренебрегая инерционными членами, уравнения движения частиц сводим к уравнениям потоков частиц. Кроме того, для всех компонент плазмы применены уравнения неразрывности и энергий. Отметим также работу [38], в которой диффузионное приближение использовано для вычисления ионного тока на катод. Подобный подход, но уже для «холодных» катодов, был предложен в работе [35].

Вблизи границы второго и первого слоев инерционные члены в уравнениях движения становятся сравнимыми с полевыми. Это заключение следует как из результатов расчета, приведенных в работе [29], так и из того факта, что во втором слое необходимо выполнение условия Бома [38] (так как  $T_e > T_i$  [39]). Ниже приводятся уравнения движения различных компонент плазмы с учетом инерционных членов. Для второго слоя вместо уравнений (4) и (7) необходимо записать систему уравнений неразрывности, движения и энергии для каждой компоненты плазмы в отдельности и уравнение состояния [30—33]:

$$\text{div } \vec{j}_e = \text{div } \vec{j}_i = \gamma n_a n_e - \alpha n_e^3, \quad (10)$$

$$m_\alpha (\vec{v}_\alpha \vec{\nabla}) \vec{v}_\alpha = z_\alpha e \vec{E} - \frac{\vec{\nabla} p_\alpha}{n_\alpha} - \sum_\beta \mu_{\alpha\beta} \nu_{\alpha\beta} (\vec{v}_\alpha - \vec{v}_\beta), \quad (11)$$

$$-\text{div} (\lambda \vec{\nabla} T_\alpha) + \frac{3}{2} k n_\alpha (\vec{v}_\alpha \vec{\nabla}) T_\alpha - z_\alpha e n_\alpha (\vec{v}_\alpha \vec{E}) + \frac{3}{2} k n_\alpha \sum_\beta \kappa_{\alpha\beta} \nu_{\alpha\beta} \times \\ \times (T_\alpha - T_\beta) + Q + \left( \frac{3}{2} k T_\alpha - u_i \right) \text{div } j_\alpha = 0; \quad (12)$$

$$\rho = k \sum_{\alpha} n_{\alpha} T_{\alpha}, \quad (13)$$

$$n_e = \sum_k z_n n_k.$$

Здесь  $\gamma, \alpha$  — коэффициенты ионизации и рекомбинации;  $\mu_{\alpha\beta} = \frac{m_{\alpha} m_{\beta}}{m_{\alpha} + m_{\beta}}$  — приведенная масса;  $\nu_{\alpha\beta}$  — частота столкновений;  $\kappa_{\alpha\beta} = \frac{2m_{\alpha} m_{\beta}}{m_{\alpha} + m_{\beta}}$  — коэффициент передачи энергии. В уравнении энергии (12) члены, учитывающие излучение  $Q$  и потерю энергии на ионизацию  $\left(\frac{3}{2} kT_{\alpha} - u_i\right) \operatorname{div} j_{\alpha}$ , записываются только для электронной компоненты.

Перечислим некоторые наиболее важные граничные условия, при которых должна решаться задача. На поверхности катода должно выполняться условие ионно-атомного баланса. Оно означает, что все поступающие на поверхность ионы нейтрализуются и покидают его в виде атомов. Это приводит к существенному отклонению плазмы от равновесного состояния, определяемого уравнением Саха.

На границе прикатодной области со столбом дуги ставится условие близости плазмы к равновесному состоянию

$$\frac{\gamma(T_K^0) n_{\alpha}^0 n_e^0 - \alpha(T_e^0) (n_e^0)^3}{\gamma(T_e^0) n_{\alpha}^0 n_e^0} = 0,05,$$

где индексом «0» обозначены значения параметров на границе со столбом дуги. Смысл этого граничного условия заключается в следующем. Как показали расчеты, равновесное состояние плазмы достигается только в столбе разряда, что соответствует результатам эксперимента [28]. Поэтому можно предположить, что в пределах прикатодной области нигде не достигается равновесное состояние. Средняя плотность тока на поверхности катода:

$$j_e = (1 - S) j = \frac{2\pi}{a^2} \int_0^a \left\{ AT^2(r) \exp\left(-\frac{e\varphi_{\text{эфф}}}{kT}\right) - j_e^{\text{обп}} \right\} r dr.$$

Здесь  $a$  — радиус катодного пятна. Величина  $a$  определяется из условия

$$I = [(1 - S) j + j_i] \pi a^2,$$

$j_i$  — средняя плотность ионного тока, поступающего на катод, равна

$$j_i = \frac{e}{4} n_i v_i.$$

Считая, что длина максвеллизации электронного пучка значительно меньше размера ионизационного слоя, можно потребовать выполнения следующего условия на границе первого и второго слоев:

$$-\lambda \frac{dT_e}{dx} \Big|_{1-2} = j_e u_1,$$

где  $u_1$  — падение потенциала в первом слое. Для атомов и ионов на этой же границе задается температура, равная средней температуре поверхности катода в пределах пятна. На границе со столбом также выполняется условие равенства температур  $T_e, T_i, T_a$  температуре

дуги —  $T^{\circ}$  [29]. Положение границы прикатодной области со столбом определяется из условия

$$\frac{(j_e)_0}{(j_i)_0} = \frac{S_0}{1 - S_0},$$

$S_0$  — доля электронного тока в столбе, определяемая из отношения подвижности ионов и электронов.

Требование, чтобы на одной границе  $T_e$  обращалось в  $T^{\circ}$ , а  $1 - S$  в  $S_0$ , приводит к однозначному определению величины  $u_1$ . Действительно,  $S(x)$  и  $T_e(x)$  выводятся из разных уравнений. Единственным параметром, варьируя который можно удовлетворить сформулированному требованию, является  $u_1$ , определяющее поток энергии на границе первого и второго слоев.

Наконец, процессы на границе прикатодной области с твердым телом учитываются с помощью решений уравнения теплопроводности совместно с уравнением баланса энергии в пределах катодного пятна [10]. При этом, в общем случае, уравнение теплопроводности должно решаться с учетом внутренних источников тепла.

Таким образом, в целом задача оказывается замкнутой. Решение такой системы уравнений позволяет подробно исследовать влияние различных внешних условий на катодные процессы. Некоторые результаты решения подобной системы уравнений приведены в работе [10].

В заключение необходимо отметить, что в теоретических моделях подчас приходится принимать достаточно грубые предположения. Они обусловлены сложностью процессов, происходящих в прикатодной области, и ограниченностью теоретических исследований по физике элементарных процессов взаимодействия частиц, вопросов кинетики, процессов взаимодействия твердого тела с частицами (заряженными, нейтральными и пр.), физики самой плазмы и т. д.

Экспериментальные исследования, как показано выше, оставляют желать лучшего в том смысле, что по их результатам можно составить лишь некоторое общее и весьма приближенное представление о прикатодных процессах.

Для углубления и расширения наших представлений об этом фундаментальном явлении необходимо более детальное систематизированное исследование процессов, происходящих в прикатодной области дуги, и совмещение натуральных экспериментов с численными.

Институт теплофизики  
СО АН СССР,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
16/IV 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Финкельнбург В., Меккер Г. Электрические дуги и термическая плазма. М., Изд-во иностр. литературы, 1961. 370 с.
2. Muller G., Finkelburg W. — Naturwiss., 1955, 10, 294—295.
3. Bauer A., Schulz P. — Z. Phys., 1954, 139, 197.
4. Пустогаров А. В. Экспериментальные исследования тугоплавких катодов плазмотронов. — В кн.: Экспериментальные исследования плазмотронов. Под ред. М. Ф. Жукова. Новосибирск, «Наука», 1977, с. 315—340.
5. Wood F. W., Beall R. A. Studies of High-Current Metallic Arc. Washington, 1965.
6. Hugel H., Krulle G. — Beitr. Plasmaphysik, 1969, Bd. 9, N 2.
7. Зиббер И. А., Абрамов В. А., Бортничук Н. И., Крутянский М. М. Температурное поле термоэмиссионного вольфрамового катода открытой плазменной дуги постоянного тока. — В кн.: Исследования в области промышленного электронагрева. М., 1975, с. 113—117. (Тр. ВНИИЭТО, вып. 7).
8. Дороднов А. М., Козлов Н. П., Помелов В. А. Об эффекте «электронного» охлаждения на термоэмиссионном дуговом катоде. — ТВТ, 1973, 11, № 4, с. 724—727.

Б. А. УРЮКОВ

ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ДУГИ  
В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

Изучение турбулентных электродуговых течений имеет большое практическое значение, так как в большинстве конкретных аппаратов электрическая дуга горит в условиях турбулентного течения газа. Со времени появления первых теоретических работ, посвященных расчету электрической дуги в турбулентных потоках [1—3], мало сделано в изучении внутренней структуры электродуговых течений. Исследователи в основном варьируют вид зависимостей эмпирических коэффициентов типа «длины пути смешения» или выражения для турбулентного переноса тепла [4—7], оставляя в стороне изучение эффектов взаимодействия гидродинамических характеристик потока и электродинамических свойств дуги. По-видимому, успехи будущих теоретических исследований лежат на путях изучения связей между пульсациями электромагнитных и гидродинамических параметров электродуговых потоков, учета собственных магнитных сил дуги, включения в рассмотрение статистических закономерностей колебаний столба дуги в потоке.

В данной работе предложена (больше физическая, нежели точная математическая) модель электрической дуги в потоке газа, учитывающая статистические свойства столба дуги, как источника джоулева нагрева потока.

Пусть в некоторый начальный момент времени определенный элемент дуги попадает в турбулентный моль достаточно большого поперечного размера (см. рисунок). Дуга движется вместе с моле, и ее развитие внутри моля длится до тех пор, пока моля не разрушится — интервал времени  $t'$ . В течение этого времени около дуги нарастает тепловой слой (область прогрета среды дугой), граница которого за время  $t_d$  достигает границы моля. От начала до этого момента  $t_d$  среда, окружающая моля, не «чувствует» существования дуги. Если время существования моля  $t'$  меньше  $t_d$ , то при распаде моля в поток выделяется энергия

$$\int_0^{t'} I E dt \text{ (на единицу длины дуги).}$$

Обычно свойства внешней цепи таковы, что сила тока слабо подвергается возмущениям и, следовательно, можно считать  $I \approx \text{const}$ . В этом случае количество энергии, выделенное дугой, определяется зависимостью  $E(t)$ . Если считать течение внутри моля слабым, для рас-

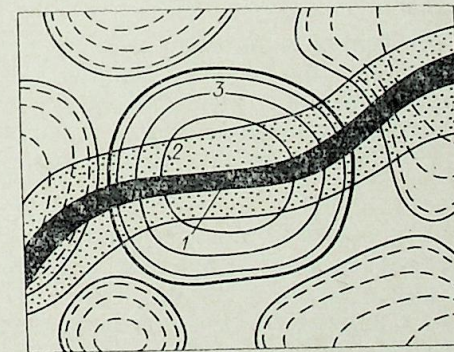


Схема дуги в турбулентном потоке.  
1 — столб дуги; 2 — тепловой слой около столба дуги; 3 — турбулентный моль.

9. Ando K., Nishikawa J. Studies on anode and cathode phenomena of TIG arc.— J. Jap. Weld. Soc., 1971, v. 40, p. 312.
10. Зимин А. М., Козлов Н. П., Хвесюк В. И. Теоретические исследования термомиссионных катодов.— В кн.: Приэлектродные процессы и эрозия электродов плазмотронов. Под ред. М. Ф. Жукова. Новосибирск, 1977, с. 7—40.
11. Hagenbach A. Der Elektrische Lichtbogen. Leipzig, 1924.
12. Ahlborn B. Zur Bestimmung von Temperatur und Geschwindigkeit der Plasmaströmung aus einem Plasmabrenner.— Z. Naturforsch., 1965, Bd 20a, N 3, S. 466—474.
13. Tuchman A., Enos G. Experiments to establish current-thermoionic-emitting cathodes.— Report N 68-16362. AVSSD-0043-67-RR, NASA American Research Center, Moffet Field, California, 1967.
14. Гаврющенко Б. С., Пустогаров А. В. Исследование электродов плазмотронов.— В кн.: Приэлектродные процессы и эрозия электродов плазмотронов. Под ред. М. Ф. Жукова. Новосибирск, 1977, с. 85—122.
15. Дороднов А. М. Анализ и исследование катодных процессов в сильноточном дуговом разряде.— В кн.: Плазменные ускорители. М., «Машиностроение», 1973, с. 157—179.
16. Мосиашвили О. Я., Суладзе Р. Н., Ерошев Ю. В. Тепловая нагрузка на вольфрамовый катод сжатой дуги.— Автоматическая сварка, 1966, № 11, с. 20—23.
17. Дандарон Г.-Н. Б., Урбах Э. К. Исследование теплового режима стержневого вольфрамового катода. Тез. докл. V Всес. конф. по генераторам низкотемпературной плазмы. Т. II. Новосибирск, 1972, с. 40—43.
18. Anshakov A. S., Dandaron G.-N. B., Zhukov M. F., Urbach E. K. XI Intern. Conf. of Phenomena in Ionized Gases. Praha, 1973, p. 87.
19. Колин Дж., Смителе. Вольфрам. М., Металлургияздат, 1958, 414 с.
20. Аньшаков А. С., Дандарон Г.-Н. Б., Жуков М. Ф., Урбах Э. К. Исследование эрозии стержневого вольфрамового катода. Тез. докл. VI Всес. конф. по генераторам низкотемпературной плазмы. Фрунзе, «Илим», 1974, с. 328—331.
21. Дандарон Г.-Н. Б. Исследование тепловых режимов работы и эрозии катодов. Автореф. канд. дис. Новосибирск, 1975.
22. Neumann W. Der Kathodenmechanismus von Hochdruckbogens.— Beitr. Plasma-physik, 1969, Bd 9, N 6, S. 499—526.
23. Мойжес Б. Я., Немчинский В. А. К теории дуги высокого давления на тугоплавком катоде.— ЖТФ, 1972, XIII, с. 1001—1009.
24. Мойжес Б. Я., Немчинский В. А. К теории дуги высокого давления на тугоплавком катоде. II.— ЖТФ, 1973, 43, с. 2309—2317.
25. Зимин А. М., Козлов Н. П., Хвесюк В. И. О взаимосвязи катодных процессов.— ЖТФ, 1973, 43, в. 6, с. 1248—1254.
26. Зимин А. М., Козлов Н. П., Хвесюк В. И. К расчету термомиссионного катода. Тез. докл. VI Всес. конф. по генераторам низкотемпературной плазмы. Фрунзе, «Илим», 1974, с. 301—304.
27. Гаврющенко Б. С., Кучеров Р. Я., Пустогаров А. В., Уколов В. В., Халбошин А. И. Исследование катода и близлежащей области дугового разряда в Ar и Ne.— ЖТФ, 1975, 45, № 10, с. 2119—2125.
28. Пятницкий Л. Н., Хаустович Г. П., Коробкин В. В. Распределение параметров плазмы по длине аргоновой дуги.— ТВТ, 1974, 12, № 4, с. 876—878.
29. Lee T. H., Greenwood A. N., Breingan W. D. A self consistent model for the cathode region of a high pressure arc. VII. Intern. Conf. on Phen. in Ionized Gases, Beograd, 1965, p. 670—679.
30. Алиевский М. Я., Жданов В. М. Уравнения переноса для неизотермической многосортной плазмы.— ПМТФ, 1963, № 5, с. 11—12.
31. Алиевский М. Я., Жданов В. М., Полянский В. А. Тензор вязких напряжений и тепловой поток в двухтемпературном частично ионизованном газе.— ПМТФ, 1964, № 3, с. 32—42.
32. Полянский В. А. Диффузия и проводимость в частично ионизованной многотемпературной газовой смеси.— ПМТФ, 1964, № 5, с. 11—17.
33. Голант В. Е., Жилинский А. П., Сахаров И. Е. Основы физики плазмы. М., Атомиздат, 1977. 384 с.
34. G. Ecker. Electrode components of the arc discharge. "Ergebn. exakt. Naturwiss", 1961, Bd 33, S. 1—104.
35. Бейлис И. И., Любимов Г. А., Раховский В. И. Диффузионная модель прикатодной области сильноточного разряда. ДАН СССР, 1972, т. 203, № 1, с. 71—74.
36. Каганов М. П., Кучеров Р. Л., Рикенглаз Л. Э. К кинетической теории плазменного термомиссионного низкого давления. ЖТФ, 1961, т. 31, № 5, с. 588—596.
37. S. S. Maskeown. The cathode drop in an electric arc. "Phys. Rev.", 1929, v. 34, p. 611—614.
38. Зекцер М. П. К вопросу об аномально-высокой эмиссионной способности термо катода в дуговом разряде в средах инертных газов.— ТВТ, 1975, т. 13, № 3, с. 491—496.
39. Козлов О. В. Электрический зонд в плазме. М., АИ, 1963. 291 с.

чета  $E(t)$  можно воспользоваться результатами теории ламинарной дуги в безграничном потоке газа [8], где рассмотрены свойства дуги без учета собственных магнитных сил, когда продольная скорость потока во всем пространстве (включая и дугу) постоянна и равна  $u_\infty$ . Чтобы рассмотреть развитие теплового слоя около дуги, неподвижной относительно моля, необходимо лишь сделать замену  $z/u_\infty = t$ . Расположение дуги не точно внутри моля принципиально не меняет приведенных рассуждений.

Если время существования моля  $t'$  больше времени прогрева  $t_d$ , окружающая среда, очевидно, взаимодействует с дугой в течение времени  $t' - t_d$ . Ясно, однако, что формально окончательный результат останется прежним, т. е. от начала развития дуги в моле до момента его

разрушения в поток в конечном счете выделится энергия  $\int_0^{t'} I E dt$ .

Различие заключается лишь в зависимости  $E(t)$ . До момента  $t = t_d$  она совпадает с предыдущей, а в течение времени  $t' - t_d$  определяется условиями отвода тепла на границе моля, зависящими от закономерностей перемещений, возникновения и распада окружающих турбулентных молей. Вероятно, в этом случае для оценки теплопередачи на границе моля можно пользоваться прандтлевской моделью турбулентного теплопереноса.

Исходя из этих рассуждений, запишем уравнение энергии в приближении пограничного слоя, пренебрегая работой сил молекулярного трения и кинетической энергией потока, предполагая справедливым прандтлевский диффузионный механизм турбулентного переноса тепла:

$$\rho u \frac{\partial h}{\partial z} + \rho v \frac{\partial h}{\partial r} = P I \int_0^{t'} E dt + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \frac{\lambda}{c_p} + \rho l l_T \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right| \right) \frac{\partial h}{\partial r} \right], \quad (1)$$

где все параметры (кроме  $E$ ) подразумеваются осредненными по Рейнольдсу;  $l$ ,  $l_T$  — длины пути смешения для переноса импульса и энергии соответственно;  $P$  — плотность вероятности разрушения моля в данной точке рассматриваемого сечения в данный момент времени ( $P$  имеет

размерность  $1/(lL^2)$ ). Считаем, что энергия  $I \int_0^{t'} E dt$  выделяется в точке пространства с плотностью вероятности  $P$ .

Введем следующее допущение: вероятность  $P$  (неосредненная) разрушения турбулентного моля совпадает с вероятностью  $P'$  существования самого моля. Последняя же в соответствии с [9] сохраняется во время жизни моля

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dP'}{dt} = 0. \quad (2)$$

Запишем производную по времени в виде субстанциональной производной  $d/dt = \partial/\partial t + \sum u_i \partial/\partial x_i$ . Проведем рейнольдсово осреднение, и, принимая, как и выше, диффузионный механизм турбулентного переноса, получим уравнение для осредненной  $P$

$$\rho u \frac{\partial P}{\partial z} + \rho v \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \rho l l_P \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right| \frac{\partial P}{\partial r} \right), \quad (3)$$

где  $l_P$  — длина «пути смешения» переноса вероятности. При выводе (3) использовалось уравнение неразрывности, чтобы привести уравнение (2) к дивергентному виду.

Средняя по сечению напряженность электрического поля  $\langle E \rangle$  определится из уравнения

$$I \langle E \rangle = 2\pi \int_0^R \left( \int_0^{t'} P I E dt \right) r dr, \quad (4)$$

или, учитывая сказанное выше;

$$\langle E \rangle = 2\pi \int_0^R P \left( \int_0^{t'} E dt \right) r dr. \quad (5)$$

Полученная система уравнений дополняется уравнениями импульса и неразрывности, которые имеют известный вид

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial z} + \rho v \frac{\partial u}{\partial r} = - \frac{dp}{dz} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \mu + \rho l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right| \right) \frac{\partial u}{\partial r} \right], \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (\rho u r) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho v r) = 0. \quad (7)$$

Отметим интегральное условие сохранения, вытекающее из (3) при условии, что при  $r=R$ ,  $P=0$

$$\frac{d}{dz} \int_0^R \rho u P r dr = 0, \quad (8)$$

т. е. в сечениях потока сохраняется полная «массовая» осредненная вероятность. Другие условия, вытекающие из уравнений энергии и импульсов, обычны.

Сделаем оценки соотношения отрезков времени  $t'$  и  $t_d$ . Время жизни моля можно оценить как

$$t' \approx l/v', \quad (9)$$

где  $v'$  — пульсация радиальной скорости. Полагая  $v' \approx l |\partial u / \partial r|$ , получим

$$t' = c' \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^{-1}, \quad (10)$$

где  $c'$  — постоянная.

Как уже указывалось, для оценки времени  $t_d$  (при  $t' < t_d$ ) можно воспользоваться результатами расчета дуги в безграничном потоке газа [8]. Из формулы для поперечного размера теплового слоя

$$\eta = C \zeta^m, \quad (11)$$

где

$$\eta = \frac{2\pi\sigma}{I} \sqrt{\frac{\lambda_\infty h_\infty \sigma_0}{c_{p_\infty}}}; \quad \zeta = \frac{4\pi^2 z l_\infty^2 h_\infty \sigma_0}{I^2 \rho_\infty c_{p_\infty}^2 u_\infty},$$

$C = 2,82$ ,  $m = 0,315$  (по аппроксимации численных расчетов), полагая  $\delta \approx l$ ;  $z/u_\infty = t_d$ , находим

$$\frac{t_d \lambda_\infty}{I^2 \rho_\infty c_{p_\infty}} = C^{-1/m} \left( \frac{2\pi l}{I} \sqrt{\frac{\lambda_\infty h_\infty \sigma_0}{c_{p_\infty}}} \right)^{\frac{1}{m}-2}. \quad (12)$$

Оценки  $t'$  на основе (10) сделаем для свободной турбулентной струи. При этом, чтобы упростить выражения (нужные нам лишь для приближенных оценок), воспользуемся в основном результатами для струи несжимаемой жидкости [9] (или для газовой изотермической струи)

малой скорости). Примем автомодельный профиль осредненной скорости в струе

$$\frac{u}{u_m} = \left[ 1 - \left( \frac{r}{b} \right)^{3/2} \right]^2, \quad (13)$$

где  $u_m$  — значение скорости на оси;  $b$  — радиус струи,  $b = \beta x$ . Величина  $u_m$  определится из условия постоянства импульса струи

$$\Gamma = b_0 \rho_0 u_0 = 2\pi \rho_{cp} \int_0^b u^2 r dr, \quad (14)$$

где индексом 0 отмечены параметры на выходе из сопла;  $b_0$  — радиус сопла;  $\rho_{cp}$  — среднее значение плотности (по площади сечения) струи; координата  $x$  отсчитывается от «полюса» струи.

Подставляя (13) в (14), находим

$$\frac{u_m}{u_0} = \frac{b_0}{\beta x} \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_{cp} c_1}}; \quad c_1 = \frac{243}{1820} \approx 0,143. \quad (15)$$

Оценку  $t'$  следует, по-видимому, проводить для приосевой области — зоны с поперечным размером, имеющей порядок  $l$ . Поэтому в формуле (10) рассчитываем производную при  $r \approx l$ , кроме того, считаем  $l = cx$  [9] и положим  $\rho_{cp} = \rho_0$ . Окончательно

$$t' = \frac{c' \beta^{5/2} x^2}{3c^{1/2} u_0 b_0} \left[ 1 - \left( \frac{c}{\beta} \right)^{3/2} \right]^{-1}. \quad (16)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае (положим для простоты оценок  $m = 1/3$ ) отношение  $t'/t_x$  равно

$$\frac{t'}{t_x} = \frac{c' c \beta^{5/2}}{3c^{7/2} [1 - (c/\beta)^{3/2}]} \frac{l \lambda_\infty}{x u_0 b_0 \rho_\infty c_{p\infty} 2\pi} \sqrt{\frac{c_{p\infty}}{\lambda_\infty h_\infty \sigma_0}}. \quad (17)$$

Несмотря на то, что «время жизни» моля существенно растет с ростом  $x$ , отношение  $t'/t_x$  уменьшается с удалением от сопла. Максимальная величина его будет иметь место при минимальном  $x$ , которое равно

$$x_{\min} = b_0 \left( \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right), \quad (18)$$

где  $\beta$  — тангенс полуугла наклона внешней границы турбулентной струи;  $\gamma$  — тангенс полуугла наклона внутренней границы струи в области ее ламинарного ядра.

Числовые оценки для условий опытов, описанных в [10], где изучались свойства дуги в ламинарном ядре свободной струи, показывают, что на всем протяжении струи можно считать  $t'/t_x < 1$ , т. е. турбулентный моля успевает распасться раньше, чем граница теплового слоя дуги достигнет его границ. Следовательно, величину джоулева вклада в поток можно вычислить на основе результатов исследования электрической дуги в безграничном потоке. Воспользуемся аппроксимацией [8]

$$\psi = A \zeta^n, \quad (19)$$

где  $\psi = E I c_{p\infty} / 2\pi h_\infty \lambda_\infty$ ;  $A = 7,60$ ;  $n = -0,370$ .

Выражение для  $\zeta$  то же, что и в уравнении (11). Следует, однако, учитывать, что параметры с индексом  $\infty$  в данном случае отвечают параметрам внутри моля, и при осреднении их можно принять равными

средним значениям в данной точке потока. Учитывая это, найдем

$$I \int_0^{t'} E dt = \frac{2\pi A \lambda_0 h_0}{(1+n) c_{p0}} \left( \frac{4\pi^2 h_0 \sigma_0 \lambda_0^2}{I^2 \rho_0 c_{p0}^2} \right)^n \left( \frac{Bx^2}{u_0 b_0} \right)^{1+n} \left( \frac{h}{h_0} \right)^{n(1+2M-N)+1+N}, \quad (20)$$

где индекс 0 отвечает условиям «холодного потока»;  $u_0$ ,  $b_0$  — скорость газа на выходе из сопла и радиус среза сопла;  $\sigma_0$  — базисное значение электропроводности (некоторое число [8], имеющее размерность  $\sigma$ );  $B = c' \beta^{5/2} / 3c^{1/2} [1 - (c/\beta)^{3/2}]$ ;  $N$  и  $M$  — показатели степени в аппроксимациях [8];

$$\rho = \rho_0 (h/h_0)^N; \quad \frac{\lambda}{c_p} = \frac{\lambda_0}{c_{p0}} (h/h_0)^M, \quad (21)$$

для воздуха  $N = -0,85$ ;  $M = 0,562$ .

В данной постановке задачи не учитывалось влияние собственного магнитного поля на динамику дуги. Этот эффект в первом приближении можно учесть в уравнении (2) сохранения вероятности  $P$  в виде

$$dP/dt = -P/\tau, \quad (22)$$

где под характерным временем  $\tau$  можно понимать некоторую функцию инкремента нарастания неустойчивости (например, винтовой) столба дуги под действием собственного магнитного поля.

В заключение отметим, что предложенная в данной работе физическая схема подобна дискретной модели турбулентной диффузии (см., например, [9]).

Красноярский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
15/XII 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Watson V. R., Pegot E. R. Numerical calculation for the characteristics of a gas flowing axially through a constricted arc. NASA TN D-4042, 1967, S. 120.
2. Кацнельсон А. С., Урюков Б. А. Расчет электрической дуги в турбулентном установившемся потоке. Тр. IV Всес. конф. по физике и генераторам низкотемпературной плазмы. Алма-Ата, 1970, с. 40—43.
3. Урюков Б. А., Хайтман С. М. Дуга в турбулентном истоке. Тез. докл. V Всес. конф. по генераторам низкотемпературной плазмы, т. 1. Новосибирск, 1972, с. 55—58.
4. Суонсон, Ройдт. Численные решения уравнений пограничного слоя для дуги, горящей в SF<sub>6</sub> — ТИИЭР, 1971, 59, № 4, 62—70.
5. Тиль. Высокомощные дуги с различающимися электронной и газовой температурами и турбулентной теплопроводностью. — ТИИЭР, 1971, 59, № 4, с. 79—90.
6. Курочкин Ю. В., Пустогаров А. В., Молодых Э. И., Захаркин Р. Я. Влияние турбулентности на дуговой разряд в цилиндрическом накали. VI Всес. конф. по генераторам низкотемпературной плазмы. Фрунзе, Изд-во «Илим», 1974, с. 40—43.
7. Hegmann W., Ragaller K., Schneider W. Theory of high pressure arc in a strong axial gas flow X Intern. Conf. on Phenomena in Ionized Gases. Oxford, 1971, S. 282.
8. Жуков М. Ф., Коротеев А. С., Урюков Б. А. Прикладная динамика термической плазмы. Новосибирск, «Наука», 1975, с. 298.
9. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969, с. 742.

УДК 533.9.03

Т. С. МЕЛЬНИКОВА, В. В. ПИКАЛОВ

ИЗМЕРЕНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ ТЕМПЕРАТУР  
НЕСТАЦИОНАРНОЙ АСИММЕТРИЧНОЙ ДУГИ

Как экспериментально, так и теоретически показано, что в продольном магнитном поле цилиндрический плазменный шнур может принять форму вращающегося винта [1]. Радиальное поле температур в такой дуге должно меняться во времени и не будет иметь аксиальной симметрии. Диагностике аксиально-несимметричных плазм посвящен ряд работ, например [2—4]. Однако в одних из них [2] комплекс измерений, необходимых для расчета локальных параметров плазмы, проводился в течение достаточно длительного промежутка времени, тем самым авторы заведомо предполагали стационарность поля параметров. В других [3, 4] объектом исследования были импульсные плазмы (установки типа «Токамак»), но необходимые измерения проводились за несколько разрядных импульсов (более 20), т. е. принималась неизменность параметров плазмы от импульса к импульсу при сохранении начальных условий разряда.

В данной работе сделан первый шаг в измерении поля температур в дуге, принимающей в продольном магнитном поле форму вращающегося винта. Измерения проведены за промежуток времени, много меньший периода заметного изменения параметров плазмы; при этом использовалась не слишком сложная аппаратура, тем самым удалось избежать недостатков вышеупомянутых работ.

Эксперименты проводили на электродуговой камере, собиравшейся из медных водоохлаждаемых шайб внутренним диаметром  $3 \cdot 10^{-2}$  м и толщиной  $1 \cdot 10^{-2}$  м. Расстояние между анодом и катодом —  $1,9 \cdot 10^{-1}$  м. Рабочий газ — аргон подавался вблизи катода с закруткой. Расход аргона при давлении в разрядной камере  $1 \cdot 10^5$  Н/м<sup>2</sup> составлял 3 г/с. Продольное магнитное поле создавалось двумя соленоидами общей длиной  $2,6 \cdot 10$  м<sup>-1</sup>, между которыми помещалась оптическая шайба с 4 поперечными щелями. Щели имели ширину  $0,1 \cdot 10^{-1}$  м и были расположены под углом  $90^\circ$  друг к другу и к оси разрядной камеры.

С помощью кинокамеры СКС-1М, работающей в режиме непрерывной развертки, исследовалось распределение во времени излучения по диаметру канала в сечении оптической щели. В качестве примера на рис. 1 приведены временные развёртки, полученные для тока дуги 100 А и для различных значений индукции магнитного поля. Видно, что при наложении магнитного поля появляются радиальные колебания дугового шнура. Если индукция магнитного поля мала ( $B=0,035$  Т), колебания имеют регулярный характер, т. е. дуга принимает винтовую форму. С увеличением  $B$  растет частота колебаний, а также можно наблюдать расщепление дуги на несколько шнуров. При больших значениях  $B$  достигается предельная частота, примерно равная 700 Гц. Напряжение на дуге увеличивается в 2—3 раза по сравнению с дугой, не находящейся в продольном магнитном поле.

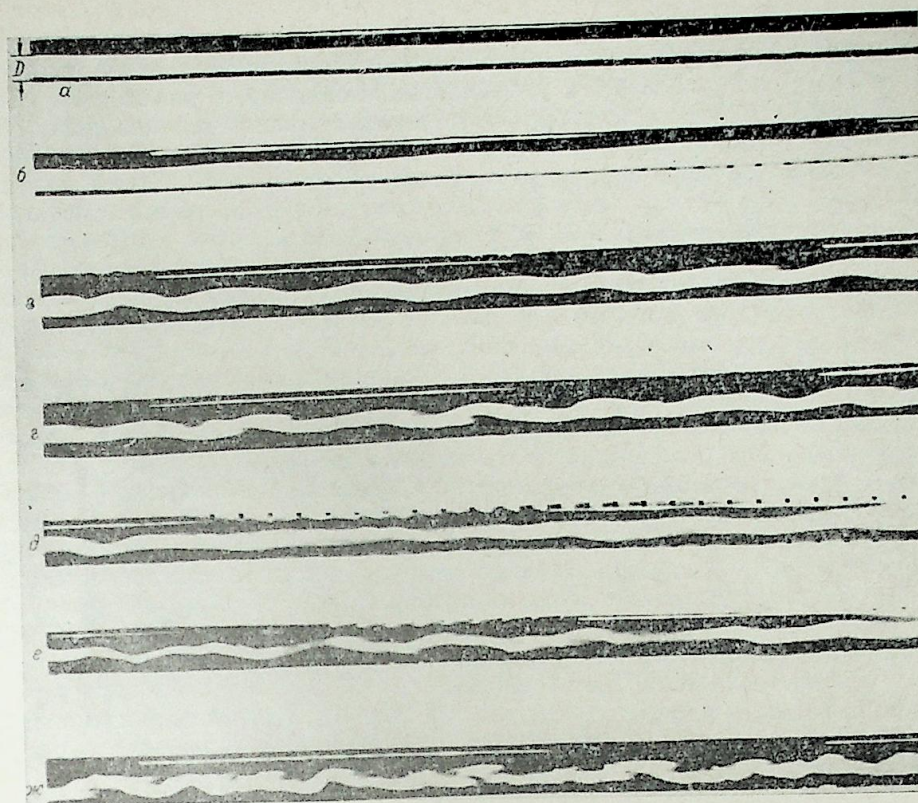


Рис. 1. Фоторазвертки излучения дуги во времени через поперечную щель, расположенную в центральном сечении электродуговой камеры. Ток дуги  $I=100$  А, индукция магнитного поля, Т.

а — 0; б — 0,035; в — 0,11; г — 0,15; д — 0,19; е — 0,26; ж — 0,63; D — диаметр канала.

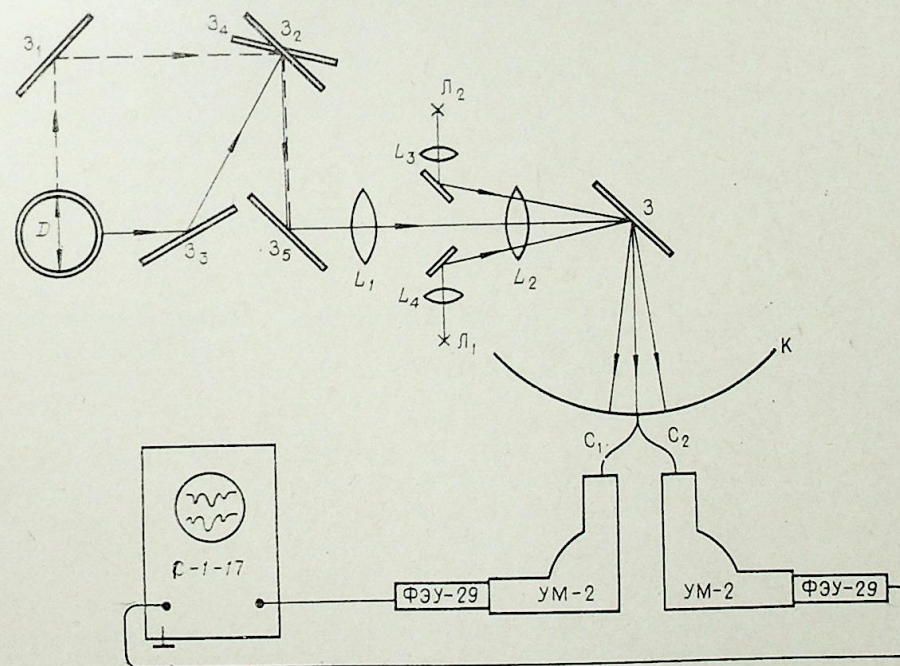


Рис. 2. Схема измерения интенсивности излучения дуги.

В настоящей работе поле температур измерялось только для наиболее простого случая: когда плазменный шнур имеет форму регулярного винта ( $B=0,035$  Т) и не усложнен появлением различного рода пульсаций. Для этого измерялось поперечное распределение интенсивности излучения дуги в выбранном сечении на определенной длине волны по двум взаимно перпендикулярным направлениям. Схема измерений приведена на рис. 2. Здесь  $D$  — сечение электродуговой камеры;  $Z_1 \div Z_5$  — поворотные зеркала;  $Z$  — вращающееся зеркало СФР;  $C_1, C_2$  — световоды;  $L_1-L_4$  — линзы, фокусирующие соответствующие объекты на поверхность К. Для фиксирования положения сигнала от дуги относительно стенок дугового канала по обе стороны от изображения дуги фокусировались изображения нитей лампочек  $L_1$  и  $L_2$  с ленточными телами накала. Монохроматоры УМ-2 выделяли необходимую длину волны в спектре излучения дуговой плазмы. Величины интенсивностей излучения с помощью ФЭУ-29 регистрировались на экране 2 лучевого осциллографа С-1-17. На рис. 3 приводятся данные записи двух осциллограмм, представленные в координатах  $x, y$ . Сплошной линией обозначены сигналы с одной осциллограммы, штриховой — с другой. Крестики соответствуют максимальной интенсивности излучения для каждой пары сигналов с одной осциллограммы. В пределах точности эксперимента точки максимальной интенсивности ложатся на окружность радиусом 0,2 см. Этот факт совместно с временными развертками (рис 1, б) показывает, что дуга имеет форму винта.

Для построения по полученным поперечным распределениям интенсивностей линий изояркости дуги (линий равной интенсивности в плоскости  $xoy$ ), описываемых некоторой функцией  $f(t)$ , был выбран доста-

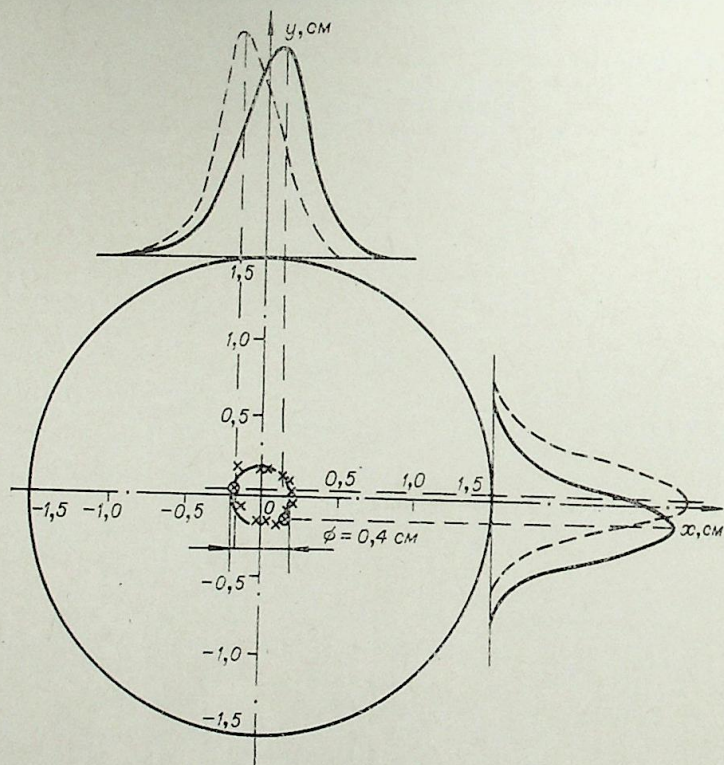


Рис. 3. Данные двух осциллограмм интенсивности излучения на длине волны 428,5 нм сплошного спектра аргона, представленные в координатах  $x, y$ .

Ток дуги  $I=100$  А, индукция магнитного поля  $B=0,035$  Т.

точно простой метод, обобщающий работу [3]. А именно, в данной работе в отличие от [3], во-первых, предполагалось, что линии равной интенсивности имеют вид эллипсов со сдвинутыми вдоль одной из осей центрами

$$\frac{(x - c(t))^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = t^2; \quad t \in [0,1]; \quad c(t) = c_0(1 - t). \quad (1)$$

Во-вторых, зависимость функции  $f(t)$  от параметра эллипса  $t$  считалась не параболической, как в работе [3], а гауссовой, что точнее описывает форму экспериментальной функции интенсивности в зависимости от радиуса  $f(t) = B e^{-dt^2}$ , где из (1)

$$t^2 = \frac{(x - c_0)^2 (c_0^2 + a^2) + 2ac_0(x - c_0) \sqrt{(x - c_0)^2 + \frac{y^2}{b^2} (a^2 - c_0^2)} + \frac{a^2}{b^2} (a^2 - c_0^2) y^2}{(a^2 - c_0^2)^2}.$$

Из набора экспериментальных данных для обработки выбирались такие пары сигналов, один из которых имеет осевую симметрию. Тогда направление осей эллипса определяется однозначно.

Проводилось численное интегрирование функции  $f(t)$  для двух направлений  $x$  и  $y$

$$F(x) = B \int_{-R(x)}^{R(x)} e^{-dt^2(x,y)} dy = dt^2(x,y) dy,$$

$$\text{где } R(x) = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Аналогично определялась функция  $F(y)$ .

Для определения коэффициента  $d$  строились графики нормированных на максимум функции  $\frac{F(y)}{F_{\max}(y)}$  для разных  $d$ . Из полученного набора кривых выбиралась та, которая имеет ту же крутизну около максимума, что и экспериментальная. Для данного эксперимента наиболее подходящей оказалась кривая с  $d=6$ .

Для определения коэффициента  $c_0$  строились графики функций  $\frac{F(x)}{F_{\max}(x)}$  при  $d=6$  и разных значениях  $c_0$  (рис. 4, а). Сопоставление с экспериментом (крестики) показывает, что ближе всего экспериментальные точки ложатся к кривой с  $c_0=0,4$ . На рис. 4, б приведена расчетная кривая  $\frac{F(y)}{F_{\max}(y)}$ , для которой  $d=6, c_0=0,4$ . Крестиками также показаны экспериментальные данные. Хорошее соответствие экспериментальных точек около максимумов обеих кривых  $\frac{F(x)}{F_{\max}(x)}$  и  $\frac{F(y)}{F_{\max}(y)}$  с одними и теми же параметрами  $d$  и  $c_0$  свидетельствует о том, что выбранная модель изолиний интенсивности вполне удовлетворительно отражает действительность. Следует ожидать увеличения точности для зон, близких к крыльям сигнала, если бы удалось аппроксимировать линии изояркости дуги функцией, зависящей от большего числа параметров.

На рис. 5 приводятся полученные изолинии интенсивности. Начало координат соответствует оси электродуговой камеры. Для определения коэффициента излучения дуги с помощью лампы СИ-10-300 проводилась градуировка регистрирующей аппаратуры. По графикам зависимости коэффициента излучения от температуры, построенным согласно [5], определены температуры, соответствующие изолиниям интенсивности. Видно, что поле температур дуги, помещенной в продольное магнитное поле, не имеет осевой симметрии. Максимум температур смещен и, как следует из временных разверток рис. 1, б, вращается вокруг нее.

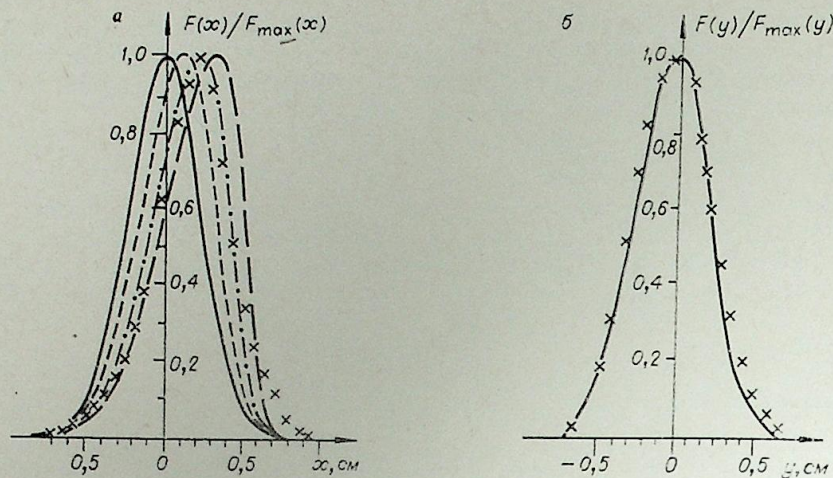


Рис. 4.

а — графики нормированных функций  $\frac{F(x)}{F_{\max}(x)}$ ,  $a=1,1$ ,  $b=1$ ,  $d=6$ ,  $c_0$  соответственно равны: — 0, — — 0,2, — · — 0,4, — — — 0,6. б — графики нормированных функций  $\frac{F(y)}{F_{\max}(y)}$ ,  $a=1,1$ ,  $b=1$ ,  $d=6$ ,  $c_0=0,4$ .

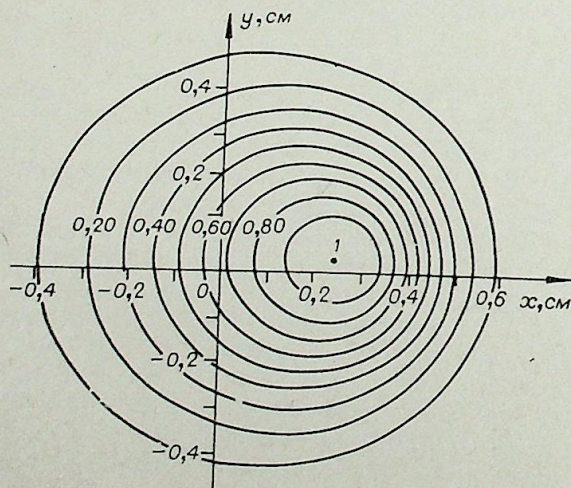
В заключение оценим возможные погрешности методики, основанной на использовании зеркальной развертки. Поворот зеркала  $Z$  перемещает изображение дугового канала не по прямой, а в первом приближении по дуге окружности и в случае, если линзы  $L_1$  и  $L_2$  длиннофокусные, обычные хордовые измерения интенсивности заменяются на «всерные». В частном случае, когда  $a=b$ ,  $c_0=0$ , система изолиний интенсивности представляют собой симметричные относительно оси окружности, легко показать, что используемый метод регистрации интенсивности излучения описывается видоизмененным уравнением Абеля

$$F\left(\arcsin\left(\frac{R}{R_0}U\right)\right) = 2R \int_U^1 \frac{\varepsilon(r) dr}{\sqrt{r^2 - U^2}},$$

где

$$U = \frac{R_0}{R} \sin \alpha; \quad \alpha \in [0, \alpha_{\max}];$$

$R$  — радиус изображения плазмы;  $R_0$  — расстояние между вращающимся



зеркалом СФР и плоскостью фокусировки «К»;  $\alpha_{\max}$  — максимальный угол, на который поворачивается изображение при вращении зеркала СФР. В условиях данной работы  $R=0,75$  см,  $R_0=24$  см, т. е.  $\alpha_{\max}=12'$ . Оценка поправок показала их незначительность, что позволило не учитывать их.

Рис. 5. Изолинии интенсивности излучения для  $I=100$  А,  $B=0,035$  Тл.

Соответствующие температуры: 1 — 9450 К, 0,9 — 9400 К, 0,7 — 9280 К, 0,5 — 9130 К, 0,3 — 8900 К, 0,2 — 8650 К, 0,1 — 8440 К.

В случаях, когда плазма имеет более сложную структуру, например, распадается на несколько шнуров или становится турбулентной, для определения локальных температур необходимо увеличить число углов наблюдения. Это значительно усложняет технику эксперимента и особенно методику его обработки [6, 7].

Институт теплофизики  
СО АН СССР,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
23/1 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Yuen M. Ch. Stability of the poiseuille plasma arc in an axial magnetic field.— Phys. Fluids, 1966, 9, N 6, 1140—1150.
2. Olsen H. N., Maldonado C. D., Duckworth G. D., Caron A. P. Investigation of an external magnetic field with an electric arc.— ARL-66-0016. Northror space laboratories Hawthorn, California, January, 1966.
3. Горбунов Е. П. Методы обработки результатов многохордового зондирования плазмы на установке «Токамак». — В кн.: Диагностика плазмы. Вып. 3. М., Атомиздат, 1973, с. 358—366.
4. Takeda Tatsuoki. Numerical method for solution of the integral equation of the first kind-application to analysis of plasma density profil.— J. of Computational physics, 1976, 21, 305—318.
5. Schulz-Gulde E. The continuous emission of argon in the visible spectral range.— Z. fur Physik, 1970, 230, 449—459.
6. Пикалов В. В., Преображенский Н. Г. О некоторых проблемах диагностики низкотемпературной плазмы.— В кн.: Свойства низкотемпературной плазмы и методы ее диагностики. Новосибирск, «Наука», 1977, 138—176.
7. Пикалов В. В., Преображенский Н. Г. Восстановление поля локально равновесных температур среды по излучению.— ИФЖ, 1977, 33, № 6, с. 1042—1046.

УДК 533.924

Ю. Е. ФИЛИППОВ, Ю. П. МАЛКОВ

### ИССЛЕДОВАНИЕ ДУГОВОГО ПОРИСТОГО ТЕРМОКАТОДА

На величину удельной эрозии дуговых катодов существенное влияние оказывает их тепловой режим, как показано, например, в [1]. На оптимальных тепловых режимах эрозия вольфрамовых катодов не превышает  $10^{-9}$  г/Кл. Эрозия значительно увеличивается как при перегреве катода, так и при его переохлаждении. Поэтому при эксплуатации дуговых установок необходимо поддерживать оптимальный тепловой режим катодов во всем рабочем диапазоне параметров установок. Однако существующие конструкции катодных узлов не отвечают этому требованию.

Авторами данной работы предложен и исследован метод регулирования теплового режима катода с помощью предварительно подогретого рабочего газа. Применялся пористый катод. Рабочий газ, нагретый в специальном теплообменном устройстве, направлялся через поры катода в зону разряда. Регулируя нагрев газа в теплообменнике, можно установить необходимую температуру катода на любом режиме.

Исследования проводились на установке, представленной на рис. 1. Пористый катод 2 в виде усеченного конуса высотой 10 мм с диаметром рабочей поверхности 20 мм изготовлялся из гранул вольфрама с размерами 90—160 мкм. Пористость катода составляла около 40%.

Катод с помощью молибденовой державки 3 крепился на торце омического нагревательного устройства, в котором рабочий газ — аргон предварительно нагревался, проходя через 19-канальную графитовую или одноканальную вольфрамовую трубку 4. Молибденовый водоохлаждающий анод 1 располагался на расстоянии 20 мм от поверхности катода.

Температура катода определялась фотометрическим методом, для чего с помощью кинокамеры (5) производилась киносъемка рабочей поверхности катода. Выбор фотометрического метода был вызван двумя обстоятельствами. Во-первых, место привязки разряда на поверхности катода невозможно заранее закоординировать. Во-вторых, при нагреве катода было обнаружено явление распада монолитного дугового пятна на несколько отдельных пятен, каждое из которых имело индивидуальную дуговую привязку.

Фотометрирование производилось по кадрам, фиксирующим процесс остывания рабочей поверхности катода после отключения дуги. Это исключало влияние излучения прикатодной зоны разряда. Точность фотометрического метода в значительной степени зависит от времени экспозиции кадров и от времени между моментом отключения дуги и первым кадром, фиксирующим остывающую поверхность катода. Для повышения точности обычно применяют скоростную киносъемку [2]. Однако в этом случае приходится использовать большое количество киноплёнки для съемки калибровочного образца и исследуемого като-

да. Ее трудно обрабатывать в идентичных условиях, что существенно снижает точность метода. Кроме того, скоростные кинокамеры типа СКС не имеют стабилизации скорости, что вносит дополнительную погрешность при обработке данных.

Нами применялась кинокамера «Конвас» с относительно низкой скоростью съемки, позволявшая на одной кассете зафиксировать поверхность катода и калибровочного образца на различных режимах. Для сокращения времени экспозиции кадров щель обтюратора камеры была уменьшена до  $10^\circ$ , а скорость съемки повышена до 76 кад/с. Это позволило сократить время экспозиции до 1 мс.

Минимальное время между моментом отключения дуги и первым кадром, фиксирующим остывающую поверхность катода, обеспечивалось системой автоматики, которая синхронизировала процесс киносъемки с процессом гашения дуги. Для отключения дуги использовался тиристор со скоростью нарастания тока  $10^8$  А/с, который после разгона кинокамеры синхронно с кадрами шунтировал дуговой разряд. Это позволяло экспонировать первый кадр, фиксирующий процесс остывания катода, через 1,1 мс после гашения дуги.

Градуировочные киносъемки производились с использованием специального нагревательного устройства, в котором калибровочный цилиндрический образец ( $d=6$  мм), изготовленный из того же материала, что и исследуемый катод, нагревался в среде аргона прямым пропуском тока. Истинная температура образца определялась эталонным пирометром ЭОП-66 по излучению цилиндрической полости ( $d=0,8$  мм,  $l=3$  мм), выполненной в теле образца. Ось полости была перпендикулярна оси образца, а ее эффективная степень черноты близка к единице.

Градуировочные киносъемки позволили построить зависимости, связывающие степень почернения фотоматериала с истинной температурой поверхности калибровочного образца. С помощью этих зависимостей на микрофотометре ИФО-451 производилась расшифровка негативов, фиксирующих рабочую поверхность исследовавшихся катодов. По полученным данным строились поля температур вдоль всей исследуемой поверхности. Кроме этого, на установке с помощью зондов проводилась оценка влияния исходной температуры катода на величину прикатодного падения потенциала и на вид вольт-амперной характеристики зондов.

Для ввода зондов в плазму было изготовлено специальное устройство. Зонды крепились на вращающейся державке. При выбранных размерах державки каждый зонд пересекал дуговую плазму за 10 мс, а остальное время (1 с) двигался, охлаждаясь в воздухе.

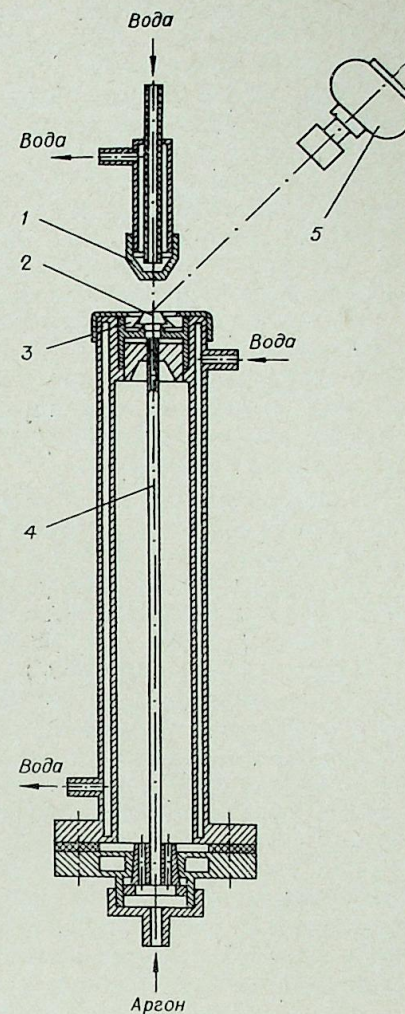


Рис. 1. Установка для исследования термокатода.

Как показали оценки, температура поверхности зондов в плазме не превышала  $1000^{\circ}\text{C}$ . Это дает право считать, что зонды в разряде не имитировали электроны.

Зондовое устройство предусматривало два режима работы. Первый использовался для измерения катодного падения потенциала. При этом зонд совершал винтообразное движение, проходя при каждом обороте участок плазмы с шагом  $0,5$  мм. Второй режим предназначался для снятия вольт-амперной характеристики диффузионного зонда диаметром  $0,1$  мм и длиной  $0,5$  мм. Зонд вводился в плазму на заранее заданном расстоянии от поверхности катода, и электронный коммутатор подавал на него напряжение с шагом в  $1,5$  В/оборот относительно катода.

Исследования, проводившиеся с пористыми катодами без их предварительного подогрева [3], показали, что прикатодная зона дуги имеет такую же форму, как и при использовании непродуваемого «холодного» катода. В этом случае у поверхности катода наблюдается четко выраженное контрагирование дуги. Размеры ее катодного пятна мало меняются с ростом тока.

Подогрев катода рабочим газом существенно изменил картину, особенно при высоких температурах подогрева (более  $1500^{\circ}\text{C}$ ). В этом случае прикатодная зона дуги дробилась на отдельные струи, а катодное пятно расчленилось на ряд участков, суммарная площадь которых значительно превышала площадь катодного пятна на «холодной» поверхности.

На рис. 2 представлены поля температур поверхности катода для одного из характерных режимов, соответствующего температуре предварительного разогрева центральной части катода, равной  $2000^{\circ}\text{C}$ . Ток дуги на данном режиме составлял  $250$  А, а расход аргона  $15$  г/с. Расшифровка температурных полей производилась вдоль диаметра, проходящего через наиболее нагретые участки поверхности катода. Поле температур, соответствующее первому кадру, близко к полю при горении дуги, так как от момента гашения дуги его отделяет всего  $1,1$  мс. Неравномерность этого поля можно объяснить неоднородностью структуры пористого материала. Это подтверждается полями скоростей, снятыми у рабочей поверхности при холодных продувках. Оказалось, что на поверхности катода существуют практически непродуваемые участки

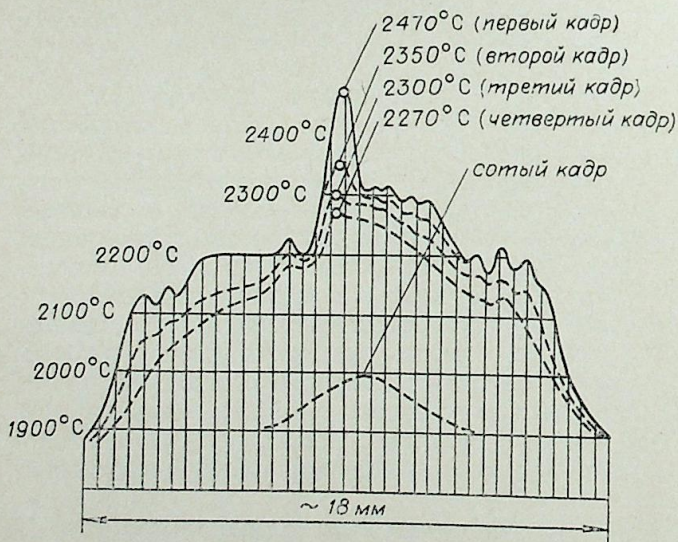


Рис. 2. Поля температур поверхности пористого катода, снятые при ее остывании после гашения дуги.

с поперечными размерами от  $0,5$  до  $1,0$  мм. Очевидно, они являются местами привязок отдельных струй, на которые распадается прикатодная область дуги. Расположение этих участков на рабочей поверхности можно определить по максимальным значениям температур, найденным при обработке кинопозитивов, фиксировавших процесс остывания катода.

Для оценки максимального значения температуры катода при горении дуги,

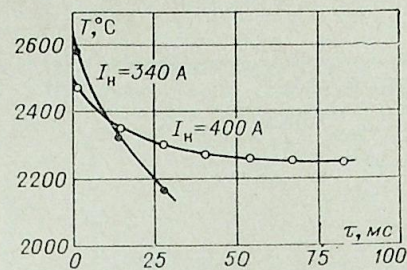


Рис. 3. Изменение максимальной температуры поверхности катода при ее остывании после гашения дуги.

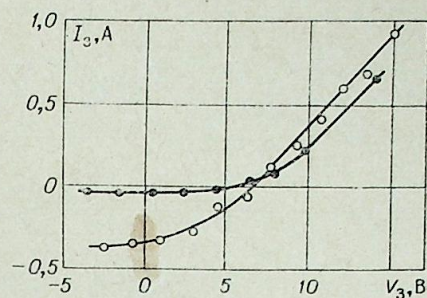


Рис. 4. Вольт-амперные характеристики диффузионного зонда:  $I_d = 200$  А;  $G_{\text{Ar}} = 15$  г/с; ● —  $T_H = 1500^{\circ}\text{C}$ ; ○ — предварительный нагрев катода отсутствует.

строилась зависимость максимальной температуры его остывающей поверхности от времени остывания. Экстраполяция полученной зависимости до нулевого значения времени, соответствующего моменту гашения дуги, позволяла найти указанную температуру.

На рис. 3 представлены такие зависимости для двух режимов, один из которых соответствует полям температур, изображенным на рис. 2, другой относится к режиму предварительного разогрева катода с температурой в центре, равной  $1500^{\circ}\text{C}$ . Кривые показывают, что с ростом температуры предварительного разогрева катода наблюдается снижение его максимальной температуры. Как свидетельствуют кино съемки, это связано с увеличением суммарной площади участков привязок разряда на рабочей поверхности.

Эксперименты показали, что предварительный разогрев пористых вольфрамовых катодов в диапазоне температур от  $1500$  до  $2000^{\circ}\text{C}$  приводил к тому, что максимальная температура их рабочей поверхности при горении дуги на всех исследованных режимах ( $I_d = 150$ — $400$  А) не превышала  $2500$ — $2700^{\circ}\text{C}$ .

Предварительный разогрев сказывается и на процессах, происходящих в прикатодной области дуги. Так, вольт-амперные характеристики диффузионного зонда (рис. 4) показывают, что вдув предварительно нагретого аргона приводит к значительному снижению ионного тока на зонд, что свидетельствует о снижении концентрации плазмы в прикатодной зоне. Следовательно, предварительный разогрев катода приводит к снижению плотности тока на его рабочей поверхности. Оценки, выполненные по суммарному световому диаметру катодной привязки, показали, что плотность тока на «холодном» катоде с  $4 \cdot 10^4$  А/см<sup>2</sup> (при  $I_d = 250$  А) уменьшается до  $2 \cdot 10^3$  А/см<sup>2</sup> при его предварительном разогреве до  $1500^{\circ}\text{C}$ .

Как видно из рис. 4, вольт-амперная характеристика зонда не имеет насыщения, т. е. происходит интенсивная генерация электронов в призондовом слое. Однако постоянство наклона кривых указывает на несущественное изменение температуры при переходе с одного режима на другой.

Измерение потенциала «плавающего» зонда (рис. 5) на расстоянии  $0,5$ — $10$  мм от поверхности катода позволяет утверждать, что нагрев катода рабочим газом до  $1500^{\circ}\text{C}$  приводит к снижению катодного падения потенциала на  $1,5$ — $2$  В. Наблюдается перестройка прикатодного слоя плазмы и уменьшение мощности, приносимой на катод с ионами.

Таким образом, предлагаемый метод предварительного разогрева пористых вольфрамовых катодов с помощью продуваемого через поры аргона приводит к существенному снижению плотности тока на катоде

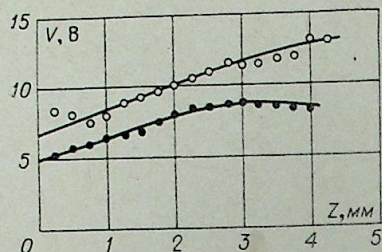


Рис. 5. Изменение потенциала плавающего зонда от расстояния до поверхности катода:

$I_d = 200 \text{ А}$ ;  $G_{\text{Ar}} = 15 \text{ г/с}$ ; ● —  $T_n = 1500^\circ \text{С}$ ; ○ — предварительный нагрев катода отсутствует.

и его рабочих температур, что согласуется с теорией [4]. Омическое нагревательное устройство, через которое подается аргон в катод, включенное в цепь дуги, может служить балластным реостатом [5] и тем самым способствовать повышению общего КПД установки.

Государственный институт  
прикладной химии,  
Ленинград

Поступила в редакцию  
2/1 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Жуков М. Ф., Коротеев А. С., Урюков Б. А. Прикладная динамика термической плазмы. Новосибирск, «Наука», 1975.
2. Neugat P. W., Gibbs T. W. Arc Cathode Emission Mechanisms at High Currents and Pressures.— J. of Applied Physics, 1963, 34, N 2.
3. Малков Ю. П., Филиппов Ю. Е. и др. Генераторы низкотемпературной плазмы. Тр. III Всес. науч.-техн. конф. по генераторам низкотемпературной плазмы. М., «Энергия», 1969, с. 128—129.
4. Мойжес Б. Я., Немчинский В. А. К теории дуги высокого давления на тугоплавком катоде.— ЖТФ, 1973, XLIII, в II.
5. Ю. П. Малков, Ю. Е. Филиппов и др. Электродуговой нагреватель газа. Авт. свид. № 497756.— «Открытия, изобретения, промышленные образцы, товарные знаки», 1975, № 48, с. 172.

М. П. СТРОНГИН, И. Я. ЯЦКАРЬ

#### ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ДУГИ

Во многих работах по исследованию электрических дуг подчеркивается существенная нестационарность различных, в первую очередь электрических параметров как собственно дугового столба, так и электрической цепи, включающей дугу [1]. Прежде всего, сама дуга постоянного тока в плазмотроне, как отмечается в [1, с. 128—143], не является стационарной. Пульсации характеристик дуги обусловлены здесь в основном процессом шунтирования, хотя результаты экспериментов убеждают, что это не единственный механизм образования возмущений тока и напряжения.

Так, в простейших системах выпрямления тока результирующий ток (напряжение) может обладать значительной переменной составляющей, что можно интерпретировать, как наложение на стационарную дугу неких периодических возмущений. При этом очевиден интерес к динамике процессов горения, а также гашения дуги, в частности, к динамической вольт-амперной характеристике (ВАХ).

Большинство работ по исследованию возмущений в дугах посвящено проблеме устойчивости как в «малом», так и в «большом» [2].

При исследовании устойчивости в «малом» применяются различные методы линеаризации соответствующих дифференциальных уравнений, имеющие, очевидно, ограниченную область применения.

Известные авторам работы по конечным возмущениям в дугах (за исключением статьи Ю. С. Свирчука [1, с. 87—115]) сводятся к построению интегральных моделей дуги и определению усредненных по радиусу характеристик, т. е. «сглаженных» решений.

В то же время знание радиального профиля температуры в плазмохимических задачах позволяет рассчитать (хотя бы в приближении термодинамического равновесия) влияние колебаний температуры на выход синтезируемого продукта. Это влияние может быть значительным, даже для небольших амплитуд колебаний из-за экспоненциальной зависимости константы химического равновесия от температуры, причем по этой же причине небольшая ошибка в профиле температуры может привести к значительным ошибкам в расчетах химического состава среды.

Таким образом, решение полных уравнений электрической дуги представляет несомненный интерес, в частности, для тестирования интегральных методов. Эта задача для безрасходной электрической дуги и решается в данной работе. В отличие от [1, с. 87—115] в уравнении энергии учитывалось излучение, поскольку при достаточно больших токах  $I \approx 200 \text{ А}$  даже в воздушных дугах излучение может оказать существенное влияние на энергетические характеристики плазмотронов и переносные свойства дуги. Так, поток тепла, переносимый излучением в области высоких температур, может быть значительно выше потока

тепла, обусловленного теплопроводностью. Все это существенно влияет на статическую и динамическую ВАХ электрической дуги, а также на профили температуры и, как следствие, на химический состав среды.

В предположении термичности плазмы и пренебрежении собственным магнитным полем уравнение нестационарной электрической дуги в цилиндрическом канале без протока газа можно записать в следующем виде [3]:

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho v \frac{\partial h}{\partial r} = \sigma(p, h) E^2(t) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{\partial p}{\partial t} - 4\pi q_r(p, h); \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{2}{3} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu \frac{\partial v}{\partial r} \right) + 2 \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial p}{\partial r}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho v r) = 0; \quad (3)$$

$$I(t) = 2\pi E(t) \int_0^{R_k} \sigma(p, h) r dr; \quad (4)$$

краевые условия

$$\frac{\partial h}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0; \quad h(r) \Big|_{r=R_k} = h_{cr}; \quad v(r) \Big|_{r=R_k} = 0; \quad (5)$$

При этом может быть задано

$$E(t) = E_0(1 + \gamma \sin \omega t), \quad (6)$$

и задача решается для дуги в воздушной среде относительно энтальпии  $h(t, r)$ , тока  $I(t)$ , радиальной скорости  $v(t, r)$  и давления  $p(t, r)$ , либо может считаться известным

$$I(t) = I_0(1 + \gamma \sin \omega t), \quad (7)$$

когда вычисляются  $h, E, v, p$ . Здесь  $I_0, E_0$  — значения тока и напряженности стационарной дуги, одно из которых задано, а второе совместно с  $h(0, r), v(0, r), p(0, r)$  определено методом установления и служит в дальнейшем начальным условием для нестационарной задачи.

Для замыкания системы используются уравнения состояния и аппроксимации коэффициентов переноса, предложенные в работе [4]. Дополнительно принимается

$$\sigma \sim p^{-0.2}; \quad q_r \sim p^{0.3}; \quad \lambda/c_p \sim p^0; \quad \rho \sim p^1 \quad (8)$$

(обозначения общепринятые).

Амплитуда возмущения  $\gamma$  и частота  $\omega$  являются параметрами задачи и могут варьироваться в широких пределах. Таким образом, задача замкнута и может решаться в указанной постановке. Однако для данных условий может быть достигнуто дальнейшее упрощение системы (1) — (4).

Так как возмущения давления распространяются в пространстве со звуковой скоростью, а характерные тепловые скорости значительно меньше, следует  $(\omega r_0)^2 \rho_0 / p_0 \ll 1$ , то  $r_0 \partial p / \partial r \ll p_0$ , т. е. градиентом давления можно пренебречь, и  $p = p(t)$ .

Основываясь на том, что  $\partial p / \partial r \approx 0$ , удается избавиться от решения уравнения (2), так как подстановка  $\rho = \rho(p, h)$  из уравнения состояния в условие сохранения массы

$$\int_0^{R_k} \rho r dr = \text{const} \quad (9)$$

позволяет определить давление как функцию энтальпии. В дальнейшем

из уравнений (1), (3) может быть найдено  $h(t, r)$  и  $v(t, r)$ . Расчет системы (1), (9), (3), (4) и применен для исследования нестационарной электрической дуги.

В соответствии с выбранным численным алгоритмом уравнение (1) аппроксимировалось по неявной 6-точечной разностной схеме, описанной в работе [5] с итерацией по нелинейности; уравнение (3) — по явной 4-точечной схеме с центрированием производной  $\partial \rho / \partial t$ , а интегралы в (4) и (9) — по формуле трапеций. Шаг по пространству  $\Delta r \approx R_k/30$ . Шаг по времени  $\Delta t$  подбирался экспериментально в процессе численного анализа в зависимости от мощности дуги (величины градиентов) и, главное, от частоты синусоидальных колебаний  $\omega$  ( $\Delta t \approx 10^{-5}$  с).

Методика расчета для произвольных функций  $E(t)$  или  $I(t)$  необходима при рассмотрении внешней цепи, однако в данной работе основное внимание уделялось анализу влияния на дугу переменных составляющих тока и напряжения, а форма задания  $E$  и  $I$  в виде (6) или (7) наиболее удобна для анализа.

Как и следовало ожидать, при выполнении условия

$$E_0(1 - \gamma) > E^* \quad (10)$$

при решении задачи (6) или одного из условий уравнения (7)

$$I_0(1 + \gamma) < I(E^*); \quad I_0(1 - \gamma) > I(E^*) \quad (11)$$

на низких частотах динамическая ВАХ дуги после установления совпадает со статической (рис. 1). Такое совпадение наблюдается до частот  $\omega < 1000$  рад/с (рис. 1, кривые 1, 2, 4). При высоких частотах возмущений наблюдается сдвиг по фазе колебаний тока и напряженности. Графически это проявляется в том, что статическая ВАХ (кривая 8) из-за постоянства периода колебаний «разворачивается» в замкнутые петли (кривые 3, 5, 6, 7), ширина которых определяется величиной фазового отставания.

При этом сопоставление кривых 8, 9 и 6, 7 иллюстрирует влияние излучения на динамическую и статическую характеристики течения.

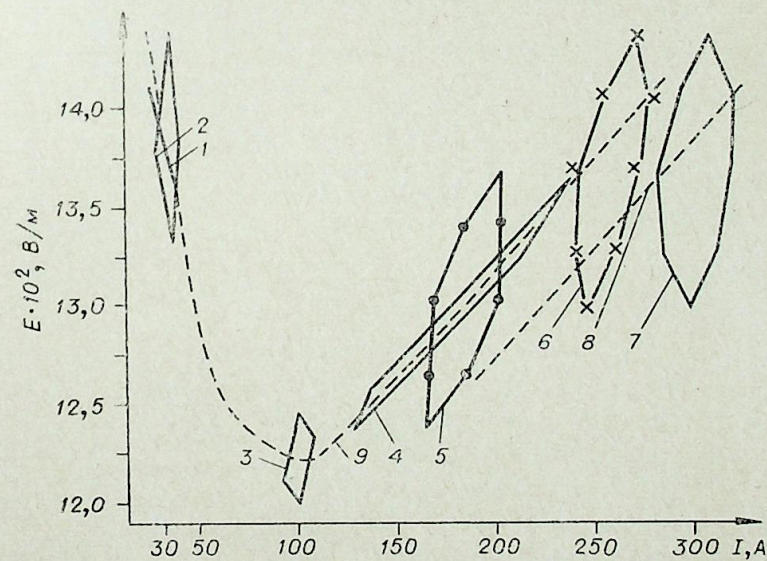


Рис. 1.

Динамическая ВАХ: 1 —  $\gamma=0,1, \omega=30$  рад/с; 2 —  $\gamma=0,1, \omega=300$  рад/с; 3 —  $\gamma=0,1, \omega=3000$  рад/с; 4 —  $\gamma=0,05, \omega=1000$  рад/с; 5 —  $\gamma=0,05, \omega=8000$  рад/с; 6 —  $\gamma=0,05, \omega=1000$  рад/с; 7 —  $\gamma=0,05, \omega=8000$  рад/с;  $q_r=0$ ; X — случ. 6. при  $v=\text{var}, p=\text{const}$ ; статическая ВАХ: 8 —  $q_r=0$ ; 9 —  $q_r \neq 0$ .

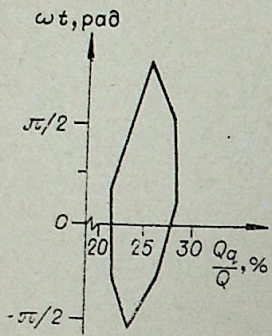


Рис. 2.

Влияние излучения, соответствующего кривой 8, показано на рис. 2. Видно, что пренебрежение излучением может приводить даже в дугах средней мощности к значительным ошибкам.

В различных вариантах расчета изучалось влияние на теплообмен в канале радиального растекания газа и изменения давления. Результаты (рис. 1) подтверждают вывод [1, с. 87—115] о малой скорости  $v$  в предположении постоянства давления, а рис. 3 указывает на возможность пренебрежения в данном случае и зависимостью  $p(t)$  (кривые 1, 6).

Последние кривые получены решением системы (1), (9), (3), (4) в условиях (10), когда ток  $I_0$  попадает на падающую ветвь статической ВАХ. В этом случае наблюдается «переход» дуги с падающей на восходящую ветвь, т. е. колебания, начавшиеся относительно стационарной точки  $I_0(E_0)$ , на падающей ветви переходят в колебания около точки  $I_1(E_0)$  на восходящей ветви и стабилизируются, хотя с увеличением частоты  $\omega$  время установления имеет тенденцию к возрастанию (рис. 3, кривые 1, 2, 3). Заметим, что введение в цепь параллельно с электрической дугой активного балластного сопротивления  $R_{\text{балласт}}$  замедляет «переход» дуги (рис. 3, кривая 4). Более того, для данной длины дуги (в расчетах принималось  $l=0,5$  м) нетрудно найти минимальную величину  $R_{\text{балласт}}$ , которая обеспечивает при данном  $\gamma$  стабилизацию точки  $I_0(E_0)$  (рис. 3, кривая 5).

Обратимся к результатам, полученным при невыполнении условий (10), (11). Здесь, очевидно, не следует ожидать совпадения статической и динамической ВАХ. Так, например, низкочастотные возмущения напряженности ведут к гашению дуги, в частности, при  $\gamma=0,8$  и  $I_0=183$  А определена «критическая» частота  $\omega_{\text{кр}} \approx 10^4$  рад/с, ниже которой происходит гашение при данном  $\gamma$ . С уменьшением амплитуды колебаний переменной составляющей в 4 раза ( $\gamma=0,2$ )  $\omega_{\text{кр}}$  понижается в 5 раз (до 1900 рад/с).

Ввиду важности исследования процессов отключения дуг задача о гашении стационарной электрической дуги решалась отдельно (без синусоидальных возмущений электрических параметров). Расчет системы (1, 9, 3, 4) проводился на основе описанного алгоритма для токов  $I_0=50, 100, 200, 300$  А с целью определения момента гашения. Расчеты показали, что время гашения слабо зависит от мощности дуги и изменяется в интервале 0,1—0,13 с. При этом спад максимального значения

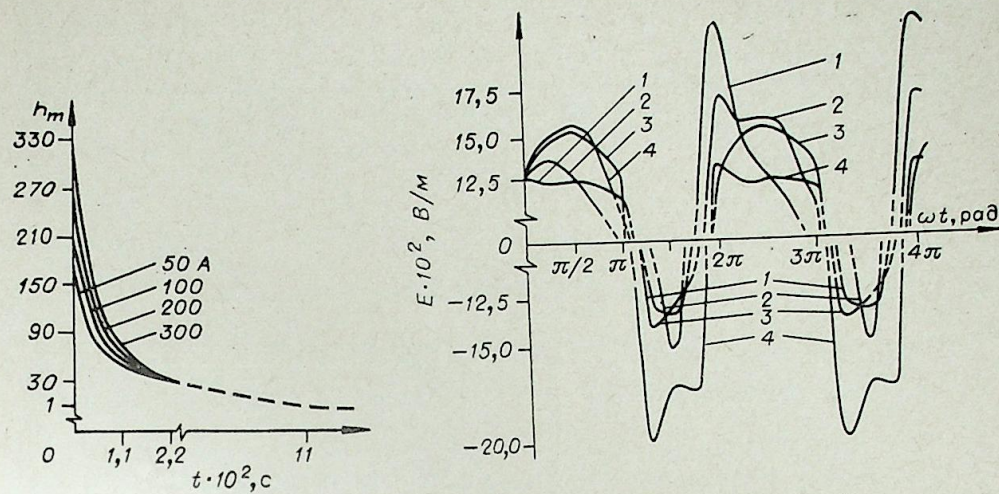


Рис. 4.

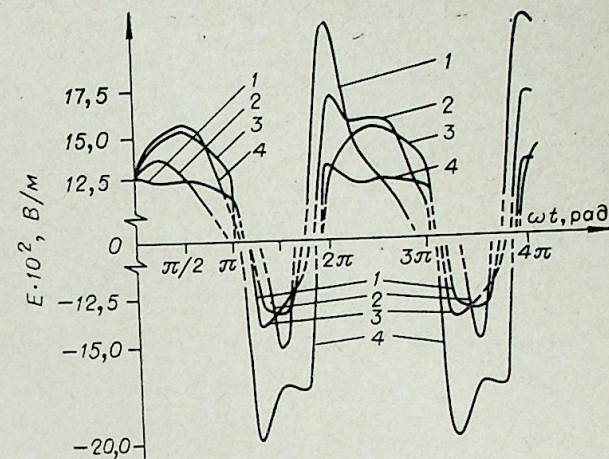


Рис. 5.  $I(t) = I_0(1 + 2\sin \omega t)$ .  
1 —  $I_0=49$  А,  $\omega=3000$  рад/с; 2 —  $I_0=175$  А,  $\omega=3000$  рад/с; 3 —  $I_0=170$  А,  $\omega=300$  рад/с; 4 —  $I_0=49$  А,  $\omega=300$  рад/с.

энтальпии (на оси) в конце гашения становится очень медленным (рис. 4).

При синусоидальном изменении тока достаточно большой амплитуды (задача (7), условие (11) не выполнено) наблюдаются «пички» (рис. 5) в областях экстремальных значений напряженности  $E$ .

Одновременно с этим появляются «горбы» в областях минимальных осевых энтальпий. Появление «пиков» связано с возрастанием влияния высокочастотных составляющих колебаний вследствие сильной нелинейности задачи и больших амплитуд возмущений.

В заключение отметим, что в процессе расчетов ни в одном из режимов не обнаружено немонотонности изменения профиля энтальпии. Графики распределения энтальпий по радиусу канала при экстремальных значениях напряженности на низких (кривые 1, 2) и высоких (кривые 3, 4) частотах представлены на рис. 6.

Авторы признательны В. В. Бербасову за помощь в работе.

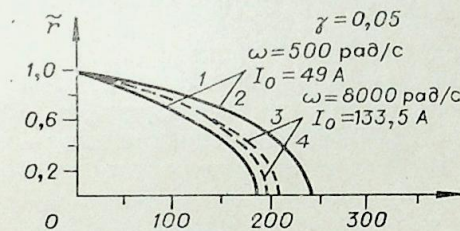


Рис. 6.

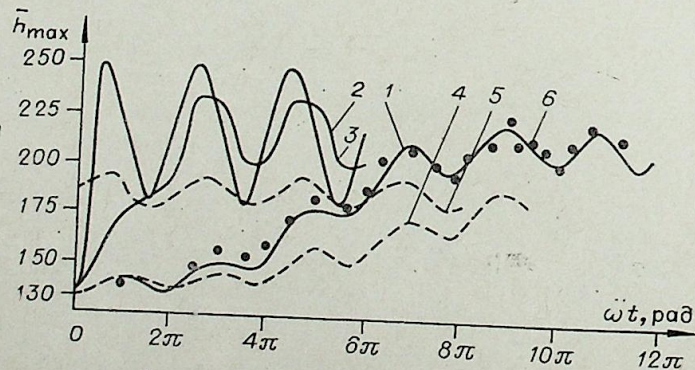


Рис. 3.  $E(t) = 1290(1 + 0,05 \sin \omega t)$  В/м.  
1 —  $R_{\text{бал}} = 0$ ,  $\omega = 8000$  рад/с; 2 —  $R_{\text{бал}} = 0$ ,  $\omega = 3000$  рад/с; 3 —  $R_{\text{бал}} = 0$ ,  $\omega = 100$  рад/с; 4 —  $R_{\text{бал}} = 0,1$  Ом,  $\omega = 8000$  рад/с; 5 —  $R_{\text{бал}} = 5$  Ом;  $\omega = 8000$  рад/с; 6 — случай 1 при  $v = \text{var}$ ,  $p = \text{var}$ .

Алтайский политехнический институт,  
Барнаул

Поступила в редакцию  
16/1 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Теория электрической дуги в условиях вынужденного теплообмена. Под ред. М. Ф. Жукова. Новосибирск, «Наука», 1977.
2. Устойчивость электрической дуги. Под ред. М. Ф. Жукова. Новосибирск, «Наука», 1973.
3. Жуков М. Ф., Коротеев А. С., Урюков Б. А. Прикладная динамика термической плазмы. Новосибирск, «Наука», 1975.
4. Лебедев А. Д., Урюков Б. А., Фридрих А. Э. Продольно обдуваемая электрическая дуга. — В кн.: Генераторы низкотемпературной плазмы. М., «Энергия», 1968.
5. Пасконов В. М. — В кн.: Численные методы в газовой динамике. М., МГУ, 1963.

А. Д. ЛЕБЕДЕВ, В. И. НАЗРУК, В. А. ГАПОНОВ

### НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ПУЛЬСАЦИЙ «ТУРБУЛЕНТНОЙ» ДУГИ

Настоящая работа является продолжением исследований, начатых в [1] и посвященных разработке метода фотоэлектрической регистрации пульсаций формы и положения дуги, горящей на участке перехода к турбулентному режиму. В основу метода положен принцип дискретного считывания положения дуги и ее поперечных размеров с помощью линеек фотоячеек (ЛФЯ).

На рис. 1 схематично показана электродуговая установка, подробно описанная в работе [2], на которой проводилась отладка измерительного тракта и исследование пульсационных характеристик дуги на участке  $Z \gg Z_0$ .

Излучение дуги, горящей между катодом (К) и анодом (А) на оси струи, сформированной соплом (С), с помощью оптической системы  $O_1$  и  $O_2$  проецируется на две ЛФЯ, разнесенные на расстояние  $\Delta Z$  и ориентированные так, что обе они параллельны оси  $X$ , которая с осью  $Z$  (совпадающей с осью потока), образует прямоугольную систему координат.

Каждая фотоячейка реагирует на определенный уровень интенсивности излучения  $I_n$  и работает по следующему принципу (рис. 2). Полупроводниковый фотодиод (ФД) используется как генератор тока, а интегральный операционный усилитель (ОУ) служит преобразователем ток — напряжение [3]. Нагрузкой ФД является входное сопротивление ОУ, которое при наличии обратной связи ( $R_{oc}$ ) может быть достаточно малым, что позволяет увеличить быстродействие схемы за счет уменьшения влияния собственной емкости ФД, а также повысить линейность световой характеристики. Чувствительность ФЯ в широком диапазоне регулируется изменением сопротивления  $R_{oc}$ .

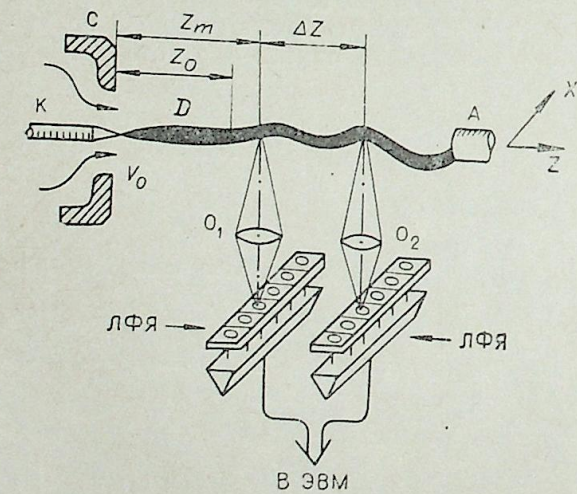


Рис. 1. Схема экспериментальной установки для исследования пульсаций дуги.

С выхода ОУ сигнал поступает в дискриминатор уровня [4], выполненный на интегральных схемах транзисторно-транзисторной логики и через блок сопряжения по каналу прямого доступа

вводится в оперативную память ЭВМ. Сопряжение с ЭВМ выполнено на основе действующей в ИТФ СО АН СССР системы сбора и обработки информации, построенной на базе ЭВМ с развитой оперативной и внешней памятью, аппаратные возможности которой определили при 12 активных ФЯ максимальную скорость ввода  $6 \cdot 10^4$  бод и объем одной реализации  $2 \cdot 10^5$  бит.

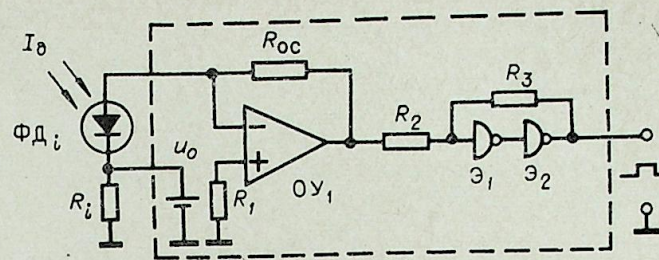


Рис. 2. Структурная схема фотоячейки.

Дискретизация измеряемого процесса и ввод информации в ЭВМ осуществлялись с кварцовой частотой. Разработанный комплекс диагностических тестов позволял провести перед экспериментом проверку системы на работоспособность.

Прежде чем переходить к описанию программы обработки экспериментальных данных, напомним определение, данное Меккером [5], суть которого состоит в том, что для количественного описания движения дуги (в особенности это относится к турбулентной дуге), необходимо знать положение центра тяжести некоторого температурного облака, являющегося источником излучения и скорости его движения. При этом предполагается, что распределение температуры не обязательно имеет один максимум, а положение центра тяжести не всегда совпадает с осью потока. В нашем случае при отладке системы мы ограничились исследованием пульсаций дуги лишь в проекции на ось  $X$ .

Дуга на участке перехода к турбулентному режиму под воздействием различных факторов [2, 5] перемещается в поле зрения оптической системы ЛФЯ (рис. 1) в виде самосветящегося облака, положение и ширина которого фиксируются на дискретной пространственно-временной сетке одновременно в двух сечениях ( $Z_m$  и  $Z_n$ ), соответствующих центрам ЛФЯ и связанным условием  $Z_n = Z_m + \Delta Z$ . Полученные при этом координаты центров тяжести излучения образуют набор реализации двух стационарно связанных процессов [1], к которым применимы развитые методы спектрального анализа [6].

Тем самым мы приходим к рассмотрению  $N$ -мерного стационарного случайного процесса:

$$X(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), \dots, x_N(t)], \quad (1)$$

$n$ -я компонента которого — одномерный случайный процесс, соответствующий точке  $Z_n$ .

Элементы корреляционной матрицы  $R(\tau) = \{r_{mn}(\tau)\}$  процесса (1) определяются соотношением

$$r_{mn}(\tau) = E\{(x_m(t) - Ex_m(t))(x_n(t+\tau) - Ex_n(t))\}, \quad (2)$$

где  $E\{\cdot\}$  — оператор математического ожидания.

Элементы соответствующей матрицы спектральных плотностей  $G(f) = \{g_{mn}(f)\}$  записываются в виде

$$g_{mn}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{mn}(t) \exp(-2\pi jft) dt, \quad (3)$$

где  $j = \sqrt{-1}$ .

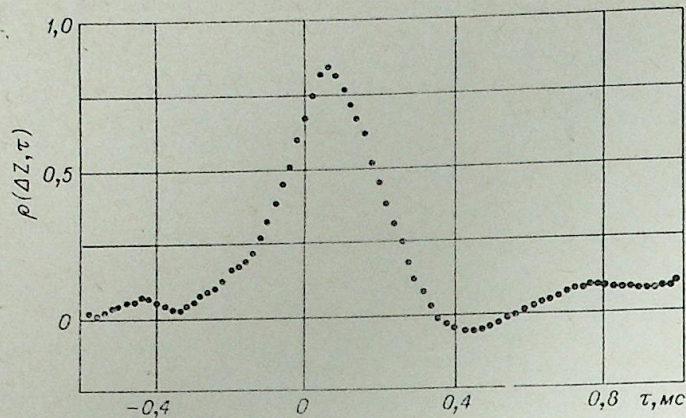


Рис. 3. Нормированная взаимно-корреляционная функция поперечных пульсаций дуги.

Поскольку цифровая обработка результатов эксперимента на ЭВМ предполагает дискретное представление исследуемого процесса  $X(t)$  и конечное время его наблюдения, то характеристикам (2), (3) ставятся в соответствие их дискретные аналоги

$$\tilde{r}_{mn}(kh) = \frac{1}{L-K} \sum_{l=1}^{L-K} (x_m(lh) - \bar{x}_m)(x_n(lh+kh) - \bar{x}_n), \quad (4)$$

$$\tilde{r}_{mn}(-kh) = \tilde{r}_{nm}(kh), \quad k = 0, 1, \dots, K.$$

Здесь  $h$  — шаг дискретизации реализации процесса,  $\bar{x}_m$  и  $\bar{x}_n$  — выборочные средние, вычисленные по реализациям соответствующих компонент процесса (1),  $L$  — длина реализации.

$$g_{mn}(f_q) = \sum_{k=-M}^M \left(1 - \frac{|k|}{L}\right) W_k \tilde{r}_{mn}(kh) \exp(-2\pi j k h f_q), \quad (5)$$

где  $M \leq K$ ,  $W_k$  — весовая функция (корреляционное окно),  $M$  — точка отсечения корреляционной функции,  $f_q = q/(hL_M)$ ;  $q = 0, 1, \dots, L_M/2$ ;  $2M < L_M \leq L$ .

Вычисления на ЭВМ проводились при помощи программы, написанной на алгоритмическом языке ФОРТРАН IV и построенной на основе пакета подпрограмм быстрого преобразования Фурье (БПФ) [7]. Модульный принцип построения программы и диалоговая форма общения с ЭВМ позволяют оперативно вмешиваться в ход эксперимента и изменять набор вычисляемых характеристик.

Программа предусматривает выполнение следующих действий.

1. Ввод реализации в ЭВМ с последующим проведением необходимых преобразований измеряемых сигналов.

2. Вычисление вектора выборочных средних.

3. Центрирование реализации.

4. Вычисление вектора выборочных дисперсий.

5. Вычисление выборочной кор-

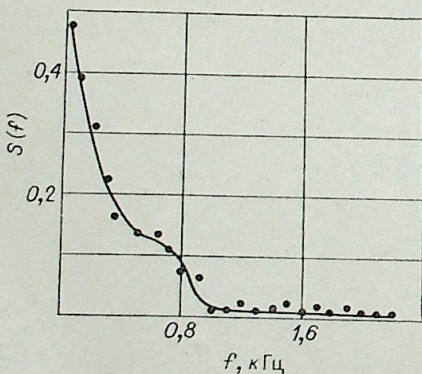


Рис. 4. Амплитудный спектр поперечных пульсаций дуги.

реляционной матрицы. Для этого центрированная реализация дополняется некоторым количеством нулей, число которых связано с величиной  $K$ , после чего выполняется обычная процедура вычисления выборочных корреляционных функций, основанная на применении БПФ [8]. Следует подчеркнуть, что элементы получаемой таким образом выборочной корреляционной матрицы тождественно совпадают с традиционной оценкой (4), как если бы вычисления велись прямым, мультипликативным методом.

6. Вычисление нормированной взаимно-корреляционной функции

$$\rho(\Delta Z, \tau) = \tilde{r}_{mn}(\tau) / \sqrt{\tilde{r}_{mn}(0) r_{nn}(0)},$$

где  $\tau = lh$ ,  $l = 0, 1, \dots, K$ .

7. Вычисление выборочной спектральной матрицы;

8. Вычисление амплитудного  $S(f_q)$  и фазового  $\Theta(f_q)$  спектров для соответствующих взаимных спектров:

$$S(f_q) = |g_{mn}(f_q)|; \quad \Theta(f_q) = \arctg \left[ -\frac{\text{Im } g_{mn}(f_q)}{\text{Re } g_{mn}(f_q)} \right].$$

Приведем некоторые из вычисленных по этой программе характеристик. Так, на рис. 3, 4 представлены кривые  $\rho(\Delta Z, \tau)$  и  $S(f_q)$ , характерные для режимов, при которых влияние электромагнитной составляющей дуги пренебрежимо мало по сравнению с турбулентными пульсациями потока (малые  $I_d$ , большая  $V_0$  и  $Z_m \gg Z_0$ ). При этом полученные характеристики близки к ранее известным для турбулентных струй [9]. Дуга в данном случае играет роль метки, визуализирующей течение.

Таким образом, применение предложенной системы регистрации с последующей обработкой позволяет получить статистические характеристики пульсаций дуги, анализ которых дает необходимую информацию о ее структуре при переходе к турбулентному режиму горения.

Институт теплофизики  
СО АН СССР,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
20/II 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лебедев А. Д., Назарук В. И. Исследование пульсаций дуги в турбулентном потоке фотоэлектрическим методом. — Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1976, № 13, сер. техн. наук, вып. 3, с. 50—57.
2. Жуков М. Ф., Коротеев А. С., Урюков Б. А. Прикладная динамика термической плазмы. Новосибирск, «Наука», 1975, с. 298.
3. Вендлэнд. Светочувствительный датчик в виде пары кремниевый фотодиод — операционный усилитель. — Электроника, 1971, 44, № 11, с. 30—33.
4. Дьяков В. П. Ограничители амплитуды и пороговые устройства на интегральных схемах. — ПТЭ, 1976, № 2, с. 75—77.
5. Меккер Г. Причины движения и смещения дуги. — ТИИЭР, 1971, 59, № 4, с. 4—14.
6. Хеннан Э. Многомерные временные ряды. М., «Мир», 1974, с. 575.
7. Гапонов В. А. Пакет подпрограмм быстрого преобразования Фурье с приложениями к моделированию случайных процессов. Новосибирск, ИТФ, препринт 14—76, 1976. 19 с.
8. Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. М., «Мир», 1974. 463 с.
9. Хинце И. О. Турбулентность. М., Физматгиз, 1963. 680 с.

В. М. БАТЕНИН

ВОЗМОЖНОСТИ СВЧ-МЕТОДА  
ГЕНЕРАЦИИ ПЛАЗМЫ

Несмотря на то, что работы по СВЧ-пробое в газах начались в 50-х годах, технологические и исследовательские плазмотроны были созданы только в последние десять лет, а исследования параметров плазмы и кинетики ее основных процессов стали проводиться совсем недавно. И все же уже накоплен достаточно обширный материал не только по осуществлению тех или иных реакций, но и по определению скоростей более чем тридцати конкретных химических процессов в СВЧ-плазме.

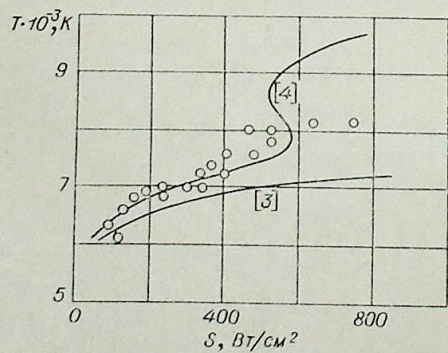
Как правило, СВЧ-разряды возбуждаются в разрядных устройствах коаксиальной или волноводной геометрии. Источником СВЧ-мощности служат магнетронные или клистронные генераторы. Наиболее распространенным в настоящее время является дециметровый диапазон длин волн и мощности порядка  $20 \div 10$  кВт. В ближайшее время возможно появление генераторов мощностью до 100 кВт примерно в том же диапазоне длин волн. Однако, на наш взгляд, отсутствие генераторов большой единичной мощности не является большим недостатком, так как проведение технологических процессов вполне возможно при одновременной работе на плазменную нагрузку нескольких генераторов. Одной из важнейших энергетических характеристик СВЧ-плазмотрона является коэффициент передачи энергии в плазму  $\eta = W_{пл}/W_{ген}$ , где  $W_{пл}$  — мощность, поглощаемая плазмой,  $W_{ген}$  — генерируемая мощность.

Эта характеристика в первом приближении может быть рассчитана путем представления плазмотрона в виде волноводного узла с сосредоточенными параметрами. Конкретные вычисления для плазмотронов различных конструкций содержатся в исследованиях [1, 2], наиболее характерная величина  $\eta \approx 0,5$ . Она может быть повышена путем использования целого ряда подстроечных элементов. Однако работа в максимуме величины  $\eta$  связана с возможностью появления срывов разряда. Построение теории устойчивости СВЧ-разрядов еще далеко от

завершения, а имеющиеся в [1, 3] указания на положение границы устойчивости носят чисто качественный характер.

Второй важнейшей характеристикой СВЧ-разряда является зависимость достижимой температуры плазмы  $T$  от плотности потока подводимой мощности.

Рис. 1. Зависимость температуры на оси разряда от плотности потока подводимой мощности.



дистой мощности  $S$ . В случае равновесия в плазме эта зависимость может быть рассчитана согласно [3, 4], измерения выполнены в [2, 5]. На рис. 1 приведен вид этой зависимости.

Анализ результатов расчета и эксперимента показывает, что в области сильно развитого скинирования ( $\Delta \ll r$ ) одни и те же температуры в электрической дуге и в СВЧ разряде достигаются при погонных мощностях, связанных соотношением:  $L_{свч}/L_D = 0,4r/\Delta$ , где  $L_{свч}$ ,  $L_D$  — мощности, вкладываемые в единицу длины разряда;  $r$  — характерный радиус плазменного образования;  $\Delta$  — толщина скин-слоя.

Учитывая, что в равновесных условиях значения  $\Delta \approx 0,1$  см достигаются для дециметрового диапазона длин волн при  $T \approx 7 \cdot 10^3$  К, можно сделать вывод о бесперспективности использования СВЧ-разрядов для равновесного нагрева плазмы до значительных температур. Основные перспективы применения СВЧ-разрядов связаны с достижением в них высокой степени неравновесности за счет высокой напряженности электрического поля. К сожалению, расчет параметров неравновесных СВЧ-разрядов сильно осложняется из-за отсутствия сведений о распределении напряженности поля в ближней зоне разряда.

Необходимое для этого решение уравнений электродинамики в граничных условиях, задаваемых реальной конструкцией плазмотрона, известно только для простейших случаев [6]. Немногочисленные экспериментальные попытки измерения напряженности электрического поля в плазме как коаксиальных, так и волноводных плазмотронов [2, 7] показывают, что при сравнительно умеренных мощностях достигаются напряженности поля на границе плазмы до 100 В/см и более. Столь высокие напряженности поля приводят к тому, что, например, в гелиевой плазме при атмосферном давлении [2] устанавливается сильно неравновесное состояние с  $T_e \approx 19 \cdot 10^3$  К и  $T_a \approx 6,5 \cdot 10^3$  К. Анализ кинетики ионизации свидетельствует о том, что стационарная концентрация электронов  $N_e \approx 5 \cdot 10^{13}$  см<sup>-3</sup> устанавливается за счет равновесия между ионизацией и диффузионными потерями к границам разряда.

В качестве усложняющей кинетику добавки в [2] рассмотрена смесь гелия и аргона с азотом и водородом. Примесь 1% азота к гелию приводит к стационарному состоянию плазмы с  $T_e \approx 11 \cdot 10^3$  К,  $T_a \approx 7,2 \cdot 10^3$  К,  $N_e \approx 7,5 \cdot 10^{13}$  см<sup>-3</sup>. Столь сильное понижение электронной температуры объясняется неупругими взаимодействиями электронов с атомами азота, приводящими к возбуждению <sup>2</sup>D и <sup>2</sup>P термов. В кинетике определяющую роль начинает играть ионизация атома азота в соударениях с резонансно возбужденными атомами гелия. Константа этого процесса  $\langle Q_{ион} \rangle \approx 2,6 \cdot 10^{-9}$  см<sup>3</sup>/с.

Еще более сложной становится кинетика процессов в плазме смесей аргона и гелия с водородом. При тех же значениях  $L_{свч}$  плазма смесей 80% (Ag или He) и 20% H<sub>2</sub> атмосферного давления характеризуется достаточно слабой степенью неравновесности [2, 8]  $T_e \approx 10 \cdot 10^3$  К,  $T_a \approx 8 \cdot 10^3$  К,  $N_e \approx 1,7 \cdot 10^{15}$  см<sup>-3</sup>. В смеси Ag+H<sub>2</sub> еще возможно объяснить наблюдаемые концентрации электронов и возбужденных атомов водорода с привлечением процесса перезарядки типа  $Ag^+ + H_2 \rightarrow H^+ + Ag + \delta E$ . Распределения же атомов H по возбужденным состояниям в чистом H<sub>2</sub> [9] и смеси He+H<sub>2</sub> [2] требуют для своего объяснения привлечения неизвестного пока неупругого процесса с сечением  $\approx 10^{-13}$  см<sup>2</sup>. Исследование даже таких простых смесей показывает, что решение вопроса о протекании той или иной плазмохимической реакции требует тщательного анализа всех возможных кинетических процессов.

СВЧ-разряды представляют еще одну возможность для осуществления технологических процессов в плазме. Речь идет о возможности использования движущихся разрядов и ведении процесса во фронте ионизации. Одной из важнейших характеристик таких разрядов явля-

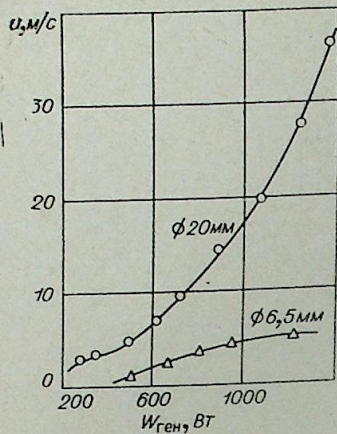


Рис. 2. Зависимость скорости разряда в азоте от подводимой мощности при давлении  $3 \cdot 10^3$  н/м<sup>2</sup>.

сти  $u$ , следовательно, об определяющей роли неравновесных процессов на фронте ионизации. Согласно современным представлениям, процесс движения фронта ионизации в этом случае определяется предварительным прогревом газа перед фронтом и его дальнейшим пробоем в СВЧ-поле и описывается системой уравнений

$$E_{гд} = f\{Te(x, y, z), Ne(x, y, z), W_{ген}\};$$

$$W_{пл} = \rho_0 u h_k s; v_i(T_0) = v_a(T_0) + D/\Lambda^2,$$

где, кроме уже известных величин,  $\rho_0$  — плотность холодного газа;  $h_k$  — энтальпия газа за фронтом;  $s$  — площадь поперечного сечения разряда;  $v_i, v_a$  — частоты ионизации и прилипания электронов;  $D, \Lambda$  — коэффициент диффузии и диффузионная длина.

Эта картина подтверждается экспериментами в узкой трубке, диаметр которой выбран так, чтобы исключить возможность пробоя в приложенных СВЧ-полях (рис. 2). Об этом же свидетельствует наблюдаемое уменьшение скорости разряда во внешнем магнитном поле с  $\vec{H} \parallel \vec{E}$  и  $\vec{H} \perp \vec{E}$ , приводящем к снижению эффективной напряженности электрического поля на фронте разряда. Движущийся в молекулярных газах СВЧ-разряд представляет собой плазменный столбик, ориентированный вдоль силовых линий электрического поля в волноводе. Степень заполнения поперечного сечения трубки зависит от давления и подводимой мощности. Типичные параметры плазмы в разряде  $Ne \approx 10^{12}$  см<sup>-3</sup>,  $Te \approx 3$  эв,  $Ta \approx 2500$  К и слабо зависят от подводимой мощности. При больших подводимых мощностях равномерность движения разряда вдоль трубки может нарушаться за счет пробоя и образования замкнутых плазменных колец за фронтом разряда. Однако этот эффект легко может быть исключен и не оказывает существенного влияния на возможности технологического использования движущихся СВЧ-разрядов. Приведенные на рис. 3 зависимости скорости разряда в тяжелых атомарных газах от давления [12] свидетельствуют о малой роли эффекта теплопроводности. Дополнительные эксперименты с использованием внешнего магнитного поля  $\vec{H} \perp \vec{E}$  и диафрагм из материала, пропускающего резонансное излучение [13], показали, что в области высоких давлений основной механизм распространения связан с диффузией резонансного излучения. В обла-

сти малых давлений дополнительное ускорение разряда вызвано диффузией электронов. Разряд имеет нитевидную структуру, наиболее ярко выраженную при высоких давлениях. Нити практически неподвижны и, возникнув на фронте разряда, исчезают, когда уровень мощности за ушедшим вперед разрядом становится недостаточным для их поддержания. Спектральные и зондовые измерения, показали, что плазма в нитях с  $Ne \approx 10^{15}$  см<sup>-3</sup> и  $Te \approx (7 \div 8) \cdot 10^3$  К близка к равновесию. Пространство между нитями при низких давлениях заполнено плазмой с  $Ne \approx 10^{13}$  см<sup>-3</sup> и  $Te \approx 5$  эв. С точки зрения исследования кинетики процессов и возможного использования движущихся разрядов интересны особенности их движения в смесях инертных газов с молекулярными. 10%-ная добавка азота или водорода к аргону приводит к снижению скорости разряда почти на три порядка при атмосферном давлении. Столь сильное влияние примесей вызывается двумя причинами. Во-первых, как и в стационарных разрядах, происходит уменьшение электронной температуры за счет неупругих соударений. Во-вторых, при равенстве скоростей возбуждения резонансного уровня электронным ударом и тушения его в соударениях с молекулами происходит подавление быстрого механизма распространения. Это позволяет создавать смеси, в которых возможно протекание молекулярных реакций, а скорость распространения определяется диффузией резонансного излучения, т. е. снимается проблема закалки. СВЧ-разряд имеет некоторые дополнительные по сравнению с дуговым разрядом возможности управления параметрами плазмы. В первую очередь укажем на возможность магнитной стабилизации движущихся разрядов [14].

Интерес представляет также использование комбинированных дуговых и СВЧ-разрядов. На рис. 4 представлена вольт-амперная по постоянному току характеристика комбинированного разряда в азоте. В зоне I  $W_D < W_{СВЧ}$  плазма СВЧ разряда служит омическим сопротивлением для постоянного тока. В зоне II  $W_D \geq W_{СВЧ}$  и вклад СВЧ мощности приводит к уширению радиальных распределений параметров плазмы и нагреву электронов в периферийных зонах. К подобным же эффектам приводит дополнительный вклад СВЧ-мощности в неравновесный дуговой разряд, горящий, например, в смеси аргона с водородом. Такие разряды обладают и большей устойчивостью в продольном магнитном поле.

На рис. 5 изображена напряженность поля в разряде, горящем в аргоне с 20% водорода, в зависимости от напряженности внешнего магнитного поля. Излом кривых свидетельствует о развитии винтовой неустойчивости. Анализ механизма развития данного вида неустойчивости показывает, что стабилизирующие факторы связаны с полной плотностью теплового потока на периферии разряда. При сохранении постоянным тока дуги это позволяет записать критерий устойчивости в виде [16]

$$H_{кр} \frac{r_D}{E_D} \left( 1 + \frac{W_{СВЧ}}{W_D} \right)^{-1} = \text{const.}$$

Результаты экспериментов [15] полностью подтвердили этот вывод. В заключение отметим, что уже накопленный опыт работы с СВЧ-разрядами свидетельствует о возможности их эффективного использо-

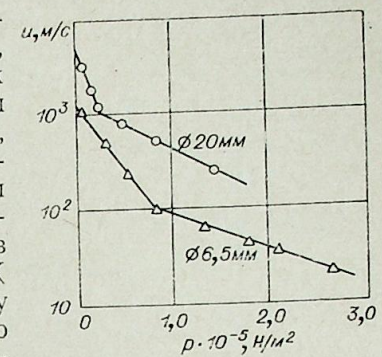


Рис. 3. Зависимость скорости разряда в аргоне от давления при подводимой мощности 1200 Вт.

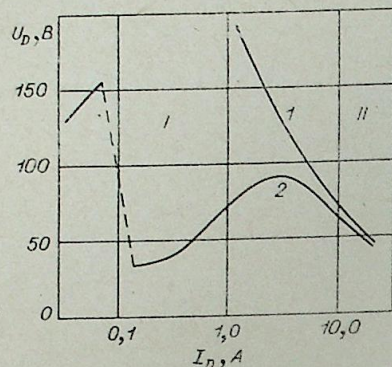


Рис. 4. Вольт-амперная характеристика комбинированного разряда. 1 —  $W_{\text{СВЧ}} = 0$ ; 2 —  $W_{\text{СВЧ}} = 500$  Вт.

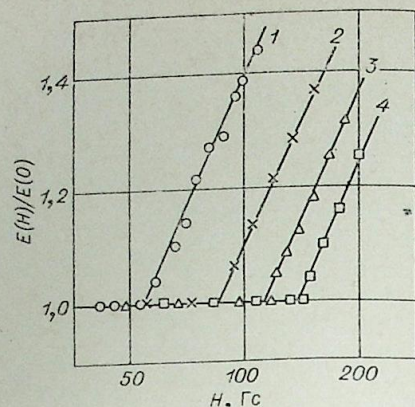


Рис. 5. Поведение напряженности поля комбинированного разряда во внешнем магнитном поле. Ток дуги  $I_D = 5$  А, рабочее тело — аргон+20% водорода; 1 —  $W_{\text{СВЧ}} = 0$ ; 2 — 220 Вт; 3 — 360 Вт; 4 — 480 Вт.

И. А. ГОРБАНЬ, Ю. В. ЛИПОВЦЕВ

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЕ РЕШЕНИЕ  
НЕСТАЦИОНАРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ  
ЛУЧИСТО-КОНДУКТИВНОГО ТЕПЛОБМЕНА  
И ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ДВУХПОТОКОВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ  
ДЛЯ КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕД

вания. Однако в этом направлении предстоит еще проделать большую работу как по исследованию чисто физических свойств таких разрядов, так и по проведению в них конкретных технологических процессов.

Институт высоких температур  
АН СССР, Москва

Поступила в редакцию  
11/IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Балтин Л. М., Батенин В. М., Девяткин И. И., Цемко Н. И. Расчет характеристик СВЧ-плазмотронов непрерывного действия методом эквивалентных схем. — Электронная техника, сер. 1. Электроника СВЧ, вып. 1, 26, 1972.
2. Зродников В. С. Кинетика ионизации в неравновесной плазме СВЧ-разрядов атмосферного давления. Канд. дис. М., 1976.
3. Райзер Ю. П. Лазерная искра и распространение разрядов. М., «Наука», 1974, с. 251—258.
4. Мейерович Б. Э. К теории равновесного высокочастотного газового разряда. — ЖЭТФ, 1971, 61, 1971.
5. Балтин Л. М. Экспериментальное исследование стационарного СВЧ-разряда как источника низкотемпературной плазмы. Канд. дис. М., 1974.
6. Розовский М. О. Некоторые вопросы теории безэлектродных разрядов. Канд. дис. М., 1973.
7. Блинов Л. Б., Володько В. В., Гонтарев Г. Г., Лысов Г. В., Полак Л. С. Сверхвысокочастотные плазмотроны, их характеристики и область применения. — В кн.: Генераторы низкотемпературной плазмы. М., «Энергия», 1969. 345 с.
8. Зродников В. С., Роддатис В. К., Чиннов В. Ф. К расчету параметров СВЧ-разряда атмосферного давления. Тр. VII Всес. конф. по генераторам низкотемпературной плазмы. Алма-Ата, 1977.
9. Батенин В. М., Зродников В. С., Роддатис В. К., Чиннов В. Ф. СВЧ-разряд в водороде. — Теплофизика высоких температур, 1975, 13, 270.
10. Велихов Е. П., Дыхне Л. М. Волна неравновесной ионизации в газе. Тр. VII Междунар. конф. по явлениям в ионизованных газах. Белград, 1965.
11. Батенин В. М., Зродников В. С., Климовский И. И., Цемко Н. И. О механизме распространения сверхвысокочастотного разряда в воздухе. — ЖЭТФ, 1972, 63, 854.
12. Батенин В. М., Климовский И. И., Хамраев В. Р. Распространение СВЧ-разрядов в тяжелых атомарных газах. — ЖЭТФ, 1976, 71, 603.
13. Betke G. W., Ruess A. Microwave-induced plasma shield propagation in rare gases. — Phys. Fluids, 1969, 12, 822.
14. Батенин В. М., Зродников В. С., Климовский И. И., Овчаренко В. А., Цемко Н. И. Стабилизированный магнитным полем СВЧ-разряд. — Теплофизика высоких температур, 1971, 9, 1289.
15. Афанасьев А. М., Батенин В. М., Роддатис В. К. Винтовая неустойчивость дуги постоянного тока в магнитном поле и влияние на нее СВЧ-поля. Тр. Междунар. конф. по газовому разряду. Дубровник, 1975. 465 с.
16. Батенин В. М., Роддатис В. К. Комбинированный разряд и подавление винтовой неустойчивости СВЧ-полем. Тр. XIII Междунар. конф. по явлениям в ионизованных газах. Берлин, 1977, 341 с.

Нестационарным задачам лучисто-кондуктивного теплообмена в конденсированных средах посвящен ряд работ [1—10]. В [1] рассмотрена кинетика прогрева плоского слоя серой поглощающей среды за счет конвекции. Обобщение решения на случай селективно поглощающей среды при наличии внешних источников радиации дано в [2]. Уравнение теплового баланса с помощью функции Грина [1, 2] сводится к системе нелинейных алгебраических уравнений, решение которых осуществляется по схеме Ньютона путем итераций. В работе [3] рассмотрена задача для плоского слоя серой среды, когда температура границ меняется по заданному закону. Перепад температур предполагается малым, что дает возможность провести линеаризацию основных уравнений. Оценке несущей способности иллюминаторов посвящены работы [4—6], а в [7—8] исследуются технологические процессы термической обработки стекол.

Анализ работ, посвященных изучению процессов комбинированного переноса тепла радиацией и теплопроводностью, показывает, что нестационарные задачи являются наименее изученными, а решения в строгой постановке практически отсутствуют [10].

В статье разработан алгоритм конечно-разностного решения широкого класса нестационарных краевых задач, возникающих при изучении процессов лучисто-кондуктивного теплообмена плоского слоя с окружающей средой. В основу решения положены точные уравнения лучисто-кондуктивного переноса тепла в поглощающих средах. Полученный алгоритм использован в качестве критерия для сопоставления и анализа существующих приближенных уравнений переноса для потоков. Установлены основные источники погрешностей приближенных уравнений, ограничивающие их применение для конденсированных сред.

1. Рассмотрим плоский слой полупрозрачного материала (рис. 1), ограниченный оптически гладкими поверхностями, находящийся в условиях лучисто-конвективного теплообмена с окружающей средой. В общем случае коэффициент конвективного теплообмена  $h_0$ , температуру окружающей среды  $T_0$  и интенсивность внешнего излучения  $\Phi_0$  будем считать произвольными функциями времени, заданными аналитически или таблично. Интенсивность внешнего излучения  $\Phi_0$  обладает азимутальной симметрией. Материал характеризуется двумя спектральными областями: в области частичной прозрачности ( $\lambda_p$ ) собственное

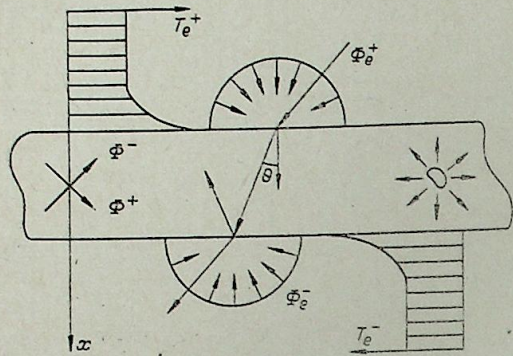


Рис. 1.

излучение вещества носит объемный характер [11]; в области сильного поглощения ( $\lambda_n$ ) внешняя радиация не проникает в глубь материала. Это сплошные интервалы или совокупность дискретных отрезков. В процессе теплообмена температурная зависимость терморадационных характеристик материала учитывается по средней температуре слоя. Среда считается чисто поглощающей.

При данных предпосылках задача о распределении температур по толщине слоя связана с задачей лучистого переноса тепла. Уравнения лучистого переноса целесообразно представить в форме [12]

$$\begin{aligned} \cos \Theta (d\Phi^+/dx) &= -\alpha\Phi^+ + \alpha n^2 B(\lambda, T)/\pi, \\ \cos \Theta (d\Phi^-/dx) &= \alpha\Phi^- - \alpha n^2 B(\lambda, T)/\pi, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $n$  и  $\alpha$  спектральные коэффициенты преломления и поглощения вещества;  $B(\lambda, T)$  — поверхностная плотность равновесного излучения абсолютно черного тела.

Тогда граничные условия относительно интенсивностей  $\Phi^+$  и  $\Phi^-$  лучей, составляющих соответственно острые углы с внутренними нормальными к поверхностям слоя  $x=0$  и  $x=d$ , будут

$$\begin{aligned} \Phi^+ - R_2\Phi^- - n^2(1 - R_1)\Phi_e^+ &= 0, \quad x = 0; \\ \Phi^- - R_2\Phi^+ - n^2(1 - R_1)\Phi_e^- &= 0, \quad x = d. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Коэффициенты отражения  $R_2$  и  $R_1$  от внутренней и внешней поверхностей зависят от угла падения луча  $\Theta$  и определяются по формулам Френеля.

Уравнение кондуктивного переноса тепла с учетом поглощения и излучения тепловой радиации имеет вид [13]

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial \tau} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2 \int_{(\lambda_n)}^{\pi/2} d\lambda \int_0^{\pi/2} \alpha [\pi(\Phi^+ + \Phi^-) - 2n^2 B] \sin \Theta d\Theta \quad (1.3)$$

с граничными условиями на каждой из поверхностей

$$\begin{aligned} \pm KH_1 \frac{\partial T}{\partial x} + 2H_2 \int_{(\lambda_n)}^{\pi/2} d\lambda \int_0^{\pi/2} \epsilon^\pm (\pi\Phi_e^\pm - B^\pm) \sin \Theta \cos \Theta d\Theta + \\ + h_e^\pm (T_e^\pm - T^\pm) = 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Знак  $+$  в уравнении (1.4) при первом слагаемом относится к поверхности  $x=0$ , знак  $-$  ко второй поверхности  $x=d$ . Аналогично при наличии двух индексов в некоторых членах: верхний относится к поверхности  $x=0$ , нижний — к поверхности  $x=d$ . Направленная спектральная степень черноты материала  $\epsilon$  в общем случае зависит от переменных  $\lambda, \Theta$ .

Константы  $H_1, H_2$  введены в уравнения (1.4) формально и могут принимать значения 0 или 1. Благодаря этому путем конкретизации

их значений можно варьировать условия теплообмена на поверхностях. Например, классический вариант граничных условий первого рода реализуется при  $H_1=0, H_2=0$ . Граничным условиям второго рода соответствуют значения коэффициентов  $H_1=1, H_2=0$ . Если  $h_e^\pm=0$ , а  $H_1=1, H_2=1$ , то имеем чисто лучистый нагрев. В общем случае имеем комбинацию всех указанных факторов и уравнение (1.4) позволяет описать условия комбинированного лучисто-конвективного теплообмена с окружающей средой.

Таким образом, задача состоит в разыскании решений  $\Phi^+(x, \tau, \lambda, \Theta), \Phi^-(x, \tau, \lambda, \Theta), T(x, \tau)$ , удовлетворяющих дифференциальным уравнениям (1.1), (1.3) и граничным условиям (1.2), (1.4) с начальным условием для температуры  $T(x, 0) = T^0(x)$ . При этом переменные  $\lambda, \Theta$  входят в уравнение (1.1) как параметры, для каждого значения которых требуется найти зависимость интенсивностей лучей  $\Phi^+, \Phi^-$  от переменных  $x, \tau$ . Это обстоятельство позволяет построить общую схему решения задачи следующим образом.

Интересуемый интервал по времени разбивается на ряд равных промежутков величиной  $\Delta\tau$ . Производные по времени расписываются в конечных разностях, и задача сводится к последовательному определению искоемых функций в дискретных точках по времени с шагом  $\Delta\tau$ .

В начальный момент времени  $\tau=0$ , для которого распределение температур задано, путем численного интегрирования уравнений (1.1) с граничными условиями (1.2) находятся функции  $\Phi^\pm(x)$  для всех необходимых значений параметров  $\lambda, \Theta$ . Найденные функции подставляются в уравнение (1.3), записанное для следующего момента времени, и граничные условия (1.4). Путем решения этих уравнений находим распределение температур в момент времени  $\tau_1 = \tau_0 + \Delta\tau$ .

Затем полученное распределение температур уточняется с помощью итерационного процесса и после этого описанные операции повторяются с продвижением еще на один шаг по времени и т. д.

Таким образом, решение задачи в целом сводится к периодическому повторению последовательного решения двух краевых задач: одной с дифференциальными уравнениями (1.1) и граничными условиями (1.2), другой — с уравнением (1.3) и граничными условиями (1.4). Решение разностных уравнений обеих краевых задач проводится методом прогонки [14].

2. Рассмотрим алгоритм решения первой краевой задачи, связанной с определением функций  $\Phi^+(x)$  и  $\Phi^-(x)$ . Конечно-разностный аналог уравнений (1.1) возьмем в следующей форме (здесь  $\Delta x$  — шаг между узловыми точками по координате  $x$ ):

$$\begin{aligned} \cos \Theta \frac{\Phi_i^+ - \Phi_{i-1}^+}{\Delta x} + \alpha\Phi_i^+ - \frac{\alpha n^2}{\pi} B_i &= 0, \\ \cos \Theta \frac{\Phi_{i+1}^- - \Phi_i^-}{\Delta x} - \alpha\Phi_i^- + \frac{\alpha n^2}{\pi} B_i &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

В этих уравнениях индекс  $i$  означает номер узловой точки. В первом уравнении  $i=1, 2, \dots, N$ , при  $i=0$  записывается первое граничное условие. Во втором уравнении  $i=0, 1, \dots, N-1$ , а при  $i=N$  записывается второе граничное условие, где  $N$  — номер граничной точки  $x=d$ .

Итак, в первом уравнении производная расписывается с шагом назад, а во втором — с шагом вперед. Это сделано с таким расчетом, чтобы конечно-разностная аппроксимация системы уравнений (1.1) в целом осуществлялась по трем точкам аналогично тому, как это делается для одного уравнения второго порядка.

Уменьшая индексацию второго уравнения на единицу, полную систему разностных уравнений вместе с граничными условиями (1.2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Phi_0^+ - R_2 \Phi_0^- - n^2(1 - R_1) \Phi_e^+ &= 0, \\ \Phi_i^+ - a \Phi_{i-1}^+ - b_i &= 0, \\ a \Phi_i^- - \Phi_{i-1}^- + b_{i-1} &= 0, \\ \Phi_N^- - R_2 \Phi_N^+ - n^2(1 - R_1) \Phi_e^- &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь  $i=1, 2, \dots, N$ ;  $a = \frac{\cos \theta}{\cos \theta + \alpha \Delta x}$ ,  $b_i = \frac{\alpha n^2 B_i \Delta x}{\pi (\cos \theta + \alpha \Delta x)}$ .

Структура первого граничного условия указывает на то, что между функциями  $\Phi_i^+$  и  $\Phi_i^-$  можно установить связь вида

$$\Phi_i^+ = A_i \Phi_i^- + G_i, \quad (2.3)$$

где  $A_i, G_i$  — неопределенные пока коэффициенты. Причем, согласно первому уравнению (2.2) при  $x=0$ , имеем

$$A_0 = R_2, \quad G_0 = n^2(1 - R_1) \Phi_e^+. \quad (2.4)$$

Исключая с помощью (2.3) из уравнений (2.2) функцию  $\Phi_{i-1}^+$ , затем  $\Phi_{i-1}^-$ , получим рекуррентные соотношения для определения неизвестных коэффициентов  $A_i, G_i$

$$A_i = a^2 A_{i-1}, \quad G_i = a G_{i-1} + a b_{i-1} A_{i-1} + b_i. \quad (2.5)$$

Последовательное определение этих коэффициентов (прямая прогонка) позволяет затем исключить из второго граничного условия  $\Phi_N^+$  и получить соотношение

$$\Phi_N^- = [n^2(1 - R_1) \Phi_e^- + R_2 G_N] (1 - R_2 A_N)^{-1}. \quad (2.6)$$

Путем обратной прогонки определяются функции  $\Phi_i^+$  согласно (2.3) и  $\Phi_i^-$  по рекуррентному соотношению, которое получается из третьей строки системы (2.2):

$$\Phi_{i-1}^- = a \Phi_i^- + b_{i-1}. \quad (2.7)$$

На этом вычисление искомых функций  $\Phi_i^\pm$  заканчивается.

3. Вторая краевая задача характерна той особенностью, что уравнения (1.3), (1.4) содержат функции, которые явно (функция Планка  $B(\lambda, T)$ ) или неявно (спектральная интенсивность тепловой радиации  $\Phi^\pm$  зависят от искомой температуры  $T$  и притом существенно нелинейным образом.

При конечно-разностном решении задачи оказывается возможным проведение линеаризации исходных уравнений. Для этого перепишем их в следующей форме:

$$\begin{aligned} \rho C \frac{\partial T^{m+1}}{\partial \tau} &= K \frac{\partial^2 T^{m+1}}{\partial x^2} + \Phi(x, \tau_{m+1}), \\ \pm K \frac{\partial T^{m+1}}{\partial x} + h_e^\pm [T_e^\pm(\tau_{m+1}) - T^\pm(\tau_{m+1})] &= \Psi^\pm(\tau_{m+1}), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \Phi(x, \tau) &= 2 \int_{(\lambda, \pi)} \alpha \int_0^{\pi/2} [\pi(\Phi^+ + \Phi^-) - 2n^2 B] \sin \theta d\theta, \\ \Psi^\pm(\tau) &= - \int_{(\lambda, \pi)} d\lambda \int_0^{\pi/2} \varepsilon^\pm (\pi \Phi_e^\pm - B^\pm) \sin 2\theta d\theta. \end{aligned} \quad (3.2)$$

В этих выражениях нелинейную функцию  $B(\lambda, T)$ , явно зависящую от температуры, представим в форме

$$B(\lambda, T^{m+1}) = B(\lambda, T^m) + \frac{\partial B}{\partial T} \Big|_{T=T^m} (T^{m+1} - T^m), \quad (3.3)$$

а функции  $\Phi^\pm$  представим в виде

$$\Phi^\pm(x, \tau_{m+1}) = 2\Phi^\pm(x, \tau_m) - \Phi^\pm(x, \tau_{m-1}). \quad (3.4)$$

Здесь и ниже индекс  $m$  указывает на момент времени  $t$ . Таким образом, линеаризация уравнений (3.1) осуществляется по Ньютону [15].

При построении разностной схемы для производных внутри интервала и на границах примем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_i^{m+1}}{\partial \tau} &= \frac{T_i^{m+1} - T_i^m}{\Delta \tau}, \quad \frac{\partial^2 T^{m+1}}{\partial x^2} = \frac{T_{i-1}^{m+1} - 2T_i^{m+1} + T_{i+1}^{m+1}}{\Delta x^2}, \\ \frac{\partial T^{m+1}}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{-3T_0^{m+1} + 4T_1^{m+1} - T_2^{m+1}}{2\Delta x}, \\ \frac{\partial T^{m+1}}{\partial x} \Big|_{x=d} &= \frac{T_{N-2}^{m+1} - 4T_{N-1}^{m+1} + 3T_N^{m+1}}{2\Delta x}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Если теперь соотношения (3.3) — (3.5) подставить в (3.1), то получим линейную систему разностных уравнений для определения температур  $T_i^{m+1}$  в узловых точках

$$\begin{aligned} p_0 T_0^{m+1} + p_1 T_1^{m+1} + p_2 T_2^{m+1} &= 2\Delta x (h_e^+ T_e^+ - \alpha^+ + \eta^+ T^+)^m, \\ T_{i+1}^{m+1} - (g + \gamma \xi_i) T_i^{m+1} + T_{i-1}^{m+1} &= - [\gamma (\chi_i + \xi_i T_i^m) + (g - 2) T_i^m], \\ r_0 T_N^{m+1} + r_1 T_{N-1}^{m+1} + r_2 T_{N-2}^{m+1} &= 2\Delta x (h_e^- T_e^- - \alpha^- + \eta^- T^-)^m, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где

$$\begin{aligned} p_0 &= 3K + 2\Delta x (h_e^+ + \eta^+), \quad r_0 = 3K + 2\Delta x (h_e^- + \eta^-), \\ p_1 &= r_1 = -4K, \quad p_2 = r_2 = K, \quad \gamma = \Delta x^2 / K, \end{aligned}$$

$$\chi_i = 2\pi \int_{(\lambda, \pi)} d\lambda \int_0^{\pi/2} \alpha [2(\Phi_i^+ + \Phi_i^-)^m - (\Phi_i^+ + \Phi_i^-)^{m-1} - 2n^2 B_i^m / \pi] \sin \theta d\theta$$

$$\xi_i = 4 \int_{(\lambda, \pi)} \alpha n^2 \frac{\partial B_i^m}{\partial T} d\lambda, \quad \eta^\pm = \int_{(\lambda, \pi)} d\lambda \int_0^{\pi/2} \varepsilon^\pm \frac{\partial B^\pm}{\partial T} \sin 2\theta d\theta,$$

$$\chi^\pm = \pi \int_{(\lambda, \pi)} d\lambda \int_0^{\pi/2} \varepsilon^\pm [B_m^\pm / \pi - 2\Phi_{e,m}^\pm + \Phi_{e,m-1}^\pm] \sin 2\theta d\theta,$$

$$g = \rho C \Delta x^2 / K \Delta \tau + 2, \quad i=1, 2, \dots, N-1.$$

При решении системы (3.6) уравнения преобразуются

$$T_i^{m+1} = A_i^* T_{i+1}^{m+1} + G_i^*. \quad (3.7)$$

Прогоночные коэффициенты  $A_i^*, G_i^*$  вычисляются по рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} A_i^* &= [(g + \gamma \xi_i) - A_{i-1}^*]^{-1}, \\ G_i^* &= [G_{i-1}^* + \gamma (\chi_i + \xi_i T_i^m) + (g - 2) T_i^m] A_i^*. \end{aligned} \quad (3.8)$$

После этих вычислений из граничного условия для поверхности  $x=d$  находится температура  $T_N^{m+1}$  и по формуле (3.7) в порядке убывания

номера  $i$  находятся все значения  $T_i^{m+1}$ . Исходные величины, необходимые для начала рекуррентных вычислений по формулам (3.7), (3.8), равны

$$\begin{aligned} A_0^* &= [p_1 + p_2(g + \gamma \xi_1)](p_2 - p_0)^{-1}, \\ G_0^* &= [2\Delta x (h_e^+ T_e^+ - \alpha^+ + \eta^+ T_m^+) - p_2 \gamma (\chi_i + \xi_i T_i^m) - \\ &\quad - p_2(g - 2) T_i^m] (p_0 - p_2)^{-1}, \\ T_N &= \frac{2\Delta x (h_e^- T_e^- - \alpha^- + \eta^- T_m^-) - r_1 G_{N-1}^* - r_2 A_{N-2}^* G_{N-1}^* - r_2 G_{N-2}^*}{r_0 + r_1 A_{N-1}^* + r_2 A_{N-2}^* A_{N-1}^*}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Улучшая сходимости описанной последовательности операций можно добиться путем введения итераций на каждом шаге по времени, в процессе которых последовательно уточняются решения первой и второй краевых задач. После решения уравнений (3.6) найденные температуры подставляются в уравнение первой краевой задачи (2.2) и определяются интенсивности  $\Phi^\pm(x, \tau)$ . Это позволяет уточнить нелинейные функции  $\varphi, \psi$  и повторить решение уравнений (3.6) и т. д.

В результате решения широкого круга задач при различных условиях теплообмена на границах установлено, что при введении небольшого числа итераций на каждом шаге по времени предлагаемый алгоритм обладает устойчивостью вычислительного процесса и хорошей сходимостью результатов.

4. Численное решение точных уравнений позволяет провести сравнительный анализ и дать оценку некоторым приближенным теориям, которые основаны на упрощении исходных соотношений. В инженерной практике приближенные схемы расчета комбинированного переноса тепла находят широкое применение, однако вопрос о точности и границах их достоверности для конденсированных систем в силу математических трудностей остается малозученным.

Проведен некоторый анализ погрешностей уравнений двухпоточкового приближения. Наиболее строгий и последовательный подход к построению приближенных уравнений в рамках данной схемы представлен в работах Е. С. Кузнецова [16] и В. Н. Адрианова [17]. Суть этого метода состоит в переходе от уравнений (1.1), (1.3) для интенсивностей радиации к некоторым уравнениям для встречных потоков  $F^+$  и  $F^-$ , которые связаны с функциями интенсивности известными интегральными соотношениями. При переходе к новым искомым функциям уравнения переноса (1.1) интегрируются по угловой координате  $\Theta$  в пределах от 0 до  $\pi/2$ . В результате получается система уравнений

$$(\partial F^+ / \partial x) = -\alpha [m^+ F^+ - 2n^2 B(\lambda, T)], \quad (4.1)$$

$$(\partial F^- / \partial x) = \alpha [m^- F^- - 2n^2 B(\lambda, T)],$$

где введены обозначения

$$m^\pm(x, \lambda) = \frac{2\pi}{F^\pm} \int_0^{\pi/2} \Phi^\pm \sin \Theta d\Theta. \quad (4.2)$$

После аналогичных преобразований граничные условия (1.2) примут вид

$$\begin{aligned} F^+ - (1 - r_1^+) F_e^+ - r_2^+ F^- &= 0, \\ F^- - (1 - r_1^-) F_e^- - r_2^- F^+ &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

где

$$r_1^\pm = \frac{\pi}{F_e^\pm} \int_0^{\pi/2} R_1 \Phi_e^\pm \sin 2\Theta d\Theta, \quad r_2^\pm = \frac{\pi}{F_e^\pm} \int_0^{\pi/2} R_2 \Phi^\mp \sin 2\Theta d\Theta. \quad (4.4)$$

Обобщенное уравнение Фурье в этом случае имеет вид

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial \tau} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \int_{(\lambda, n)} \alpha [(m^+ F^+ + m^- F^-) - 4n^2 B(\lambda, T)] d\lambda \quad (4.5)$$

с граничными условиями на каждой из поверхностей

$$\pm K \frac{\partial T}{\partial x} + h_e^\pm (T_e^\pm - T^\pm) + \int_{(\lambda, n)} e^\pm (F_e^\pm + B^\pm) d\lambda = 0. \quad (4.6)$$

Здесь использованы те же обозначения, что и в первом разделе статьи, а  $e^\pm$  — поглощательная способность поверхностей, определяемая соотношением

$$e^\pm = \frac{\pi}{F_e^\pm} \int_0^{\pi/2} \epsilon^\pm \Phi_e^\pm \sin 2\Theta d\Theta. \quad (4.7)$$

Замкнутая система уравнений (4.1) (4.5) с граничными условиями (4.3), (4.6) является точной, если известны значения входящих в нее коэффициентов  $m^\pm(x)$  и  $r^\pm$ , которые, в свою очередь, зависят от искомым функций распределения радиации  $\Phi^\pm$  и поля температур  $T(x, \tau)$ . Поэтому обычно при использовании двухпоточковых схем расчета многие авторы вводят осредненные значения этих коэффициентов, предполагая сравнительно слабое их изменение. Этим и объясняется приближенность двухпоточковых схем расчета.

5. Остановимся на результатах сопоставления схем двухпоточкового приближения с решением точных уравнений. Чтобы исключить возможное несоответствие, обусловленное использованием разных методов решения, все приводимые результаты были получены на основе описанного выше алгоритма конечно-разностного решения.

Ниже рассмотрена нестационарная задача лучисто-конвективного симметричного охлаждения пластины при следующих значениях параметров:

$$\begin{aligned} K &= 1,57 \text{ Вт/м град}, (\lambda_n) = 0,25-4,8 \text{ мкм}, h_e^\pm = 12,56 \text{ Вт/м}^2 \text{ град}, \\ \rho \cdot C &= 2,1 \cdot 10^6 \text{ Вт/м}^3 \text{ град}, (\lambda_n) = 4,8-12 \text{ мкм}, T^0(x) = 1200^\circ \text{ С}, \\ d &= 10^{-2} \text{ м}, n = 1,5, \epsilon = 0,8, T_e^\pm = 20^\circ \text{ С}. \end{aligned}$$

На рис. 2 приведены кривые относительных погрешностей по температуре в средней точке слоя  $x=d/2$ . Кривая 1 соответствует погрешностям приближенного решения по схеме Шварцшильда — Шустера, когда  $m^+ = m^- = 2$ , кривая 2 получена в приближении Келлета при  $m^+ = m^- = 1$ . На этом и других графиках через  $F_0$  обозначен

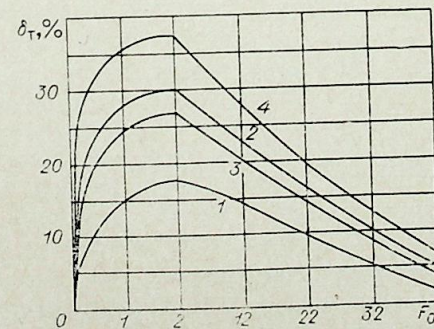


Рис. 2.

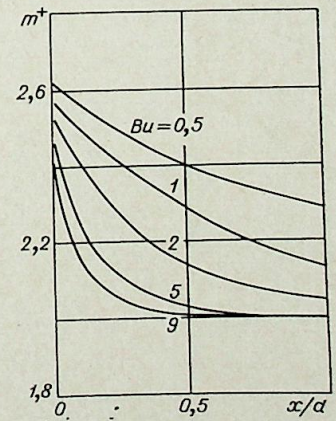


Рис. 3.

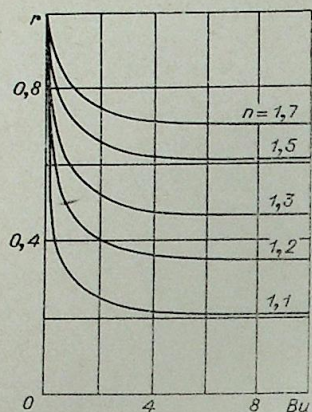


Рис. 4.

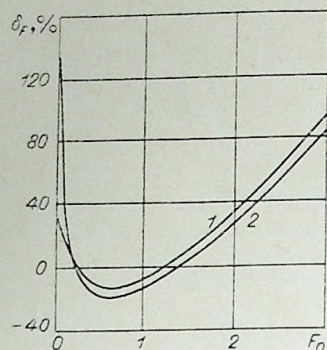


Рис. 5.

безразмерный параметр времени. Расчеты выполнены для критерия Бугера —  $Bu = \alpha d = 1$  (оптическая толщина слоя), когда при точном решении задачи интегральные коэффициенты отражения от внутренних поверхностей слоя равны  $r_2^+ = r_2^- = 0,72$  при  $n = 1,5$ . Для иллюстрации влияния коэффициентов  $r_2^{\pm}$  на погрешности решения на рис. 2 приведены дополнительно кривые 3, 4, которые получены при  $m^{\pm} = 2$ ,  $r_2^{\pm} = 0,5$ ;  $m^{\pm} = 1$ ,  $r_2^{\pm} = 0,5$  соответственно.

Погрешности уравнений двухпоточкового приближения значительны и медленно убывают по мере охлаждения пластины. В первую очередь они обусловлены использованием постоянных значений для коэффициентов уравнений  $m^{\pm}(\alpha x)$ , которые далеко не постоянны. В качестве примера на рис. 3 представлены кривые изменения функции  $m^{\pm}(\alpha x)$  по толщине изотермического слоя. Результаты получены на основе точных уравнений, а разные кривые на графике соответствуют различным значениям параметра  $Bu$  для коэффициента преломления  $n = 1,5$ . Установлено, что функции  $m^{\pm}(\alpha x)$  существенно зависят от оптической толщины слоя и эффектов многократного внутреннего и полного внутреннего отражений, в то время как эффект смещения спектральной излучательной способности собственного излучения вещества, обусловленный изменением общего уровня температуры и ее неравномерным распределением по толщине в процессе охлаждения, сказывается в значительно меньшей степени. Так, кривые изменения функций  $m^{\pm}(\alpha x)$  при неравномерном распределении температуры в процессе охлаждения слоя для  $Bu = 1$  отличаются от случая  $T(x) = \text{const}$  менее чем на 3%.

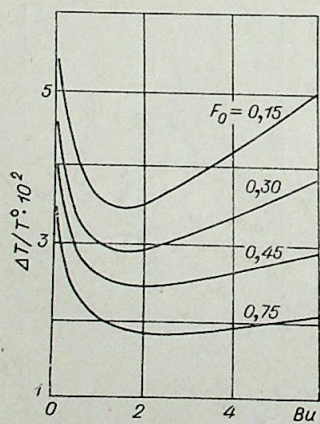


Рис. 6.

Кроме того, заметное влияние на точность решения оказывают интегральные коэффициенты отражения. Зависимость  $r$  ( $r = r_2^+ = r_2^-$ ) от оптической толщины слоя, полученная на основе решения точных уравнений, приведена на рис. 4 для различных значений показателя преломления  $n$ . Как видим, коэффициенты  $r$  изменяются в широком диапазоне. Необходимо отметить, что всякое приближенное решение задачи, основанное на использовании априорно заданных значений  $r_2^{\pm}$ , вносит дополнительные погрешности в окончательное решение, которые могут быть не менее значительны, чем допущения относительно  $m^{\pm}(\alpha x)$ .

В большей степени погрешности двухпоточковых схем проявляются в решении для тепловых потоков лучистой энергии. На рис. 5 приведены погрешности в процентах определения интегральных лучистых потоков для среднего сечения слоя. Здесь кривая 1 соответствует значениям  $m^{\pm} = 2$ , а кривая 2 —  $m^{\pm} = 1$  при  $r_2^{\pm} = 0,72$ .

Выбор оптической толщины слоя  $Bu = 1$ , для которого приводятся результаты сопоставления различных расчетных схем, обусловлен тем, что перепад температуры в слое  $\Delta T$  обнаруживает экстремальный характер в процессе лучисто-конвективного охлаждения слоя в зависимости от критерия  $Bu$ . Как показано на рис. 6, перепад температур минимален при оптических толщинах  $Bu = 1-3$  для различных моментов времени. На этом графике  $\Delta T = T(d/2) - T(0)$ , а  $T^0$  — начальная температура пластины.

Авторы благодарят Н. А. Рубцова и В. Н. Адрианова за полезное обсуждение работы.

Поступила в редакцию  
10/VI 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бурка А. Л., Рубцов Н. А. Нестационарный радиационно-кондуктивный перенос тепла в плоском слое серой поглощающей среды. — ПМТФ, 1971, № 1.
2. Бурка А. Л., Рубцов Н. А., Степаненко П. И., Хрипунов А. Д. Исследование нестационарного радиационно-кондуктивного теплообмена в селективно поглощающих средах. — В кн.: Теплообмен излучением и сложный теплообмен. Материалы V Всесоюз. конф. по тепломассообмену. Т. 8. Минск, 1976, т. 8.
3. Мень А. А. О решении нестационарного уравнения радиационно-кондуктивного теплообмена в среде с переменной температурой границ. — В кн.: Исследования в области тепловых измерений. М.—Л., изд-во стандартов, 1974.
4. Fowle A. A., Strong P. E., Comstock D. F., Sox C. Computer Program to Predict Heat Transfer through. — Glass, AIAA Journal, 1969, 7, N 4.
5. Nixon J. A., Monroe S. G. Heat Transfer through Diathermanous Materials. — J. Spacecraft and Rockets, 1965, 2, N 6.
6. Korb G. M., Reuber D. A Computer Program for Predicting Temperature Distribution and Heat Transfer through Coated and Uncoated Window Systems. — AIAA Journal, 1969, 21, N 28.
7. Бартенев Г. М., Фридкин Р. З. Теории процесса термообработки неорганических стекол. — Физика и химия обработки материалов, 1971, № 6.
8. Gardon R. Calculation of Temperature Distribution in Glass Plates Undergoing Heat Treatment, J. Amer. Ceram. Soc., 1958, 41, N 6.
9. Gardon R. The Tempering of Flat Glass by Forced Convection. The VII Internal Congress on Glass. Brussels, 1965.
10. Рубцов Н. А. Некоторые вопросы исследования радиационно-кондуктивного теплообмена. — В кн.: Проблемы теплофизики и физической гидродинамики. Новосибирск, «Наука», 1974.
11. Адрианов В. Н. Основы радиационного и сложного теплообмена. М., «Энергия», 1972.
12. Описик М. Н. Сложный теплообмен. М., «Мир», 1976.
13. Зигель Р., Хауэлл Дж. Теплообмен излучением. М., «Мир», 1975.
14. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. М., «Наука», 1973.
15. Канторович Л. В. О методе Ньютона. Тр. матем. ин-та. М., АН СССР, 1949, 28.
16. Кузнецов Е. С. К вопросу о приближенных уравнениях переноса лучистой энергии в рассеивающей и поглощающей среде. — Докл. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., 1942, 42, № 7-8.
17. Адрианов В. Н. Дифференциальные методы расчета теплообмена излучением. — В кн.: Теплообмен, гидродинамика и теплофизические свойства веществ. М., «Наука», 1968.

Э. П. ВОЛЧКОВ, С. Ю. СПОТАРЬ, В. И. ТЕРЕХОВ

ТЕПЛОМАССОБМЕН  
В НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОМ ТУРБУЛЕНТНОМ  
ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ  
С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ ГРАДИЕНТОМ ДАВЛЕНИЯ

В условиях, близких к изотермическим, как это показано в работах [1—3], закон тепломассообмена практически консервативен к продольному градиенту давления. Однако в неизоотермических условиях ( $T_{ст}/T_0 \gg 1$ ) обнаруживается влияние положительного градиента давления на коэффициенты турбулентного тепломассопереноса. Опытные данные по массообмену [4], полученные в осесимметричном выгорающем графитовом диффузоре с углом раскрытия  $\alpha = 8^\circ$ , оказались выше, чем при безградиентном обтекании при том же факторе неизоотермичности ( $\psi \approx 7$ ). Данная работа посвящена дальнейшему изучению турбулентного тепломассообмена в неизоотермическом пограничном слое с положительным градиентом давления; теоретически рассматривается влияние градиента давления во всей области вплоть до отрыва пограничного слоя; в экспериментах угол раскрытия осесимметричных диффузоров изменялся от 6 до  $20^\circ$ .

1. ТЕПЛОМАССОБМЕН В НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОМ ТУРБУЛЕНТНОМ  
ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ПРИ ГРАДИЕНТНОМ ТЕЧЕНИИ

Из гипотезы Прандтля о турбулентном переносе энергии следует

$$q_T = c_p \rho l_T l \frac{\partial W_x}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (1.1)$$

В работе [5] показано, что при  $Pr = Pr_T = 1$  можно допустить равенство гидродинамического и теплового путей смешения  $l \approx l_T$ . Выражение (1.1) при этих условиях дает следующую зависимость для коэффициента тепломассообмена:

$$St \cdot \tilde{q} = (l/\delta)^2 \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\rho}{\rho_0} \quad (1.2)$$

где  $St = q_w / c_p \rho_0 W_0 (T_w - T_0)$ ,  $\omega = W_x / W_0$ ;  $\xi = y/\delta$ ,  $\theta = (T - T_w) / (T_0 - T_w)$ ;  $q_w$  — тепловой поток на стенке;  $\delta$  — толщина пограничного слоя;  $\omega$  и  $\theta$  — относительная скорость и температура.

Полагаем, что распределение теплового потока и длина пути перемешивания консервативны к продольному градиенту давления

$$\tilde{q} = q/q_w = \tilde{\tau}_0 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3; \quad \tilde{l} = l/\delta = \kappa \xi \sqrt{\tilde{q}};$$

тогда число  $St$  из (1.2) запишется в виде

$$St = \kappa^2 \xi^2 \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \quad (1.3)$$

Распределение плотности газа в пограничном слое в соответствии с уравнением состояния идеального газа описывается выражением

$$\tilde{\rho} = \rho/\rho_0 = [\psi + (1-\psi) \cdot \theta]^{-1} \quad (1.4)$$

Для решения уравнения (1.3) необходимо знать профиль скорости в пограничном слое. Профиль скорости в турбулентном пограничном слое с градиентом давления рассчитывался по методике, изложенной в [5, 6], которая позволяет рассчитать трение и в случае неизоотермического течения. Система уравнений, включающая в себя закон трения, условие устойчивости вязкого подслоя, профиль скорости в непосредственной окрестности стенки и интегральные характеристики пограничного слоя, решалась методом итераций в широком диапазоне чисел Рейнольдса и температурных факторов. Расчеты были проведены для диффузорного течения вплоть до точки отрыва. Результаты расчетов хорошо описываются следующей формулой:

$$\omega = \{\psi - [V\bar{\psi} - (V\bar{\psi} - 1)\xi^{(H_0-1)/2}]\} / (\psi - 1), \quad (1.5)$$

по которой в работе [5] рекомендуется вычислять профиль скорости в безградиентном потоке и в точке отрыва неизоотермического турбулентного пограничного слоя. В формуле (1.5)  $H_0 = \delta^*/\delta^{**}$  — формпараметр пограничного слоя с учетом градиента давления, но в изотермических условиях; толщина вытеснения  $\delta^*$  и потери импульса  $\delta^{**}$  равны соответственно  $\delta^*/\delta = \int_0^1 (1-\omega)d\xi$ ,  $\delta^{**}/\delta = \int_0^1 \omega(1-\omega)d\xi$ . Подставляя распределение плотности (1.4) и скорости (1.5) в (1.3) и интегрируя его в пределах турбулентной части пограничного слоя, получим выражение для коэффициента тепломассообмена

$$St = \frac{2\kappa^2 n^2 \sqrt{\psi-1} \ln[\psi - (\psi-1)\theta]}{(1-\psi)^2 \{(\xi_1^{-n} - 1)/V\bar{\psi} - \psi^{-1}(1-V\bar{\psi}) \ln[V\bar{\psi} + (1-V\bar{\psi})\xi_1^n] \xi_1^{-n}\}}, \quad (1.6)$$

Здесь  $n = (H_0 - 1)/2$ ;  $\theta_1 = St \cdot Pr \cdot Re^{**} \frac{\delta}{\delta^{**}} \xi_1$  — относительная температура на границе вязкого подслоя. Относительная толщина вязкого подслоя  $\xi_1$  и потери импульса  $\delta^{**}/\delta$ , величина формпараметра  $H_0$ , необходимые для определения коэффициента тепломассообмена по формуле (1.6), находились из вышеуказанного численного решения системы уравнений динамического пограничного слоя при наличии продольного градиента давления.

Влияние градиента давления на тепломассообмен представим в виде

$$\Psi = St/St_0 = F(f/f_{тр}; \psi), \quad (1.7)$$

где  $St$  — коэффициент тепломассообмена в неизоотермическом турбулентном пограничном слое с положительным градиентом давления находится из (1.6) методом последовательных приближений. При расчете в качестве первого приближения принималось значение числа  $St$  для безградиентного течения. Коэффициент тепломассообмена в стандартных условиях (изотермический, безградиентный

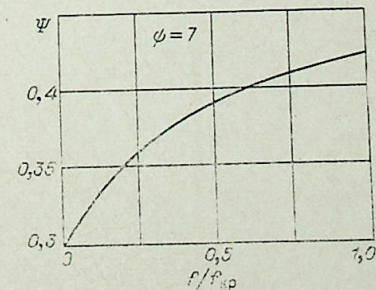


Рис. 1. Закон теплообмена турбулентного пограничного слоя с положительным градиентом давления.

поток на непроницаемой пластине) определяется через число Рейнольдса, построенное по толщине потери энергии

$$St_0 = 0,0128 Re_{\tau}^{** - 0,25} Pr^{-0,75} (\mu_{cr}/\mu_0)^{0,25} \quad (1.8)$$

Критерий  $Re_{\tau}^{**}$  определялся по известному числу Рейнольдса, построенному по толщине потери импульса и интегральным характеристикам пограничного слоя:

$$Re_{\tau}^{**} = Re^{**} \cdot \bar{\delta}_{\tau}^{**} (\bar{\delta}^{**})^{-1} Pr^{-0,6}, \quad \text{где } \bar{\delta}_{\tau}^{**} = \int_0^1 \bar{\rho} \omega (1 - \theta) d\xi, \quad (1.9)$$

а профиль температуры принимался автомодельным относительно градиента давления [5]:

$$\theta = \left\{ \psi - \left[ \sqrt{\psi} - (\sqrt{\psi} - 1) \xi^{(H_0^0 - 1)/2} \right]^2 \right\} / (\psi - 1). \quad (1.10)$$

Здесь  $H_0^0$  — формпараметр пограничного слоя в изотермических условиях и без учета градиента давления.

На рис. 1 приведены результаты расчета по формулам (1.6) — (1.8) относительной функции теплообмена в зависимости от градиента давления при факторе неизотермичности  $\psi = 7$  и  $Re_{\tau}^{**} = 10^4$ . По оси абсцисс отложена величина  $f/f_{кр}$ , где  $f = (\delta^{**}/W_0) dW_0/dx$  — есть формпараметр продольного градиента давления, а  $f_{кр}$  — значение формпараметра в точке отрыва пограничного слоя. Значение параметра  $f_{кр}$  найдено из решения динамического пограничного слоя при  $c_f = 0$ . Теоретический анализ показал, что для чисел  $Re^{**} > 10^3$  и  $\psi > 1$  результаты расчета удовлетворительно описываются зависимостью  $f_{кр} = f_{кр0}/\psi$ , полученной в [5] для асимптотического ( $Re^{**} \rightarrow \infty$ ) случая. Здесь  $f_{кр0} \approx -0,01$  — формпараметр отрыва изотермического турбулентного пограничного слоя. Из рис. 1 видно, что с увеличением градиента давления коэффициент теплообмена возрастает и в области отрыва пограничного слоя  $\sim$  в 1,4 раза выше, чем при безградиентном обтекании. Полученная относительная функция теплообмена  $\Psi$  использовалась в дальнейшем при решении интегральных соотношений энергии и диффузии.

## 2. РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ ИМПУЛЬСОВ И ЭНЕРГИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В ДИФFUЗОРЕ

При течении в диффузоре градиент давления по длине определяется как геометрией канала, так и толщиной нарастающего пограничного слоя, поэтому распределения по длине максимальной скорости в канале, формпараметров  $f$  и  $H$ , динамического числа  $Re^{**}$ , необходимые для расчета процессов теплообмена, определялись из совместного решения уравнения импульсов [5]

$$\frac{d Re^{**}}{dx} + Re^{**} \left[ \frac{1 + H_{кр}}{\bar{W}_0} \frac{dW_0}{dx} + \frac{1}{\bar{R}} \frac{d\bar{R}}{dx} \right] = Re_{D_1} \Psi_{\tau} \frac{c_{f_0}}{2} \quad (2.1)$$

и уравнения неразрывности

$$\bar{W}_0 = 4H \frac{Re^{**}}{Re_{D_1} \bar{R}} + \frac{1}{\bar{R}^2}. \quad (2.2)$$

Здесь  $\bar{x} = x/D_{0_1}$ ;  $\bar{R} = 2R/D_{0_1}$ ;  $Re_{D_1} = \frac{\rho_0 W_{0_1} D_{0_1}}{\mu}$ ;

$D_{0_1}$ ;  $W_{0_1}$  — диаметр и скорость на входе в диффузор.  $\Psi_{\tau} = 4/(\sqrt{\psi} + 1)^2$  — относительная функция трения, учитывающая неизотермичность, а  $c_{f_0}/2 = 0,0128 Re^{** - 0,25} (\mu_{cr}/\mu_0)^{0,25}$  — коэффициент трения в стандартных условиях.

Как показали расчеты динамического пограничного слоя, при наличии градиента давления и в неизотермических условиях связь между формпараметрами  $f$  и  $H$  хорошо описывается аппроксимационной зависимостью, предложенной в [7] для изотермического пограничного слоя

$$(H - 1)/(H^0 - 1) = [(H_{кр} - 1)/(H_0 - 1)]^{1/f_{кр}}. \quad (2.3)$$

$H^0$ ;  $H_{кр}$  — формпараметр при безградиентном и отрывном обтекании в неизотермических условиях. Формпараметр  $f$  определяется из следующего выражения:

$$f = (Re^{**}/\bar{W}_0^2 \cdot Re_{D_1}) d\bar{W}_0/d\bar{x}. \quad (2.4)$$

Система уравнений (2.1) — (2.4) решалась численно методом Пикара в области  $0 \leq f \leq f_{кр}$ . В результате решения определялось распределение  $\bar{W}_0$ ;  $Re^{**}$ ,  $f$  и  $H$  по длине диффузора. Распределение максимальной скорости  $W_0$  и формпараметра  $f$  по длине диффузора в изотермических и неизотермических условиях, полученные в результате расчета, представлено на рис. 2. Здесь же нанесены экспериментальные результаты измерения скорости и полного давления  $p/p_0$  по оси диффузора с углом раскрытия  $\alpha = 12^\circ$ . При  $x = 2,5$  в неизотермических ( $\psi \approx 7$ ) условиях наблюдается отрыв потока (расчетное значение формпараметра достигает критического значения  $f_{кр} = -1,4 \cdot 10^{-3}$ ). Начиная с этой точки резко снижается величина полного давления, что связано с увеличением коэффициента трения в результате интенсивного перемешивания за точкой отрыва; из-за разрушения пограничного слоя падает и скорость на оси канала. В изотермических условиях, как это видно из рис. 2, отрыва пограничного слоя на длине в 5 калибров не наблюдается.

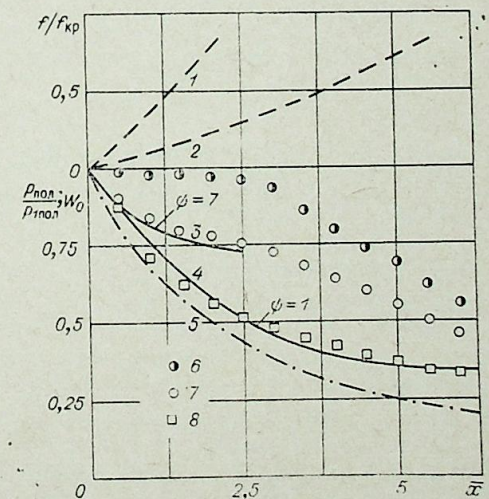
Опытные и расчетные результаты, полученные для диффузоров с различными углами раскрытия, свидетельствуют о том, что в неизотермических  $\psi = 7$  условиях и при  $Re_{D_1} = (1 \div 2) \cdot 10^5$  отрыв пограничного слоя наблюдается уже у каналов с  $\alpha = 6^\circ$ . С увеличением угла раскрытия и при уменьшении числа Рейнольдса  $Re_{D_1}$ , точка отрыва смещается ближе ко входу в диффузор.

Из интегрального соотношения энергии для пограничного слоя при  $T_{cr} = const$  можно найти число Рейнольдса, построенное по толщине потери энергии [5]:

$$Re_{\tau}^{**} = 0,036 \psi^{0,8} Re_x^{0,8} Pr^{-0,6} [2\bar{R}/(2\bar{R} + 1)]^{0,2} (\mu_w/\mu_0)^{0,2}. \quad (2.5)$$

Рис. 2. Распределение максимальной скорости и формпараметра  $f$  по длине диффузора  $\alpha = 12^\circ$ .

1, 2 — расчет формпараметра  $f/f_{кр}$  для неизотермических ( $\psi = 7$ ) и изотермических условий соответственно; 3, 4 — расчет распределения максимальной скорости соответственно для неизотермических ( $\psi = 7$ ) и изотермических условий; 5 — одномерная теория; 6 — опытное распределение полного давления в диффузоре ( $\psi = 7$ ); 7, 8 — скорость в ядре потока в неизотермических ( $\psi = 7$ ,  $Re_{D_1} = 1,5 \cdot 10^5$ ) и изотермических ( $\psi = 1$ ,  $Re_{D_1} = 1,5 \cdot 10^5$ ) условиях соответственно.



Относительная функция теплообмена  $\Psi$  определялась по уравнениям (1.6)–(1.7). Число  $Re_x$  рассчитывалось по локальной скорости ядра потока, которую, в свою очередь, находили из расчета гидродинамики диффузора (система уравнений (2.1)–(2.4)).

### 3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МАССООБМЕНА В ВЫГОРАЮЩЕМ ДИФFUЗОРЕ

Опыты были проведены на газодинамическом стенде с индукционным нагревом графитового образца [4, 8]. Рабочие участки представляли собой конические графитовые диффузоры с внутренним диаметром на входе  $2 \cdot 10^{-2}$  м. Угол раскрытия диффузоров изменялся от 6 до  $20^\circ$  с интервалом в  $2^\circ$ . Стенка канала разогревалась до температуры  $\sim 2000$  К. В качестве основного потока использовали смесь воздуха с весовой концентрацией кислорода в ядре потока  $(K_0)_0 \approx 0,01$  и температурой  $T_0 \approx 290$  К; фактор неізотермичности в опытах составлял  $T_{ст}/T_0 \approx 7$ . Скорость в ядре потока измерялась охлаждаемым насадком Прандтля. Методика проведения и обработка результатов опытов аналогична изложенной в работах [4, 8]. Локальную интенсивность уноса материала стенки определяли следующим образом.

$$j_c = \rho_{гр} \cdot \delta / t, \quad (3.1)$$

где  $j_c$  — интенсивность уноса массы;  $\rho_{гр}$  — плотность графита;  $\delta$  — толщина выгоревшего слоя;  $t$  — время опыта.

Экспериментальное значение диффузионного числа Стантона определялось по интенсивности выгорания и локальным параметрам ядра потока

$$St_d = j_c / \rho_0 \omega_0 b_{1c}. \quad (3.2)$$

Проведенные оценки показали, что погрешность определения коэффициента массообмена в опытах не превышала 15%.

Параметр проницаемости, характеризующий интенсивность химической эрозии графитовой поверхности в диффузионном режиме горения, был незначителен  $b_{1c} = 3/4 (k_0)_0 \approx 0,08$ . При этом, как показали расчеты, влиянием поперечного потока продуктов химической реакции на коэффициент массообмена можно пренебречь.

Диффузионное число  $Re_d^{**}$  находилось по формуле

$$Re_d^{**} = \left[ (1 + b_{1c}) \int_0^x R j_c dx \right] (u_0 R b_{1c}), \quad (3.3)$$

которая следует из интегрального соотношения диффузии [4]. Результаты опытов по выгоранию графитовых диффузоров с углом раскрытия  $8^\circ$  совпали с экспериментальными данными, полученными в [4].

На рис. 3 для трех диффузоров с углами раскрытия  $\alpha = 6, 10, 16^\circ$  представлены опытные данные, обработанные в виде зависимости диффузионного числа Стантона от диффузионного числа Рейнольдса. Кривые на этом рисунке соответствуют теоретическому расчету по формулам (1.6) и (2.5); линия 1 на этом графике представляет собой расчет в начальном участке трубы при факторе неізотермичности  $\psi = 7$ . Как видно, опытные данные по коэффициенту массообмена хорошо описываются расчетными зависимостями; интенсивность массообмена с увеличением угла раскрытия диффузора при практически одинаковом числе Рейнольдса на входе возрастает.

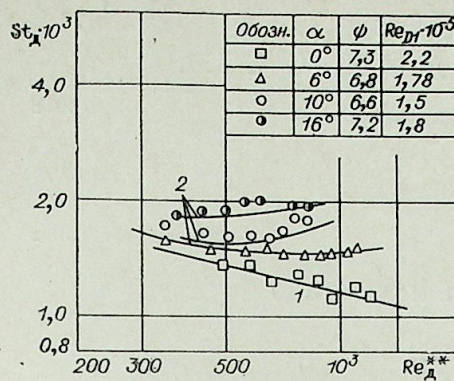


Рис. 3. Коэффициент массообмена в неізотермическом диффузоре.

1 — расчет при  $dp/dx=0$  и  $\psi=7$ ; 2 — расчет по данной методике; точки — опытные данные.

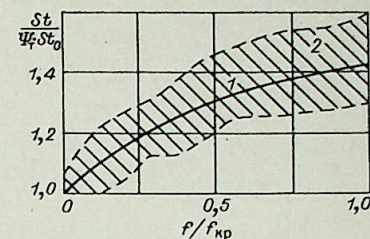


Рис. 4. Обобщение опытных данных по массообмену в турбулентном неізотермическом слое с положительным градиентом давления.

1 — расчет; 2 — область экспериментальных данных.

Чтобы выделить влияние только градиента давления на коэффициент массообмена, все опытные данные были обработаны в виде зависимости

$$\Psi_f = St / \Psi_\tau St_0, \quad (3.4)$$

где  $\Psi_\tau = 4 / (\sqrt{\psi} + 1)^2$  — функция массообмена, учитывающая влияние неізотермичности течения. Результаты такой обработки нанесены на рис. 4 заштрихованной областью. Здесь же нанесена рассчитанная по формулам (3.4), (1.6), (1.8) относительная функция теплообмена, которая определялась при среднем в опытах факторе неізотермичности  $\psi = 7$  и числе  $Re_d^{**} = 10^3$ . Видно, что опытные данные находятся в хорошем соответствии с результатами теоретического анализа и коэффициент теплообмена в точке отрыва турбулентного неізотермического пограничного слоя  $\sim$  в 1,4 раза выше, чем при безградиентном обтекании.

Институт теплофизики  
СО АН СССР,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
24/X 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Леонтьев А. И., Обливин А. Н., Романенко П. Н. Исследование сопротивления и теплообмена при турбулентном течении воздуха в осесимметричных каналах с продольным градиентом давления. — ПМТФ, 1961, № 5, 16–25.
2. Van Sant G. H., Larson M. B. Convection heat transfer for turbulent flow in subsonic diffusers. — Trans. ASME, 1966, C88, N 4. (Рус. пер. Конвективный теплообмен при турбулентном течении в дозвуковых диффузорах. Тр. Америк. об-ва инж.-мех., сер. С., Теплопередача, 1966, 8, № 4, 61–71).
3. Леонтьев А. И., Шишов Е. В., Белов В. М., Афанасьев В. Н. Средние и пульсационные характеристики теплового пограничного слоя и теплообмен в диффузорной области. Материалы к V Всес. конф. по теплообмену. Т. 1, ч. 1. Минск, 1976, 77–87.
4. Волчков Э. П., Никитин П. Б. Турбулентный пограничный слой с положительным градиентом давления на проницаемой поверхности в неізотермических условиях. — Изв. АН СССР, сер. МЖГ, 1976, № 4, 43–49.
5. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И. Теплообмен и трение в турбулентном пограничном слое. М., «Энергия», 1972. 342 с.
6. Фаурин А. В. Интегральные характеристики турбулентного пограничного слоя при наличии продольного градиента давления. — Тр. Казан. авиац. ин-та, 1970, вып. 114, 41–48.
7. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И. Турбулентный пограничный слой сжимаемого газа. Новосибирск, 1962. 180 с.
8. Леонтьев А. И., Волчков Э. П., Зауличный Е. Г., Синайко Е. И. Экспериментальное определение скорости уноса графита в условиях существенной неізотермичности. — Физика горения и взрыва, 1967, № 2, 248–254.

УДК 532.01+532.517.4

Ю. В. НЕМИРОВСКИЙ, Я. Л. ХЕЙНЛОО

ЛОКАЛЬНО-ВИХРЕВОЙ ПОДХОД  
ПРИ ОПИСАНИИ ВРАЩАТЕЛЬНО-НЕИЗОТРОПНЫХ  
ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКОВ I.  
ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ\*

Исходя из представления о турбулентных течениях как о движениях иерархии непрерывно образующихся, дробящихся, закручивающихся, переориентирующихся и исчезающих (диссипируемых) вихрей, в данной работе показано, что наличие вращательной неізотропии турбулентного потока приводит к появлению некоторой дополнительной, независимой от поля осредненных скоростей кинематической характеристики среды. В качестве необходимого при этом «второго» уравнения для ее определения выводится уравнение сохранения, определенного специальным образом, внутреннего момента количества движения среды. Обсуждается баланс энергии вращательно-неізотропных турбулентных потоков. Выведенные основные уравнения движения вращательно-неізотропных турбулентных потоков замыкаются путем введения соответствующих определяющих связей, характерных для асимметричной гидромеханики [1].

Отметим точку зрения В. Н. Николаевского [2, 3], отличающуюся от принятой в настоящей работе, но также приводящую к необходимости введения независимых законов сохранения осредненного импульса и внутреннего момента количества движения среды, и работы А. Эрингена [4] и Г. Науе [5], где такой необходимости придавался постулативный характер.

1. Как обычно, представим поле скорости движения жидкости в среде  $\vec{v}$  в виде

$$\vec{v} = \langle \vec{v} \rangle + \vec{v}', \quad (1.1)$$

где  $\langle \vec{v} \rangle$  — осредненное поле скорости движения жидкости, а  $\vec{v}'$  — ее пульсационная составляющая ( $\langle \rangle$  — осреднение в смысле, принятом в статистической гидромеханике [6]).

Вводим в рассмотрение линии тока пульсационной составляющей поля скорости, как векторные линии, в каждой точке которой вектор  $\vec{v}'$  является касательным.

Будем говорить, что турбулизованная среда является вращательно-неізотропной, если

$$\left\langle \vec{v}' \times \frac{\partial \vec{e}}{\partial s} \right\rangle \neq 0 \quad (1.2)$$

( $\vec{e} = \frac{\vec{v}'}{v'}$ ;  $v' = \sqrt{\vec{v}' \cdot \vec{v}'}$  — величина вектора  $\vec{v}'$ ; производная берется по

\* Печатается в порядке обсуждения (ред.).

дуге линии тока пульсационной составляющей поля скорости, проходящей через рассматриваемую точку области течения).

Обозначая далее  $\vec{v}' \times \frac{\partial \vec{e}}{\partial s}$  через  $\vec{\Omega}$  и учитывая, что

$$\frac{\partial \vec{e}}{\partial s} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\vec{R}}{R}, \quad R = \sqrt{\vec{R} \cdot \vec{R}}, \quad (1.3)$$

где  $\vec{R}$  — поле радиусов кривизны линии тока пульсационной составляющей поля скорости, для  $\vec{\Omega}$  находим

$$\vec{\Omega} = \frac{\vec{v}' \times \vec{R}}{R^2}, \quad (1.4)$$

откуда

$$\vec{v}' = \vec{R} \times \vec{\Omega}. \quad (1.5)$$

Как видно из (1.4) и (1.5), величина  $\vec{\Omega}$  может быть интерпретирована как скорость вращения частиц жидкости, участвующих в пульсационном движении по отношению к центру кривизны линии тока пульсационной составляющей поля скорости, проходящей через нее. При этом ввиду кинематической независимости  $\vec{v}'$  от  $\langle \vec{v} \rangle$ ,  $\langle \vec{\Omega} \rangle$  также является кинематически независимым от  $\langle \vec{v} \rangle$ . Это обстоятельство имеет принципиальное значение: из него вытекает невозможность полного кинематического описания движения турбулизованной жидкости (при наличии вращательной неізотропии потока) в рамках рассмотрения лишь баланса осредненного импульса среды.

При выводе необходимого дополнительного уравнения будем исходить из уравнений Навье — Стокса [7], считая их локально описываемыми турбулентные течения в любой точке области течения:

$$\rho \frac{d}{dt} v_i = p_{ij,j}^m + \rho f_i, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad (1.6)$$

$$p_{ij}^m = -p^0 \delta_{ij} + \mu_m (v_{i,j} + v_{j,i}),$$

$p_{ij}^m$  — компоненты тензора вязких напряжений ( $p^0$  — термодинамическое давление;  $\mu_m$  — коэффициент молекулярной сдвиговой вязкости;  $\delta_{ij}$  — компоненты единичного тензора; индекс после запятой, как обычно, означает дифференцирование по соответствующей координате; для простоты здесь и далее среда полагается несжимаемой);  $f_i$  — компоненты плотности (на единицу массы) действующих на среду внешних массовых сил.

Представим далее уравнения (1.6) в виде следующей системы уравнений [6]:

$$\rho \frac{D}{Dt} \langle v_i \rangle = \langle p_{ij} \rangle, \quad i + \rho \langle f_i \rangle, \quad (1.7)$$

$$\rho \frac{D}{Dt} v'_i = (-\rho v'_j \langle v_i \rangle + \rho \langle v'_j v'_i \rangle - \rho v'_j v'_i + p_{ij}^m), \quad i + \rho f'_i, \quad (1.8)$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \langle v_j \rangle \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad p_{ij} = p_{ij}^m + p_{ij}^t, \quad p_{ij}^t = -\rho v'_j v'_i.$$

Здесь и далее штрих означает пульсационную составляющую соответствующей величины (так, например,  $f'_i = f_i - \langle f_i \rangle$ ,  $p_{ij}^m = p_{ij}^m - \langle p_{ij}^m \rangle$  и т. д.).

Умножив уравнение (1.8) на величину  $l_{kis} R_s$  ( $l_{kis}$  — компоненты тензора Леви — Чивитта). С учетом (1.7) и уравнения баланса полно-

го момента количества движения

$$\rho \frac{D}{Dt} e_{hij} x_i v_j = (e_{hij} x_i p_{is}^m)_{,s} + \rho e_{hij} x_{ij},$$

вместо (1.8) получим

$$\rho \frac{D}{Dt} M_h = m_{hj,j} - e_{hij} p_{ij} + \rho \sum_{p=0}^5 m_h^{(p)}. \quad (1.9)$$

Здесь  $M_h$  — компоненты плотности (на единицу массы) «внутреннего» момента количества движения

$$M_h = e_{hij} v_i R_j = R^2 \Omega_h; \quad (1.10)$$

$m_{hj}$  — компоненты тензора мгновенных «моментных напряжений».

$$m_{hj} = m_{hj}^{(1)} + m_{hj}^{(2)}, \quad m_{hj}^{(2)} = -\rho v_j M_h, \quad m_{hj}^{(1)} = e_{his} p_{ij}^{m'} R_s; \quad (1.11)$$

$m_h^{(p)}$  ( $p = 0, 1, \dots, 5$ ) — компоненты плотностей (на единицу массы) действующих на среду «массовых моментов»:

$$m_h^{(0)} = e_{his} f_i R_s; \quad m_h^{(3)} = -e_{his} v_j R_s \langle v_i \rangle_{,j};$$

$$m_h^{(1)} = -\frac{1}{\rho} e_{his} p_{ij}^{m'} R_s; \quad m_h^{(4)} = e_{his} v_i \frac{d}{dt} R_s^0; \quad (1.12)$$

$$m_h^{(2)} = e_{his} \langle v_j v_i \rangle_{,j} R_s; \quad m_h^{(5)} = e_{hij} \left( \langle v_j \rangle v_j + v_i \langle v_j \rangle + \frac{1}{\rho} p'_{ij} \right)$$

( $R_s^0 = R_s + x_s$ ;  $x_s$  — координаты рассматриваемой точки области течения).

Принимая в качестве наблюдаемого факта, что вихри при своем движении всегда стремятся к закручиванию, которое проявляется здесь как стремление к закручиванию линии тока пульсационной составляющей поля скорости, сделаем вывод, что величина  $\frac{\partial}{\partial t} R$  в турбулентном потоке всегда принимает преимущественно лишь отрицательные значения, а следовательно, величина  $\left\langle \frac{\partial}{\partial t} R \right\rangle$  также является отрицательной. С другой стороны, в зависимости от характера изменения условий поддержания рассматриваемого поля течения знак величины  $\frac{\partial}{\partial t} \langle R \rangle$  может быть как отрицательным, так и положительным, то величина  $\left[ \frac{\partial}{\partial t}, \langle \rangle \right] R$ , вообще говоря, отлична от нуля  $\left( \left[ \frac{\partial}{\partial t}, \langle \rangle \right] \right)$  — коммутатор из операторов дифференцирования  $\left( \frac{\partial}{\partial t} \right)$  и осреднения  $(\langle \rangle)$ .

Упомянутый выше механизм закручивания вихрей не является единственно возможным механизмом прерывистого характера: непрерывное стремление турбулизованной среды к устранению вращательной неистотропии турбулентного потока путем потери ориентированности вихрей при их дроблении, компенсируемый, с другой стороны, рождением все новых и новых ориентированных вихрей непосредственно из осредненного потока, приводит к прерывистому характеру изменения поля  $\vec{R}$  и т. д. Прерывистый характер изменения поля  $\vec{R}$  ( $R_i$ ), приводящий к некоммутации операторов  $\partial/\partial t$  и  $\langle \rangle$  для него, не следует оценивать лишь с точки зрения особенности принятых в работе модельных представлений, а прежде всего как своеобразное отражение прерывистого характера самих турбулентных течений, обусловленных прерывис-

тым характером порождения вихрей из осредненного потока и необратимым характером их изменения в процессе движения.

Учитывая, что некоммутация операторов  $\partial/\partial t$  и  $\langle \rangle$  для поля  $\vec{R}$  приводит к такой же некоммутации для поля  $\vec{M}$ , после осреднения уравнения (1.9) находим

$$\rho \frac{D}{Dt} \langle M_h \rangle = \langle m_{hj} \rangle_{,j} - e_{ijh} \langle p_{ij} \rangle + \rho m_h, \quad (1.13)$$

где

$$m_h = \sum_{p=0}^6 \langle m_h^{(p)} \rangle, \quad \langle m_h^{(6)} \rangle = m_h^{(6)} = \left[ \frac{\partial}{\partial t}, \langle \rangle \right] M_h, \quad \langle m_h^{(5)} \rangle = 0.$$

Отметим, что согласно (1.7), (1.13) тензор напряжений  $\langle p_{ij} \rangle$  в случае турбулентных течений при наличии вращательной неистотропии потока (а реальные турбулентные течения являются практически всегда таковыми), вообще говоря, не сводится к симметричному тензору. (Как обычно, в механике сплошных сред [7] вопрос о свойствах симметрии тензора турбулентных напряжений может быть решен лишь на основе изучения баланса моментов количества движения среды, а не на основе каких-либо рассуждений, касающихся формальной записи компонент тензора турбулентных напряжений, как  $-\rho \langle v_j v_i \rangle$ )\*.

2. Умножая уравнение (1.7) на  $\langle v_i \rangle$  и уравнение (1.8) на  $v_i$  с последующим осреднением уравнения энергии  $\rho v^2/2$ , приходим к следующим уравнениям баланса энергии  $K = \frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2$  и  $K^t = \frac{1}{2} \rho \langle v'^2 \rangle$ :

$$\frac{D}{Dt} K = h_{i,i} + A_i \omega_i - \langle p'_{(ij)} \rangle \langle v_i \rangle_{,j} - \rho \psi + \rho \langle f_i \rangle \langle v_i \rangle, \quad (2.1)$$

$$\frac{D}{Dt} K^t = h'_{i,i} - A_i \omega_i + \langle p'_{(ij)} \rangle \langle v_i \rangle_{,j} - \rho \psi^t + \rho \langle f'_i v'_i \rangle. \quad (2.2)$$

Здесь  $\omega_i = 1/2 e_{ijh} \langle v_h \rangle_{,j}$ ;  $A_i = e_{ijh} \langle p_{jh} \rangle$ ;  $p'_{(ij)} = 1/2 (p'_{ij} + p'_{ji})$  — компоненты симметричной составляющей тензора турбулентных напряжений;  $h_i = \langle p_{ij} \rangle \langle v_j \rangle$  — компоненты плотности потока энергии  $K$ , обусловленной ее переносом как вследствие молекулярных, так и турбулентных напряжений;  $h'_i = -\rho \left\langle v_i \frac{v'^2}{2} \right\rangle + \langle p'_{ij} v'_j \rangle$  — компоненты плотности потока энергии  $K^t$ , связанного с переносом энергии  $K^t$  в среде с пульсационными скоростями и силами молекулярных напряжений;  $\psi = \langle p'_{ij} \rangle \langle v_i \rangle_{,j}$  и  $\psi^t = \langle p'_{ij} v'_i v'_j \rangle$  — удельные диссипации энергии  $K$  и  $K^t$  вследствие сил молекулярной вязкости. Слагаемое  $A_i \omega_i - \langle p'_{(ij)} \rangle \langle v_i \rangle_{,j} = \langle p'_{ij} \rangle \langle v_i \rangle_{,j}$ , входящее в оба уравнения (2.1) и (2.2) с противоположными знаками, очевидно, описывает обмен энергией между осредненными и пульсационными движениями.

Так как, согласно (1.5),  $v'^2 = R^2 \Omega^2$  и, следовательно,

$$K^t = \rho \frac{\langle v'^2 \rangle}{2} = \rho \frac{\langle R^2 \Omega^2 \rangle}{2}, \quad (2.3)$$

\* Следует отметить, что тензор турбулентных напряжений — это тензор с составляющими  $-\rho \langle v'_j v'_i \rangle e_j e_i$  (по  $i, j$  не суммировать;  $e_i, e_j$  — единичные векторы репера), а не тензор  $-\rho \sum_{i,j=1}^3 \langle v'_j v'_i \rangle e_j e_i$ . В последнем случае происходит усреднение напряженных состояний по всем взаимно перпендикулярным граням элементарного объема, и антисимметричная составляющая тензора напряжения взаимно сокращается.

то уравнение (2.2) может быть рассмотрено так же, как уравнение полной (осредненной) энергии вихревого движения жидкости в среде. Представим далее  $K^t$  в виде следующих двух слагаемых:

$$K^{t_1} = K^{t_1} + K^{t_2} \quad K^{t_1} = \rho I \frac{\langle \Omega \rangle^2}{2}, \quad K^{t_2} = \rho \frac{\langle (R^2 \Omega_i)' \Omega_i' \rangle}{2}, \quad (2.4)$$

где  $K^{t_1}$  — плотность энергии вихревого движения, приходящаяся на долю движения относительно крупномасштабных вихрей (вихрей, вносящих вклад во вращательную неізотропию турбулентного потока), а  $K^{t_2}$  — плотность оставшейся части энергии вихревого движения жидкости в среде;  $I$  — плотность «эффективного момента инерции», определяемая из условия

$$I \langle \Omega_i \rangle = \langle R^2 \Omega_i \rangle. \quad (2.5)$$

Умножив уравнение (1.13) на  $\langle \Omega_h \rangle$  и учитывая (2.5), для энергии  $K^{t_1}$  находим

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} K^{t_1} = & h_{i,i}^{t_1} - A_i \omega_i - (A_i \omega_i^* + \langle m_{ij}^{(2)} \rangle \langle \Omega_i \rangle_{,j}) - \rho \psi^{t_1} + \\ & + \rho \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq 1}}^6 \langle m_i^{(p)} \rangle \langle \Omega_i \rangle - \rho \frac{\langle \Omega \rangle^2}{2} \frac{D}{Dt} I, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где  $\omega_i^* = \langle \Omega_i \rangle - \omega_i$ ,  $h_i^{t_1} = \langle m_{ij} \rangle \langle \Omega_i \rangle$  — компоненты плотности потока энергии  $K^{t_1}$  в среде, обусловленной работой осредненных моментных напряжений;  $\psi^{t_1} = \langle m_{ij}^{(1)} \rangle \langle \Omega_i \rangle_{,j} + \rho \langle m_i^{(1)} \rangle \langle \Omega_i \rangle$  — удельная диссипация энергии  $K^{t_1}$  под действием сил вязкости. (Смысл оставшихся слагаемых в уравнении (2.6) будет пояснен несколько ниже).

Вычитая, наконец, из уравнения (2.2) уравнение (2.6) с учетом соотношений (2.3)—(2.5) для оставшейся части энергии вихревого движения  $K^{t_2}$ , находим

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} K^{t_2} = & h_{i,i}^{t_2} + \langle p_{(ij)}^t \rangle \langle v_i \rangle_{,j} + (A_i \omega_i^* + \langle m_{ij}^{(2)} \rangle \langle \Omega_i \rangle_{,j}) - \rho \psi^{t_2} + \\ & + \rho \left[ e_{his} \langle (f_i R_s)' \Omega_i' - \sum_{p=2}^6 \langle m_i^{(p)} \rangle \langle \Omega_i \rangle \right] + \rho \frac{\langle \Omega \rangle^2}{2} \frac{D}{Dt} I. \end{aligned} \quad (2.7)$$

( $\psi^{t_2} = \psi^t - \psi^{t_1}$ ,  $h_i^{t_2} = h_i^t - h_i^{t_1}$  — соответственно удельная диссипация энергии  $K^{t_2}$  под влиянием молекулярной вязкости и компоненты плотности потока энергии  $K^{t_2}$  в среде).

Ради полноты включаем в число введенных выше уравнений баланса энергии  $K$ ,  $K^{t_1}$  и  $K^{t_2}$  также и уравнение баланса внутренней энергии среды

$$\frac{D}{Dt} U = h_{i,i}^U + \rho (\psi + \psi^{t_1} + \psi^{t_2}), \quad (2.8)$$

где  $h_i^U = - \langle v_i' U \rangle + k \langle T \rangle_{,i}$  — плотность потока внутренней энергии среды ( $T$  — термодинамическая температура,  $k$  — коэффициент теплопроводности).

Как видно из (2.1), (2.6), (2.8), лишь часть энергии (равная величине  $-A_i \omega_i$ ) от всего количества энергии, передаваемой (в единице объема в единицу времени) от осредненного потока к вихревому движению (равного величине  $-A_i \omega_i + \langle p_{(ij)}^t \rangle \langle v_i \rangle_{,j} = \langle p_{ij}^t \rangle \langle v_i \rangle_{,j}$ ), передается непосредственно в энергию наиболее ориентированных вихрей

(вихрям, вносящим вклад во вращательную неізотропию потока)\*. Оставшаяся часть энергии осредненного движения, передаваемой непосредственно от осредненного потока к движению относительно мелко-масштабных, неориентированных вихрей (описываемая величиной  $\langle p_{(ij)}^t \rangle \langle v_i \rangle_{,j}$ ), весьма существенна, в частности, в слоях со значительным градиентом осредненной скорости

$$\langle p_{(ij)}^t \rangle \langle v_i \rangle_{,j} \geq 0. \quad (2.9)$$

Слагаемое  $\rho \frac{\langle \Omega \rangle^2}{2} \frac{D}{Dt} I$  в уравнениях (2.6) и (2.7), как и слагаемые  $\rho \langle m_i^{(2)} \rangle \langle \Omega_i \rangle = \rho e_{his} \langle v_j' v_k' \rangle_{,j} \langle R_s \rangle \langle \Omega_i \rangle$  и  $\rho \langle m_i^{(3)} \rangle \langle \Omega_i \rangle = -e_{his} \langle v_j' R_s \rangle \langle v_k \rangle_{,j} \langle \Omega_i \rangle$ , входящие в выражение для работы массового момента, очевидно, описывают взаимное превращение энергий  $K^{t_1}$  и  $K^{t_2}$ .

Аналогично величине  $\langle p_{(ij)}^t \rangle \langle v_i \rangle_{,j}$  связанной с непосредственным преобразованием энергии осредненного потока в энергию вихревого движения относительно мелко-масштабных вихрей, величину  $A_i \omega_i^* + \langle m_{ij}^{(2)} \rangle \langle \Omega_i \rangle_{,j}$  входящую в уравнения (2.6), (2.7) с противоположными знаками, будем интерпретировать как описывающую количества передаваемой энергии (в единице объема в единицу времени) от вращательного движения крупномасштабных, относительно ориентированных вихрей к мелко-масштабным, неориентированным вихрям вследствие работ антисимметричных и моментных напряжений. При этом

$$A_h \omega_h^* + \langle m_{ij}^{(2)} \rangle \langle \Omega_i \rangle_{,j} \geq 0. \quad (2.10)$$

Предполагая, что работа оставшейся части массового момента, не связанной с наличием внешних массовых сил

$$\rho e_{his} \left\langle v_i' \frac{d}{dt} R_s \right\rangle \langle \Omega_h \rangle + \rho \langle \Omega_h \rangle \left[ \frac{\partial}{\partial t}, \langle \rangle \right] M_h,$$

также может привести лишь к увеличению хаоса турбулентности, т. е. что она, как и работа (2.10), приводит к увеличению энергии  $K^{t_2}$  за счет энергии  $K^{t_1}$ , примем

$$\rho e_{his} \left\langle v_i' \frac{d}{dt} R_s \right\rangle \langle \Omega_h \rangle + \rho \langle \Omega_h \rangle \left[ \frac{\partial}{\partial t}, \langle \rangle \right] M_h \geq 0. \quad (2.11)$$

Аналогично тому, как  $\psi$ ,  $\psi^{t_1}$  и  $\psi^{t_2}$  описывают рассеяние механических энергий  $K$ ,  $K^{t_1}$ ,  $K^{t_2}$  непосредственно на молекулярный уровень (во внутреннюю энергию среды), величины (2.9)—(2.11) и работа антисимметричных напряжений, равная величине  $-A_i \omega_i$ , могут быть рассмотрены как своеобразные функции рассеяния механических энергий, соответствующих определенным уровням механического движения, в энергию более «низкого» механического уровня.

3. Перед замыканием уравнений баланса (1.7), (1.13) заметим, что число неизвестных в них значительно превышает число самих уравнений. Это своего рода «плата за осреднение», хорошо известная в статической гидромеханике [6]: любое стремление выйти при описании движения турбулизованной жидкости за рамки уравнений Навье—Стокса путем их осреднения влечет за собой появление ряда новых неизвестных, что, в свою очередь, приводит к незамкнутости полученных при этом уравнений движения.

\* Как указывается в [6], при использовании внешних источников энергии возможен также и обратный перенос энергии от энергии пульсационного (вихревого) движения к энергии осредненного движения. Здесь и далее для определенности этот случай будет исключен из рассмотрения.

При замыкании уравнений баланса (1.7), (1.13) будем исходить из некоторых упрощающих соображений: во-первых, будем полагать, что перенос внутреннего момента количества движения в среде вследствие вязких напряжений, описываемых слагаемым  $\langle m_{ij}^{(1)} \rangle = e_{iks} \langle p_{kj}^{m'} R_s \rangle$  в выражении для тензора моментных напряжений, значительно меньше переноса  $M_i$  в среде с пульсациями скорости, т. е. формально принимаем

$$\langle m_{ij}^{(1)} \rangle = e_{iks} \langle p_{kj}^{m'} R_s \rangle = 0. \quad (3.1)$$

Аналогично будем пренебрегать и слагаемым  $\rho \langle m_i^{(1)} \rangle$  в выражении для массового момента

$$\rho \langle m_i^{(1)} \rangle = e_{iks} \langle p_{ij}^{m'} R_{s,j} \rangle = 0. \quad (3.2)$$

Как видно из уравнений (2.6), (2.7), при использовании упрощений (3.1), (3.2) (так как при этом  $\psi^4 = 0$ ) энергия передается от осредненного вихревого движения крупномасштабных, ориентированных вихрей во внутреннюю энергию лишь посредством энергии вращательного движения относительно мелкомасштабных, неориентированных вихрей, что в общем хорошо согласуется с представлениями о каскадном процессе поддержания вихревой структуры турбулентных потоков [6].

Во-вторых, предположим отсутствие пульсаций, налагаемых на среду внешних массовых сил. При этом

$$\langle m_h^{(0)} \rangle = e_{his} \langle f'_i R_s \rangle = 0. \quad (3.3)$$

Будем также пренебрегать слагаемым  $\langle v'_j R_s \rangle$  ( $v'_j R_s = \frac{1}{2} (v'_j R_s + v'_s R_j)$ ), входящим в выражение для массового момента  $\rho m_h^{(2)}$ ,

$$\rho \langle m_h^{(2)} \rangle = -\rho e_{his} \langle v'_j R_s \rangle \langle v_i \rangle_{,j} = -\rho e_{his} \langle v'_j R_s \rangle \langle v_i \rangle_{,j} + \frac{\rho I}{2} \langle \Omega_i \rangle \langle v_i \rangle_{,h},$$

т. е. примем

$$\rho \langle m_h^{(2)} \rangle = \frac{\rho I}{2} \langle \Omega_i \rangle \langle v_i \rangle_{,h}. \quad (3.4)$$

(Заметим, что в отличие от величины  $v'_{[i} R_{j]} = \frac{1}{2} (v'_i R_j - v'_j R_i) = e_{hij} \times \frac{R^2}{2} \Omega_h$ , принимающей в случае вращательно-неизотропных турбулентных потоков преимущественно значения определенного знака, величина  $v'_i R_j$  не связана с ориентацией вихревого движения и, по сути дела, может принимать значение произвольного знака. Поэтому предположение, что  $\langle v'_i R_s \rangle = 0$ , кажется вполне обоснованным. Тем не менее будем смотреть на равенство  $\langle v'_i R_s \rangle = 0$ , как на некоторое дополнительное предположение, допустимость использования которого может быть решена лишь после соответствующей экспериментальной проверки).

Относительно симметричных и антисимметричных напряжений, описываемых соответственно тензорами  $\langle p_{ij}^t \rangle$  и  $\langle p_{[ij]}^t \rangle = \frac{1}{2} e_{ijk} A_k$ , и относительно части моментных напряжений, обусловленной переносом внутреннего момента количества движения в среде вследствие пульсации скорости, введем следующие, характерные для асимметричной гидромеханики [1] (ср. также [2, 3]), определяющие связи (законы трения):

$$\begin{aligned} \langle p_{ij}^t \rangle &= -\rho \frac{\langle v'^2 \rangle}{3} \delta_{ij} + \mu_t (\langle v_i \rangle_{,j} + \langle v_j \rangle_{,i}), \\ \langle p_{[ij]}^t \rangle &= 2\gamma e_{ijk} \omega_k^*, \\ \langle m_{ij}^{(2)} \rangle &= \langle m_{ij} \rangle = \theta I \langle \Omega_i \rangle_{,j} + \varepsilon I \langle \Omega_j \rangle_{,i} + \eta I \langle \Omega_h \rangle_{,h} \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

при этом будем, однако, полагать коэффициенты  $\mu_t$ ,  $\gamma$ ,  $\theta$ ,  $\varepsilon$ ,  $\eta$ , входящие в (3.5) (коэффициенты турбулентной вязкости), в общем случае функциями как от некоторых характеристик микроструктуры турбулентного потока, так и от некоторых ее интегральных характеристик (число Рейнольдса и т. д.).

Учитывая далее (3.5), из положительной определенности (2.9), (2.10) заключим

$$\mu_t, \gamma, \theta, \eta, \varepsilon \geq 0.$$

Для связывания с осредненными кинематическими характеристиками массового момента  $\rho (\langle m_h^{(4)} \rangle + \langle m_h^{(6)} \rangle) = \rho e_{his} \left\langle v'_i \frac{d}{dt} R_s^0 \right\rangle + \rho \left[ \frac{\partial}{\partial t}, [ ] \right] M_h$  примем

$$\rho (\langle m_i^{(4)} \rangle + \langle m_i^{(6)} \rangle) = -4\kappa \omega_i, \quad \kappa \geq 0. \quad (3.6)$$

Соотношение (3.6), как и соотношения (3.5), имеют исключительно феноменологический характер. Целесообразность принятия определяющих соотношений, связывающих кинематические и динамические характеристики движения среды в формах (3.5), (3.6), может быть при этом обоснована лишь их «работоспособностью» при решении различных конкретных задач.

Учитывая (1.11), (1.12), после подстановки (3.1)–(3.6) в общие уравнения баланса (1.7), (1.13) приходим к системе уравнений вращательно-неизотропных турбулентных потоков (в векторной форме, знаки осреднения опущены)

$$\begin{aligned} \rho \frac{D}{Dt} \vec{v} &= \nabla (\mu \nabla \vec{v}) + \nabla \times 2\vec{\gamma} \vec{\omega}^* - \nabla p, \quad \vec{\omega}^* = \vec{\Omega} - \frac{1}{2} \nabla \times \vec{v} \\ \rho \frac{D}{Dt} I \vec{\Omega} &= \nabla (\theta I \nabla \vec{\Omega}) + I \varepsilon \nabla (\Delta \vec{\Omega}) + \nabla \vec{\Omega} \nabla (I \varepsilon) + \nabla (\eta I \nabla \vec{\Omega}) - 4\gamma \vec{\omega}^* - \\ &- 2\kappa \nabla \times \vec{v} + \frac{\rho I}{2} (\nabla \vec{v}) \vec{\Omega} + \left[ \nabla p^0 - \mu_m \nabla \vec{v} + \rho \left( \frac{D}{Dt} \vec{v} - \vec{f} \right) \right] \times \vec{R} \\ &\left( p = p^0 + \rho \frac{\langle v'^2 \rangle}{3}, \quad \mu = \mu_m + \mu_t \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

При известных  $\mu_t$ ,  $\gamma$ ,  $\theta$ ,  $\eta$ ,  $\varepsilon$ ,  $I$ ,  $\vec{R}$  и  $\nabla p$  уравнения (3.7) образуют замкнутую систему относительно кинематических полей  $\vec{v}$  и  $\vec{\Omega}$ .

Институт гидродинамики  
СО АН СССР,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
27/XI 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Аэро Э. Л., Бульгин А. Н., Кувшинский В. Е. Асимметричная гидромеханика.— Прикл. мат. и мех., 1965, 29, вып. 2.
2. Николаевский В. Н. Асимметричная механика континуумов и осредненное описание турбулентных течений.— Докл. АН СССР, 1969, 184, № 6.
3. Николаевский В. Н. Асимметричная механика турбулентных потоков.— Прикл. мат. и мех., 1970, 34, № 3.
4. E r i n g e n A. C. Micromorphic Description of Turbulent Channel Flow.— J. Math. Anal. and appl., 1972, 39.
5. Науэ Г. Законы сохранения неклассической гидродинамики и их применение к турбулентным каналовым течениям. Численные методы сплошных сред. Т. 4, № 1. Новосибирск, 1973.
6. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Т. 2. М., «Наука», 1965.
7. Седов Л. И. Механика сплошной среды. М., «Наука», 1970.

Ю. В. НЕМИРОВСКИЙ, Я. Л. ХЕЙНЛОО

ЛОКАЛЬНО-ВИХРЕВОЙ ПОДХОД  
ПРИ ОПИСАНИИ ВРАЩАТЕЛЬНО-НЕИЗОТРОПНЫХ  
ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКОВ II.  
ТУРБУЛЕНТНЫЕ ТЕЧЕНИЯ  
В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ, В КРУГЛОЙ ТРУБЕ  
И МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ЦИЛИНДРАМИ \*

1. Принимая точку зрения о турбулентных течениях как о движении иерархии неустойчивых, непрерывно образующихся, дробящихся, закручивающихся, переориентирующихся и исчезающих (диссипируемых) вихрей в работе [1] выведены следующие уравнения движения вращательно-неизотропных турбулентных потоков (среда, как и в [1], полагается несжимаемой)

$$\rho \frac{D}{Dt} \vec{v} = \nabla(\mu \nabla \vec{v}) + \nabla \times 2\gamma \vec{\omega}^* - \nabla p,$$

$$\rho \frac{D}{Dt} I \vec{\Omega} = \nabla(\theta I \nabla \vec{\Omega}) + \varepsilon I \nabla(\nabla \vec{\Omega}) + (\nabla \vec{\Omega})(\nabla \varepsilon I) + \nabla(\eta I \nabla \vec{\Omega}) - 4\gamma \vec{\omega}^* -$$

$$- 2\kappa \nabla \times \vec{v} + \frac{\rho I}{2} (\nabla \vec{v}) \vec{\Omega} + \left[ \nabla p^0 - \mu_m \Delta \vec{v} + \rho \frac{D}{Dt} \vec{v} \right] \times \vec{R}.$$

Здесь  $\rho$  — плотность среды;  $\vec{v}$  — осредненное поле скорости движения жидкости в среде;  $\vec{\Omega}$  — скорость вихревого вращения;  $\vec{\omega}^* = \vec{\Omega} - \frac{1}{2} \nabla \times \vec{v}$ ;  $p = p^0 + \frac{2}{3} K^t$ ;  $p^0$  — термодинамическое давление;  $K^t$  — средняя удельная кинетическая энергия пульсационного движения жидкости;  $\mu, \gamma, \theta, \eta, \varepsilon, \kappa, I, \vec{R}$  — вводимые в теории характеристики турбулентного поля движения (см. также [1]).

Выделим из всевозможных турбулентных течений, описываемых уравнениями (1.1), установившиеся турбулентные течения с полями  $\vec{v}$  и  $\vec{\Omega}$ , удовлетворяющими условию взаимной перпендикулярности и зависящими лишь от направления  $x$ , перпендикулярного к самим полям  $\vec{v}$  и  $\vec{\Omega}$ . При этом

$$\nabla \cdot \vec{\Omega} = \vec{v} \nabla \vec{v} = \vec{v} \nabla (I \vec{\Omega}) = (\nabla \vec{v}) \vec{\Omega} = 0 \quad (1.2)$$

и уравнения (1.1) принимают вид

$$\nabla(\mu \nabla \vec{v}) + \nabla \times 2\gamma \vec{\omega}^* - \nabla p = 0,$$

$$\nabla(\theta I \nabla \vec{\Omega}) + (\nabla \vec{\Omega})(\nabla \varepsilon I) - 4\gamma \vec{\omega}^* - 2\kappa \nabla \times \vec{v} + \frac{\rho I}{2} (\nabla \vec{v}) \vec{\Omega} + [\nabla p^0 - \mu_m \Delta \vec{v}] \times \vec{R}. \quad (1.3)$$

\* Печатается в порядке обсуждения (ред.).

2. При определенных предположениях относительно входящих в (1.3) коэффициентов (а также  $\vec{R}$ ) уравнения (1.3) могут быть проинтегрированы непосредственно. В частности, при течении в плоском канале (между плоскопараллельными пластинами), круглой трубе и между вращающимися цилиндрами, выбирая в области течения соответственно декартовы или цилиндрические координаты ( $x_1 = x, r; x_2 = y, \varphi; x_3 = z$ ) при предположении, что

$$I, \gamma, \mu, \kappa, \theta, \varepsilon = \text{const}, \vec{R} = 0, \quad (2.1)$$

из (1.3) находим (для  $\vec{v}$  и  $\vec{\Omega}$ ;  $\vec{v} = (0, 0, v)$ ,  $\vec{\Omega} = (0, \Omega, 0)$  при течении в канале и в трубе;  $\vec{v} = (0, v, 0)$ ,  $\vec{\Omega} = (0, 0, \Omega)$  — при течении между вращающимися цилиндрами);

а) при течении в плоском канале

$$v = -\frac{1}{2(\mu + \kappa)} |\nabla p| x^2 + C_1 x + C_2 + C_3 \text{ch} \frac{x}{l} + C_4 \text{sh} \frac{x}{l},$$

$$\Omega = \frac{\gamma - \kappa}{2\gamma(\mu + \kappa)} |\nabla p| x - \frac{\gamma - \kappa}{2\gamma} C_1 - \frac{\mu + \gamma}{2\gamma l} \left( C_3 \text{sh} \frac{x}{l} + C_4 \text{ch} \frac{x}{l} \right); \quad (2.2)$$

б) при течении в круглой трубе

$$v = -\frac{|\nabla p|}{4(\mu + \gamma)} r^2 + C_2 + C_3 I_0 \left( \frac{r}{l} \right),$$

$$\Omega = \frac{\gamma - \kappa}{4\gamma(\mu + \kappa)} |\nabla p| r - \frac{\mu + \gamma}{2\gamma l} C_3 I_1 \left( \frac{r}{l} \right); \quad (2.3)$$

в) при течении между вращающимися цилиндрами

$$v = C_1 r + \frac{C_2}{r} + C_3 I_1 \left( \frac{r}{l} \right) + C_4 K_1 \left( \frac{r}{l} \right),$$

$$\Omega = \frac{\gamma - \kappa}{\gamma} C_1 - \frac{\mu + \gamma}{2\gamma l} \left( C_3 I_0 \left( \frac{r}{l} \right) + C_4 K_0 \left( \frac{r}{l} \right) \right). \quad (2.4)$$

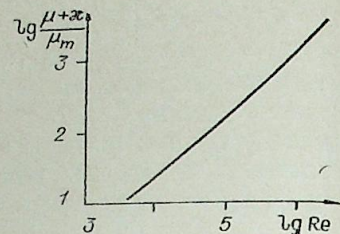
В (2.2) — (2.4)  $l = 1/2 [I\theta(\mu + \gamma)/\gamma(\mu + \kappa)]^{1/2}$  — параметр среды с размерностью длины;  $C_1, \dots, C_4$  — постоянные интегрирования;  $|\nabla p| = \left| \frac{\partial p}{\partial z} \right|$ ;  $I_0, I_1, K_0, K_1$  — модифицированные функции Бесселя.

Как показывает сопоставление профилей скорости течения (2.3) с соответствующими экспериментально измеренными профилями, приведенными в работе [2], отношение величины  $l$  к радиусу  $R$ , по крайней мере в диапазоне изменения числа Рейнольдса ( $Re$ ) от  $4,0 \cdot 10^3$  до  $3,3 \cdot 10^6$ , не зависит от числа  $Re$  и принимает значение, приближенно равное 0,06 ( $Re = \rho \frac{v_{cp} R}{\mu_m}$ ;  $v_{cp}$  — средняя расходная скорость,  $\mu_m$  — коэффициент молекулярной вязкости среды). Учитывая, что при этом  $l \ll R$  выражение для профиля скорости (2.3) может быть упрощено и без допущения значительной ошибки, заменено формулой

$$\frac{v}{v(0)} = \frac{-1}{4(\mu + \kappa)} \cdot \frac{|\nabla p|}{v(0)} r^2 + 1 - C_3' \frac{1}{Vr} e^{-\frac{R-r}{l}} \quad (2.5)$$

( $v(0)$  — скорость в центре трубы;  $C_3' = -\frac{C_3}{v(0)} \sqrt{\frac{l}{2\pi}} e^{R/l}$ ). Значение постоянной  $C_3'$ , входящей в выражение (2.5) по тем же экспериментальным данным, также не зависит от числа  $Re$  и принимает приближенно постоянное значение, равное 0,16. В отличие от  $l$  и  $C_3'$  величина  $(\mu + \kappa)/\mu_m$  оказывается существенно зависящей от числа  $Re$  (рис. 1).

Рис. 1. Зависимость  $\frac{\mu + \kappa}{\mu_m} = f(\text{Re})$ , определенная из сопоставления теоретических и экспериментальных профилей скорости в круглой трубе.



В качестве примера на рис. 2 приведены теоретические профили скорости в сопоставлении с соответствующими экспериментально измеренными профилями при  $\text{Re} = 2 \cdot 10^6$  и при  $\text{Re} = 2,3 \cdot 10^4$ . Теоретические кривые, приведенные на рис. 2, соответствуют помимо  $l/R = 0,06$ ,  $C_3' = 0,16$  дополнительному значению  $v_{rp}/v(0)$  ( $v_{rp} = v(R)$ ); кривая 1 —  $v_{rp}/v(0) = 0,625$ , кривая 2 —  $v_{rp}/v(0) = 0,537$ . Как видно из рис. 2, совпадение теоретических и экспериментальных профилей скорости вполне удовлетворительное. Значительное отклонение теоретически предсказываемых значений скорости от экспериментально измеренных наблюдается лишь в области, непосредственно примыкающей к границе области течения. Такое несоответствие вполне естественно, так как принятое предположение о постоянстве входящих в уравнения (1.1) коэффициентов нарушается прежде всего в этой области течения.

Приступая к сопоставлению теоретических и экспериментальных профилей скорости в случае турбулентных течений в плоском канале, по аналогии с (2.5) представим выражение для профиля скорости (2.2) в виде ( $H$  — полуширина канала,  $C_3' = -\frac{C_3}{v(0)} e^{H/l}$ ;  $v(0)$  — скорость в центре канала, течение Пуазейля)

$$\frac{v}{v(0)} = 1 - \frac{|\nabla p|}{2(\mu + \kappa)v(0)} x^2 - C_3' e^{-\frac{H-|x|}{l}}, \quad (2.6)$$

справедливой при  $l \ll H$ .

Как показывают экспериментальные данные по измерению профилей скорости в случае течений в плоском канале, приведенные в работе [3], отношение  $l/H$  также может считаться независимым от числа Рейнольдса ( $\text{Re} = \rho \frac{v_{cp} H}{\mu_m}$ ) и принимающей постоянное значение, равное 0,06, а  $C_3'$ , как и в случае течения в трубе, может быть принято равным 0,16. Что касается зависимости  $\frac{\mu + \kappa}{\mu_m} = f(\text{Re})$ , то при числах  $\text{Re}$  от  $1,14 \cdot 10^5$  до  $4,6 \cdot 10^5$  [3] существенного отличия между зависимостями  $(\mu + \kappa)/\mu_m$  от  $\text{Re}$  в случае течения в круглой трубе и в плоском канале не наблюдается.

В качестве примера на рис. 2 представлены экспериментальные данные по измерению профиля скорости в плоском канале соответствующие  $\text{Re} = 1,14 \cdot 10^5$  в сопоставлении с теоретическим профилем (2.6) (кривая 3), подсчитанным при  $l/H = 0,06$ ,  $C_3' = 0,16$  и при значении  $(\mu + \kappa)/\mu_m = 197,2$  в соответствии с зависимостью  $\frac{\mu + \kappa}{\mu_m} = f(\text{Re})$ , определенной из сопоставления теоретических и экспериментальных профилей в случае течений в круглой трубе. В качестве значений  $|\nabla p|$  и  $v(0)$  принимались их значения, приведенные в работе [3] ( $|\nabla p| = 2,756 \text{ г/см} \cdot \text{с}$ ,  $v(0) = 1050 \text{ см/с}$ ).

На рис. 2 приведены также экспериментальные профили скорости в плоском канале в случае течения Куэтта, заимствованные из работы [4] в сопоставлении с соответствующими теоретическими профилями ( $|\nabla p| = C_2 = C_3 = 0$ ; кривая 4 —  $\text{Re} = 2900$ ,  $l/H = 0,17$ ,  $C_1 = 0,21 \frac{u}{H}$ ,  $\frac{v_{rp}}{U} = 0$

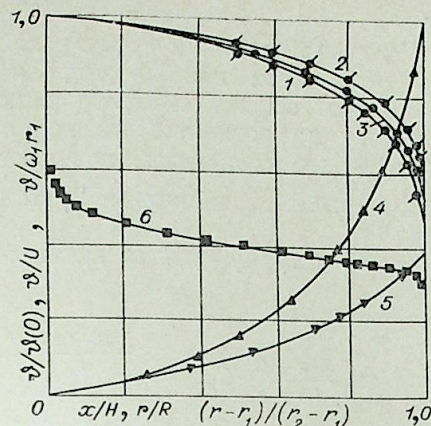


Рис. 2. Теоретические (сплошные линии) и экспериментальные профили скорости, соответствующие различным условиям течения.

- 1 — течение в круглой трубе [2],  $\text{Re} = 2,3 \cdot 10^4$ ;
- 2 — течение в круглой трубе [2],  $\text{Re} = 2 \cdot 10^6$ ;
- 3 — течение Пуазейля в плоском канале [3],  $\text{Re} = 1,14 \cdot 10^5$ ;
- 4 — течение Куэтта в плоском канале [4],  $\text{Re} = 2,9 \cdot 10^3$ ;
- 5 — течение Куэтта в плоском канале [4],  $\text{Re} = 3,4 \cdot 10^4$ ;
- 6 — течение между вращающимися цилиндрами [5].

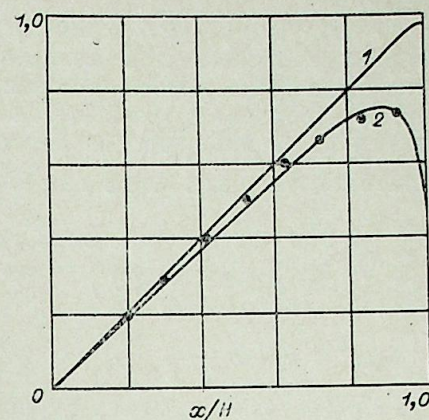


Рис. 3. Профили величин

$$-\rho \overline{v_1' v_3'} / |\nabla p| H, \quad -\langle v_1' v_3' \rangle / |\nabla p| H \\ a - 2\gamma \omega^* / |\nabla p| H \\ \bullet - \langle v_1' v_2' \rangle / |\nabla p| H; \quad 1 - \langle v_1' v_2' \rangle / |\nabla p| H; \\ 2 - 2\gamma \omega^* / |\nabla p| H.$$

( $v_{rp} = v(H)$ ),  $U$  — скорость движения стенок канала; кривая 5 —  $\text{Re} = 34000$ ,  $l/H = 0,17$ ,  $C_1 = 0,29 U/H$ ,  $v_{rp}/U = 0,4$ ). Там же приведены теоретические профили (2.4) в сопоставлении с экспериментальными данными, приведенными в [5]. Теоретическая кривая соответствует  $l/(r_2 - r_1) = 0,023$  и условиям на границе области течения: при  $r = r_1$ ,  $v = 0,61 \omega_1 r_1$ ,  $dv/dr = -12,6 \omega_1$ ; при  $r = r_2$ ,  $v = 0,278 \omega_1 r_1$ ,  $dv/dr = -6,57 \omega_1$ , где  $r_1$  и  $r_2$  — соответственно радиусы внутреннего и внешнего цилиндра;  $\omega_1$  — скорость вращения внутреннего цилиндра. Отметим еще раз хорошее совпадение с экспериментом.

Отсутствие эксперимента относительно измерения величины  $\Omega$  не допускает проведения здесь соответствующей «проверки» теоретического профиля  $\Omega$  подобно тому, как это сделано в случае профилей скорости.

Как видно из представленных на рис. 3 экспериментальных данных, по измерению величины  $-\rho \overline{v_1' v_3'} / |\nabla p| H$  ([3];  $\text{Re} = 1,14 \cdot 10^5$ ; в отличие от скобок  $\langle \rangle$  черточка над величиной означает осреднение по времени), поведение экспериментальных данных (точки) существенно отличается от поведения величины  $-\rho \langle v_1' v_3' \rangle / |\nabla p| H$  (кривая 1), подсчитанной в соответствии с формулой

$$\frac{-\rho \langle v_1' v_3' \rangle}{|\nabla p| H} = \frac{x}{H} - \frac{\mu_m}{|\nabla p| H} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Такая значительная экспериментальная погрешность недопустима, указанное расхождение между величинами  $-\rho \overline{v_1' v_3'} / |\nabla p| H$  и  $-\rho \langle v_1' v_3' \rangle / |\nabla p| H$  невольно приводит к заключению, что измеренная в эксперименте величина не должна соответствовать полному турбулентному касательному напряжению в среде. С другой стороны, так как поведение измеренной в эксперименте величины  $-\rho \overline{v_1' v_3'} / |\nabla p| H$  не может быть объяснено также и наличием в среде только симметричных напряжений

(в чем нетрудно убедиться непосредственно), то величина  $-\overline{\rho v_1' v_3'}$  либо совпадает с компонентой антисимметричной части напряжений, либо содержит помимо последней также и долю от ее симметричной части.

Не стремясь к окончательному ответу на возникающий вопрос, отметим здесь лишь вполне удовлетворительное совпадение поведения экспериментальных точек с теоретическим профилем величины  $2\gamma(\Omega + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x}) = 2\gamma\omega^*$ , равной антисимметричной части турбулентных касательных напряжений [1] ( $l \ll H$ )

$$2\gamma\omega^* = 2\gamma\left(\Omega + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\kappa}{\mu + \kappa} |\nabla p| x - \frac{x}{|x|} \frac{\mu}{l} C_3' v(0) e^{-\frac{H-|x|}{l}}$$

Теоретический профиль (кривая 2) соответствует уже определенным из рассмотрения профиля скорости значениям величин  $\mu + \kappa = 197,2 \cdot \mu_m = 0,0355$  г/см.с ( $\mu_m = 1,8 \cdot 10^{-4}$  г/см.с),  $l = 0,06H = 0,54$  см ( $H = 9$  см),  $C_3' = 0,16$ , значениям  $v(0) = 1050$  см/с,  $|\nabla p| = 2,756$  г/см.с и одному дополнительному значению  $\kappa/\mu = 11,4$ .

3. Умножая первое из уравнений (1.3) скалярно на  $v$ , а второе на  $\Omega$ , приведем уравнения (1.3) еще в следующем «энергетическом» виде (см. также [1], для простоты ограничиваемся лишь случаем течения в плоском канале, причем, как и выше, принимаем предположения (2.1)):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} + 2\gamma\omega^* \right) v \right] - 2\gamma\omega^* \frac{\partial v}{\partial x} - \psi - \frac{\partial}{\partial z} (pv) = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \vartheta I \Omega \frac{\partial}{\partial x} \Omega \right) + 2\gamma\omega^* \frac{\partial v}{\partial x} + 2\kappa\Omega \frac{\partial v}{\partial x} - \psi^* = 0.$$

Здесь  $-\partial/\partial z(pv)$  — работа сил давления;  $\frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial v}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$  и  $\frac{\partial}{\partial x} (2\gamma\omega^* v)$  — работы, совершаемые против симметричных и антисимметричных напряжений;  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \vartheta I \Omega \frac{\partial}{\partial x} \Omega \right) = \vartheta I \frac{\partial^2 \Omega^2}{\partial x^2}$  — работа, совершаемая вихревым движением против моментных напряжений;  $2\gamma\omega^* \frac{\partial v}{\partial x}$  — энергия, передаваемая от осредненного поступательного движения в энергию наиболее крупномасштабных вихрей при вихреобразовании;  $2\kappa\Omega \frac{\partial v}{\partial x}$  — энергия, передаваемая от крупномасштабных вихрей к мелкомасштабным (неориентированным) вихрям при потере их ориентации;  $\psi = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \geq 0$  — функция рассеяния энергии осредненного поступательного движения, связанная необратимыми ее потерями как вследствие непосредственной диссипации, так и вследствие ее рассеяния в энергию мелкомасштабных, неориентированных вихрей;  $\psi^* = 4\gamma\omega^* v + \vartheta I \left( \frac{\partial}{\partial x} \Omega \right)^2 \geq 0$  — функция рассеяния энергии крупномасштабных вихрей на уровень движения мелкомасштабных вихрей.

Проиллюстрируем физическую ситуацию, описываемую уравнениями (3.1) на примере уже рассмотренного выше случая течения в плоском канале, соответствующего числу  $Re = 1,14 \cdot 10^5$  ( $\mu + \kappa = 0,0355$  г/см.с,  $l/H = 0,06$ ). Принимая далее для  $\kappa/\mu$  значение  $\kappa/\mu = 11,4$ , определенное из сопоставления величин  $-\overline{\rho v_1' v_3'}/|\nabla p| H$  и  $-2\gamma\omega^*/|\nabla p| H$  (см. выше), находим для  $\mu$  и  $\kappa$ :  $\mu = 0,00286$  г/см.с,  $\kappa = 0,0326$  г/см.с. В качестве значения оставшегося коэффициента  $\gamma$  примем два значения  $\gamma = 0,1$  г/см.с

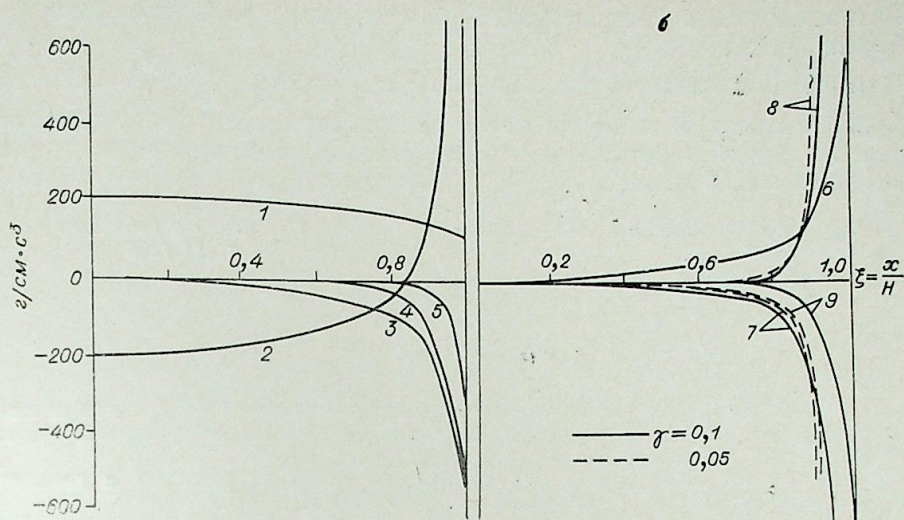


Рис. 4. Баланс энергии (течение в плоском канале [3],  $Re = 1,14 \cdot 10^5$ ). а — баланс энергии осредненного поступательного движения; б — баланс энергии вращательного движения относительно крупномасштабных (ориентированных) вихрей.

и  $\gamma = 0,05$  г/см.с. (Полагая, что ориентация осредненного вихревого движения, описываемого величиной  $\Omega$ , во всей области течения совпадает с ориентацией вихря от поля скорости  $v$ , из (2.2) нетрудно заключить, что  $\gamma \geq \kappa$ ).

Как видно из рис. 4, структура энергетического баланса в основной центральной ( $0 \leq x \leq 0,8H$ ) области турбулентного потока относительно простая: часть энергии поступательного движения, получаемая средой вследствие работы сил давления ( $-\partial/\partial z(pv)$  — кривая 1), расходуется на работу против антисимметричных напряжений, равную величине  $\partial/\partial x(2\gamma\omega^*v)$  (кривая 2), а часть, равная величине  $-2\gamma\omega^* \frac{\partial v}{\partial x}$  (кривые 3 и 6), передается вихревому движению наиболее крупномасштабных вихрей путем их образования из осредненного потока. Последняя, являясь, в свою очередь, практически единственным источником энергии вихревого движения крупномасштабных вихрей в центральной области канала, «уравновешивается» ее потерями вследствие ее превращения в энергию относительно мелкомасштабных вихрей как путем потери ориентированности вихрей при их движении ( $2\kappa\Omega \frac{\partial v}{\partial x}$  — кривая 7), так и вследствие некоторых других механизмов рассеяния энергии ориентированных вихрей ( $\psi^*$  — кривая 9). При этом с увеличением  $\gamma$  роль потери энергии путем переориентации вихрей становится решающей.

При переходе от центральной области турбулентного потока в область пограничного слоя картина энергетического баланса принимает более сложный характер. Значительные потери энергии в пограничной области, обусловленные наряду с уже рассмотренным процессом вихреобразования и работой симметричных напряжений ( $\mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$  — кривая 4;  $\psi$  — кривая 5), не могут быть компенсированы лишь работой сил давления. Компенсация достигается здесь благодаря своеобразному поведению работы антисимметричных напряжений (описываемой слагаемым  $2\gamma \frac{\partial}{\partial x} (\omega^* v)$  в уравнении баланса (3.1): антисимметричные напряжения, препятствующие поступательному движению среды в центральной

области канала, в пограничной области, наоборот, способствуют движению среды.

Отметим, наконец, существенную роль работы  $\nu \frac{\partial^2 \Omega^2}{\partial x^2}$  в области пограничного слоя, в то время как в центральной части турбулентного потока эта часть работы моментных напряжений практически равна нулю (см. кривые 8 на рис. 4).

Институт гидродинамики  
СО АН СССР,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
27/XI 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Немировский Ю. В., Хейлос Я. Л. Локально-вихревой подход при описании вращательно неізотропных турбулентных потоков. I. Основные уравнения.— Изв. Сиб. отд. АН СССР, см. настоящий номер журнала.
2. Никурадзе И. Закономерности турбулентного движения жидкости в гладких трубах.— В кн.: Проблемы турбулентности. М.—Л., ОНТИ, 1936.
3. Конт-Белло Ж. Турбулентные течения в канале с параллельными стенками. М., «Мир», 1969.
4. Шлихтин Г. Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.
5. Змейков В. Н., Устременко Б. П. Исследования аэродинамики и теплообмена в кольцевом канале с внутренним вращающимся цилиндром. Проблемы теплоэнергетики и прикладной теплофизики. Вып. 1. Алма-Ата, 1964.

УДК 533.6.07

М. Д. БРОДЕЦКИЙ, А. И. МАКСИМОВ, А. М. ХАРИТОНОВ

### МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ НЕБОЛЬШИХ НАДСТРОЕК С НЕСУЩЕЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В последнее время большое внимание уделяется исследованиям интерференции различных частей летательных аппаратов (мотогондол, всевозможных обтекателей, подвесных устройств и т. д.) с несущей поверхностью или фюзеляжем. Теоретические исследования явлений интерференции наталкиваются на серьезные трудности из-за влияния вязкостных эффектов. При экспериментальных исследованиях интерференции небольших надстроек возникает ряд методических трудностей. Эти трудности связаны с необходимостью выделения различных составляющих интерференционной нагрузки из суммарных аэродинамических сил и требованиями обеспечения достаточной точности в исследованиях.

Данная работа посвящена методике экспериментальных исследований аэродинамических характеристик надстроек и их интерференции с несущей поверхностью при сверхзвуковых скоростях. Испытания были проведены в аэродинамической трубе Т-313 ИТПМ СО АН СССР при числах  $M_\infty = 2,5$  и  $Re \approx 28 \cdot 10^6$  (на 1 м).

В общем случае коэффициент лобового сопротивления изолированного крыла можно записать в виде

$$C_{xкр} = C_{xв} + C_{xтр} \quad (1)$$

Если поверхность крыла разбить на участки  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  (рис. 1), где  $S_1$  — участок поверхности крыла, который не взаимодействует с исследуемыми надстройками;  $S_2$  — участок интерференции крыла с надстройками;  $S_3$  — участок поверхности крыла, занимаемого надстройками, то коэффициент  $C_{xкр}$  без надстроек можно записать в следующем виде

$$C_{xкр}^{бн} = C_{xвS_1} + C_{xтрS_1} + C_{xвS_2} + C_{xтрS_2} + C_{xвS_3} + C_{xтрS_3} \quad (2)$$

Когда на крыле установлены надстройки, коэффициент  $C_{xкр}$  определяется выражением

$$C_{xкр}^{сн} = C_{xвS_1} + C_{xтрS_1} + C'_{xвS_2} + C'_{xтрS_2} + C_{xвн} + C_{xтрн} \quad (3)$$

где  $C_{xвн}$  — коэффициент индуктивно-волнового сопротивления надстроек;  $C_{xтрн}$  — коэффициент сопротивления трения надстроек;  $C'_{xвS_2}$  — коэффициент индуктивно-волнового сопротивления участка крыла  $S_2$  с учетом интерференции надстроек;  $C'_{xтрS_2}$  — коэффициент сопротивления трения участка  $S_2$  с учетом интерференции.

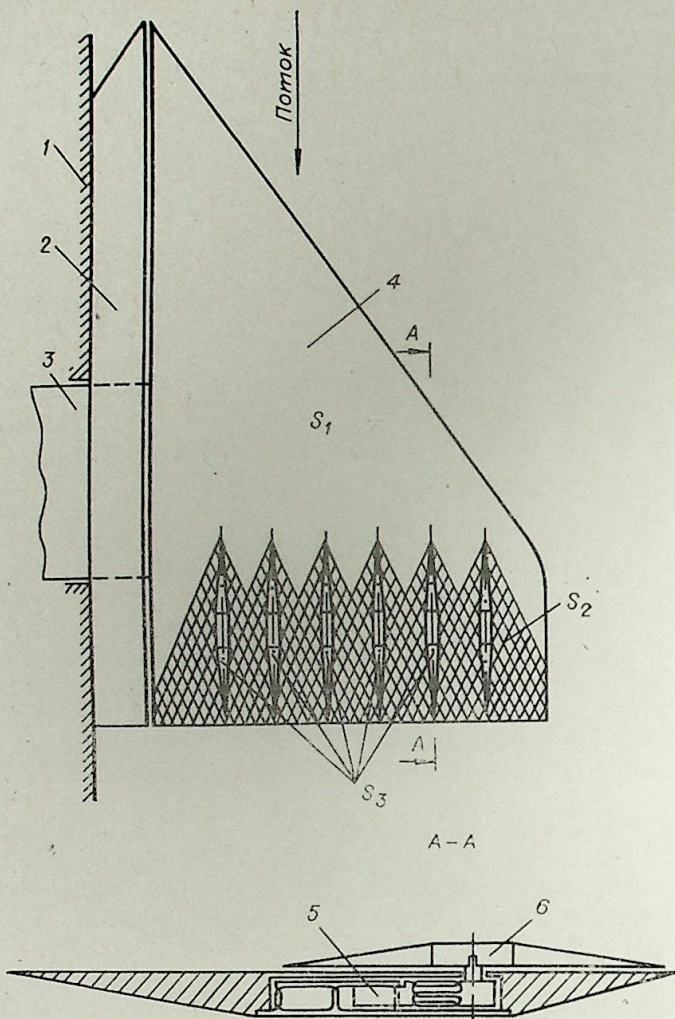


Рис. 1. Модель полукрыла с надстройками.  
1 — стенка рабочей части трубы, 2 — «ложное» полукрыло, 3 — боковая державка, 4 — модель, 5 — тензосенсор, 6 — надстройка.

Дополнительный коэффициент сопротивления крыла за счет наличия надстроек  $\Delta C_x$  представляет разность коэффициентов  $C_{xкр}$  с надстройками и без них.

$$\Delta C_x = C_{xкр}^{сн} - C_{xкр}^{бн} = C_{xвп} + C_{xтрп} + C'_{xвS_2} + C'_{xтрS_2} - C_{xвS_2} - C_{xтрS_2} - C_{xвS_3} - C_{xтрS_3} \quad (4)$$

Коэффициент  $\Delta C_x$  может быть определен с помощью измерений суммарных аэродинамических характеристик крыла с надстройками и без них. Однако вследствие малости  $\Delta C_x$  существующие методы прямых измерений не позволяют получать этот коэффициент с необходимой точностью. Величина  $C_{xвп} + C_{xтрп}$  представляет коэффициент лобового сопротивления собственно надстроек  $C_{xн}$  и может быть измерена, например, с помощью специальных миниатюрных тензометрических весов.

Коэффициенты  $C_{xвS_2}$ ,  $C'_{xвS_2}$  и  $C_{xвS_3}$  можно определить по измерениям распределения давления на крыле на участках  $S_2$  и  $S_3$ .

Коэффициенты сопротивления трения могут быть оценены по методике, изложенной в [1]. В первом приближении можно предположить, что  $C'_{xтрS_2} = C_{xтрS_2}$ .

Аналогично можно расписать выражение для коэффициента подъемной силы несущей поверхности за счет установки надстроек:

$$\Delta C_y = C_{yп} + C'_{yS_2} - C_{yS_2} - C_{yS_3}, \quad (5)$$

где  $C_{yп}$  — коэффициент подъемной силы надстроек;  $C'_{yS_2}$  — коэффициент подъемной силы участка  $S_2$  с учетом интерференции надстроек.

Коэффициент  $C_{yп}$  можно определить с помощью тензометрических весов, а  $C_{yS_2}$ ,  $C'_{yS_2}$  и  $C_{yS_3}$  — по измерениям распределения давления на крыле. Анализ выражений (4) и (5) показывает, что все входящие в них величины могут быть получены экспериментальным путем или оценены с помощью известных методов. Независимое определение значений коэффициентов, входящих в левую и правую части этих выражений, позволяет проконтролировать надежность и точность экспериментальных исследований.

Для плоской пластины в связанной с моделью системе координат коэффициенты  $C_{xвS_2}$ ,  $C'_{xвS_2}$  и  $C_{xвS_3}$  равны нулю. В этом случае, с учетом принятых допущений, выражение (4) можно записать в следующем виде:

$$\Delta C_x = C_{xн} - C_{xтрS_3} \quad (6)$$

Методика экспериментальных исследований интерференции надстроек отрабатывалась на схематизированной модели плоского полукрыла (рис. 1). Модель устанавливалась на боковой державке, закрепляемой на подвесной системе механических весов аэродинамической трубы. Для исключения влияния пограничного слоя, развивающегося на стенке рабочей части трубы, использовалось «ложное» полукрыло, механически изолированное от модели. Предварительные исследования показали, что изменение зазора между моделью и «ложным» полукрылом от 0,5 до 2 мм не влияет на результаты испытаний. Суммарные аэродинамические характеристики полукрыла определялись при зазоре  $\sim 0,5$  мм, а тензометрические и дренажные испытания проводились без зазора.

На плоской поверхности полукрыла плотно или с зазором 0,2 мм устанавливались 6 надстроек, форма которых приведена на рис. 1. Специальное цапговое крепление позволяло устанавливать надстройки на крыле с различным зазором. Оказывалось, что зазор величиной до 0,2÷0,5 мм на аэродинамические характеристики надстроек практически не влияет.

Двухкомпонентные тензометрические весы с габаритными размерами  $93 \times 20 \times 17,5$  мм и пределами измерений до 300 г по компоненте X и до 500 г по компоненте Y устанавливались в крыле под надстройками. При нормальной установке они позволяли измерять лобовое сопротивление X и подъемную силу Y, действующие на одну из надстроек. Путем поворота тензосенсоров на  $90^\circ$  в горизонтальной плоскости измерялись боковая и подъемная силы Z и Y.

Подбор материала и формы упругих элементов, а также многократная последовательная доводка их шарниров позволили свести к нулю все коэффициенты взаимовлияния от неизмеряемых компонент аэродинамической нагрузки. В качестве чувствительных элементов весов использовались кремниевые тензорезисторы, включенные по схеме «полумост». По результатам специальных исследований, влияние дрейфа «нуля» тензодатчиков было сведено к минимуму.

Среднеквадратичные отклонения показаний тензосесов  $\sigma_x$  по результатам 6-кратных измерений в аэродинамической трубе без съема модели изменялись от 1,05 до 1,9 г в зависимости от углов атаки модели. Значения  $\sigma_y$  без учета поправок на донное давление были примерно в 2—3 раза выше.

Для оценки коэффициентов обдува использовались надстройки, устанавливаемые на полукрыло с помощью специальных винтов. При этом величина зазора сохранялась такая же, как и во время обычных тензометрических испытаний надстроек. Цанговое крепление имитировалось цилиндрической пробкой, которая не касалась самой надстройки. Как показали испытания, коэффициенты обдува малы и практически не влияют на аэродинамические характеристики исследуемых надстроек.

В результате тензометрических измерений вводились поправки на дрейф «нуля» тензосесов, на влияние составляющих веса надстроек и конструкции самих весов при ненулевых углах атаки модели, на донное давление в зазоре под исследуемой надстройкой и на сопротивление трения донной части надстройки.

Поправки на дрейф «нуля» тензодатчиков вводились в предположении, что охлаждение весов в потоке происходит по линейному закону в зависимости от продолжительности работы аэродинамической трубы.

Влияние веса надстройки на показания тензосесов определялось путем тарировок модели при различных  $\alpha$  без потока.

Для вычисления поправок на донное давление одновременно с регистрацией показаний тензосесов проводилось подробное измерение распределения давления на поверхности крыла в зазоре под надстройкой. Поправки определялись по разности коэффициентов давлений на поверхности крыла в присутствии надстроек и без них:

$$C_{y\text{дон}} = \left( \sum_{i=1}^n \bar{P}_{i\text{сн}} \Delta S_{i\text{дон}} - \sum_{i=1}^n \bar{P}_{i\text{бн}} \Delta S_{i\text{дон}} \right) \cdot \frac{1}{S_M}, \quad (7)$$

где  $\bar{P}_{i\text{сн}}$  и  $\bar{P}_{i\text{бн}}$  — коэффициенты давлений в  $i$ -й точке с надстройкой и без нее соответственно;  $\Delta S_{i\text{дон}}$  — площадь донной части надстройки, соответствующая  $i$ -й точке;  $n$  — количество точек;  $S_M$  — миделевое сечение надстройки.

По принятой методике обработки результатов тензометрических измерений выражение  $C_{y\text{н}} - C_{yS_2}$  в уравнении (5) соответствует коэффициенту подъемной силы надстройки, определяемому с помощью тензосесов, с учетом поправки на донное давление:

$$C_{y\text{н}} - C_{yS_2} = C_y^{\text{T.B}} - C_{y\text{дон}}. \quad (8)$$

В дальнейшем, для краткости, выражение  $C_y^{\text{T.B}} - C_{y\text{дон}}$  обозначено просто  $C_y$ .

На рис. 2 в качестве примера приведено распределение давления на поверхности крыла в зазоре в присутствии надстройки и без нее при углах атаки  $\alpha = -4, 0, +4^\circ$ . Как видно из рисунка, под носовой частью надстройки образуется область повышенного давления, а под кормовой частью — область пониженного давления. В результате этого коэффициент  $C_{y\text{дон}}$  является разностью двух примерно равных величин. Отсюда возникает необходимость принятия дополнительных мер для увеличения общей точности измерений (увеличение класса точности измерительных приборов, многократность испытаний и т. д.). Принятые меры позволили добиться удовлетворительной сходимости полученных данных как между испытаниями в одной серии, так и от одной серии к другой.

Оценка сопротивления трения донной части надстройки экспериментальным путем была проведена с помощью имитатора плоской пластины толщиной 1 мм с заостренными передними кромками. Имитатор имел ту же форму в плане и устанавливался на тензосесы так же, как и обычная надстройка. Экспериментальные оценки показали, что  $C_{x\text{дон}} \approx 0,02 \div 0,03$  в зависимости от  $\alpha$ . Эти данные хорошо согласуются с результатами расчетов сопротивления турбулентного трения донной части надстроек по методике, изложенной в [1].

На рис. 3 и 4 приведены результаты многократных тензометрических измерений аэродинамических характеристик надстройки, расположенной во втором положении, считая от концевой хорды полукрыла.

Подъемная сила  $Y$  принята положительной, если она действует в направлении отрыва надстройки от поверхности крыла.

При многократных измерениях за длительный период времени коэффициенты  $C_{x\text{н}}$  образуют значительную дорожку разбросов. Расхождение результатов между сериями испытаний обусловлены как неточностью установки самой надстройки по отношению к набегающему потоку, так и изменением зазора между надстройкой и поверхностью крыла от одного испытания к другому.

Учет поправок на донное давление в коэффициенте  $C_y$  приводит к изменению его величины, но не меняет характера зависимости от углов атаки. Действие отрывающей подъемной силы на надстройку объясняется понижением давления на большей части длины надстройки, как и в работе [2].

Коэффициент интерференции надстроек с крылом  $C_{y\text{инт}} = C'_{yS_2} - C_{yS_2}$  определялся по подробному измерению распределения давления на полукрыле по всей зоне взаимодействия с надстройками. Давление измерялось с помощью групповых регистрирующих манометров типа ГРМ-2 класса 0,5 с диапазоном измерений  $\pm 0,1$  ата. Для увеличения

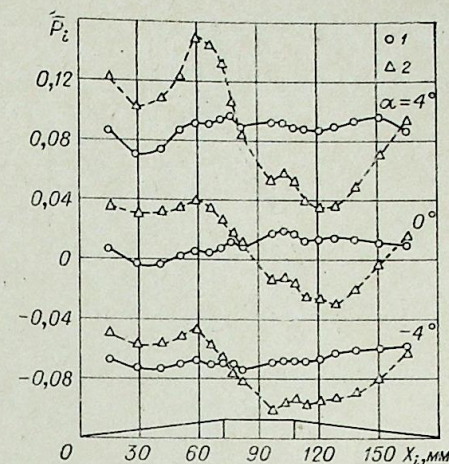


Рис. 2. Распределение давления на поверхности модели в зазоре под надстройкой.

1 — без надстройки, 2 — в присутствии надстройки (зазор 0,2 мм).

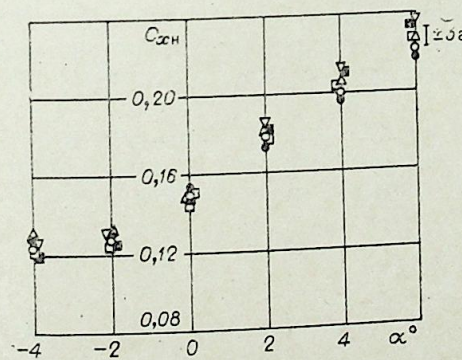


Рис. 3. Изменение коэффициента лобового сопротивления надстройки при многократных испытаниях.

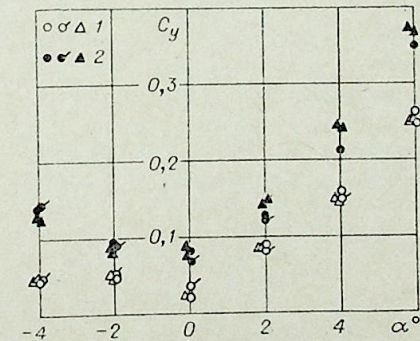


Рис. 4. Влияние поправок на донное давление на коэффициент подъемной силы надстройки.

1 — без учета поправок, 2 — с учетом поправок.

А. М. БЛОХИН, Е. И. РОМЕНСКИЙ

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЕДЕЛЬНОГО  
СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ  
ПРИ ОБТЕКАНИИ КРУГОВОГО КОНУСА

В настоящее время для численного расчета стационарных газодинамических течений с успехом применяется метод установления. В работе [1] на основе большого количества выполненных расчетов стационарных течений газа отмечается, что для успешного применения метода установления большую роль играют свойства самого предельного стационарного решения (п. с. р.), в частности, его устойчивость относительно малых возмущений.

В данной работе исследуются уравнения для распространения малых возмущений при обтекании кругового конуса сверхзвуковым потоком газа под нулевым углом атаки. С помощью энергетических оценок установлено, что стационарное течение устойчиво по отношению к малым возмущениям. Далее вычислено несколько точек спектра уравнений для малых возмущений и на основании полученных собственных функций проанализирована разностная схема Мас Соргмак'а. Показано, что схема не только обеспечивает установление решения, но и передает характер поведения точного решения во времени.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Будем искать решение стационарных уравнений конических течений газа как предел при  $t \rightarrow \infty$  решения нестационарных уравнений конических течений газа с фиксированными параметрами набегающего потока и с фиксированной геометрией конического тела.

Рассмотрим следующую нестационарную систему уравнений:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + B \cdot \frac{\partial U}{\partial s} + \Gamma = 0, \quad (1)$$

где

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ p_* \\ S \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} v_* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_* & a^2/\varepsilon & 0 \\ 0 & 1/\varepsilon & v_* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_* \end{pmatrix}; \quad \Gamma = \begin{pmatrix} -v^2 \\ u \cdot v \\ 2u + v \operatorname{ctg} \theta \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$s = \frac{\theta - \theta_b}{\varepsilon}; \quad \varepsilon = \theta_w - \theta_b; \quad v_* = \frac{1}{\varepsilon} \left( v - s \frac{d\theta_w}{dt} \right);$$

$$p_* = \frac{1}{\gamma} \ln p; \quad \rho_* = \ln \rho; \quad S = p_* - \rho_*; \quad a^2 = \frac{\gamma - 1}{2} \exp [(\gamma - 1) p_* + S];$$

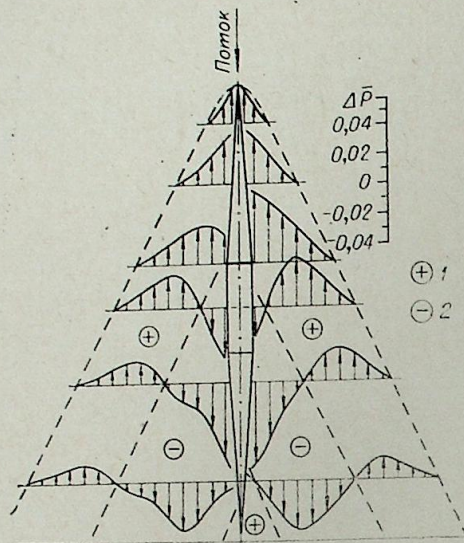
$\theta$  — полярный угол (см. рис. 1) с краевыми условиями:

а) условие непротекания

$$v(t, 0) = 0; \quad (2)$$

Рис. 5. Распределение давления на поверхности модели в районе расположения надстройки.

1 — зона повышения давления, 2 — зона понижения давления.



точности и надежности измерений все испытания были проведены многократно. С целью исключения влияния неравномерности потока измерения давления на поверхности крыла проводились в присутствии надстроек и без них при одной установке модели. В дальнейшем использовались только разности коэффициентов давлений в присутствии надстроек и без них.

На рис. 5 приведена картина распределения давления на поверхности крыла вблизи надстройки с коническими носовой и хвостовой частями и удлинением 18. Видно, что вблизи носовой части надстройки появляется зона повышения давления, а от стыка носовой и центральной частей — зона понижения давления. При расположении кормовой части надстройки на уровне задней кромки крыла  $C_{упит}$  имеет положительное значение в диапазоне углов атаки от  $-4$  до  $+4^\circ$ .

Ниже приведены некоторые значения  $\Delta C_x$ , полученные по разработанной методике и с помощью механических весов, пересчитанные в поточную систему координат и отнесенные к одной надстройке.

$\alpha$	Тензометрические и дренажные испытания	Механические весы
$-4^\circ$	0,085	0,070
$0^\circ$	0,106	0,116
$4^\circ$	0,152	0,161

При измерениях с помощью механических весов данные были получены осреднением нагрузок, действующих на 6 надстроек, которые находятся в разных условиях течения из-за неодинаковых скосов потока и толщины пограничного слоя по размаху полукрыла. Результаты тензометрических и дренажных испытаний приведены для надстройки, расположенной во втором положении на полукрыле, считая от концевой хорды. Сходимость результатов измерений коэффициента  $\Delta C_x$  по разработанной методике и с помощью механических весов удовлетворительная. Разработанная методика позволяет изучать интерференцию надстроек небольших размеров с несущей поверхностью или фюзеляжем и выявлять вклад отдельных составляющих в суммарную интерференционную нагрузку.

Авторы выражают свою признательность Г. П. Ольховикову за разработку и доводку миниатюрных тензометрических весов, А. А. Рафаэлянц за поддержку и полезные обсуждения методических вопросов.

Институт теоретической и прикладной механики  
СО АН СССР, Новосибирск

Поступила в редакцию  
8/VIII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Коваленко В. М. Расчет сопротивления трения в сверхзвуковом потоке. Тр. 1-й Респ. конф. по аэрогидромеханике, теплообмену и массообмену. Киев, 1969.
2. Каримуллин И. Г. Влияние надстроек на характер обтекания тел вращения большого удлинения. Тр. ЦАГИ, 1973, вып. 1497.

б) условия Рэнкина — Гюгонно на ударной волне

$$\left. \begin{aligned} u(t, 1) &= u_\infty, \\ [v(t, 1) - v_\infty]^2 + \frac{\gamma-1}{2\gamma} [\rho(t, 1) - \rho_\infty] \left[ \frac{1}{\rho(t, 1)} - \frac{1}{\rho_\infty} \right] &= 0, \\ \frac{\rho(t, 1) - \rho_\infty}{\rho(t, 1)} - \frac{\gamma-1}{2\gamma} [\rho(t, 1) - \rho_\infty] \left[ \frac{1}{\rho(t, 1)} + \frac{1}{\rho_\infty} \right] &= 0, \\ \frac{d\theta_w}{dt} &= v(t, 1) + \rho_\infty \frac{v(t, 1) - v_\infty}{\rho(t, 1) - \rho_\infty}, \\ \rho_\infty &= \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \right]^{-\frac{1}{\gamma-1}}, \\ \rho_\infty &= \rho_\infty^\gamma, \quad u_\infty = V_\infty \cos \theta_w, \quad v_\infty = -V_\infty \sin \theta_w, \\ V_\infty^2 &= \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \right), \end{aligned} \right\} (3)$$

$\gamma$  — показатель адиабаты,  $M_\infty$  — число Маха набегающего потока ( $M_\infty > 1$ ).

Если  $U, \theta_w$  не зависят от  $t$ , то система (1) с краевыми условиями (2), (3) описывает стационарное обтекание кругового конуса сверхзвуковым потоком газа под нулевым углом атаки (рис. 1). П. с. р. обозначим через  $\hat{U}, \hat{\theta}_w$  ( $\hat{u}, \hat{v}$  — составляющие вектора скорости вдоль и поперек радиуса;  $\hat{p}, \hat{\rho}$  — давление и плотность).

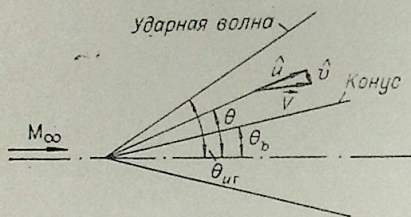


Рис. 1.

Линеаризуем систему (1) и краевые условия (2), (3). Приведем линейную систему дифференциальных уравнений для малых возмущений п. с. р. и краевые условия к каноническому виду

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + D(s) \frac{\partial Y}{\partial s} + A(s) Y = 0, \quad (4)$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\hat{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2\hat{a}f_2} & \frac{1}{2f_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\hat{a}f_3} & \frac{1}{2f_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u & -s\hat{v}\delta\theta_w \\ \delta v + s(\hat{u} + \varphi)\delta\theta_w \\ \delta p_* & -\frac{s\hat{v}\varphi}{\hat{a}^2}\delta\theta_w \\ \delta S \end{pmatrix},$$

$$\delta\theta_w = \frac{\delta u(t, 1)}{\hat{v}_\infty},$$

$$D = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & c_4 \\ b_1 & b_2 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$y_2(t, 0) = y_3(t, 0), \quad (5)$$

$$\frac{dy_1(t, 1)}{dt} + \mu y_1(t, 1) + \nu y_3(t, 1) = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} y_2(t, 1) &= \nu_1 y_1(t, 1) - \nu_2 y_3(t, 1), \quad y_4(t, 1) = \sum_{j=1}^3 d_j y_j(t, 1). \end{aligned} \right\} (6)$$

$$\text{Здесь } \hat{a}^2 = \frac{\gamma-1}{2} (1 - \hat{v}^2 - \hat{u}^2), \quad \varphi = \frac{\hat{u} + \hat{v} \operatorname{ctg} \theta}{1 - M^2}, \quad \theta = s\hat{\varepsilon} + \theta_b,$$

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\theta}_w - \theta_b, \quad M = \frac{\hat{v}}{\hat{a}}, \quad f_2 = \exp \left( - \int_s^1 \frac{c_2(s) ds}{\mu_2(s)} \right),$$

$$\hat{v}_\infty = -V_\infty \sin \hat{\theta}_w,$$

$$f_3 = f_2(0) \exp \left( \int_0^s \frac{b_3(s) ds}{\mu_3(s)} \right), \quad \mu_1 = \hat{v}/\hat{\varepsilon}, \quad \mu_2 = (\hat{v} - \hat{a})/\hat{\varepsilon}, \quad \mu_3 = (\hat{v} + \hat{a})/\hat{\varepsilon}.$$

Коэффициенты матрицы  $A$ , функции  $c_2(s), b_3(s)$  и коэффициенты  $\mu, \nu, \nu_1, \nu_2, d_1, d_2, d_3$  также определяются через известное п. с. р.  $\hat{U}(s), \hat{\theta}_w$ . Введем следующие функции:

$$x_1(s, s_0) = \int_{s_0}^s \frac{ds}{\mu_1}, \quad x_2(s, s_0) = \int_{s_0}^s \frac{ds}{\mu_2}, \quad x_3(s, s_0) = \int_{s_0}^s \frac{ds}{\mu_3},$$

и константы:  $t_2 = x_2(0, 1), t_3 = x_3(1, 0), T = t_2 + t_3$ . Отметим, что  $\mu_1(s) \leq 0, \mu_2(s) < 0, \mu_3(s) > 0$ , поскольку  $\hat{v}(s) \leq 0, |M(s)| < 1$  [2]. На рис. 2

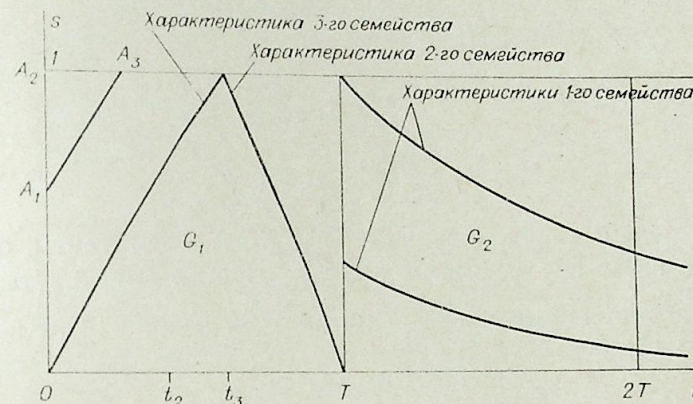


Рис. 2.

показаны характеристики системы (4). Решение системы (4) с краевыми условиями (5), (6) и с начальными данными  $Y(0, s) = Y_0(s)$  определяется в полуполосе  $0 \leq t < \infty, 0 \leq s \leq 1$ . Разобьем полуполоску на области  $G_j = \{ \tau_{j-1} \leq t \leq \tau_j, 0 \leq s \leq 1 \}, \tau_j = j \times T, j = 1, 2, \dots$  (рис. 2). Нахождение решения системы (4) сводится к последовательному решению системы в областях  $G_j$ . Пусть начальные данные  $Y_0(s) \in C_1[0, 1]$ , выполнены условия непрерывности решения в точках  $(0, 0)$  и  $(0, 1)$  плоскости  $t, s$ . Тогда существование и единственность классического решения легко доказывается с помощью метода последовательных приближений, если перейти от системы уравнений (4) к интегральным уравнениям [3]. Для примера выпишем интегральное уравнение для функции  $y_3$ :

$$y_3(\tau_j, s) = -\nu_2 y_3(\tau_{j-1}, s) + \nu_1 \exp[-\mu x_3(1, s)] y_1(\tau_{j-1}, 1) -$$

$$- \nu_1 \nu \exp[-\mu x_3(1, s)] \int_s^1 \frac{y_3(\tau_{j-1}, x) \exp[\mu x_3(1, x)]}{\mu_3(x)} dx -$$

$$- \nu_1 \nu \exp[-\mu x_3(1, s)] \int_s^1 \frac{\exp[\mu x_3(1, y)]}{\mu_3(y)} \int_y^1 \frac{F_3(\tau_{j-1} + x_3(x, y), x) dx dy}{\mu_3(x)} -$$

$$-v_2 \int_s^1 \frac{F_3(\tau_{j-1} + x_3(x, s), x) dx}{\mu_3(x)} - \int_0^1 \frac{F_2(\tau_{j-1} + x_3(1, s) + x_2(x, 1), x)}{\mu_2(x)} dx +$$

$$+ \int_0^s \frac{F_3(\tau_{j-1} + t_2 + x_3(1, s) + x_3(x, 0), x)}{\mu_3(x)} dx, \quad (7)$$

$$F_2(t, s) = -[c_1(s)y_1(t, s) + c_3(s)y_3(t, s) + c_4(s)y_4(t, s)],$$

$$F_3(t, s) = -[b_1(s)y_1(t, s) + b_2(s)y_2(t, s) + b_4(s)y_4(t, s)].$$

УСТОЙЧИВОСТЬ П. С. Р.  $\hat{U}(s)$ ,  $\hat{\theta}_w$

В этом параграфе мы докажем устойчивость п. с. р. методом энергетических неравенств [4]. Умножим (4) скалярно на  $Y$  и после преобразования, учитывая краевые условия (5), (6), получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \|Y(t)\|^2 + K_1 y_1^2(t, 1) + K_2 \left[ \frac{\partial y_1(t, 1)}{\partial t} \right]^2 +$$

$$+ 2K_3 y_1(t, 1) \frac{\partial y_1(t, 1)}{\partial t} = 2 \int_0^1 (Y, NY) ds. \quad (8)$$

Здесь

$$\|Y(t)\|^2 = \int_0^1 (Y, Y) ds = \int_0^1 \left[ \sum_{j=1}^4 y_j^2(t, s) \right] ds,$$

$$N = \frac{1}{2} \left\{ \frac{dD}{ds} - A - A' \right\},$$

$A'$  — транспонированная матрица  $A$ ;  $K_1, K_2, K_3$  — константы, определяемые через известное п. с. р.  $\hat{U}(s)$ ,  $\hat{\theta}_w$ . Пусть  $\sigma = \max_{j=1,2,3,4} \{ \max_{0 \leq s \leq 1} r_j(s) \}$ , где  $r_j(s)$  — собственные значения матрицы  $N$ ,  $K = \min \{ K_1, K_2, K_3 \}$ . Если  $K > 0$ , то из (8) получаем

$$I(t) \leq I(0) \exp(\bar{\sigma} t), \quad (9)$$

где

$$I(t) = \|Y(t)\|^2 + K_3 y_1^2(t, 1), \quad \bar{\sigma} = \max \{ 2\sigma, -K_1/K_3 \}.$$

Пусть  $\sigma < 0$ . Тогда из (9) следует сходимость в среднем квадратичном к 0 решения системы (4) с краевыми условиями (5), (6). Поскольку  $\delta\theta_w = y_1(t, 1) \hat{a}(1) / (\hat{v}_\infty - \hat{v}(1))$ , то из (9) получаем

$$[\delta\theta_w]^2 \leq \frac{I(0) \exp(\bar{\sigma} t)}{K_3 [\hat{v}_\infty - \hat{v}(1)]^2} \hat{a}^2(1),$$

т. е. малое возмущение угла наклона скачка уплотнения стремится к 0 при  $t \rightarrow 0$ . Остается показать, что  $\sigma < 0, K > 0$ . Непосредственно это удастся сделать только в гиперзвуковом приближении, т. е. когда  $\varepsilon \ll 1$ . В общем случае из-за сложности коэффициентов матрицы и коэффициентов  $K_1, K_2, K_3$  это доказывается с помощью численных расчетов. На рис. 3 и 4 представлены результаты численных расчетов при различных значениях  $\theta_b$  и  $M_\infty$ .

Докажем теперь равномерную сходимость функций  $y_2(t, s), y_3(t, s)$  к 0 при  $t \rightarrow \infty$ . Введем следующие нормы:

$$\|y_2(t)\| = \max_{0 \leq s < 1} |y_2(t, s)|, \quad \|y_3(t)\| = \max_{0 \leq s < 1} |y_3(t, s)|,$$

$$\|y_2(\tau_j)\| = \|y_2\|_j, \quad \|y_3(\tau_j)\| = \|y_3\|_j, \quad j = 0, 1, 2 \dots$$

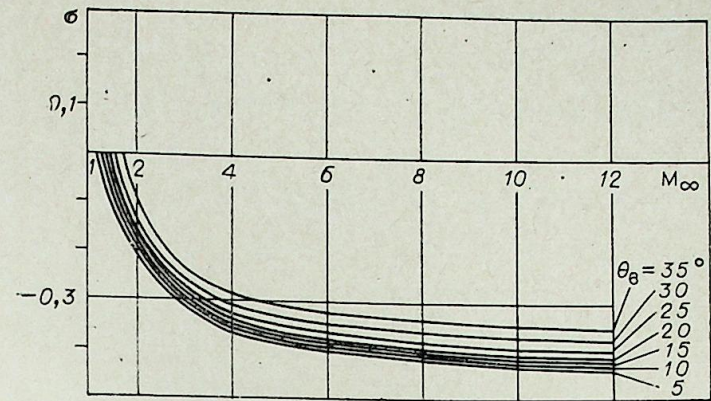


Рис. 3.

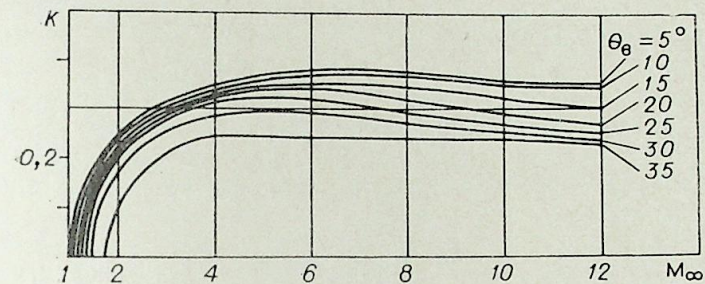


Рис. 4.

Из (7) получаем

$$\|y_3\|_j \leq q \|y_3\|_{j-1} + v_1 |y_1(\tau_{j-1}, 1)| + q \max_{0 \leq s < 1} \int_s^1 \frac{|F_3(\tau_{j-1} + x_3(x, s), x)| dx}{\mu_3(x)} +$$

$$+ \max_{0 \leq s < 1} \int_0^1 \frac{|F_2(\tau_{j-1} + x_3(1, s) + x_2(x, 1), x)| dx}{|\mu_2(x)|} +$$

$$+ \max_{0 \leq s < 1} \int_0^s \frac{|F_3(\tau_{j-1} + t_2 + x_3(1, s) + x_3(x, 0), x)| dx}{\mu_3(x)},$$

$$q = v_2 + v v_1 / \mu.$$

Необходимо оценить три последних члена. Для этого систему (4) умножим скалярно на  $Y$ , получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t} (Y, Y) + \frac{\partial}{\partial s} (Y, DY) = 2(Y, NY).$$

Проинтегрируем это уравнение по области  $A_1 A_2 A_3$ , где  $A_1 A_3$  — отрезок характеристики 3-го семейства (рис. 2)

$$\int_{A_1}^{A_3} [(Y, Y) ds - (Y, DY) dt] + \int_{A_2}^{A_3} (Y, DY) dt -$$

$$- \int_{A_1}^1 (Y, Y) ds + 2 \int_{A_1 A_2 A_3} (Y, NY) ds dt = 0.$$

Отсюда получаем

$$\int_{A_1}^{A_3} \frac{y_1^2 + 2y_2^2 + y_4^2}{1+M} ds \leq 2I(0) \left[ 1 + \frac{|\sigma_1|}{\sigma} (\exp(\bar{\sigma}t_3) - 1) \right] \exp(\bar{\sigma}t_{j-1}),$$

$$\sigma_1 = \min_{j=1,2,3,4} \left( \min_{0 \leq s < 1} r_j(s) \right).$$

Следовательно

$$\|y_3\|_j \leq q \|y_3\|_{j-1} + \Lambda_3 \exp\left(\frac{\bar{\sigma}t_{j-1}}{2}\right), \quad (10)$$

$\Lambda_3$  — некоторая константа.

Из (10) получаем

$$\|y_3\|_j \leq q^j \|y_3\|_0 + \Lambda_3 \frac{q^j \exp\left(-\frac{\bar{\sigma}T}{2}\right) - \exp\left(\frac{\bar{\sigma}t_{j-1}}{2}\right)}{q \exp\left(-\frac{\bar{\sigma}T}{2}\right) - 1}.$$

Если  $q < 1$ , то  $\|y_3\|_j \rightarrow 0$  при  $j \rightarrow \infty$ .

Аналогично можно показать, что если  $q < 1$ , то  $\|y_2\|_j \rightarrow 0$  при  $j \rightarrow \infty$ .

На рис. 5 показано поведение параметра  $q$  при различных значениях  $\theta_0$  и  $M_\infty$ .

Итак, при  $t \rightarrow \infty$  интеграл  $\int_0^1 \left[ \sum_{j=1}^4 y_j^2(t, s) \right] ds \rightarrow 0$  при условии, что  $\sigma < 0$ ,

$K > 0$ . Это означает, что малые возмущения давления, скорости, энтропии стремятся к 0 при  $t \rightarrow \infty$  в среднем квадратичном. Этим самым доказана устойчивость п. с. р.  $\hat{U}(s)$ ,  $\hat{\theta}_w$ . Если  $q < 1$ , то малые возмущения давления и скорости, поперечной к радиусу, стремятся к 0 при  $t \rightarrow \infty$  равномерно.

Функция  $y_4(t, s)$  есть малое возмущение энтропии. Из последнего уравнения системы (4) следует, что функция  $y_4(t, s)$  постоянна вдоль характеристик первого семейства, причем при  $s=0$  (на конусе)  $y_4(t, 0) = y_4(0, 0)$ . Следовательно, энтропия стремится к 0 неравномерно. Эта неравномерность в численных расчетах проявляется в том, что установление значений функций на конусе (в частности, плотности  $\rho$  и энтропии  $S$ ) происходит медленнее, чем в остальной области течения. Аналогично ведет себя функция  $y_1(t, s)$ , которая определяется через малое возмущение  $\delta u(t, s)$ .

Таким образом, выяснен характер стремления каждой из функций  $u, v, p, S$  (или  $\rho$ ) к их предельным значениям в процессе установления.

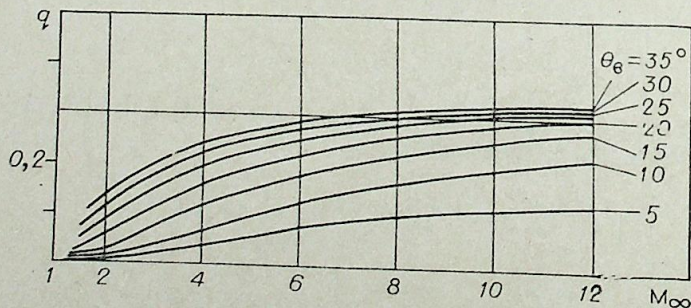


Рис. 5.

## АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ СПЕКТРА

### ОПЕРАТОРА $\left[ -D(s) \frac{d}{ds} - A(s) \right]$

Устойчивость п. с. р. можно изучать, рассматривая спектр оператора  $\left[ -D(s) \frac{d}{ds} - A(s) \right]$ .

Опишем способ решения спектральной задачи следующего вида:

$$\lambda z + D(x) \frac{dz}{dx} + A(x) z = 0, \quad x \in [\alpha, \beta], \quad (11)$$

$$Lz(\alpha) = 0, \quad Rz(\beta) = 0,$$

где  $z$  — вектор-функция с  $n_1$  компонентами;  $D(x)$  и  $A(x)$  — квадратные матрицы порядка  $n_1$ ; матрица  $D$  — диагональная;  $L$  и  $R$  — прямоугольные постоянные матрицы. Задача состоит в отыскании  $\lambda$  (собственного значения), при котором система (11) имеет нетривиальное решение (собственную функцию). Для ознакомления с общей теорией таких спектральных задач можно рекомендовать [5].

Вычисление отдельных точек спектра и соответствующих собственных функций можно провести методом ортогональной прогонки [6]. Для этого систему дифференциальных уравнений (11) нужно заменить системой разностных уравнений. Счетный интервал  $[\alpha, \beta]$  разбиваем на  $N$  интервалов и в каждой счетной точке пишем разностные уравнения. В результате получим систему

$$Lz_0 = 0, \quad z_1 = Q_{1/2}(\lambda) z_0, \quad z_2 = Q_{3/2}(\lambda) z_1, \quad \dots, \quad z_N = Q_{N-1/2}(\lambda) z_{N-1}, \quad Rz_N = 0. \quad (12)$$

Зададим какое-нибудь число  $\lambda$ . Решаем (12) методом ортогональной прогонки (формулы прогонки подробно приведены в [6]). В результате решения в  $N$ -й точке получим ортонормированную систему векторов  $z_N^{(1)}, z_N^{(2)}, \dots, z_N^{(r)}$  (здесь  $r$  — число векторов базиса подпространства, определяемого условием  $Lz_0 = 0$ ). Решение в  $N$ -й точке можно представить в виде линейной комбинации

$$z_N = \beta_1^N z_N^{(1)} + \beta_2^N z_N^{(2)} + \dots + \beta_r^N z_N^{(r)}.$$

Удовлетворяя правому граничному условию, получим

$$Rz_N = R \left( z_N^{(1)}, z_N^{(2)}, \dots, z_N^{(r)} \right) \begin{pmatrix} \beta_1^N \\ \beta_2^N \\ \vdots \\ \beta_r^N \end{pmatrix} = 0. \quad (13)$$

В силу отличия вектора с компонентами  $\beta_j^N$  от нулевого, для разрешимости (13) нужно, чтобы  $\det R(z_N^{(1)}, z_N^{(2)}, \dots, z_N^{(r)}) = 0$ .

Таким образом, для каждого заданного  $\lambda$  мы можем вычислить  $F(\lambda) = \det R(z_N^{(1)}, z_N^{(2)}, \dots, z_N^{(r)})$ ,

и если  $F(\lambda) = 0$ , то система (12) имеет ненулевое решение и это  $\lambda$  является собственным значением. Как только известно собственное значение  $\lambda$ , из уравнения (13) находим  $\beta_j^N$  и определяем собственные функции [6].

Укажем теперь способ вычисления нулей функции  $F(\lambda)$ . Известно, что интеграл по замкнутому контуру

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \lambda^k d \ln F(\lambda) = \sum a^k - \sum b^k,$$

где  $a$  — нули  $F(\lambda)$ ;  $b$  — полюса  $F(\lambda)$ , расположенные внутри контура. Таким образом, для любого замкнутого контура на плоскости  $\lambda$  мы можем вычислить (поскольку  $F(\lambda)$  не имеет полюсов) число нулей

( $k=0$ ), сумму нулей ( $k=1$ ), сумму квадратов нулей ( $k=2$ ) и т. д. На практике, если нет кратных собственных значений, достаточно вычислить интегралы при  $k=0$  и  $k=1$ , локализуя собственные значения и уточняя их стягиванием контура. Для вычисления интегралов можно применять формулу трапеций, которая дает достаточно хорошую точность. Интеграл при  $k=0$  (число нулей) вычисляется совсем просто — это приращение аргумента  $F(\lambda)$  при обходе по замкнутому контуру в плоскости  $\lambda$ , деленное на  $2\pi$ .

Опишем теперь разностную схему, применяемую для системы (11), с помощью которой совершается переход к (12). Для этого перепишем систему (11) в более удобном виде. Диагональную матрицу  $D(x)$  представим в виде  $D(x) = \begin{pmatrix} D_1(x) & 0 \\ 0 & -D_2(x) \end{pmatrix}$ , где матрицы  $D_1, D_2$  диагональные, с положительными элементами. Тогда (11) примет вид

$$\begin{aligned} \lambda z^1 + D_1(x) \frac{dz^1}{dx} + A^{11}(x) z^1 + A^{12}(x) z^2 &= 0, \\ \lambda z^2 - D_2(x) \frac{dz^2}{dx} + A^{21}(x) z^1 + A^{22}(x) z^2 &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$z = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix}; \quad z^1 = \begin{pmatrix} z_1^1 \\ \vdots \\ z_r^1 \end{pmatrix}; \quad z^2 = \begin{pmatrix} z_1^2 \\ \vdots \\ z_p^2 \end{pmatrix}; \quad r + p = n_1;$$

$$A(x) = \begin{pmatrix} A^{11}(x) & A^{12}(x) \\ A^{21}(x) & A^{22}(x) \end{pmatrix}.$$

Пусть известно решение  $z^1(x_n), z^2(x_n)$ ; нужно определить решение в точке  $x_{n+1}$ . Систему (14) на интервале  $[x_n, x_{n+1}]$  заменим системой уравнений с постоянными коэффициентами, для этого все коэффициенты уравнений заменим полусуммой соответствующих коэффициентов в точках  $x_n$  и  $x_{n+1}$ . Обозначая  $D_i = \frac{1}{2} [D_i(x_n) + D_i(x_{n+1})]$ ,  $A^{ij} = \frac{1}{2} \times [A^{ij}(x_n) + A^{ij}(x_{n+1})]$ , получим систему

$$\begin{aligned} \lambda z^1 + D_1 \frac{dz^1}{dx} + A^{11} z^1 + A^{12} z^2 &= 0, \\ \lambda z^2 - D_2 \frac{dz^2}{dx} + A^{21} z^1 + A^{22} z^2 &= 0. \end{aligned}$$

Сделаем замену

$$z^1 = \exp[-D_1^{-1}(\lambda I + \text{diag } A^{11})x] \tilde{z}^1, \quad z^2 = \exp[D_2^{-1}(\lambda I + \text{diag } A^{22})x] \tilde{z}^2,$$

где  $\text{diag } A^{ii}$  — диагональная матрица, ее элементы по диагонали — соответствующие элементы матрицы  $A^{ii}$ . Система теперь примет вид

$$\begin{aligned} D_1 \exp[-D_1^{-1}(\lambda I + \text{diag } A^{11})x] \frac{d\tilde{z}^1}{dx} + (A^{11} - \text{diag } A^{11}) z^1 + A^{12} z^2 &= 0, \\ -D_2 \exp[D_2^{-1}(\lambda I + \text{diag } A^{22})x] \frac{d\tilde{z}^2}{dx} + A^{21} z^1 + (A^{22} - \text{diag } A^{22}) z^2 &= 0. \end{aligned}$$

Далее заменим производные разностными отношениями (экспоненты вычисляем в точке  $x_{n+1/2} = (x_n + x_{n+1})/2$ ).

$$\begin{aligned} D_1 \exp[-D_1^{-1}(\lambda I + \text{diag } A^{11})x_{n+1/2}] \frac{\tilde{z}^1(x_{n+1}) - \tilde{z}^1(x_n)}{h} + (A^{11} - \text{diag } A^{11}) \\ z^1(x_{n+1}) + A^{12} z^2(x_{n+1}) &= 0, \\ D_2 \exp[D_2^{-1}(\lambda I + \text{diag } A^{22})x_{n+1/2}] \frac{\tilde{z}^2(x_{n+1}) - \tilde{z}^2(x_n)}{h} + A^{21} z^1(x_n) + \\ + (A^{22} - \text{diag } A^{22}) z^2(x_n) &= 0. \end{aligned}$$

Произведем обратную замену  $\tilde{z}^i$  на  $z^i$

$$\begin{aligned} \tilde{z}^1(x_{n+1}) &= \exp[D_1^{-1}(\lambda I + \text{diag } A^{11})x_{n+1}] z^1(x_{n+1}), \\ \tilde{z}^1(x_n) &= \exp[D_1^{-1}(\lambda I + \text{diag } A^{11})x_n] z^1(x_n), \\ \tilde{z}^2(x_{n+1}) &= \exp[-D_2^{-1}(\lambda I + \text{diag } A^{22})x_{n+1}] z^2(x_{n+1}), \\ \tilde{z}^2(x_n) &= \exp[-D_2^{-1}(\lambda I + \text{diag } A^{22})x_n] z^2(x_n), \end{aligned}$$

и перепишем систему в матричном виде  $P_{n+1/2} z_n + S_{n+1/2} z_{n+1} = 0$ , где

$$P_{n+1/2} = \begin{pmatrix} -D_1 \exp[-D_1^{-1}(\lambda I + \text{diag } A^{11}) \frac{h}{2}] & 0 \\ hA^{21} & h(A^{22} - \text{diag } A^{22}) + D_2 \exp[D_2^{-1}(\lambda I + \text{diag } A^{22}) \frac{h}{2}] \end{pmatrix},$$

$$S_{n+1/2} = \begin{pmatrix} h(A^{11} - \text{diag } A^{11}) + D_1 \exp[D_1^{-1}(\lambda I + \text{diag } A^{11}) \frac{h}{2}] & hA^{12} \\ 0 & -D_2 \exp[-D_2^{-1}(\lambda I + \text{diag } A^{22}) \frac{h}{2}] \end{pmatrix}.$$

Умножая уравнение слева на матрицу  $S_{n+1/2}^{-1}$ , взяв полученное уравнение в каждой счетной точке и добавляя граничные условия  $Lz_0 = 0$ ,  $Rz_N = 0$ , получим систему вида (12).

Замена переменных с выделением экспонент вида  $z = \exp[D^{-1}(\lambda I + A)x] \tilde{z}$  проведена из тех соображений, что такие экспоненты описывают первые члены асимптотического разложения решения при больших по модулю  $\lambda$ , и можно надеяться, что при таком выделении не придется сильно мельчить шагами интегрирования при отыскании больших  $\lambda$ . Младшие члены в уравнениях для  $z^1$  и  $z^2$  брались в разных точках в соответствии с тем, откуда уходят характеристики в нестационарной задаче, из которой получена спектральная задача. Это дает основание предположить устойчивость рассматриваемой схемы. Необходимое доказательство, к сожалению, не проведено, однако расчеты подтверждают это предположение.

Рассмотрим результаты вычисления спектра оператора

$$\left[ -D(s) \frac{d}{ds} - A(s) \right], \text{ описанного в первом разделе.}$$

Спектр вычислялся с помощью алгоритма, приведенного выше. Поскольку решение системы (4) при  $s=0$  имеет особенность, левое граничное условие было взято при

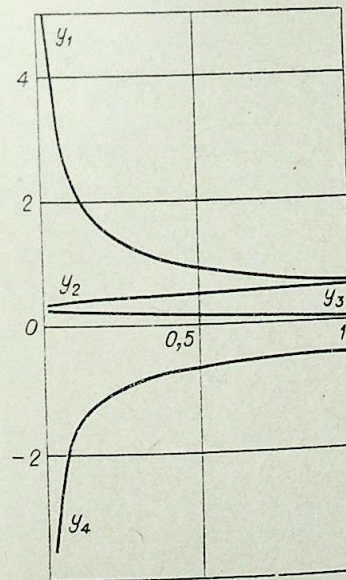


Рис. 6.

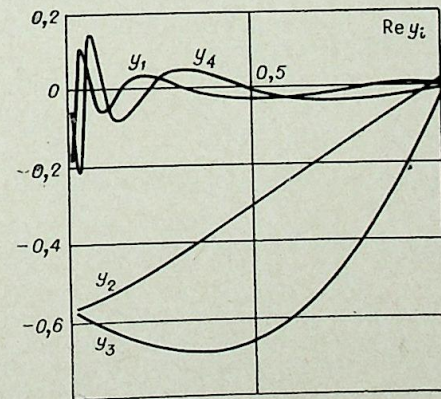


Рис. 7.

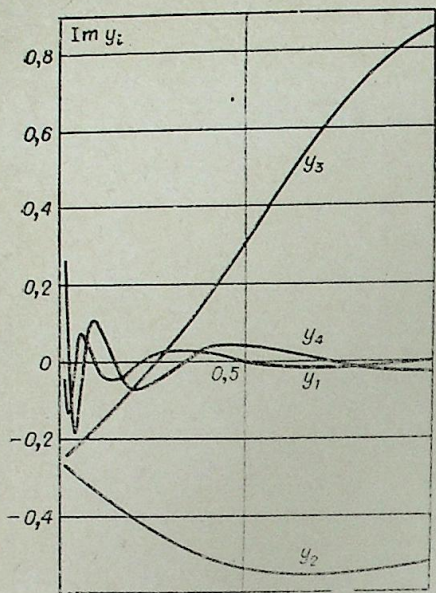


Рис. 8.

$s = \varepsilon_1$  (вместо  $s=0$ ), т. е. решалась задача на интервале  $s \in [\varepsilon_1, 1]$ .

Примем  $\varepsilon_1 = 0.01$ . Собственные значения  $\lambda$  уточнялись до тех пор, пока  $|F(\lambda)| < 10^{-5}$ . Вычислены следующие собственные значения  $\lambda_1 = -0.6672928625$ ,  $\lambda_2 = -0.758733806 + 5.00545722 i$ ,  $\lambda_3 = -2.5699$  при  $M_\infty = 2.62$ ,  $\theta_0 = 15^\circ$ .

Для первых двух собственных значений (с наибольшими вещественными частями) собственные функции имеют вид, изображенный на рисунках. На рис. 6 изображены собственные функции, отвечающие собственному значению  $\lambda_1$ . На рис. 7, 8 изображены соответственно вещественные и мнимые части собственных функций, отвечающих  $\lambda_2$ .

#### ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ (4)

В качестве начальных данных для системы (4) возьмем вычисленные выше собственные функции оператора  $\left[ -D(s) \frac{d}{ds} - A(s) \right]$ , соответствующие собственным значениям  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  (в случае  $\lambda_2$ , в качестве начальных данных берем вещественную, либо мнимую часть собственных функций). В этом случае точное решение системы (4) имеет вид

$$Y(t, s) = e^{t \operatorname{Re} \lambda} Y_0(s) = e^{t \operatorname{Re} \lambda} [\cos(\operatorname{Im} \lambda \cdot t) \operatorname{Re} Y_0(s) - \sin(\operatorname{Im} \lambda \cdot t) \operatorname{Im} Y_0(s)] + i e^{t \operatorname{Re} \lambda} [\cos(\operatorname{Im} \lambda \cdot t) \operatorname{Im} Y_0(s) + \sin(\operatorname{Im} \lambda \cdot t) \operatorname{Re} Y_0(s)], \quad (15)$$

где  $Y_0(s)$  — собственные функции операторов  $\left[ -D(s) \frac{d}{ds} - A(s) \right]$ , соответствующие собственному значению  $\lambda$ . Таким образом, решая численно систему (4) с такими начальными данными, мы имеем возможность сравнивать численное решение с точным решением и тем самым проверять сходимость процесса установления для той или иной разностной модели.

Для примера возьмем известную схему Мас Согмак'а [7]. Систему (4) запишем в виде

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial DY}{\partial s} + \left( A - \frac{dD}{ds} \right) Y = 0. \quad (16)$$

Тогда разностная схема примет вид

$$Y_j^{(1)} = Y_j^n - \frac{\tau}{h} (D_{j+1} Y_{j+1}^n - D_j Y_j^n) - \tau \left[ A_j - \left( \frac{dD}{ds} \right)_j \right] Y_j^n, \quad (17)$$

$$Y_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left\{ Y_j^n + Y_j^{(1)} - \frac{\tau}{h} (D_j Y_j^{(1)} - D_{j-1} Y_{j-1}^{(1)}) - \tau \left[ A_j - \left( \frac{dD}{ds} \right)_j \right] Y_j^{(1)} \right\}, \quad (18)$$

$$hN = 1 - \varepsilon_1, \quad 0 < j < N, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$Y_j^n = Y(n\tau, jh), \quad Y_j^{n+1} = Y((n+1)\tau, jh) \text{ и т. д.}$$

При  $s = \varepsilon_1$  схема модифицируется следующим образом:

$$Y_0^{n+1} = \left( 1 + \frac{\tau D_0'}{h} \right) Y_0^n - \frac{\tau D_0'}{h} Y_1^n - \tau A_0' Y_0^n,$$

$$y_{30}^{n+1} = y_{20}^{n+1},$$

$$Y' = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad D' = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1 \end{pmatrix} \text{ и т. д.}$$

При  $s=1$  вместо (17), (18) используем следующие соотношения:

$$y_{3N}^{n+1} = \left( 1 - \frac{\tau \mu_{3N}}{h} \right) y_{3N}^n + \frac{\tau \mu_{3N}}{h} y_{3N-1}^n - \tau \times [b_{1N} y_{1N}^n + b_{2N} y_{2N}^n + b_{4N} y_{4N}^n],$$

$$y_{1N}^{n+1} = y_{1N}^n - \tau \times (\mu y_{1N}^n + \nu y_{3N}^n),$$

$$y_{2N}^{n+1} = \nu_1 y_{1N}^{n+1} - \nu_2 y_{3N}^{n+1}, \quad y_{4N}^{n+1} = d_1 y_{1N}^{n+1} + d_2 y_{2N}^{n+1} + d_3 y_{3N}^{n+1}.$$

Шаги  $\tau$  и  $h$  подчинены условию  $\frac{\tau}{h} \max_{0 \leq s < 1} |\mu_2| < 1$  (условие Куранта).

На рис. 9, 10 представлены результаты численного расчета при  $\lambda = \lambda_1$  и  $\lambda = \lambda_2$  для различных моментов времени (в случае  $\lambda = \lambda_2$ , в качестве начальных данных для системы (4) бралась вещественная часть

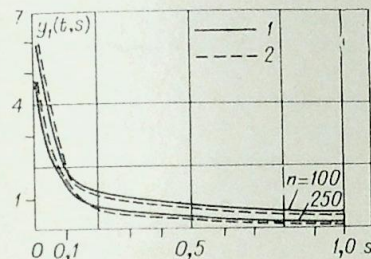


Рис. 9.  
 $M_\infty = 2.62$ ;  $\theta_0 = 15^\circ$ ;  $\lambda = \lambda_1$ ;  $h = 0.01$ ; 1 — точное решение; 2 — численное решение.

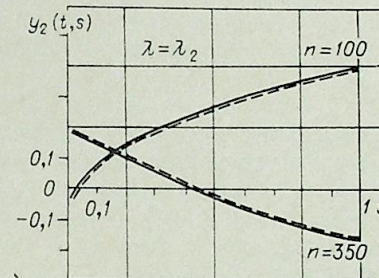


Рис. 10.

собственных функций). Результаты численных расчетов показывают, что разностная схема Мас Согмак'а не только обеспечивает сходимость процесса установления, но весьма правильно передает изменение точного решения во времени.

В заключение авторы выражают благодарность С. К. Годунову за постоянное внимание к работе.

Вычислительный центр  
СО АН СССР, Новосибирск

Поступила в редакцию  
19/IV 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Любимов А. Н., Русанов В. В. Течение газа около тупых тел. М., «Наука», 1970.
2. Булах Б. М. Нелинейные конические течения газа. М., «Наука», 1970.
3. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений. М., «Наука», 1968.
4. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.
5. Брушлинский К. В. О росте решения смешанной задачи в случае неполноты собственных функций. — Изв. АН СССР, сер. мат., 1959, 23, 893—912.
6. Годунов С. К. Метод ортогональной прогонки для решения систем разностных уравнений. — ЖВМ и МФ, 1962, 2, № 6, 972—982.
7. Мас Согмак R. W. The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Cratering. AIAA Paper, 1969, 69—354.

О. Н. ЛЕБЕДЕВ, О. П. СОЛОНЕНКО

РАСЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ  
ДВУХФАЗНОЙ СТРУИ  
РАСПЫЛЕННОЙ ЖИДКОСТИ

Двухфазные турбулентные струи встречаются в различных отраслях науки и техники. В качестве примесей, находящихся во взвешенном состоянии в струе, могут быть и капли распыленной жидкости, и твердые частицы.

Динамические особенности развития таких струй различны. Так, например, турбулентная двухфазная струя может быть получена при впрыске в газовую среду струи распадающейся жидкости. Струю с твердыми частицами получают лишь «вдуванием» примесей с помощью газа.

К настоящему времени накоплен ряд фундаментальных сведений теоретического и экспериментального характера [1—3] и др., посвященных исследованию процессов переноса импульса и массы в стационарных турбулентных двухфазных струях. Значительно менее изучены нестационарные турбулентные двухфазные струйные течения. Их успешное исследование во многом будет способствовать созданию высокофорсированных машин и аппаратов с высокими удельными мощностными характеристиками и минимальными вредными воздействиями на окружающую среду.

Последнее имеет непосредственное отношение к процессам смесеобразования в дизелях, во многом определяющих надежность и экономичность этих машин. Однако ввиду большой сложности процессов смесеобразования до настоящего времени нет ни расчетных, ни экспериментальных методов, позволяющих проследить за динамикой формирования скоростных, концентрационных и температурных полей в нестационарном топливно-воздушном факеле. А именно эти сведения крайне необходимы для прогнозирования основных показателей рабочего процесса дизеля (продолжительность задержки самовоспламенения топлива, динамические показатели и т. д.). В настоящей работе предпринята попытка восполнить указанный пробел применительно к изотермическим условиям.

Предположим, что из сопла диаметром  $d_c$  в камеру впрыскивается струя жидкого топлива. Условно допустим, что распад струи полностью завершается к выходному сечению сопла. Последнее близко к действительности, поскольку известно [4], что длина  $L_p$  нераспавшегося участка жидкой струи для режимов, соответствующих условиям распыливания жидкостей с помощью механических форсунок давления ( $d_c \in [10^{-4}; 10^{-3}]$  м, начальная скорость впрыска  $w_{z0} \in [100; 200]$  м/с) составляет  $L_p \sim 10d_c$ , т. е.  $L_p \sim 10^{-2}$  м и меньше. Таким образом, время распада  $\tau_p \sim 10^{-4}$  с, намного меньше времени подачи струи  $\tau_n \sim 10^{-2}$  с.

Допустим далее, что пространство, в которое впрыскивается топливо, заполнено неподвижной газовой средой, плотность  $\rho_1$  и давление

$p_1$  которой известны, причем температуры фаз равны, и фазовые превращения отсутствуют.

Будем считать, что имеет место единичный впрыск топлива, динамика которого определяется зависимостью

$$B_\tau = B_n f(\tau), \quad \tau \in [0; \tau_n], \quad (1)$$

где  $B_n$  — общая цикловая подача;  $B_\tau$  — количество топлива, впрыснутого к моменту  $\tau$ ;  $0 \leq f(\tau) \leq 1$  — строго монотонная непрерывная функция, характеризующая конкретный способ подачи.

При впрыске топлива его капли перемешиваются с воздухом и оказывают на него силовое воздействие. Благодаря этому газовая средняя турбулентная струя. Требуется проследить за динамикой развития такого факела и за формированием внутри него скоростных и концентрационных полей.

В условиях, близких к условиям в дизелях, осредненные скорости движения фаз быстро выравниваются [5]. Следовательно, допущение о равновесности осредненного движения в первом приближении не окажет заметного влияния на динамические характеристики факела. Правомочность такого предположения подтверждается рядом работ [6—8 и др.]. С другой стороны, даже для сравнительно малых размеров капель и малого удельного веса их материалов  $\gamma_2 \approx 800$  кг/м<sup>3</sup> равновесности в пульсационном движении фаз не наблюдается [9].

Исходя из вышесказанного, будем считать осредненные скорости движения фаз одинаковыми, а пульсационные — различными.

Введем в рассмотрение цилиндрическую систему координат, поместив ее начало в центр сопла и направив ось  $z$  вдоль оси струи. С учетом перечисленных обстоятельств и исследований [10, 11], а также принимая во внимание осесимметричность задачи, будем иметь следующую математическую модель исследуемого процесса:

уравнение баланса массы капель топлива

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \rho_2 s_2 + \frac{\partial}{\partial z} \rho_2 s_2 w_z + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r [\rho_2 s_2 w_r + \langle (\rho_2 s_2)' w_{2r}' \rangle] = 0, \quad (2)$$

уравнение баланса массы для смеси «капли топлива + газ»

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \rho + \frac{\partial}{\partial z} \rho w_z + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \rho w_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \sum_{l=1}^2 \langle (\rho_l s_l)' w_{lr}' \rangle = 0, \quad (3)$$

уравнение баланса количества движения для смеси «капли топлива + газ» в проекции на ось  $z$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \rho w_z + \frac{\partial}{\partial z} \rho w_z^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \rho w_z w_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \sum_{l=1}^2 [\rho_l s_l \langle w_{lz} w_{lr}' \rangle + w_z \langle (\rho_l s_l)' w_{lr}' \rangle] = 0, \quad (4)$$

связь между концентрациями фаз

$$s_1 + s_2 = 1. \quad (5)$$

В уравнениях (2)–(5) приняты следующие обозначения:  $\tau$  — время;  $\rho_l$ ,  $s_l$ ,  $w_{lz}$ ,  $w_{lr}$ ,  $l=1, 2$  — массовая плотность, объемная концентрация, продольная и поперечная компоненты скорости соответственно, характеризующие  $l$ -ю фазу ( $w_{1z} = w_{2z}$ ,  $w_{1r} = w_{2r}$ ); штрихами отмечены пульсации соответствующих величин;  $\langle \rangle$  обозначает операцию пространственно-временного осреднения согласно [12];  $\rho = \rho_1 s_1 + \rho_2 s_2$ .

Заметим, что величина  $\rho_2 s_2$  в среднем по объему струи распыленной жидкости примерно на порядок меньше значения  $\rho_1 s_1$  (исключение составляет лишь относительно малый начальный участок, непосред-

венно примыкающий к срезу сопла). Кроме того, ввиду малых размеров капель ( $a \sim 20$  мкм) и сравнительно небольшой величины  $\rho_2/\rho_1$  значения корреляционных моментов  $\langle \omega'_{1z}\omega'_{1r} \rangle$  и  $\langle \omega'_{2z}\omega'_{2r} \rangle$  будут отличаться незначительно. Таким образом, возможно воспользоваться аппроксимацией

$$\rho_1 s_1 \langle \omega'_{1r}\omega'_{1r} \rangle + \rho_2 s_2 \langle \omega'_{2z}\omega'_{2r} \rangle \approx \rho \langle \omega'_{1z}\omega'_{1z} \rangle. \quad (6)$$

Для замыкания системы уравнений (2)–(5) необходимо, следуя полуэмпирическим теориям турбулентности, установить приемлемую связь между осредненными турбулентными потоками переносимых субстанций и основными осредненными параметрами течения. С этой целью воспользуемся соотношением Буссинеска и его аналогами [13], т. е.

$$\langle \omega'_z \omega'_r \rangle = -\varepsilon \frac{\partial \omega_z}{\partial r}, \quad (7)$$

$$\langle (\rho_l s_l)' \omega'_{lr} \rangle = -\frac{\varepsilon}{Sc_l} \frac{\partial}{\partial r} (\rho_l s_l), \quad l = 1, 2, \quad (8)$$

где  $\varepsilon$  — коэффициент кажущейся турбулентной кинематической вязкости смеси,  $Sc_l$  — турбулентное число Шмидта для  $l$ -й фазы, относительно способа вычисления которых будет сказано ниже.

С учетом изложенного выше, имеем замкнутую систему уравнений для отыскания  $s_1, s_2, \omega_z, \omega_r$ .

Для решения краевой задачи (2)–(8) необходимо сформулировать условия однозначности, которые для нестационарной струи, развивающейся в области  $K = \{(r, z) / 0 \leq |r| < \infty; 0 \leq z < \infty\}$  для  $\tau \in [0; \tau_n]$ , будут иметь следующий вид.

Начальные условия ( $\tau = 0$ )

$$s_2 = \omega_z = \omega_r = 0, \quad s_1 = 1 \quad (9)$$

для всей области  $K$ , кроме точек, принадлежащих срезу сопла, для которых при  $\tau \in [0; \tau_n]$

$$s_2 = 1, \quad s_1 = \omega_r = 0, \quad \omega_z = \omega_{z0}(\tau). \quad (10)$$

Необходимо сформулировать условия на бесконечности:

$$s_1 \rightarrow 0, \quad s_1 \rightarrow 1, \quad \omega_r \rightarrow 0, \quad \omega_z \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |r|, z \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Предположим, что рассматриваемая краевая задача для уравнений в частных производных корректна, т. е. ее решение существует, единственно и непрерывно зависит от начальных и граничных условий.

Как известно, в настоящее время не существует универсальных аналитических методов, позволяющих получать решение нелинейных краевых задач для уравнений в частных производных в конечном виде. Наиболее широкое распространение в данном случае получили конечно-разностные методы, эффективно используемые при решении сложных научно-технических задач [14–16]. Следуя этим методам, для построения решения рассматриваемой краевой задачи с учетом осевой симметрии проведем дискретизацию области  $K^+ = \{(r, z) / 0 \leq r < \infty; 0 \leq z < \infty\}$ , введя сетки по координатам  $r$  и  $z$  с шагами  $\bar{h}_r, \bar{h}_z$ :

$$K_r^* = \{r_i / r_i = i\bar{h}_r, \quad i = 0, 1, 2, \dots\}, \quad (12)$$

$$K_z^* = \{z_k / z_k = k\bar{h}_z, \quad k = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Как видно, при решении краевой задачи, описывающей нестационарное струйное течение, в каждом конкретном случае выбирается фиксированная пространственная прямоугольная сетка, узлы которой отождествляются с центрами контрольных физических объемов (КФО).

Таким образом, узлу  $(r_i, z_k) \in K^*$ , где  $K^* = K_r^* \times K_z^*$ , отвечает КФО  $(i, k)$ , образованный двумя парами граней, параллельных осям координат и отстоящих от центра  $(r_i, z_k)$  КФО на половину соответствующего шага сетки

В центрах КФО вычисляются осредненные по ним значения основных переносимых субстанций (импульсы, масса и т. д.). В серединах граней, образующих КФО, вычисляются все физические параметры, и поперечном направлениях.

Очередное значение шага по времени  $\Delta\tau_j, j = 1, 2, \dots, j_{\max}$  при переходе от одного временного слоя к следующему выбирается, исходя из особенностей перемещения вершины фронта струи. В основу нахождения величины  $\Delta\tau_j$  положена зависимость

$$\Delta\tau_j = \bar{h}_z / \omega_{\Phi, j}^{\text{cp}}, \quad (13)$$

где  $\omega_{\Phi, j}^{\text{cp}}$  — средняя скорость вершины фронта струи за промежуток времени  $[\tau_{j-1}; \tau_j]$ , где  $\tau_j = \tau_{j-1} + \Delta\tau_j, \tau_0 = 0$ . Формула (13) допускает проведение итераций при вычислении шага  $\Delta\tau_j$ . Обычно при численном исследовании рассматриваемой задачи проводилось 2–3 итерации, которых было достаточно для правильной оценки закономерности перемещения фронта нестационарного топливно-воздушного факела.

При конструировании разностных аналогов уравнений (2)–(4) были приняты во внимание следующие обстоятельства. Во-первых, струйное смесеобразование в любом сечении факела определяется картиной течения вверх по потоку, т. е. зависит от предыстории течения. Следовательно, оправдана аппроксимация конвективных членов уравнений, ответственных за перенос вдоль оси струи, разностями назад. Во-вторых, при аппроксимации конвективных членов, определяющих поперечный перенос в струе, следует иметь в виду, что в фиксированном сечении скорость  $\omega_r$  изменяет свой знак. Вследствие этого при конструировании разностного уравнения баланса субстанции для фиксированного КФО учитывались направления потоков через его нижнюю и верхнюю грани. С этой целью использовались несимметричные аппроксимации, аналогичные [17], [18].

Метод расчета достаточно полно изложен в [11].

Как отмечалось выше, при решении краевой задачи (2)–(11), дающей возможность получать профили осредненной скорости смеси и распределения концентраций жидкой и газовой фаз, необходимы количественные зависимости, характеризующие коэффициент кажущейся турбулентной кинематической вязкости смеси  $\varepsilon$  и турбулентные аналоги чисел Шмидта  $Sc_l, l = 1, 2$  для обеих фаз.

При численном исследовании нестационарного турбулентного топливно-воздушного факела в основу вычисления параметров  $Sc_l, l = 1, 2$  были положены зависимости, полученные в [19] путем обработки обширного экспериментального материала, известного для различных стационарных турбулентных двухфазных и гомогенных разноплотностных струй. Согласно [19], в предположении квазистационарности турбулентных характеристик рассматриваемого струйного течения, имеем

$$Sc_1 = 1 - \left[ 1 + \frac{(\rho_1 s_1 + \rho_2 s_2)_m}{(\rho_1 s_1)_0} \right]^{-2}, \quad (14)$$

$$Sc_2 = Sc_1 [1 + 1,4 \text{ th}(0,2 \text{ Ar}_s)],$$

где  $\text{Ar}_s = \frac{g a^3}{\nu_1^2} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1}$  — критерий Архимеда;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $a$  — среднеобъемный по спектру размер частиц распыленной жидкости;  $\nu_1$  — вязкость газа; индексом « $m$ » и « $0$ » отмечены значения величин соответственно для оси струи и за ее пределами.



$$\omega_{zm}/\omega_{z0} = c_2 \left( \frac{d_c}{z+a} \right) \left[ \frac{(\rho_1 s_1 + \rho_2 s_2)_c}{(\rho_1 s_1)_0} \right]^{\alpha_2} \quad (21)$$

где  $a$  — расстояние между устьем сопла и геометрическим центром;  $c_1, c_2, \alpha_1, \alpha_2$  — некоторые константы.

Существование зависимостей (20), (21) дает основание, следуя работе [13], по аналогии с (16) предположить справедливость соотношений

$$\varepsilon = 0,013 d_c \omega_{z0} \left[ \frac{(\rho_1 s_1 + \rho_2 s_2)_c}{(\rho_1 s_1)_0} \right]^\beta \quad (22)$$

для разноплотностных струйных течений.

Для оценки параметра  $\beta$  воспользуемся экспериментально-теоретическими результатами, полученными в [21] для тангенса угла раскрытия топливно-воздушного факела и скорости  $\omega_{z\phi}$  перемещения фронта струи

$$r_{0,5} \omega_{zm} / z \sim 0,5 b / z \sim \left[ \frac{(\rho_1 s_1 + \rho_2 s_2)_c}{(\rho_1 s_1)_0} \right]^{-0,5} \quad (23)$$

$$\omega_{zm} \sim \omega_{z\phi} \sim \frac{d_c \omega_{z0}}{z} \left[ \frac{(\rho_1 s_1 + \rho_2 s_2)_c}{(\rho_1 s_1)_0} \right] \quad (24)$$

где  $b$  — видимая ширина факела.

Подставляя (23), (24) в (16) и учитывая  $\alpha = -0,15$  и константу в (22), получим значение параметра  $\beta = 0,35$ .

Проверка приемлемости зависимости (22) при  $\beta = 0,35$  проводилась посредством сравнения результатов расчетов по дальности нестационарного топливно-воздушного факела с экспериментальным материалом [21]. На рис. 6 в качестве примера приведены результаты такого сопоставления для серии опытов с разными диаметрами сопел распылителей. Как видно, расчеты, выполненные при помощи зависимости (22), удовлетворительно согласуются с опытными данными.

Аналогичные результаты были получены и для других серий опытов (различные скорости впрыска топлива и давления газовой среды).

Зависимости (16), (22) для определения коэффициента кажущейся турбулентной вязкости получены на основе сравнения результатов численных экспериментов и опытных данных для нестационарных струй распыленной жидкости. Естественно, возникают опасения, что эти зависимости являются результатом не только турбулентности среды, но и параметров нестационарности. Если последнее справедливо, то зависимости (16) и (22) для

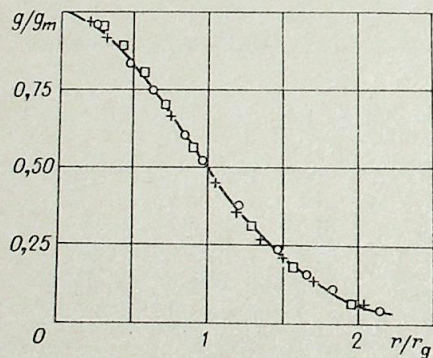


Рис. 5. Безразмерные поля расходов топлива.

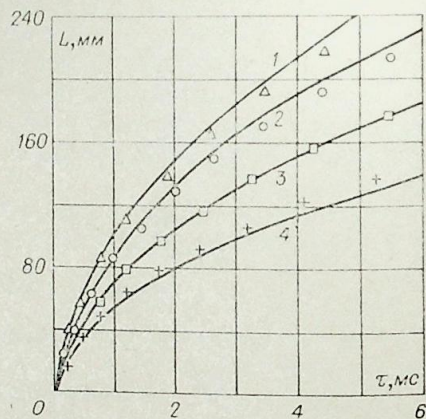


Рис. 6. Сопоставление опытных (кривые) и расчетных данных по дальности топливно-воздушного факела.  $\omega_{z0} = 158$  м/с,  $p_1 = 1,08$  МПа; 1 —  $d_c = 0,82$  мм; 2 —  $d_c = 0,7$  мм; 3 —  $d_c = 0,38$  мм; 4 —  $d_c = 0,23$  мм.

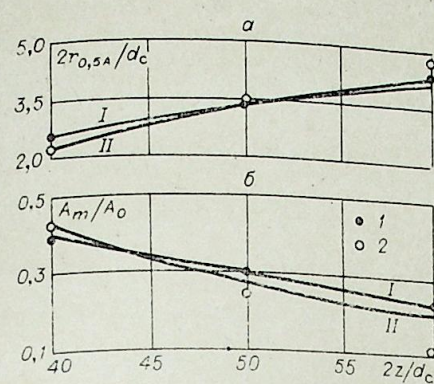


Рис. 7. Сопоставление опытных и расчетных данных по некоторым параметрам двухфазной стационарной струи с примесью корундового порошка.

$a = 17$  мкм, I — расчетные кривые для  $2r_{0,5} \omega_{zm} / d_c = f_1(2z/d_c)$ ,  $\omega_{zm} / \omega_{z0} = f_2(2z/d_c)$ ; II — расчетные кривые для  $2r_{0,5} s_m / d_c = f_3(2z/d_c)$ ,  $s_2 m / s_{20} = f_4(2z/d_c)$ ; 1 — опытные точки для  $\omega_{zm} / \omega_{z0}$ ; 2 — опытные точки для  $s_2 m / s_{20}$ .

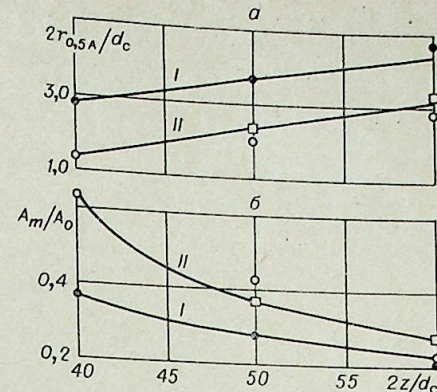


Рис. 8. Сопоставление опытных и расчетных данных по некоторым параметрам двухфазной стационарной струи с примесью корундового порошка.

$a = 32$  мкм (обозначения те же, что и на рис. 7).

е превращаются в эмпирические соотношения, применение которых к анализу поперечного переноса импульса неправомерно.

Для разрешения этих сомнений была проведена проверка эффективности расчета стационарных турбулентных двухфазных струй на основе экспериментальных данных [3]. Расчеты проводились для стационарного аналога рассмотренной выше краевой задачи. В качестве исходных условий были взяты опытные профили продольной компоненты скорости и концентраций  $s_2$  в одном из сечений струи в пределах ее основного участка. Значения  $Sc_1, Sc_2$  вычислялись согласно (14), а величина  $\varepsilon$  определялась зависимостью (22) при  $\beta = 0,35$ .

Сопоставления, приведенные на рис. 7, 8 соответственно для двух размеров частиц  $a = 17$  и  $32$  мкм при  $(\rho_2 s_2) / (\rho_1 s_1)_c = 0,3$ , показывают, что результаты расчета удовлетворительно согласуются с данными эксперимента.

Новосибирский институт  
инженеров водного транспорта  
Институт теплофизики  
СО АН СССР,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
27/1 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамович Г. Н., Крашенинников С. Ю., Секундов А. Н. Турбулентные течения при воздействии объемных сил и неавтономности. М., «Машиностроение», 1975. 93 с.
2. Абрамович Г. Н., Гиршович Т. А. Турбулентные струи, несущие твердые или капельно-жидкие частицы. — В кн.: Парожидкостные потоки. Минск, 1977. 81 с.
3. Лаатс М. К., Фришман Ф. А. Процессы турбулентного переноса в двухфазной струе. — В кн.: Процессы переноса в турбулентных течениях со сдвигом. Таллин, Изд-во АН ЭССР, 1973, с. 104—200.
4. Раушенбах Б. В., Белый С. А., Беспалов И. Б. и др. Физические основы рабочего процесса в камерах сгорания воздушно-реактивных двигателей. М., «Машиностроение», 1964. 526 с.
5. Лебедев О. Н., Солоненко О. П. Численное исследование некоторых параметров нестационарного однородного двухфазного потока. — «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1976, № 3, сер. техн. наук, вып. 1, 66—75.
6. Бухман С. В. Исследование процессов горения и движения угольной пыли. — Изв. АН КазССР, сер. энерг., 1956, вып. 11.

7. Лаатс М. К., Фришман Ф. А. О дифференциальных уравнениях свободного двухфазного пограничного слоя.— «Изв. АН ЭССР», сер. физ.-мат., 1974, т. 23, № 4.
8. Лаатс М. К., Фришман Ф. А. О допущениях, применяемых при расчете двухфазной струи.— «Изв. АН СССР», МЖГ, 1970, № 2.
9. Лебедев О. Н. Влияние турбулентности среды на закономерности конвективного теплообмена и испарения взвешенных капель жидкости. Тр. Новосиб. ин-та инж. водного транспорта, 1971, вып. 63, с. 20—29.
10. Лебедев О. Н. Математическое описание процесса струйного смесеобразования в дизелях. Тр. Новосиб. ин-та инж. водного транспорта, 1975, вып. 114, с. 3—18.
11. Лебедев О. Н., Солоненко О. П. Численное исследование нестационарной турбулентной изотермической струи распыленного топлива. Тр. Новосиб. ин-та инж. водного транспорта, 1976, вып. 107, с. 78—103.
12. Дюнин А. К. Механика метелей. Новосибирск, 1963. 378 с.
13. Хинце И. О. Турбулентность. М., «Физматгиз», 1963. 680 с.
14. Марчук Г. И. Численные методы расчета ядерных реакторов. М., Атомиздат, 1958. 381 с.
15. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике. М., «Наука», 1968. 592 с.
16. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М., «Мир», 1972. 418 с.
17. Gosman A. D., Pun W. M., Runchal A. K., Spalding D. B., Wolfshtein M. Heat and Mass Transfer in Recirculating Flows. London, 1969. 326 p.
18. Люлька В. А., Щенников В. В. Численное решение уравнений Навье-Стокса. Сборник теоретических работ по гидромеханике. М., 1970. 107 с.
19. Лебедев О. Н., Марченко В. Н. О поперечном переносе примеси в турбулентной струе. Тр. Новосиб. ин-та инж. водного транспорта, 1976, вып. 121, с. 32—40.
20. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1974. 712 с.
21. Лышевский А. С. Процессы распыливания топлива дизельными форсунками. М., Машгиз, 1963. 180 с.
22. Абрамович Г. Н., Крашенинников С. Ю., Секундов А. Н., Смирнов И. П. Турбулентное смешение газовых струй. М., «Наука», 1974. 272 с.
23. Лаатс М. К. Экспериментальное исследование развития пылевоздушной струи.— Изв. АН СССР ЭССР, сер. физ.-мат. и физ. наук, 1965, XIV, № 4, с. 569—578.

Б. Ш. АЛЬБАЗАРОВ

### ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СВЕРХЗВУКОВОЙ НЕДОРАСШИРЕННОЙ СТРУИ

Интерес к изучению структуры свободной недорасширенной ( $N = p_a/p_n > 1$ ) струи стимулируется тем, что она часто является фоном для более сложных процессов в ряде прикладных задач.

Теоретические исследования в основном проводятся по следующим направлениям: 1) получение аналитических решений; 2) использование точных численных расчетов [1]. Но численные расчеты по точным методам чрезвычайно трудоемки и не всегда эффективны. На практике требуются простые методы, дающие удовлетворительные результаты. Таковы приближенные методы, основывающиеся на аппроксимации экспериментальных данных или приближенных аналитических описаниях. Известны приближенные методы для определения положения диска Маха, распределения числа Маха вдоль оси струи [2], которые дают хорошее согласование с точными решениями. Более сложный вопрос — аппроксимация кривых границы струи, висячего скачка и радиуса центрального скачка.

При решении этих вопросов предлагалось аппроксимировать кривые дугами окружностей [3] или эллипса [4]. Аппроксимация висячего скачка дугой окружности, сходящей с кромки сопла, дает большие расхождения с экспериментальными данными и не пригодна для использования. Более обоснованный прием — аппроксимация дугой эллипса — также дает довольно большие погрешности [5].

Более общим и надежным способом аппроксимации этих кривых является многопараметрическое задание вида  $f(x, y, a_i) = 0$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ . Причем, если границу струи уподобить твердой стенке, то висячий скачок можно трактовать как головную волну, возникающую при обтекании вогнутой поверхности сверхзвуковым потоком. При больших числах Маха висячий скачок мало отличается от линии, изображающей границу, и может быть получен путем относительно небольшой деформации формы границы [6]. Таким образом, висячий скачок определяется заданием кривой  $f(x, y, b_i) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , где число параметров  $n$  для границы и скачка совпадает.

Для проверки пригодности аппроксимации границы струи при  $n = 4$  было проделано следующее: экстраполировалась граница по экспериментально заданным четырем точкам кривой вида

$$y = (A_3/A_4) + A_1 \cdot \sin A_4 x + A_2 \cos A_4 x. \quad (1)$$

На рис. 1 приведены результаты расчетов для  $N = 10$ ;  $M_a = 2$ ;  $k = 1,4$ . Видно, что 4-параметрическая аппроксимация с высокой точностью совпадает с экспериментальной кривой.

Для  $n = 4$  можно сформулировать условия, часть из которых удается поставить точно и просто, другие поддаются лишь более или менее приближенному описанию [6], при этом координаты  $(x_i, y_i)$  зарож-

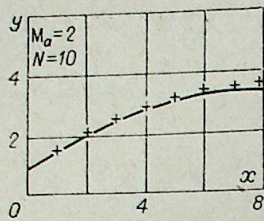


Рис. 1. Граница струи.  
 — эксперимент [7].  
 + экстраполяция предполагаемым методом.

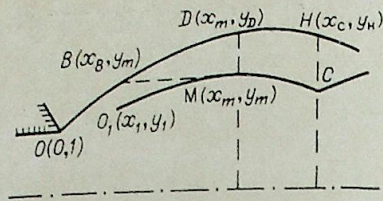


Рис. 2.

дения висячего скачка,  $x_c$  — понижение диска Маха, угла наклона висячего скачка в точках  $O_1$  и  $C$  (рис. 2) и начальный угол наклона границы считаются известными [4].

Остановимся подробнее на условиях, вытекающих из законов сохранения. Расход массы через кольцевое сечение  $CH$  (рис. 2) есть

$Q = 2\pi \int_{y_c}^{y_H} \rho u y dy$ , где  $u$  — осевая составляющая скорости. Плотность потока массы  $\rho u$  в сечении  $CH$  аппроксимируется линейной функцией по  $y$  с учетом, что расход  $Q$  равен расходу в струе за вычетом газа, проходящего сквозь центральный скачок, и после вычисления интеграла результат приводится к виду:

$$y_H = y_c + \varphi_1(y_c), \quad (2)$$

где

$$\varphi_1(y_c) = \frac{\sqrt{b^2 y_c^2 + 4a(I_1 - I_2 y_c^2) - b y_c}}{2a}.$$

Еще два приближенных условия могут быть получены из рассмотрения течения в окрестности точки  $M$  (рис. 2), где касательная к образующей висячего скачка параллельна оси симметрии. Из предположения о слабости ударной волны на отрезке  $O_1M$  следует, что характеристика, приходящая от границы в точку  $M$ , совпадает с касательной к висячему скачку в этой точке, поэтому  $y_b = y_m$ . Используя условия совместности на характеристике, получим

$$x_m - x_b = y_m [F(M_m) - F(M_H)],$$

где

$$F(M) = \frac{2}{k-1} \left[ \frac{3-k}{2} \sqrt{M^2-1} - \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \arctg \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} (M^2-1) \right], \quad (3)$$

кроме этого, массовые расходы газа через  $MD$  и  $MB$  равны. Распределение параметров вдоль  $MB$  известно, а расход через сечение  $MD$  вычисляется в том же приближении, что и через сечение  $CH$ . Из закона сохранения массы для данных сечений после преобразований получим

$$y_D = y_m + f_1(M_m) y_m, \quad (4)$$

где

$$f_1(M_m) = \frac{\sqrt{v^2 + 4\mu(G_1 - G_2/M_m^2 + G_1/M_m^4)} - v}{2\mu}.$$

Запись условий, следующих из геометрических свойств кривых, вместе с (2)–(4) приводит к системе трансцендентных уравнений, где кривые заданы следующим образом: граница — в виде (1) и скачок в виде

$$y = B_3/B_4 + B_1 \sin B_4 x + B_2 \cos B_4 x. \quad (5)$$

Индексами обозначены:  $a$  — параметры в выходном сечении сопла,  $c$  — параметры в тройной точке,  $m$  — параметры в точке максимума висячего скачка,  $n$  — параметры на границе струи. Линейные величины выражены в радиусах выходного сечения сопла ( $r_a$ ).

$$1 = (A_3/A_4) + A_2,$$

$$\operatorname{tg} \vartheta_H = A_1 A_4,$$

$$y_H = (A_3/A_4) + A_1 \sin A_4 x_c + A_2 \cos A_4 x_c,$$

$$y_H = y_c + \varphi(y_c),$$

$$\gamma_1 y_c - \gamma_2 = B_1 B_4 \cos B_4 x_c - B_2 B_4 \sin B_4 x_c,$$

$$y_1 = (B_3/B_4) + B_1 \sin B_4 x_1 + B_2 \cos B_4 x_1,$$

$$\operatorname{tg} \varphi_H = B_1 B_4 \cos B_4 x_1 - B_2 B_4 \sin B_4 x_1, \quad (6)$$

$$\frac{x_m - x_B}{y_m} = F(M_m) - F(M_H),$$

$$y_m = \frac{(A_3/A_4) + A_1 \sin A_4 x_m + A_2 \cos A_4 x_m}{1 + f_1(M_m)},$$

$$y_m = (A_3/A_4) + A_1 \sin A_4 x_B + A_2 \cos A_4 x_B,$$

$$y_m = (B_3/B_4) + B_1 \sin B_4 x_m + B_2 \cos B_4 x_m,$$

$$v_H = A_1 A_4 \cos A_4 x_B - A_2 A_4 \sin A_4 x_B,$$

$$\operatorname{tg} B_4 x_m = B_1/B_2.$$

Из системы следует, что  $A_i$  и  $B_i$  зависят друг от друга, т. е. в отличие от [4, 5] висячий скачок и граница не являются независимыми кривыми. Путем элементарных преобразований уравнения (6) приводятся к трансцендентной системе 3-го порядка, относительно неизвестных  $A_4, B_4, M_m$ . Одним из возможных вариантов ее решения является линейризация с использованием в качестве основного приближения аппроксимации скачка и границы дугой эллипса. И тогда решение системы линейных уравнений будет поправкой к основному. Такой метод является более громоздким, чем рассматриваемый далее, и не для всех исходных параметров  $k, M_a, N$  поправки будут малыми величинами.

Для нахождения корней используется метод простой итерации:  $y^k = A(y^{k-1})$ . Доказывается, что оператор  $A$  является сжимающим и существует покоящаяся точка, полученная путем оценки максимального собственного значения, которое по модулю меньше 1. Число необходимых итераций для вычисления решений с точностью до 5% равнялось 2–4. Время счета на М-4030  $\approx 1$ –1,5 мин.

Рассмотрим вопрос о выборе начальных приближений для решения системы. Одним из способов является использование аппроксимации эллипсом границы и скачка для получения нулевых приближений для геометрических и газодинамических параметров струи. При данном подходе для нахождения  $A_{4_0}, B_{4_0}$  необходимо дополнительно решать трансцендентное уравнение. Этого можно избежать, используя следующее соображение, которое дает отличие от вышеуказанного на 5% ( $k=1,4, N=10, M=2$ ): поскольку граница и скачок аппроксимируются синусоидами, то в интервале от  $x=0$  до  $x=x_c$  должно укладываться не более одного положительного полупериода. Оценки, получаемые на нулевые приближения  $A_{4_0}$  и  $B_{4_0}$ , имеют вид:  $|A_{4_0}| \leq \delta_1; |B_{4_0}| \leq \delta_2$ , где  $\delta_1$  и  $\delta_2$  легко оцениваются.

Проведенные расчеты сравнивались с численными [1], экспериментальными [7] данными и расчетами по аппроксимации кривых ду-

гой эллипса. Интервал расчета:  $N=5 \div 50$ ,  $M_a=1,5 \div 5$ ,  $k=1,4$ .

Аппроксимация границы. В [7] приведены данные о границе струи для  $M_a=1,5 \div 3$ ;  $k=1,15$ ;  $1,2$ ;  $1,67$ ;  $1,4$ ;  $N=1 \div 10$ ,  $\theta_N=5 \div 20^\circ$ . Расчет по данной 4-параметрической аппроксимации при сравнении с [1, 2] дает лучшие результаты с учетом поправки на угол раствора сопла  $\theta_N$  (рис. 3, а, б). Для  $N=10 \div 50$ ;  $M_a=3 \div 5$  сравнение показывает, что результаты, приведенные в [1, 2], дают заниженные результаты рис. 3 б, в, г, причем аппроксимация эллипсом непригодна для расчетов течений при больших нерасчетностях ( $N > 15$ ) (рис. 4, б). Результат сравнения данных, получаемых по [1] и [2], с предлагаемым, в указанном диапазоне параметров истечения позволяет говорить о преимуществе 4-параметрической аппроксимации по сравнению с [1] — в простоте, а по сравнению с [2] — в точности результатов.

Аппроксимация всяческого скачка с экспериментальными данными [7] для  $y_c$  — радиуса диска Маха в диапазоне  $M_a=1,5 \div 2,5$ ;  $k=1,4$ ;  $N=5 \div 15$  показали, что при малых нерасчетностях точность составляет  $\infty 25-30\%$  (рис. 3, а, б). При увеличении нерасчетности ( $N \infty 12-17$ ) точность возрастает (рис. 3, в, г). На рис. 3, в расчетная точка  $y_c$  совпадает с экспериментальной. Расчет по 3-параметрической аппроксимации [2] дает обратный результат — точность выше при малых  $N$  (рис. 3, а, б). Метод [1] дает в основном завышенный результат.

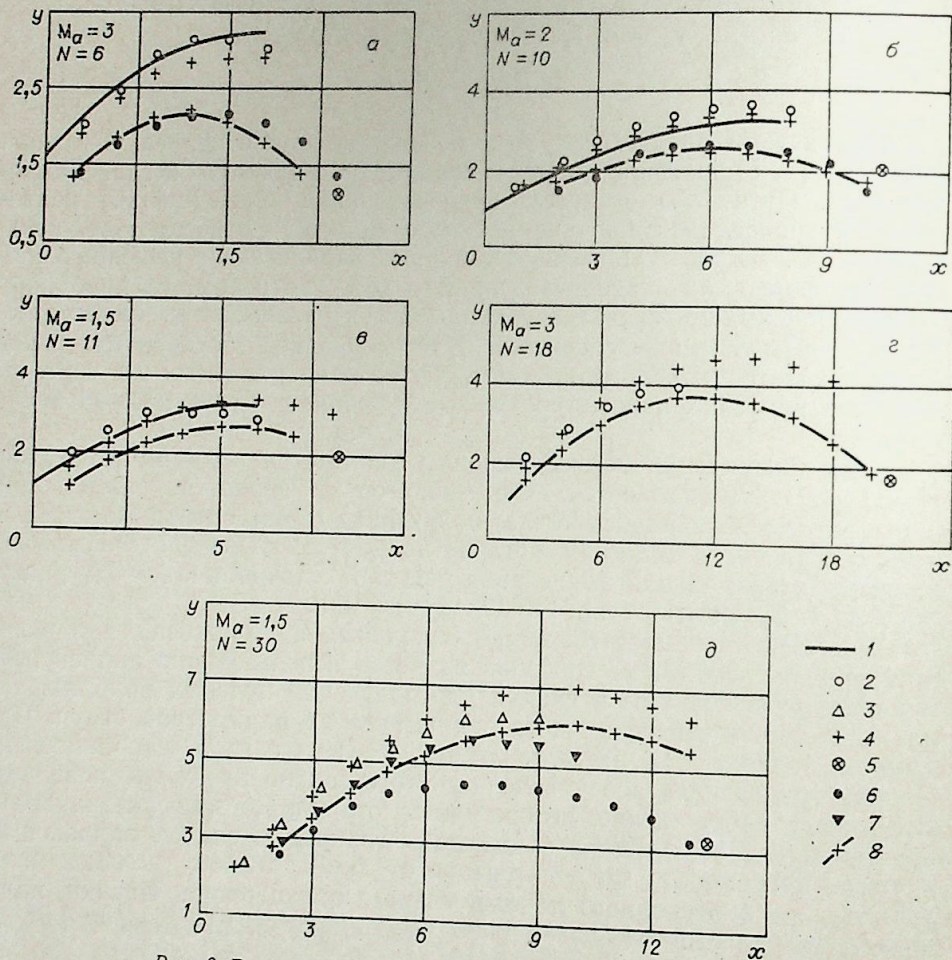


Рис. 3. Расчет конфигурации границы и всяческого скачка. Граница: 1 — эксперимент [7], 2 — по методу [4], 3 — по работе [1], 4 — по данной работе; всячий скачок; 5 — эксперимент [7], 6 — по методу [4], 7 — по работе [1], 8 — по данной работе.

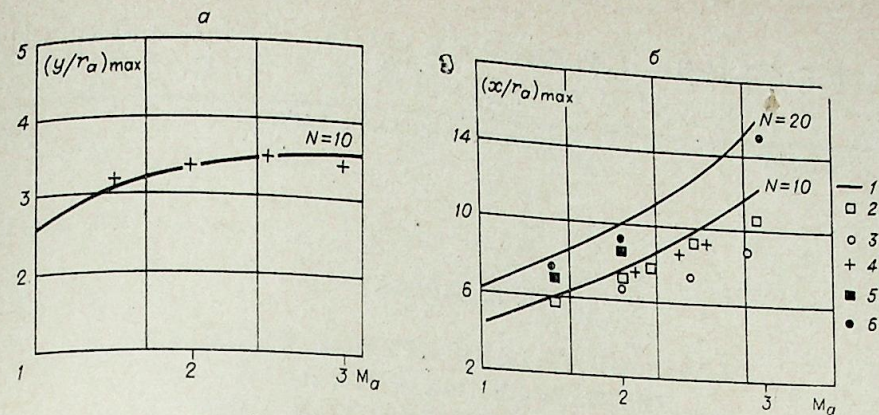


Рис. 4. Координаты максимума границы струи.  $N=10$ . 1 — эксперимент [1], 2 — по работе [1], 3 — по методу [4], 4 — по данной работе;  $N=20$  — эксперимент [7], 5 — по работе [1], 6 — по данной работе.

Необходимо отметить, что при увеличении  $M_a$  от  $3,5 \div 5$  при  $N < 15 \div 20$ , всячий скачок, рассчитываемый по данному методу, «заваливается» (рис. 3, а), т. е. радиус диска Маха не удовлетворяет критерию автомодельности, полученному в [1], и не приближается к автомодельному решению в координатах  $y/\sqrt{N}$ ,  $x/M_a\sqrt{N}$ .

Можно сделать вывод, что при небольших числах Маха ( $M_a \infty 1,5 \div 3,5$ ) и нерасчетностях ( $N \infty 12 \div 20$ ) предлагаемая аппроксимация всяческого скачка дает лучшие результаты, чем в [2].

Автор выражает благодарность В. Г. Дулову за постоянное внимание к работе.

Вычислительный центр  
СО АН СССР,  
Красноярск

Поступила в редакцию  
23/III 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ашратов Э. А., Волконская Т. Г. и др. Исследование сверхзвуковых течений газа в струях. — В кн.: Некоторые применения метода сеток в газовой динамике. М. МГУ, 1974, вып. VI.
2. Голубков А. Г., Голубкова Н. А., Смирнова Г. И. Тройные конфигурации ударных волн в гиперзвуковых потоках. — Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1975, № 3, сер. техн. наук, вып. 1.
3. Гинзбург И. П. Аэродинамика. М., «Высшая школа», 1966.
4. Дулов В. Г., Смирнова Г. И. Расчет основных параметров свободных сверхзвуковых струй идеальной сжимаемой жидкости. — ПМТФ, 1971, № 3.
5. Финантьев Ю. П., Щербаков Л. А. О возможности аппроксимации границ недорасширенной осесимметричной струи дугой эллипса. — ИФЖ, 1969, 17, № 4.
6. Дулов В. Г. Модели струйных течений. Тр. Всес. семинара по механике сплошной среды. Новосибирск, 1977.
7. Love E. S., Grigshy C. E., Lee L. P., Woodling M. J. Experimental and Theoretical studies of axisymmetric free. — NASA TR, 1959, R-6.

В. П. ЗАЙЦЕВ

РАСЧЕТ ОБТЕКАНИЯ ПРЯМОЙ РЕШЕТКИ  
ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПРОФИЛЕЙ  
СТАЦИОНАРНЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

Исследованию стационарного обтекания решетки профилей посвящено большое число работ, например [1, 2]. Основная часть результатов получена в предположении несжимаемости жидкости. Учет сжимаемости потока существенно осложняет задачу вследствие нелинейности исходных уравнений и возможности образования местных сверхзвуковых зон со скачком уплотнения.

Одним из эффективных методов изучения таких течений является метод установления по времени, основанный на интегрировании полной системы нестационарных уравнений газодинамики с помощью конечно-разностных схем сквозного счета. Известны примеры использования этого метода при расчете течения в решетках [3—11]. Так, в [3—6] рассчитывалось обтекание плоских турбинных и компрессорных решеток равномерным потоком, а в [7, 8] — решеток симметричных профилей, обтекаемых под нулевым углом атаки неравномерным потоком идеального газа. Применение метода установления позволяет получить стационарную картину течения со сходом потока с задней кромки профилей без использования в процессе решения условия Чаплыгина-Жуковского [9]. Прямая задача определения осредненного осесимметричного потока в межлопаточном канале с учетом вращения венцов решена в [10]. Анализ влияния угла атаки и величины давления за решеткой на распределение локальных и интегральных характеристик потока посвящена работа [11].

В настоящей работе проведено исследование влияния густоты решетки и скорости набегающего потока на аэродинамические характеристики. Результаты получены методом установления по схеме [12, 13], которая применялась ранее в работах [6, 8—11].

1. Рассмотрим обтекание решетки профилей без выноса равномерным дозвуковым потоком идеального газа. Декартову систему координат  $O_{xy}$  выберем, как показано на рис. 1.

Пусть  $t$  — время,  $u, v$  — проекции вектора скорости газа  $\vec{q}$  на оси  $O_x, O_y, q = \sqrt{u^2 + v^2}, p, \rho, c, e, i$  и  $s$  — соответственно давление, плотность, скорость звука, удельные внутренние энергия, энтальпия и энтропия газа,  $h$  — шаг решетки,  $b$  — длина хорды профиля,  $\tau = b/h$  — густота решетки.

Течение с большими дозвуковыми скоростями в решетке характеризуется наличием местных сверхзвуковых зон, замыкающихся, как правило, скачком уплотнения. При расчете такого течения удобно пользоваться системой интегральных законов сохранения, которую можно записать в виде

$$\int_{\omega} \vec{A} dx dy + \vec{B} dy dt + \vec{C} dx dt = 0, \quad (1.1)$$

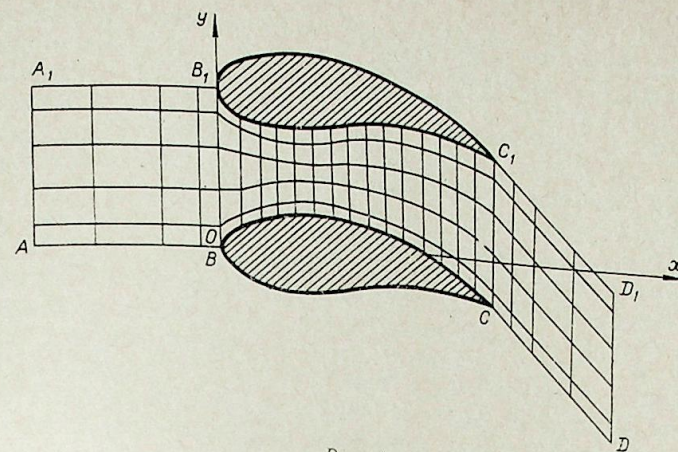


Рис. 1.

где  $\omega$  — произвольная замкнутая кусочно-гладкая поверхность в пространстве  $(x, y, t)$ .

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho(2e + q^2) \end{bmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{bmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho u v \\ \rho u(2i + q^2) \end{bmatrix}, \quad \vec{C} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ p + \rho v^2 \\ \rho v(2i + q^2) \end{bmatrix},$$

$$e = \frac{1}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho}, \quad i = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho}.$$

Здесь все величины безразмерные, а  $\kappa$  — показатель адиабаты. Линейные размеры отнесены к длине профиля  $b$ , компоненты скорости — к критической скорости  $q_*$ , плотность — к критической плотности  $\rho$ , давление — к  $\rho_* q_*^2$ , время — к  $b/q_*$ , внутренняя энергия и энтальпия — к  $q_*^2$ .

Рассчитываемая область течения  $\Omega$  изображена на рис. 1. При этом параллельные линии  $CD$  и  $C_1D_1$  можно проводить под достаточно произвольным углом к оси  $O_x$ .

Параметрам набегающего потока будем приписывать нижний индекс  $\infty$ . В рассматриваемом случае набегающий поток полностью определяется заданием энтропии  $s_\infty$ , полной энтальпии  $I_\infty = (i + q^2/2)_\infty$ , модуля скорости  $q_\infty$  и угла  $\alpha_\infty$ , образуемого вектором скорости  $\vec{q}_\infty$  с осью  $O_x$ .

Граничным условием на контурах профилей решетки является условие непротекания:  $q_n = \vec{q} \cdot \vec{n} = 0$  ( $n$  — нормаль), на линиях  $AB, A_1B_1, CD, C_1D_1$  — условие периодичности течения по  $y$ . Что касается условий на бесконечности, то при численном решении этим условиям можно удовлетворить лишь приближенно, перенося их из бесконечности на некоторые, достаточно удаленные границы  $AA_1$  и  $DD_1$ . В соответствии с этим на  $AA_1$

$$I \equiv \frac{\kappa p}{(\kappa - 1)\rho} + \frac{q^2}{2} = I_\infty, \quad q/c = M_\infty, \quad (1.2)$$

$$s \equiv p/\rho^\kappa = s_\infty, \quad v/u = \operatorname{tg} \alpha_\infty,$$

на  $DD_1$

$$\partial p / \partial x = 0, \quad \partial \rho / \partial x = 0, \quad \partial u / \partial x = 0, \quad \partial v / \partial x = 0. \quad (1.3)$$

Начальные условия в момент времени  $t=0$  можно выбирать достаточно произвольно, однако более точное задание начального распределения параметров позволяет сократить время установления стационарной задачи обтекания.

2. Ввиду того, что схема и порядок вычисления подробно описаны в работах [12, 13], остановимся только на деталях, характерных для рассматриваемой задачи. Расчетная сетка строится следующим образом. Область  $\Omega$  разбивается на  $N$  слоев вертикальными прямыми  $x=x_n$ ,  $n=1, \dots, N-1$ . Отрезок каждой линии  $x=x_n$ , заключенный внутри  $\Omega$ , разбивается на  $K$  частей. Там, где предполагается резкое изменение параметров течения, шаги разбиения выбираются более мелкими. В результате соединения полученных точек область  $\Omega$  оказывается разделенной на  $N \times K$  четырехугольных ячеек (рис. 1).

Расчетная схема, при помощи которой по осредненным величинам  $\rho, p, u, v$  в ячейке в момент времени  $t$  и по соответствующим параметрам газа  $R, P, U, V$  на границах ячеек находятся характеристики течения в момент времени  $t+\Delta t$ , получается интегрированием (1.1) с применением теоремы о среднем. Областью интегрирования  $\omega$  в данном случае будет поверхность прямой призмы, основаниями которой служат полученные выше четырехугольные ячейки, а высота равна  $\Delta t$ .

Величины  $R, P, U, V$  на каждом отрезке границы ячеек в соответствии с [12, 13] находятся из рассмотрения распада одновременного разрыва.

Для вычисления  $R, P, U, V$  на непроницаемых участках границы обычно, например [9], вводятся вспомогательные ячейки, параметры в которых задаются таким образом, что в результате распада разрыва выполняется условие непротекания. В настоящей работе вместо этого полагается  $R=U=V=0$  на границе тела, что автоматически позволяет выполнить условие непротекания. При этом давление  $P$  вычисляется по формуле

$$P = \begin{cases} p \left[ 1 + \kappa \frac{q_n}{c} \left( \frac{\kappa+1}{4} \frac{q_n}{c} + \sqrt{1 + \left( \frac{\kappa+1}{4} \frac{q_n}{c} \right)^2} \right) \right], & q_n > 0 \\ p \left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} \frac{q_n}{c} \right)^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}}, & q_n \leq 0 \\ 0, & 1 + \frac{\kappa-1}{2} \frac{q_n}{c} < 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь  $\vec{n}$  — внешняя нормаль;  $c$  — местная скорость звука. Величины  $p, q_n, c$  берутся из примыкающих к данной границе ячеек. Случаю  $q_n > 0$  соответствует скачок уплотнения, идущий от тела, а  $q_n \leq 0$  — волна разрежения.

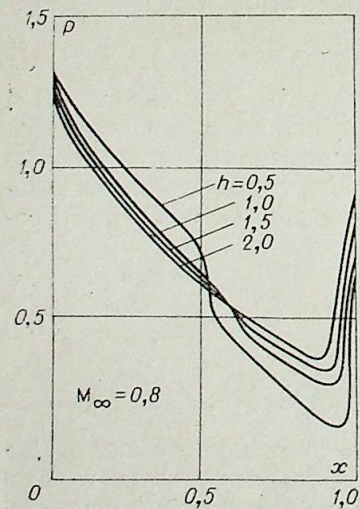


Рис. 2.

3. В качестве примера приведем результаты численного расчета обтекания решетки симметричных профилей под нулевым углом атаки потоком совершенного газа с  $\kappa=1.4$ . В этом случае задача эквивалентна задаче обтекания в канале профиля, расположенного симметрично относительно стенок. В силу симметрии картина течения рассматривается только при  $y \leq h/2$ , где  $h$  — ширина канала. Профили зададим дугами круга одинакового радиуса с относительной толщиной 0,13.

Для исследования влияния густоты решетки (в данном случае ширины канала) на характеристики потока был произведен расчет при  $M_\infty=0,8, h=0,5; 1; 1,5; 2$ .

На рис. 2 приведено распределение давления по профилю в зависимости от ши-

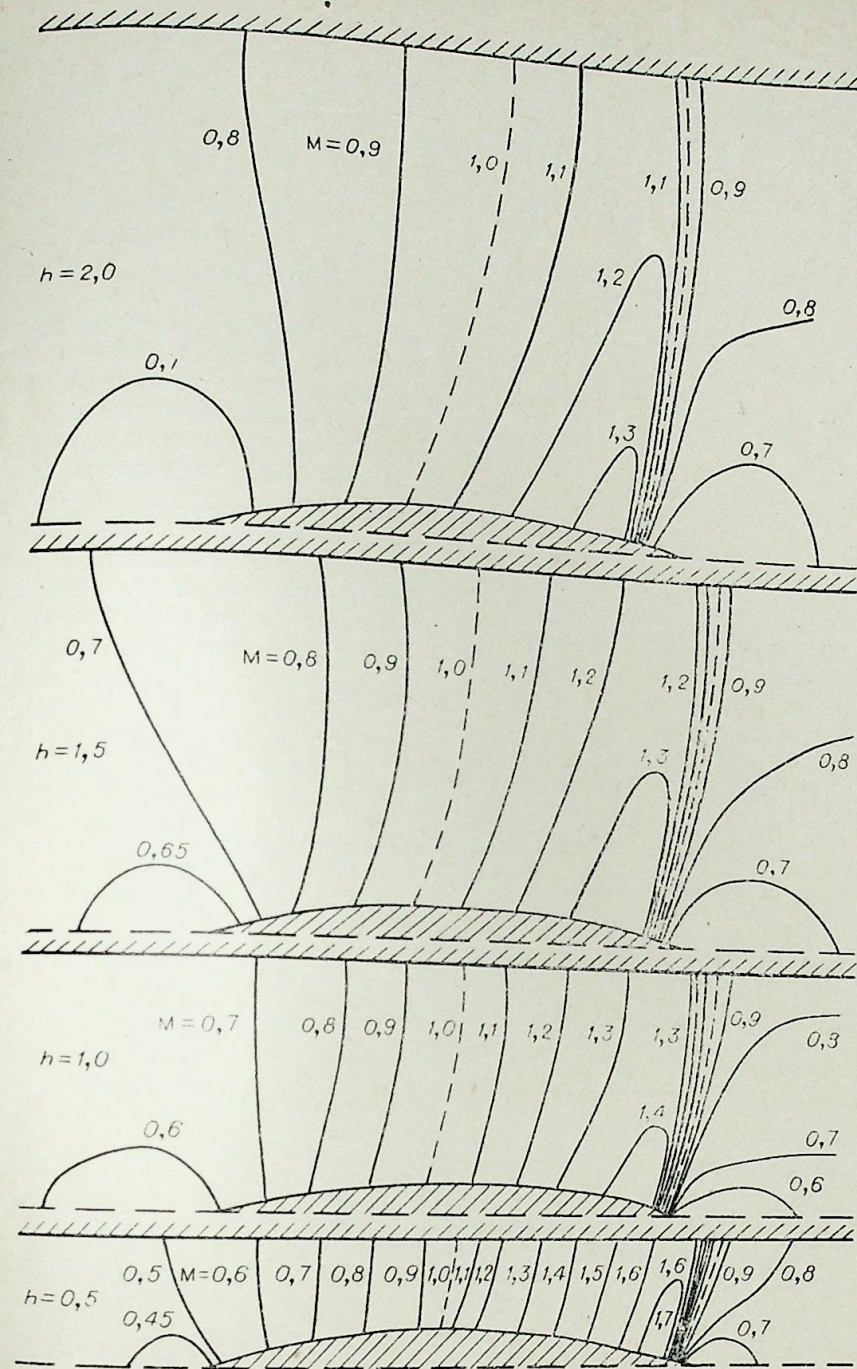


Рис. 3.

рины канала. Из сравнения приведенных кривых видно, что существенное влияние ширины канала на распределение давления вдоль профиля начинается при  $h=0,5$ , при этом наблюдается резкое падение давления в области наибольшей толщины профиля. Это можно объяснить, видимо, образованием волны разрежения. Уменьшение  $h$  от 2 до 0,5 ведет к росту максимального разрежения в районе задней кромки почти вдвое.

Для иллюстрации картины течения около профиля при различных значениях величины  $h$  на рис. 3 изображены линии Маха  $M=\text{const}$ .

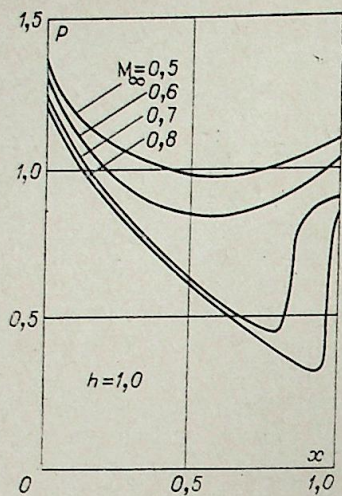


Рис. 4.

Звуковая линия  $M=1$  разграничивает области дозвукового и сверхзвукового потока. Сверхзвуковая зона заканчивается скачком уплотнения, который определяется по резкому сгущению изолиний Маха. Результаты расчета показывают тенденцию к смещению звуковой линии и скачка уплотнения против течения и к уменьшению сверхзвуковой области с ростом  $h$ . Следует отметить, что существенно двумерный поток в области передней кромки выравнивается в средней части межлопаточного канала, где течение близко к одномерному. В рассматриваемых примерах это особенно проявляется при  $h=0,5$ .

На рис. 4 показана зависимость распределения давления вдоль профиля от числа  $M_\infty$ . При  $M_\infty=0,5$  и  $M_\infty=0,6$  максимальное разрежение наблюдается в районе наибольшей толщины профиля, что объясняется малым влиянием сжимаемости газа. С ростом  $M_\infty$  происходит увеличение пика разрежения и его смещение вниз по потоку. При этом увеличивается крутизна эпюры давления за пиком, что приводит к возникновению скачка уплотнения.

Изолинии Маха, построенные на рис. 5 для различных чисел  $M_\infty$ , дают некоторое представление о влиянии величины скорости набегающего

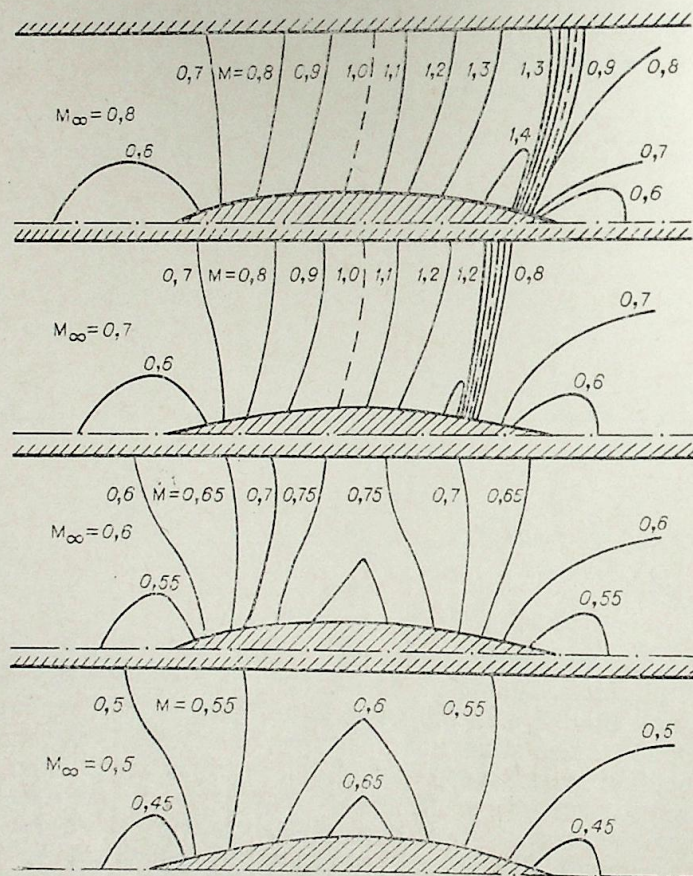


Рис. 5.

потока на картину течения в целом. При  $M_\infty=0,5$  и  $M_\infty=0,6$  наблюдается полностью дозвуковой режим течения. Дальнейшее увеличение числа  $M_\infty$  приводит к появлению сверхзвуковой зоны, ограниченной звуковой линией и скачком уплотнения.

В процессе расчетов проводился контроль точности по расходу энергии и по импульсу. Как правило, погрешность вычисления не превышала 5%.

В заключение автор выражает глубокую признательность Д. Н. Горелову за внимание к работе и полезные советы.

Алтайский политехнический институт  
им. И. И. Ползунова,  
Барнаул

Поступила в редакцию  
16/XI 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов Г. Ю. Гидродинамическая теория решеток.— В кн.: Механика в СССР за 50 лет. Т. 2. М., «Наука», 1970.
2. Степанов Г. Ю. Некоторые современные задачи гидродинамики решеток турбомашин.— В кн.: Газотурбины и комбинированные установки. М., 1971.
3. Gopalakrishnan S., Bozzola R. A numerical technique for the calculation of transonic flows in turbomachinery cascades.— Paper ASME, 1971, No. GT-42.
4. McDonald P. W. The computation of transonic flow through twodimensional gas turbine cascades.— Paper ASME, 1971, No. GT-89.
5. Gopalakrishnan S., Bozzola R. Computation of shocked flows in compressor cascades.— Paper ASME, 1972, No. GT-31.
6. Богод А. Б. Применение метода установления к расчету трансзвукового течения в решетке. М., Центр. науч.-исслед. автомоб. и автомотор. ин-т, 1973. (Рукопись депон. в ЦНИИ автопром., апрель 1974 г., № Д 740098).
7. Oliwer D. A., Sparis P. A. A computational study of three-dimensional transonic shear flow in turbomachine cascades.— AIAA Paper, 1971, No 83.
8. Замтфорт Б. С., Иванов М. Я. Обтекание решетки симметричных профилей околозвуковым неизэнтропическим потоком.— Уч. зап. ЦАГИ, 1972, 3, № 6.
9. Богод А. Б., Замтфорт Б. С., Иванов М. Я., Крайко А. Н. Об использовании процесса установления по времени при решении задач стационарного обтекания газом решеток профилей.— «Изв. АН СССР», МЖГ, 1974, № 4.
10. Иванов М. Я., Кимасов Ю. П. Численное решение прямой задачи определения осредненного осесимметричного потока идеального газа в ступени турбомшины.— Уч. зап. ЦАГИ, 1975, 6, № 4.
11. Богод А. Б., Грановский А. В., Иванов М. Я. Численное исследование некоторых особенностей трансзвуковых течений в плоских турбинных решетках.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 2.
12. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики. Матем. сб. Т. 47, вып. 3. 1959.
13. Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П. Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отходящей ударной волной.— Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1961, 1, № 6.

Н. Д. ДЕМИДЕНКО

ОПТИМИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ КОНТРОЛЯ  
УПРАВЛЯЕМЫХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ  
ТЕПЛОМАССООБМЕНА

В нефтеперерабатывающей и нефтехимической промышленности широко распространены объекты и системы, в которых технологический процесс вследствие значительной протяженности аппарата и относительно малых скоростей перемещения взаимодействующих потоков, а также наличие внешних воздействий имеет пространственно-распределенный характер. Подобные объекты обладают рядом характерных черт, относящихся, с одной стороны, к их математическому описанию и расчету динамических характеристик и, с другой — к построению схем контроля и управления. Возникает необходимость организации распределенного контроля и распределенного управления такими процессами.

Повышенные требования к системам управления промышленными объектами, увеличение возможностей средств управления, широкое применение вычислительной техники и создание автоматизированных систем управления сложными технологическими комплексами заставляет по-новому подходить к изучению процессов. Глубокое и детальное изучение этих процессов позволяет строить более совершенные математические модели и использовать их при создании систем контроля и управления. При этом расширяется традиционная область использования математических моделей. Если ранее модели предназначались для расчета локальных систем стабилизации или регулирования и, как правило, описывали процесс в узкой области изменения параметров, то теперь от моделей зачастую требуется такая степень адекватности процессу, которая позволяет на их основе решать задачи оптимального управления в широком диапазоне режимов.

Усложнение моделей привело к необходимости использования численных методов. Изменились требования к форме представления моделей. Обычным стало оформление модели в виде машинной подпрограммы, пригодной для решения задач анализа статических и динамических характеристик управляемого объекта и задач синтеза оптимальной системы контроля и управления. Несмотря на различные по своей физико-химической природе процессы и конструктивные особенности технологических аппаратов, можно выделить классы объектов, обладающих общими чертами. С точки зрения задач управления, в один класс можно объединить объекты, обладающие сходными математическими моделями. Это позволяет разрабатывать общие для всего класса объектов методы и алгоритмы исследования, а также общие методы построения систем контроля и управления. В качестве примера таких объектов можно привести насадочные и тарельчатые колонны, абсорберы и др.

В настоящей работе рассматриваются постановка и решение задач оптимального контроля и управления и предлагается численный метод расчета нестационарных режимов теплообменных аппаратов. Для решения этих задач формулируется краевая задача, основанная на

описании управляемого процесса уравнениями в частных производных и имеющая более общий характер, чем в работах [1—6]. Трудность решения задач обусловливается неявным заданием граничных условий, являющихся следствием учета рециркуляции продуктов разделения, сверху и снизу объекта. Рециркуляция верхнего продукта в аппарате приводит к тому, что подводимые и поднимающиеся вверх легкие компоненты концентрируются в верхней части объекта и могут быть отведены с требуемой чистотой. Стекающие вниз в жидкой фазе тяжелые компоненты концентрируются в нижней части аппарата. Таким образом, рециркуляция верхнего продукта ведет к увеличению содержания в дистиллате легких компонент, а рециркуляция нижнего — к уменьшению содержания в кубовом остатке. В результате моделирования процессов теплообменными дифференциальными уравнениями граничные условия задаются обыкновенными соотношениями, связывающими параметрами сверху и снизу объекта с параметрами куба и дефлегматора.

ПОСТАНОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Рассмотрим процесс нестационарного теплообмена в противоточных аппаратах колонного типа, в которых взаимодействуют двухфазные многокомпонентные смеси. Для анализа статических и динамических характеристик таких объектов сформулируем следующую краевую задачу.

Определить вектор-функции  $x(l, t) = (x_1(l, t), x_2(l, t), \dots, x_N(l, t))$ ,  $y(l, t) = (y_1(l, t), y_2(l, t), \dots, y_N(l, t))$  ( $N$  — число компонент смеси) и функции  $(L(l, t), V(l, t), h(l, t), H(l, t))$ , удовлетворяющие дифференциальные уравнения в частных производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial (H_x x)}{\partial t} - \frac{\partial (Lx)}{\partial l} &= K_y (y - y^*) + \Phi_x - r \left( \frac{\partial H_y}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial l} - \Phi_V \right), \\ \frac{\partial (H_y y)}{\partial t} + \frac{\partial (Vy)}{\partial l} &= K_y (y^* - y) + \Phi_y + r \left( \frac{\partial H_y}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial l} - \Phi_V \right), \\ \frac{\partial (H_x h)}{\partial t} - \frac{\partial (Lh)}{\partial l} &= \sum_{i=1}^N K_{yi} (y_i - y_i^*) H_{ci} + \Phi_h, \\ \frac{\partial (H_y H)}{\partial t} + \frac{\partial (VH)}{\partial l} &= \sum_{i=1}^N K_{yi} (y_i^* - y_i) H_{ci} + \Phi_H, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial l} = \sum_{i=1}^N K_{yi} (y_i - y_i^*) + \Phi_L, \quad \frac{\partial H_y}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial l} = \sum_{i=1}^N K_{yi} (y_i^* - y_i) + \Phi_V$$

в области  $Q = \{0 \leq l \leq 1; 0 \leq t \leq T\}$  с начальными и граничными условиями

$$x(l, 0) = \varphi_1(l), \quad y(l, 0) = \varphi_2(l), \quad L(l, 0) = \varphi_3(l); \quad (2)$$

$$V(l, 0) = \varphi_4(l); \quad h(l, 0) = \varphi_5(l), \quad H(l, 0) = \varphi_6(l);$$

$$l = 0: \text{ а) } \frac{d(H_{x_k} x_k)}{dt} = L(0, t) x(0, t) - V(0, t) y(0, t) - W x_k(t), \quad x_k(0) = \alpha_k; \quad (3)$$

$$\text{ б) } y(0, t) = a[y^*(x_k) - x_k] + x_k;$$

$$\text{ в) } \frac{d(H_{x_k} h_k)}{dt} = L(0, t) h(0, t) - V(0, t) H(0, t) - W h_k(t) + Q_k,$$

$$h_k(0) = \beta_k;$$

$$\begin{aligned}
\text{г)} \quad & \frac{dH_{x_k}}{dt} = L(0, t) - V(0, t) - W; \\
l=1: \text{ а)} \quad & \frac{d(H_{x_d} x_d)}{dt} = V_d y(1, t) - (L_d + D) x_d(t), \quad x_d(0) = \alpha_2; \\
\text{б)} \quad & (V_d - V(1, t)) y(1, t) = L_d x_d - L(1, t) x(1, t); \\
\text{в)} \quad & \frac{d(H_{x_d} h_d)}{dt} = V_d H(1, t) - (L_d + D) h_d(t) - Q_d, \quad h_d(0) = \beta_2; \\
\text{г)} \quad & (V_d - V(1, t)) H(1, t) = L_d h_d - L(1, t) h(1, t); \\
\text{д)} \quad & \frac{dH_{x_d}}{dt} = V_d - (L_d + D); \\
\text{е)} \quad & V_d - V(1, t) = L_d - L(1, t).
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь функции  $h_k(t)$ ,  $h_d(t)$  и вектор-функции  $x_d = (x_{d1}(t), x_{d2}(t), \dots, x_{dN}(t))$ ,  $x_k(t) = (x_{k1}(t), x_{k2}(t), \dots, x_{kN}(t))$  неизвестны и подлежат определению при решении задачи (1)–(4). Считаем также, что известны зависимости  $H_x = H_x(L, V)$  и  $H_y = H_y(L, V)$ . В этом случае система уравнений (1)–(4) замкнута. Из задачи (1)–(4) при определенных ограничениях и допущениях следует ряд частных задач [1–6].

В данной работе приводится численный метод решения задачи, получающейся из (1)–(4) с использованием зависимостей

$$H = H(T, y), \quad h = h(T, x), \quad y^* = y^*(T, x, p), \quad p = p(l), \quad K_y = K_y(x, y, V, L),$$

имеющих вид

$$\begin{aligned}
H &= \sum_{i=1}^N H_i y_i, \quad h = \sum_{i=1}^N h_i x_i, \\
y_i^* &= \frac{p_i}{p} x_i, \quad p = \sum_{i=1}^N p_i x_i, \\
p(l) &= p_H - \frac{p_H - p_b}{l_H}, \quad K_y = 0,4 V, \\
H_i &= A_i + B_i T + C_i T^2, \\
h_i &= a_i + b_i T + c_i T^2, \\
P_i &= \alpha_i + \beta_i T + \gamma_i T^2.
\end{aligned} \tag{5}$$

Мы пользуемся обозначениями, принятыми в работах [1–6].

#### МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ (1)–(5)

В результате дискретизации получаем конечноразностный аналог задачи (1)–(5). В силу того, что граничные условия заданы в неявном виде, на каждом временном слое решение находится применением итерационных процедур в сочетании с методом прогонки [3].

Заменим производные по переменным  $l, t$  соответствующими конечными разностями. Положим

$$\begin{aligned}
l_0 &= 0, \quad \Delta l_m = \sigma_m, \quad l_m = \sum_{i=1}^m \sigma_i, \\
t_0 &= 0, \quad \Delta t_n = \tau_n, \quad t_n = \sum_{i=1}^n \tau_i
\end{aligned}$$

и обозначим через  $x_m, y_m, V_m, L_m, h_m, H_m$  значения  $x, y, V, L, h, H$  в точ-

ках с координатами  $l_m$ . Значения  $x, y, r$  будем искать в виде

$$x = Ax_k + \alpha, \quad y = Bx_k + \beta, \quad r = Nx_k + M. \tag{6}$$

Решение задачи (1)–(5) проводится в следующей последовательности.

1. Определяется количество и состав паровой и жидкой фаз питания для всех точек  $l_j$  ввода сырья в колонну.

2. Рассчитываются  $L^n, V^n$  в направлении от дефлегматора к кубу.

При расчете первого приближения потоков жидкой и паровой фаз на  $n$ -м временном слое считаем, что  $x^n = x^{n-1}, y^n = y^{n-1}$ .

3. Находятся концентрации  $x^n, y^n$  методом прогонки, для чего определяются

а) коэффициенты  $A, \alpha, B, \beta$  по формулам

$$l = l_0:$$

$$A_0 = \frac{H_{x_k}^n + V_0^n B_0 + W^n}{L_0^n}, \quad \alpha_0 = -\frac{H_{x_k}^{n-1} x_k^{n-1}}{L_0^n \tau_n},$$

$$B_0 = a(K_k - 1) + 1, \quad \beta_0 = 0;$$

$$l_{j-1} < l_m < l_j:$$

$$A_m = \left[ \left( \frac{H_{x_k}^{n-1}}{\tau_n} + K_{y_{m-1}} K_{m-1} + \frac{L_{m-1}^n}{\sigma_m} \right) A_{m-1} - K_{y_{m-1}} B_{m-1} + N_{m-1} \left( \frac{H_{y_{m-1}}^n - H_{y_{m-1}}^{n-1}}{\tau_n} - \frac{V_m^n - V_{m-1}^n}{\sigma_m} \right) \right] \frac{\sigma_m}{L_m^n},$$

$$\alpha_m = \left[ -\frac{H_{x_k}^{n-1} x_k^{n-1}}{\tau_n} + \left( \frac{H_{x_k}^{n-1}}{\tau_n} + K_{y_{m-1}} K_{m-1} + \frac{L_{m-1}^n}{\sigma_m} \right) \alpha_{m-1} - K_{y_{m-1}} \beta_{m-1} + M_{m-1} \left( \frac{H_{y_{m-1}}^n - H_{y_{m-1}}^{n-1}}{\tau_n} + \frac{V_m^n - V_{m-1}^n}{\sigma_m} \right) \right] \frac{\sigma_m}{L_m^n},$$

$$B_m = \left[ K_{y_{m-1}} K_{m-1} A_{m-1} + \left( \frac{V_{m-1}^n}{\sigma_m} - K_{y_{m-1}} - \frac{H_{y_{m-1}}^n}{\tau_n} \right) B_{m-1} + N_{m-1} \left( \frac{H_{y_{m-1}}^n - H_{y_{m-1}}^{n-1}}{\tau_n} - \frac{V_m^n - V_{m-1}^n}{\sigma_m} \right) \right] \frac{\sigma_m}{V_m^n},$$

$$\beta_m = \left[ \frac{H_{y_{m-1}}^{n-1} y_{m-1}^{n-1}}{\tau_n} + K_{y_{m-1}} K_{m-1} \alpha_{m-1} + \left( \frac{V_{m-1}^n}{\sigma_m} - K_{y_{m-1}} - \frac{H_{y_{m-1}}^n}{\tau_n} \right) \beta_{m-1} + M_{m-1} \left( \frac{H_{y_{m-1}}^n - H_{y_{m-1}}^{n-1}}{\tau_n} + \frac{V_m^n - V_{m-1}^n}{\sigma_m} \right) \right] \frac{\sigma_m}{V_m^n},$$

$$l = l_j:$$

$$A_{j+1} = \frac{A_{j-1} L_{j-1}^n + N_j (V_{j+1}^n - V_{j-1}^n - V_j^n)}{L_{j+1}^n},$$

$$\alpha_{j+1} = \frac{\alpha_{j-1} L_{j-1}^n + M_j (V_{j+1}^n - V_{j-1}^n - V_j^n) - L_j^n x_j^n}{L_{j+1}^n},$$

$$B_{j+1} = \frac{B_{j-1} V_{j-1}^n + N_j (V_{j+1}^n - V_{j-1}^n - V_j^n)}{V_{j+1}^n},$$

$$\beta_{j+1} = \frac{\beta_{j-1} V_{j-1}^n + M_j (V_{j+1}^n - V_{j-1}^n - V_j^n) + V_j^n y_j^n}{V_{j+1}^n},$$

$$l=l_N=1:$$

$$A_d = \frac{V_d^n B_d - V_N^n B_N + L_N^n A_N}{L_d^n}, \quad \alpha_d = \frac{V_d^n \beta_d - V_N^n \beta_N + L_N^n \alpha_N}{L_d^n},$$

$$B_d = B_N + E_d (K_N A_N - B_N), \quad \beta_d = \beta_N + E_d (K_N \alpha_N - \beta_N);$$

б) концентрация  $x_k^n$  по следующей формуле:

$$x_k^n = \frac{\frac{H_{x_d}^{n-1}}{\tau_n} x_d^{n-1} + V_d^n \beta_d - (L_d^n + D^n) A_d - \frac{H_{x_d}^n}{\tau_n} \alpha_d}{\frac{H_{x_d}^n}{\tau_n} A_d - V_d^n B_d + (L_d^n + D^n) A_d};$$

в)  $x_{1n}^n, y_m^n$  по формулам (6).

4. Проводится нормализация численных значений  $x$  и  $y$ :

$$\bar{x}_i = \frac{|x_i|}{\sum_{i=1}^N |x_i|}, \quad \bar{y}_i = \frac{|y_i|}{\sum_{i=1}^N |y_i|},$$

где  $N$  — число компонентов разделяемой смеси.

5. Определяются температура паровой и жидкой фаз по трем последним формулам (5) и уточненные значения коэффициентов фазового равновесия.

6. По вычисленным значениям температур, концентраций, коэффициентов фазового равновесия, потоков паровой и жидкой фаз, повторяя процесс 1—5, находят уточненные значения искомых функций в узлах на временном слое  $t_n$ . Процесс расчета на временном слое  $t_n$  заканчивается, когда

$$\max_i \left| \sum_{i=1}^N |x_i| - 1 \right| + \max_i \left| \sum_{i=1}^N |y_i| - 1 \right| < \varepsilon.$$

Разработанный алгоритм используется при анализе статических и динамических режимов и при решении задач оптимального контроля и управления промышленными ректификационными установками. На рис. 1 приведены кривые разгона для промышленной колонны К-6 ЦГФУ при возмущении в потоке сырья на 20% от величины исходного. Начальные условия  $x(l, 0), y(l, 0)$  соответствуют режиму при  $F=172,2$  кг·моль/ч;  $x_F=0,491$ ;  $D=80,9$  кг·моль/ч;  $L_d=$

$=687$  кг·моль/ч.

#### ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕННОГО КОНТРОЛЯ

Сформулируем задачу управления с оптимальной системой непрерывного распределенного контроля для классов ОРП, нестационарные режимы которых могут быть описаны линейными дифференциальными уравнениями в частных производных гиперболического типа. Переходный процесс в таких объектах может быть определен через передаточ-

ные функции по соответствующим каналам возмущающих и управляющих воздействий.

Основной целью при управлении такими объектами является получение целевого продукта высокого качества при заданной производительности аппарата. Как правило, при управлении тепломассообменными аппаратами предъявляются высокие требования к качеству как верхнего, так и нижнего выходного продукта разделения.

Анализ стационарных и нестационарных режимов показывает, что повышение качества целевого продукта при прочих равных условиях достигается уменьшением его количества. Поэтому нежелательно отклонение качества этих продуктов как в сторону уменьшения, так и в сторону увеличения.

Таким образом, за критерий динамической оптимизации выбираем минимум функционала

$$F = \int_0^T [c_0 (\bar{x}_k(t) - x_k(t))^2 + c_1 (\bar{x}_d(t) - x_d(t))^2] dt, \quad (7)$$

где  $T$  — время процесса управления;  $\bar{x}_k(t), \bar{x}_d(t)$  — заданные значения выходных величин;  $x_k(t), x_d(t)$  — выходные (регулируемые) величины нижнего и верхнего продуктов разделения, которые являются функциями  $x(l, t)$  и  $y(l, t)$ ;  $c_0, c_1$  — коэффициенты, учитывающие относительную значимость выходных продуктов. При  $c_0=0$  оптимизируется система управления качеством только верхнего продукта разделения, при  $c_1=0$  — только нижнего продукта.

Состояние процесса в объектах с распределенными параметрами определяется через передаточные функции по  $m$  каналам возмущения и  $n$  каналам управления следующим выражением:

$$y(l, p) = \sum_{i=1}^m W_{bi}(l, p) \theta_{bxi}(p) + \sum_{i=1}^n W_{yi}(l, p) V_i(p), \quad (8)$$

где  $\theta_{bxi}(p)$  — изображение возмущающего воздействия на процесс по  $i$ -му каналу;  $V_i(p)$  — изображение функции управляющего воздействия  $v_i(t)$  по  $i$ -му каналу;  $W_{bi}(l, p)$  ( $i=1, \dots, m$ ) — передаточные функции по  $i$ -му каналу возмущения;  $W_{yi}(l, p)$  ( $i=1, \dots, n$ ) — передаточные функции по  $i$ -му каналу управления. Эти передаточные функции определяются из уравнений, полученных линеаризацией системы (1) — (4).

Однако при синтезе автоматических систем регулирования удобны более простые передаточные функции. Для их получения используются инерционности [2].

Инерционность определяется также из предварительном линеаризованной системы уравнений с последующим применением преобразования Лапласа по переменной  $t$ . Инерционности используются нами при аппроксимации передаточных функций с помощью рядов Бурмана — Лагранжа [2]. В качестве примера определим коэффициенты передаточной функции для ректификационной колонны  $W(p) = \frac{a}{cp^2 + bp + 1}$  по

точной функции для ректификационной колонны «Изменение отбора дистиллята  $D$  — концентрации жидкой фазы канала». Режимные параметры соответствуют примеру рис. 1. Известно при этом, что  $a=S_0$ ,  $b = \frac{S_1}{S_0}$ ,  $c = \frac{S_2}{S_0} - \frac{S_2}{S_0}$ . Из графиков рис. 2 находим  $S_0 = -64,3$ ;  $S_1 = -348,1$ ;  $S_2 = -1019,9$ . Таким образом,  $a = -64,3$ ;  $b = 5,41$ ;  $c = 13,49$ , и передаточная функция имеет вид

$$W(p) = -\frac{64,3}{13,49p^2 + 5,41p + 1}.$$

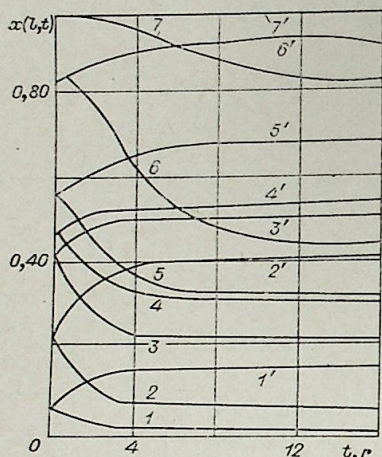


Рис. 1. Кривые переходного процесса в ректификационной колонне К-6 ЦГФУ.

1'—7' — при увеличении, а 1—7 — при уменьшении потока сырья. 1, 1'; 2, 2'; 3, 3'; 4, 4'; 5, 5'; 6, 6'; 7, 7' — кривые в кубе и на 25, 49, 61, 95, 127 и 160 тарелках соответственно.

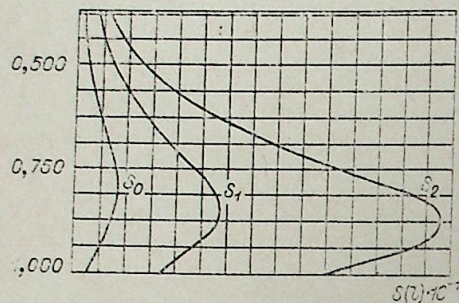
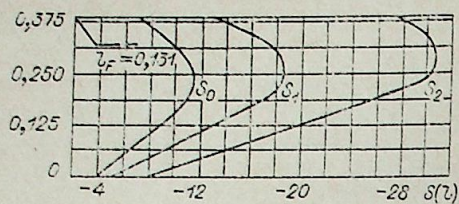


Рис. 2.

На входы регуляторов поступают сигналы  $\varphi_i(p)$  ( $i=1, \dots, n$ ), характеризующие состояние объекта управления. Эти сигналы формируются системой распределенного контроля и имеют вид

$$\varphi_i(p) = \int_0^1 y(l, p) g_i(l) dl, \quad (9)$$

где  $g_i(l)$  — весовые функции распределенного контроля.

Функции управляющих воздействий  $V_i(p)$  в соответствии с (9) определяются выражением

$$V_i(p) = -U_i(p) \varphi_i(p) = -U_i(p) \int_0^1 y(l, p) g_i(l) dl. \quad (10)$$

Задача оптимизации процесса управления состоит в определении весовых функций распределенного контроля  $g_i(l)$ , которые принадлежат некоторому допустимому множеству функций  $\Omega$ , обусловленному возможностью реализации проектируемой системы управления, и минимизируют функционал качества  $F$ . Таким образом, задача сводится к оптимальному построению системы распределенного контроля управляемого ОРП.

Применяя методику решения задачи оптимального контроля, предложенную в [4], получим следующее необходимое условие оптимальности весовых функций распределенного контроля:

$\Pi(l', G_1, G_2, \dots, G_n) \leq \Pi(l', g_1(l'), g_2(l'), \dots, g_n(l'))$ ,  $g_i, G_i \in \Omega$ ,  $l' \in [0, 1]$ , где

$$\begin{aligned} \Pi(l', g_1(l'), g_2(l'), \dots, g_n(l')) = & - \sum_{i=1}^n g_i(l') \int_0^T [c_0 \omega_i(0, l', t, g_1(l'), \\ & g_2(l'), \dots, g_n(l')) (\bar{x}_k - x_k(t)) + c_1 \omega_i(1, l', t, g_1(l'), g_2(l'), \dots, \\ & \dots, g_n(l')) (\bar{x}_d - x_d(t))] dt. \end{aligned}$$

Функция  $\omega_i(l, l', t)$  выражается через параметры системы управления. Последнее условие означает, что поскольку  $g_i(l)$  оптимальные функции, а  $G_i$  — произвольные элементы  $\Omega$ , то для оптимальности  $g_i(l)$  не-

Аналогично можно получить передаточные функции и по другим каналам воздействий.

Если известны импульсные переходные функции объекта с распределенными параметрами  $G_{bi}$  и  $G_{yi}$  по каналам управления и возмущения соответственно, то состояние управляемого объекта может быть представлено следующим выражением

$$\begin{aligned} y(l, t) = & \sum_{i=1}^m \int_0^t G_{bi}(l, t, \tau) \theta_{bxi}(\tau) \times \\ & \times d\tau + \sum_{i=1}^n \int_0^t G_{yi}(l, t, \tau) v_i(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Предаточные функции регуляторов  $U_i(p)$  ( $i=1, \dots, n$ ) по каждому из каналов управления считаем заданными.

необходимо, чтобы функция  $\Pi(l, g_1(l), g_2(l), \dots, g_n(l))$  достигала максимума при любом фиксированном  $l \in [0, 1]$ .

Пусть  $\Omega$  определяется неравенствами

$$g_{i \min} \leq g_i(l) \leq g_{i \max}, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (11)$$

Физический смысл этих ограничений состоит в том, что коэффициент усиления распределенного датчика в каждой точке объекта не может превысить некоторого значения. Такое ограничение существует в реальных системах.

Очевидно, что при ограничениях (11) оптимальные функции кусочно постоянны и определяются следующим образом:

$$g_i(l) = \begin{cases} g_{i \min}, & \text{если } R_i(l) < 0, \\ g_{i \max}, & \text{если } R_i(l) > 0, \end{cases}$$

где

$$R_i(l) = \text{sign} \left\{ - \int_0^T [c_0 (\bar{x}_k - x_k(t)) \omega_i(0, l', t) + c_1 (\bar{x}_d - x_d(t)) \omega_i(1, l', t)] dt. \right.$$

Исследования, проведенные в [5], показывают, что алгоритм, построенный на основе необходимого условия оптимальности, достаточно быстро сходится.

Задача оптимального контроля при распределенном управляющем воздействии решалась в пространстве изображений. Аналогично решается задача и в пространстве оригиналов. Это решение удается получить, если известны импульсные переходные функции.

#### ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТЕПЛОМАСООБМЕННЫМИ ПРОЦЕССАМИ

Основными управляющими воздействиями в рассматриваемых нами технологических объектах являются потоки паровой и жидкой фаз, а также потоки тепла, подводимые и отводимые в точках, распределенных по длине аппарата.

В данной работе рассматривается задача оптимального управления объектом, процесс в котором описывается уравнениями (1)–(4) с критерием качества (7) в классе кусочно-непрерывных уравнений  $L, L_d, W, D, F, V, Q_h, Q_d$ . На управление накладываются следующие ограничения:  $Q_{k \min} \leq Q_k \leq Q_{k \max}, Q_{d \min} \leq Q_d \leq Q_{d \max}, L_{\min} \leq L \leq L_{\max}, L_{d \min} \leq L_d \leq L_{d \max}, W_{\min} \leq W \leq W_{\max}, D_{\min} \leq D \leq D_{\max}, F_{\min} \leq F \leq F_{\max}, V_{\min} \leq V \leq V_{\max}$ . Эта задача оптимального управления для системы дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа. Частным случаем ее является задача в [6], отличающаяся характером граничных условий от известных особенностей краевой задачи. Для решения задачи применяется метод множителей Лагранжа. Стандартная процедура варьирования приводит к необходимым условиям (условия стационарности), анализ которых показывает, что оптимальные управления кусочно-постоянны и принимают граничные значения из области допустимых управлений. Это подтверждается тем, что наиболее эффективным гидродинамическим режимом в системах управления промышленными объектами является пульсирующий режим ввода сырья, орошения и других потоков. Таким образом, дальнейшее исследование задачи должно проводиться с целью определения моментов времени, в которых управление минимально и максимально, т. е. решения задачи о числе переключений.

Нами проведены численные эксперименты для пульсирующих режимов. На рис. 3 показано повышение концентрации  $x(1, t)$  (в обычном режиме  $x(1, t) = 0,98$ ) при пульсациях  $F, D$  и  $L_d$ . Разработанные методы используются для проектирования эффективных технологических режимов и систем контроля и управления промышленными ректификационными установками.

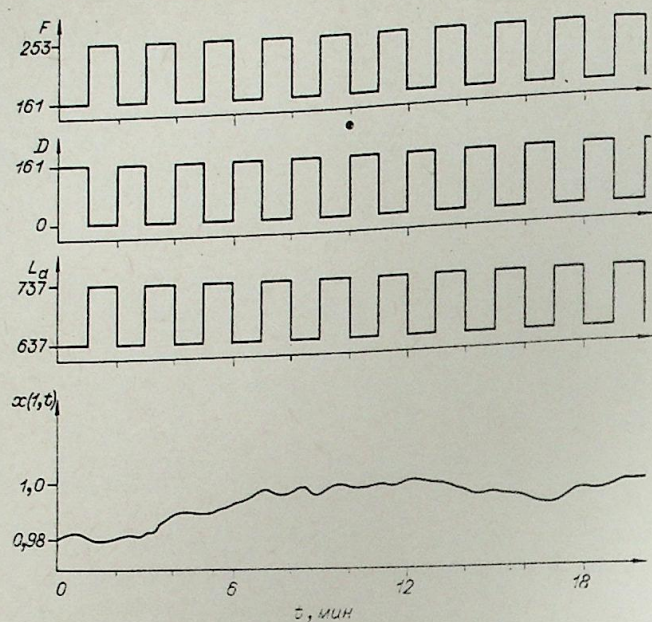


Рис. 3.

#### ВЫВОДЫ

1. Сформулирована краевая задача нестационарных режимов тепломассообменных процессов с рециркуляцией взаимодействующих потоков.

2. Предложен численный метод решения краевой задачи, примененный для анализа статических и динамических характеристик промышленных многотарельчатых ректификационных колонн.

3. Поставлена и решена задача оптимального распределенного контроля и распределенного управления.

4. Проведено исследование пульсирующих режимов, позволяющих существенно повысить качество целевого продукта ректификационных установок.

Вычислительный центр  
СО АН СССР,  
Красноярск

Поступила в редакцию  
16/III 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Демиденко Н. Д., Ушанов С. В. Моделирование, распределенный контроль и распределенное управление процессами ректификации.— «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1975, № 8, сер. техн. наук, вып. 2, с. 103—109.
2. Девятков Б. Н., Демиденко Н. Д., Охорзин В. А. Динамика распределенных процессов в технологических аппаратах, распределенный контроль и управление. Красноярск, Красноярск. кн. изд-во, 1976. 310 с.
3. Демиденко Н. Д., Александрова Е. А. Метод численного анализа нестационарных режимов технологических процессов.— «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1977, № 8, сер. техн. наук, вып. 2, с. 100—115.
4. Демиденко Н. Д. Распределенный контроль и управление сложными технологическими системами. Канд. дис. Красноярск, 1972. 219 с.
5. Демиденко Н. Д. Анализ динамики управляемых технологических процессов при распределенном управляющем воздействии.— «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1971, № 3, сер. техн. наук, вып. 1.
6. Н. Д. Демиденко, Б. Н. Девятков, М. В. Елин. Оптимальное управление технологическими процессами с рециркуляцией взаимодействующих потоков.— «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 8, сер. тех. наук, вып. 2, с. 106—125.

С. И. ВАШУКОВ, В. В. МАРУСИН

## НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВЧ-РАЗРЯДА

### ВВЕДЕНИЕ

В последнее время большое внимание уделяется вопросам моделирования слабоионизированной плазмы [1]. Изучается выбор исходными и граничными условиями, и методы решения этих уравнений. Так можно, то в круг исследуемых вопросов следует включить выбор критериев подобия, параметров малости и т. п.

В данной работе рассмотрены некоторые вопросы моделирования ВЧ-разрядов. В частности, сформулирована система балансных уравнений с учетом того, что усредненная по времени функция распределения электронов по скоростям в ВЧ-поле может заметно отличаться от функции распределения в постоянном поле для локально однородного случая [2] (когда пространственная неоднородность  $L \gg \lambda_e = \delta^{-1/2} \lambda$ , где  $\lambda$  — длина свободного пробега электрона;  $\delta$  — доля переданной энергии). Полученная система уравнений, во многих случаях незначительно отличающаяся от уравнений в постоянном поле, анализируется в нулевом приближении по параметру  $\rho_0/l$ , где  $\rho_0$  и  $l$  — характерные масштабы неоднородности по радиусу и оси разряда. На основании полученных результатов нетрудно указать последующие приближения по параметру  $\rho_0/l$  по аналогии с тем, как это сделано для ВЧ-индукционного разряда [3], или для ВЧ-одноэлектродного разряда [4, 5]. Отметим, что общий анализ в двухмерном случае затруднителен, так как довольно трудно указать критерии подобия разрядов и поэтому приходится ограничиваться рассмотрением уравнений для конкретного газа и конкретных граничных условий [1, 3].

### БАЛАНСНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Для расчета характеристик ВЧ-разряда, особенно в случае, когда частота поля  $\omega \lesssim \nu$ , где  $\nu$  — частота столкновений электронов с тяжелыми частицами (обычно  $\omega \sim 10^7 \div 10^9$  с<sup>-1</sup>;  $\nu \sim 10^9 \div 10^{11}$  с<sup>-1</sup>,  $\delta \sim 10^{-4} \div 10^{-2}$ ), необходимо знать функцию распределения электронов  $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ , усредненную по периоду поля. Замена высокочастотного поля  $\vec{E}_\omega = \vec{E}_0(\vec{r}) e^{i\omega t}$  его эффективным значением  $\vec{E}_{\text{эф}} = \frac{\vec{E}_0(\vec{r})}{\sqrt{2}}$  не является в данном случае достаточно законной (ниже это будет показано на простых примерах). Ограничиваясь в дальнейшем именно этим случаем, рассмотрим уравнение для  $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$  и балансные соотношения, к которым

оно приводит для слабоионизированной плазмы в ВЧ-поле. Разложим  $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$  по сферическим гармоникам в пространстве скоростей и ограничимся первыми двумя членами:

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) = f_0(\vec{r}, v, t) + \frac{\vec{v}}{v} \vec{f}_1(\vec{r}, v, t),$$

что допустимо при  $L \gg \lambda$  и  $\delta \ll 1$  [6]. Предполагая в дальнейшем, что частота столкновений с возбуждением электронных состояний тяжелых частиц  $\nu^* \ll \nu$  и что удары второго рода несут существенны, получим уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{v}{3} \nabla \vec{f}_1 - \frac{e}{3mv^2} \frac{\partial}{\partial v} [v^2 (\text{Re } \vec{E}(\vec{r}, t)) \vec{f}_1] = \\ = \frac{1}{2v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[ v^2 \delta v \left( \frac{T}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} + v f_0 \right) \right] - \nu^* f_0 + I(v); \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{f}_1}{\partial t} + v \nabla f_0 = \frac{e}{m} \text{Re } \vec{E} \frac{\partial f_0}{\partial v} = -\nu \vec{f}_1. \quad (2)$$

Здесь  $I(v)$  — источник медленных электронов, связанных с ионизацией;  $\delta(v)$  — доля переданной энергии при упругих столкновениях и с возбуждением вращательных и колебательных уровней молекулы.

Представим решение системы (1), (2) в виде

$$f_0(\vec{r}, v, t) = f_0^{(0)}(v, t/r) (1 + \psi(\vec{r}, v, t)), \quad (3)$$

где  $f_0^{(0)}(v, t/r)$  — периодическое решение уравнения

$$\frac{\partial f_0^{(0)}}{\partial t} = \frac{1}{2v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ v^2 \left[ \left( \frac{2e^2}{3m^2 v} (\text{Re } \vec{E}_\omega)^2 + \frac{v \delta T}{m} \right) \frac{\partial f_0^{(0)}}{\partial v} + v \nu \delta f_0^{(0)} \right] \right\} - \nu^* f_0^{(0)}, \quad (4)$$

которое зависит от  $\vec{r}$ , как от параметра, а  $\psi(\vec{r}, v, t)$  — малая добавка, обусловленная наличием неоднородности по  $r$  и членом  $I(v)$  в (1), существенно отличная от нуля лишь в области  $v \ll \left(\frac{2T_e}{m}\right)^{1/2}$  ( $T_e$  — электронная температура). Используя условия  $\nu^* \ll \nu$ ;  $\omega \ll \delta \nu$ ;  $L \gg \lambda_e$ , в нулевом приближении по параметру  $\lambda_e/L$ , можно получить следующие уравнения баланса для концентрации электронов  $N_e$  и энергии электронной компоненты

$$\nabla \langle \vec{j}_e \rangle_t = Z_i N_e - \frac{N_e}{\tau_p}; \quad (5)$$

$$\langle \text{Re } \vec{j}_\omega \text{ Re } \vec{E}_\omega \rangle_t = Q \equiv \frac{3}{2} N_e \bar{\nu} \delta (T_e - T), \quad (6)$$

где скобки  $\langle \rangle_t$  означают усреднение по времени,  $Z_i = k_i N$  и  $1/\tau_p = \alpha_p N_e$  — усредненные по времени частоты ионизационных и рекомбинационных актов, а  $N_e$  и  $T_e$  определяются соотношениями:

$$N_e(\vec{r}) = 4\pi \int_0^\infty v^2 \langle f_0^{(0)}(v, t/r) \rangle_t dv \simeq 4\pi \int_0^\infty v^2 f_0^{(0)}(v, t/r) dv, \quad (7)$$

$$T_e(\vec{r}) = \frac{4\pi m}{3} \int_0^\infty v^4 \langle f_0^{(0)}(v, t/r) \rangle_t dv. \quad (8)$$

В том, что нормировка  $\langle f_0^{(0)} \rangle_t$  приближенно равна нормировке  $f_0^{(0)}$ , можно убедиться, рассмотрев решение (4), с учетом того, что  $\nu^*$  от-лично от нуля только в области  $v \gg \sqrt{\frac{2T_e}{m}}$ .

Выражения для потоков имеют обычный вид

$$\vec{j}_e = N_e b_e \vec{E}_e - D_e \nabla N_e; \quad (9)$$

$$\vec{j}_\omega = \sigma \vec{E}_\omega = e N_e b_e \vec{E}_\omega, \quad (10)$$

где

$$b_e = \frac{4\pi e}{3N_e m} \int_0^\infty \frac{v^3}{v} \frac{\partial f_0^{(0)}}{\partial v} dv; \quad (11)$$

$$D_e = \frac{4\pi}{3N_e} \int_0^\infty \frac{v^4}{v} f_0^{(0)} dv. \quad (12)$$

Следует однако подчеркнуть, что коэффициенты диффузии и подвижности ( $D_e$  и  $b_e$ ) являются в данном случае периодическими функциями времени.

Выражение для энергии  $Q$ , передаваемой от электронов тяжелым частицам, можно представить в виде

$$Q = Q_1 + Q_2; \quad (13)$$

$$Q_1 = \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty \left[ v^3 \nu \delta T \frac{\partial \langle f_0^{(0)} \rangle_t}{\partial v} + m v^4 \nu \delta \langle f_0^{(0)} \rangle_t \right] dv; \quad (14)$$

$$Q_2 = 2\pi m \int_0^\infty v^4 \nu^* \langle f_0^{(0)} \rangle_t dv. \quad (15)$$

В результате, используя условие квазинейтральности плазмы (что позволяет исключить поле  $\vec{E}_e$ , обусловленное неоднородностью), и полагая, что высокочастотное поле  $\vec{E}_\omega$  направлено вдоль оси разряда  $z$ , уравнения баланса для электронов в одномерном случае можно записать

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \bar{D}_a \frac{dN_e}{d\rho} + k_i N N_e - \alpha_p N_e^2 = 0; \quad (16)$$

$$\frac{1}{2} \bar{\sigma}_\omega |E_\omega|^2 = \frac{3}{2} N_e \bar{\nu} \delta (T_e - T), \quad (17)$$

где, однако, выражения для коэффициентов амбиполярной диффузии  $\bar{D}_a$  и проводимости  $\bar{\sigma}_\omega$  несколько отличаются от обычных, так как произведено усреднение по времени

$$\bar{D}_a = D_i \left( 1 + \frac{e}{T} \frac{\langle D_e \rangle_t}{\langle b_e \rangle_t} \right); \quad (18)$$

$$\bar{\sigma}_\omega = \langle \sigma \rangle_t + \langle \sigma \cos 2(\omega t + \Delta) \rangle_t; \quad (19)$$

здесь учтено, что  $\text{Re } E_\omega = |E_\omega| \cos(\omega t + \Delta)$ .

Видно, что выражение для  $\bar{\sigma}_\omega$  может несколько отличаться от усредненной по времени проводимости плазмы  $\bar{\sigma} = \langle \sigma \rangle_t = \langle e N_e b_e \rangle_t$ .

Наряду с уравнением энергетического баланса для тяжелых частиц

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \lambda(T) \frac{dT}{d\rho} + \frac{3}{2} N_e \bar{\nu} \delta (T_e - T) = 0, \quad (20)$$

где  $\lambda(T)$  — теплопроводность тяжелых частиц, и уравнением для составляющей высокочастотного поля  $E_0(\rho)$ , которое при условии, что решение (4) имеет период  $\pi/\omega$ , можно записать в виде

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{dE_0}{d\rho} + \frac{\omega^2}{c^2} \bar{\epsilon} E_0 = 0, \quad (21)$$

где  $\bar{\varepsilon} \approx i \frac{4\pi\sigma}{\omega}$ , уравнения (16), (17) будут являться основными уравнениями, описывающими ВЧ-разряд. Следует отметить, что полученная система уравнений не является достаточно строгой (при ее выводе пренебрегалось возможностью генерации субгармоник, что оправдано лишь в случае, когда  $v$  не зависит от скорости), тем не менее она вполне пригодна для расчета таких параметров ВЧ-разряда, как  $T_e$ ,  $N_e$  и  $T$ .

### ВЛИЯНИЕ ВЧ-ПОЛЯ НА ПАРАМЕТРЫ ПЛАЗМЫ

Оценим степень отличия усредненных параметров плазмы от ее значений, вычисленных с помощью эффективного поля. Ограничимся случаем, когда  $v(v) = v(v_0) (v/v_0)^k$  и  $\delta = \text{const}$ ,  $-1 < k < 5$ . Кроме того, будем считать, что искажением «хвоста» функции распределения электронов за счет неупругих ударов  $v^*$  можно пренебречь. Более детально случай, когда это искажение велико, т. е. когда [7]

$$\mu^2 = \frac{v^* T_e}{\delta v(I) l} \gg 1 \text{ при } v^* = \text{const},$$

где  $I$  — потенциал ионизации (возбуждения), рассмотрен в [8]. Полагая в дальнейшем, что  $T_e \gg T$  и опуская индексы у  $f_0^{(0)}$ , запишем уравнение (4) в виде

$$\gamma \frac{\partial f}{\partial \tau} = y^{1-\beta_1} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ y^{\beta_1+\beta_2} \left[ (1 + \cos \tau) \frac{\partial f}{\partial y} + f \right] \right\}, \quad (22)$$

где

$$y = \frac{1}{k+1} \left( \frac{v}{v_0} \right)^{2(k+1)}; \quad \tau = 2\omega t; \quad \tau = \frac{2\omega}{v(v_0)\delta} (k+1)^{-\frac{3k+2}{2k+2}},$$

$$\beta_1 = \frac{3}{2(k+1)}; \quad \beta_2 = \frac{k}{2(k+1)};$$

и  $v_0$  определяется из условия

$$v_0^2 = \frac{2e^2 |E_0|^2}{3m^2 v^2 (v_0) \delta} = \frac{2T_{e0}}{m}.$$

С помощью преобразования Меллина

$$F(\xi, \tau) = \frac{1}{\Gamma(\xi + \beta_1)} \int_0^\infty y^{\xi+\beta_1-1} f(y, \tau) dy,$$

$$f(y, \tau) = (2\pi i)^{-1} y^{-\beta_1} \int_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon} y^{-\xi} \Gamma(\xi + \beta_1) F(\xi, \tau) d\xi; \quad \varepsilon > 0$$

уравнение (22) может быть записано

$$j \frac{\partial F(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \xi \frac{\Gamma(\xi + \beta_1 + \beta_2)}{\Gamma(\xi + \beta_1)} [(1 + \cos \tau) F(\xi + \beta_2 - 1, \tau) - F(\xi + \beta_2, \tau)]. \quad (23)$$

Решение этого уравнения можно искать методом последовательных приближений, основываясь на том, что  $\Gamma(\xi)$  имеет максимум при  $\text{Im } \xi = 0$  и экспоненциально стремится к нулю при  $\text{Im } \xi \rightarrow \pm\infty$ . Поэтому, выбирая в качестве нулевого приближения решение, удовлетворяющее уравнению:

$$\gamma_0 \frac{\partial F^{(0)}(\xi, \tau)}{\partial \tau} - \xi [(1 + \cos \tau) F^{(0)}(\xi + \beta_2 - 1, \tau) - F^{(0)}(\xi + \beta_2, \tau)] = 0, \quad (24)$$

где  $\gamma_0 = \gamma \frac{F(\xi_0 + \beta_1)}{\Gamma(\xi_0 + \beta_1 + \beta_2)}$ , а точка  $\xi_0$  определяется интересующим нас

моментом скорости; можно представить решение (23) в виде ряда

$$F(\xi, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(\xi, \tau).$$

Здесь мы ограничимся анализом нулевого приближения, критерий применимости которого имеет вид

$$\left| \frac{d}{d\xi} \ln \frac{\Gamma(\xi + \beta_1 + \beta_2)}{\Gamma(\xi + \beta_1)} \right|_{\xi=\xi_0} \ll 1.$$

Опуская в дальнейшем индекс «0» у нулевого приближения, будем иметь

$$F(\xi, \tau) = C a^\xi(\tau); \quad (25)$$

$$f(y, \tau) = C a^{-\beta_1}(\tau) \exp\left(-\frac{y}{a(\tau)}\right); \quad (26)$$

где  $a(\tau)$  является периодическим решением уравнения

$$\gamma_0 \frac{da(\tau)}{d\tau} = (1 + \cos \tau) a^{\beta_2}(\tau) - a^{1+\beta_2}(\tau) \quad (27)$$

и  $C$  — нормировочная константа.

Отметим, что в предельных случаях, когда либо  $k=0$  ( $\beta_2=0$ ), либо  $\gamma \ll 1$ , распределение (26) совпадает с известными [5]. Для иллюстрации на рис. 1 приведено решение уравнения (27) для некоторых значений параметров  $\gamma_0$  и  $k$ .

Рассмотрим, насколько отличается усредненная по периоду поля функция распределения от своего эффективного значения

$$\langle f \rangle_{\text{эф}} = C e^{-y}. \quad (28)$$

Нетрудно показать, что при  $\gamma \ll 1$  для  $\langle f(y, \tau) \rangle_\tau$  можно получить выражение

$$\langle f(y, \tau) \rangle_\tau = C 2^{-\beta_1} \pi^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}} G\left(\frac{1}{2}, \beta_1 + \frac{1}{2}, \frac{y}{2}\right), \quad (29)$$

где  $G(\alpha, \beta, y)$  — вырожденная гипергеометрическая функция второго рода. Однако нужно отметить, что  $\langle f(y, \tau) \rangle_\tau$  имеет особенность при  $y \rightarrow 0$ . Это связано с тем, что при  $\gamma \ll 1$  полученное решение непригодно в об-

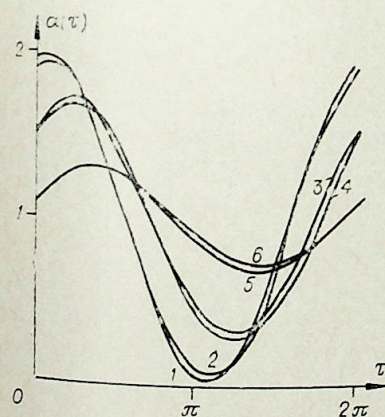


Рис. 1. Решение уравнения (27) при  $\gamma = 10^{-0.5}$ ,  $k=0$  (1);  $\gamma_0 = 10^{-0.5}$ ,  $k=1$  (2);  $\gamma_0 = 1$ ,  $k=0$  (3);  $\gamma_0 = 1$ ,  $k=1$  (4);  $\gamma_0 = 10^{0.5}$ ,  $k=0$  (5);  $\gamma_0 = 10^{0.5}$ ,  $k=1$  (6).

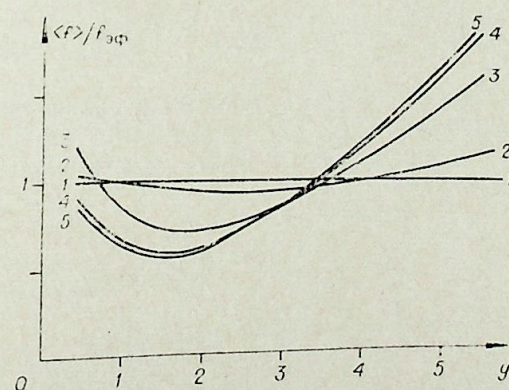


Рис. 2. Зависимость  $\langle f \rangle_{\text{эф}} / f_{\text{эф}}$  от  $y$  при  $k=0$  и  $\gamma = 10^{0.5}$  (2),  $\gamma = 1$  (3),  $\gamma = 10^{-0.5}$  (4),  $\gamma = 0,1$  (5).

ласти  $v \ll v_0$ . В частности, при  $k=0$ , решение (4), пригодное и в этой области, для  $\gamma \ll 1$  имеет вид

$$f(y, \tau) = C(\varepsilon_0 + 1 + \cos \tau)^{-3/2} \exp\left(-\frac{y}{\varepsilon_0 + 1 + \cos \tau}\right), \quad (26')$$

где  $\varepsilon_0 = T/T_{e0}$ . В результате вместо (29) получим распределение

$$\langle f(y, \tau) \rangle_\tau = \frac{C}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} I_n(1 + \varepsilon_0), \quad (29')$$

$$I_n(z) = \frac{\sqrt{2} \pi \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} \left[ \sqrt{\frac{2}{1+z}} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{2}{1+z}\right) \right],$$

где  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$  — гипергеометрическая функция. Как видно, это распределение не имеет особенностей при  $y \rightarrow 0$ . На рис. 2 приведено отношение усредненной функции распределения к своему эффективному значению при  $k=0$  и различных  $\gamma$ . Видно, что максимум функции распределения, смещаясь в область малых энергий, может заметно возрастать. При этом «хвостовая» часть сначала уменьшается и лишь в области больших энергий заметно превосходит свое эффективное значение. Аналогичная ситуация наблюдалась экспериментально при повышении давления в ВЧ-индукционном разряде [9]. Полученные результаты позволяют объяснить такое поведение функции распределения.

Несмотря на то, что искажение функции распределения может быть значительным, такие усредненные параметры плазмы, как  $\bar{D}_e$ ,  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{\sigma}_\omega$  и  $T_e$ , во многих практически важных случаях ( $k \geq 0$ ), мало отличаются от своих эффективных значений. На рис. 3–6 приведены отношения этих

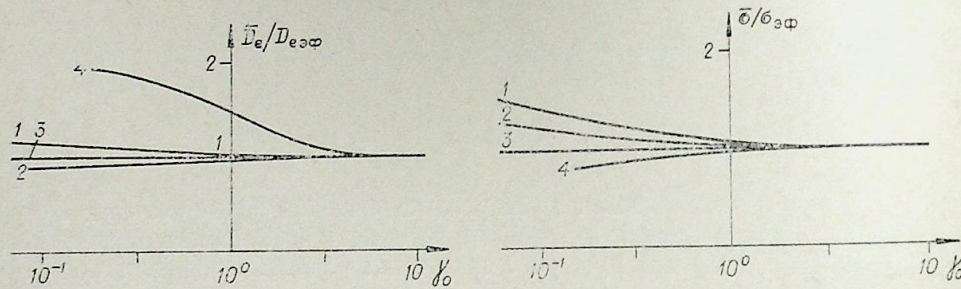


Рис. 3. Зависимость  $\bar{D}_e/D_{e\text{эфф}}$  от  $\gamma_0$  при  $k=4$  (1),  $k=1$  (2),  $k=0$  (3),  $k=-0,5$  (4).

Рис. 4. Зависимость  $\bar{\sigma}/\sigma_{\text{эфф}}$  от  $\gamma_0$  при  $k=4$  (1),  $k=1$  (2),  $k=0$  (3),  $k=-0,5$  (4).

величин к своим эффективным значениям, полученные с использованием формул (26), (27), в зависимости от параметров  $\gamma_0$  и  $k$ .

В предельном случае  $\gamma \ll 1$  выражения для этих отношений имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\bar{D}_e}{D_{e\text{эфф}}} &= \langle a^{1-3\beta_2} \rangle_\tau = \frac{2^{1-3\beta_2} \Gamma\left(\frac{3}{2} - 3\beta_2\right)}{\pi^{1/2} \Gamma(2 - 3\beta_2)}; \\ \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{\text{эфф}}} &= \langle a^{-\beta_2} \rangle_\tau = \frac{2^{-\beta_2} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \beta_2\right)}{\pi^{1/2} \Gamma(1 - \beta_2)}; \\ \frac{\bar{\sigma}_\omega}{\sigma_{\text{эфф}}} &= \langle (1 + \cos \tau) a^{-\beta_2} \rangle_\tau = \frac{2^{1-\beta_2} \Gamma\left(\frac{3}{2} - \beta_2\right)}{\pi^{1/2} \Gamma(2 - \beta_2)}; \end{aligned} \quad (30)$$

$$\frac{T_e}{T_{e\text{эфф}}} = \langle a^{1-2\beta_2} \rangle_\tau = \frac{2^{1-2\beta_2} \Gamma\left(\frac{3}{2} - 2\beta_2\right)}{\pi^{1/2} \Gamma(2 - 2\beta_2)}.$$

Отметим, что при  $k \neq 0$  связь между  $T_{e\text{эфф}}$  и  $T_{e0}$  приобретает вид

$$T_{e\text{эфф}} = \frac{2}{3} (k+1)^{\frac{1}{k+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2 \cdot (k+1)}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2 \cdot (k+1)}\right)} T_{e0}.$$

Совсем иная ситуация имеет место в высокоэнергетической области  $v \gg v_0$ . Здесь даже небольшое изменение функции распределения может значительно влиять на такие элементарные процессы, как ионизация и возбуждение электронных уровней. Рассмотрим усредненные по времени выражения для констант скоростей процессов ионизации или возбуждения (прямым электронным ударом) для случая  $\gamma \ll 1$ , ограничиваясь двумя простыми аппроксимациями сечений этих процессов

$$\sigma^*(v) = \begin{cases} \sigma_0 & \text{при } v > v^*, \\ 0 & \text{при } v < v^*, \end{cases} \quad (a)$$

$$\sigma^*(v) = \begin{cases} \sigma_0 \left(\frac{v}{v^*} - 1\right) & \text{при } v > v^*, \\ 0 & \text{при } v < v^*, \end{cases} \quad (б)$$

где  $v^* = \sqrt{\frac{2I}{m}}$ ;  $I$  — потенциал ионизации или возбуждения. Используя условие  $v^* \gg v_0$ , в случае (а) будем иметь

$$\frac{k_i}{k_{i\text{эфф}}} = \langle a^{1-\beta_1}(\tau) e^{-\left(\frac{y}{a(\tau)} - y^*\right)} \rangle_\tau \approx \frac{e^{y^*/2}}{2^{\beta_1 - \frac{3}{2}} \sqrt{\pi y^*}}, \quad (31)$$

а в случае (б)

$$\frac{k_i}{k_{i\text{эфф}}} = \langle a^{2-\beta_1}(\tau) e^{-\left(\frac{y}{a(\tau)} - y^*\right)} \rangle_\tau \approx \frac{e^{y^*/2}}{2^{\beta_1 - \frac{5}{2}} \sqrt{\pi y^*}}, \quad (32)$$

где

$$y^* = (k+1)^{-1} \left(\frac{v^*}{v_0}\right)^{2 \cdot (k+1)}.$$

Эти соотношения показывают, что замена ВЧ-поля своим эффективным значением не является в данном случае правомерной (скорее

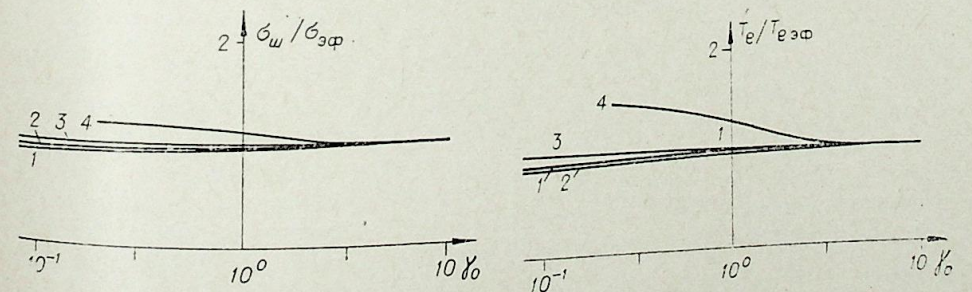


Рис. 5. Зависимость  $\bar{\sigma}_\omega/\sigma_{\text{эфф}}$  от  $\gamma_0$  при  $k=4$  (1),  $k=1$  (2),  $k=0$  (3),  $k=-0,5$  (4).

Рис. 6. Зависимость  $T_e/T_{e\text{эфф}}$  от  $\gamma_0$  при  $k=4$  (1),  $k=1$  (2),  $k=0$  (3),  $k=-0,5$  (4).

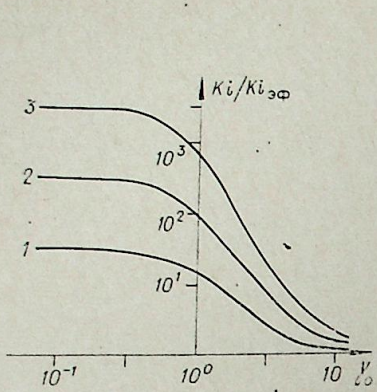


Рис. 7. Зависимость  $k_i/k_{iэф}$  от  $\gamma$  при  $k=0$ ,  $\mu^2=1$ ,  $y^*=10$  (1),  $y^*=15$  (2),  $y^*=20$  (3).

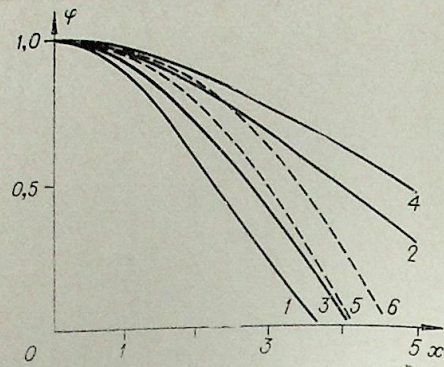


Рис. 8. Зависимость  $\varphi$  от  $x$  при  $\chi=1$  и  $\alpha=10^{-0,5}$ ,  $\Omega^2=10$  (1);  $\alpha=10^{-12,5}$ ,  $\Omega^2=10$  (2);  $\alpha=10^{-0,5}$ ,  $\Omega^2=1$  (3);  $\alpha=10^{-1,25}$ ,  $\Omega^2=1$  (4);  $\alpha=10^{-0,5}$ ,  $\Omega^2=0,5$  (5);  $\alpha=10^{-1,25}$ ,  $\Omega^2=0,5$  (6).

следует заменять ВЧ-поле амплитудным значением или вводить понятие эффективного потенциала возбуждения или ионизации). Более строгий учет искажения «хвоста» функции распределения за счет неупругих столкновений  $\nu^*$  не приводит к значительному изменению полученных результатов. В частности, в случае (а), когда частота столкновений  $\nu$  не зависит от скорости и выполняется условие  $\omega \ll \nu^*$ , можно получить соотношение

$$\frac{k_i}{k_{iэф}} = \left\langle \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \mu^2} \right) \cos \tau \right] a^{-3/2}(\tau) e^{-\left(\frac{y^*}{a(\tau)} - y^*\right)} \right\rangle_{\tau}, \quad (33)$$

которое в предельном случае  $\mu \ll 1$  и  $\gamma \ll 1$  совпадает с (31). Рис. 7, где приведены зависимости  $k_i/k_{iэф}$  от  $\gamma$ , полученные с помощью формулы (33), наглядно показывает, насколько велико отличие величин, определяемых «хвостом» функции распределения, от своих эффективных значений.

Таким образом, замена ВЧ-поля эффективным, во многих случаях незначительно сказываясь на уравнениях энергетического баланса (которые определяют  $T$  и  $T_e$ ), становится малоприменимой при анализе уравнений, которые определяют  $N_e$  и заселенность электронных уровней (даже в случае, когда частота столкновений слабо зависит от скорости).

#### РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ВЧ-РАЗРЯДА

Для решения уравнений баланса требуется знать функцию распределения электронов, отыскание которой в общем случае довольно трудоемкая задача, так как  $\nu$  ( $\nu$ ) и  $\delta$  ( $\nu$ ) сложным образом зависят от скорости. Однако замена точной функции распределения максвелловской (с электронной температурой, зависящей от времени по закону  $a(\tau) = 1 + \frac{\cos \tau + \gamma \sin \tau}{1 + \gamma^2}$ ), величина которой определяется из уравнения (17), мало сказывается на средних величинах [6], поэтому можно использовать эту замену при анализе уравнений (16), (17), (20) и (21).

Считая, как и раньше, что  $T_e \gg T$ ,  $\omega \ll \delta \nu$  и учитывая в качестве основных процессов, определяющих  $N_e$ , диссоциативную рекомбинацию, ионизацию электронным ударом (прямоугольную или ступенчатую) и диффузию, рассмотрим эти уравнения. При этом, за счет усреднения по времени  $k_i \sim \exp\left(-\frac{I^*}{T_e}\right)$ , где  $I^*$  отличается от истинного потенциала ионизации (согласно предыдущему  $I^* \simeq I$  при  $\omega \geq 10\delta \nu$  и  $I^* \sim 1/2 I$  при  $\omega \ll \delta \nu$ ). Наиболее резкой зависимостью от  $\rho$  обладает  $N_e$  (действительно,

если пренебречь диффузией, то легко видеть, что  $N_e$  зависит от других параметров по экспоненциальному закону), благодаря этому уравнения (16), (17), (20) и (21) можно записать в виде

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} x \frac{dn}{dx} + \chi^2 (e^{-\theta} - n) n = 0; \quad (34)$$

$$u^2 = \varphi^{-1} (1 - \alpha \theta); \quad (35)$$

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} x \frac{dS}{dx} + \Omega^{*2} n u^2 = 0; \quad (36)$$

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \frac{1}{x n} \frac{d}{dx} x \frac{du^2}{dx} - 4n u^2 = 0, \quad (37)$$

где введены обозначения.

$$x = \frac{\rho}{\delta_{sm}}; \quad \delta_{sm}^2 = \frac{c^2}{4\pi\sigma_m\omega}; \quad \bar{\sigma}_m = \frac{e^2 N_{em}^{(0)}}{m\nu_m}$$

$$n = \frac{N_e}{N_{em}^{(0)}}, \quad N_e^{(0)} = \frac{K_i N}{\alpha_p}; \quad u = \frac{|E_n|}{|E_{0m}|}; \quad \theta = \frac{I^* (T_{em} - T_e)}{T_{em}^2};$$

$$S = \int_{T_{ст}}^T \lambda(T) dT; \quad \varphi = \frac{T^2}{T_m^2}; \quad \chi^2 = \frac{\alpha_p N_{em}^{(0)} \delta_{sm}^2}{D_a}$$

$$\Omega^{*2} = \frac{c^2 |E_{0m}|^2}{8\pi\omega}; \quad \alpha = \frac{T_{em}^2}{I^*} \frac{\partial \ln \bar{\delta}(T_e) \bar{\nu}^2(T_e) T_e}{\partial T_e} \Big|_{T_e=T_{em}};$$

индекс  $m$  характеризует параметры плазмы при максимальной газовой  $T_m$  и электронной  $T_{em}$  температуре,  $T_{ст}$  — температура стенки, и учтено, что  $\bar{\sigma} \simeq \bar{\sigma}_0$ . Граничные условия, необходимые для определения  $T_m$ ,  $T_{em}$  и  $N_{em}$  (или, что то же,  $n_0 = \frac{N_{em}}{N_{em}^{(0)}}$ ) выбираем следующие:

$$T(R) = T_{ст} \simeq 0; \quad \lambda(T) \frac{dT}{d\rho} \Big|_{\rho=R} = -\frac{\omega_0}{2\pi R}; \quad N_e(R) = 0, \quad (38)$$

где  $\omega_0$  — тепловой поток на стенку, а  $R$  — расстояние от оси разряда до стенки.

Для анализа системы (34—37) разобьем область, занятую плазмой, на внутреннюю  $x < x_0$  и внешнюю  $x > x_0$ , где  $x_0$  — характерная область изменения  $n$ . Учитывая, что газовая температура в области  $x < x_0$  обычно меняется слабо, можно линеаризовать  $S$  по  $\varphi$  в уравнении (36) и записать это уравнение при  $x < x_0$  в виде

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} x \frac{d\varphi}{dx} + \Omega^2 n u^2 = 0, \quad (36')$$

где  $\Omega^2 = \frac{2\Omega^{*2}}{\lambda(T_m) T_m}$ . В области  $x > x_0$  (где наличием электронов можно пренебречь) решение (36') имеет вид

$$\varphi - 1 = -\eta(\alpha, \Omega, \chi) \ln \frac{x}{x^*(\alpha, \Omega, \chi)}, \quad (39)$$

где  $\eta(\alpha, \Omega, \chi)$  и  $x^*(\alpha, \Omega, \chi)$  — постоянные интегрирования. С другой стороны, из (36) следует, что при  $x > x_0$

$$S = \frac{\omega_0}{2\pi} \ln \frac{x_R}{x} = \frac{\omega_0}{2\pi} \ln \frac{R}{\rho}. \quad (40)$$

Из условия «сшивки» решений (39) и (40) в этой области будем иметь

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \eta(\alpha, \Omega, \chi) \frac{\lambda(T_m) T_m}{2}, \quad (41)$$

$$x^*(\alpha, \Omega, \chi) = x_R \exp\left(-\frac{2\pi S(T_m)}{\omega_0}\right). \quad (42)$$

Наряду с условием  $n(x_R) = 0$ , которое служит для определения  $n_0(\alpha, \Omega, \chi)$ , (41) и (42) дают возможность определить  $T_m$ ,  $T_{em}$  и  $N_{em}$ , если известны зависимости  $\eta$  и  $x^*$  от  $\alpha, \Omega, \chi$ . Из такого анализа видно, что некоторая неточность уравнений (34)–(37) в области  $x > x_0$  будет мало сказываться на полученных результатах. В тех случаях, когда  $x_0 \sim x_R$ , соотношения (41), (42) могут быть использованы, если имеет место аппроксимация  $\lambda(T) = \lambda_0 T$  (пригодная обычно для многих газов). Рассмотрим результаты интегрирования системы (34), (35), (36') и (37), учитывая, что при  $x \rightarrow 0$  решения имеют асимптоты:

$$n(x) = n_0 \left[ 1 - \frac{\chi^2 (1 - n_0) x^2}{4} \right],$$

$$\varphi(x) = 1 - \frac{\Omega^2 n_0 x^2}{4}, \quad (43)$$

$$u^2(x) = 1 + \frac{n_0^2 x^4}{32}.$$

В случае слабых скин-эффектов, который реализуется при  $\Omega^2 \gg 1$ , ВЧ-поле определяет не поперечные, а продольные характеристики разряда, и в пренебрежении диффузией электронов критерий этого имеет вид

$$\zeta^2 = \frac{\Omega^2}{\chi^2} \ll \alpha;$$

соответствующее решение записывается в форме [8]:

$$\varphi - 1 = 2\alpha \ln\left(1 + \frac{\Omega^2 x^2}{8\alpha}\right), \quad (44)$$

$$n = \left(1 + \frac{\Omega^2 x^2}{8\alpha}\right)^{-2}. \quad (45)$$

Отсюда для  $\eta$  и  $x^*$  имеем выражения

$$\eta(\alpha, \Omega) = 4\alpha(1 - e^{-1/4\alpha}), \quad (46)$$

$$x^*(\alpha, \Omega) = (8\alpha/\Omega)^{1/2} e^{1/4\alpha - 1/\eta}. \quad (47)$$

В более общем случае результаты численного решения системы представлены на рис. 8–10, где приведены зависимости  $\varphi$ ,  $n/n_0$  и  $u^2$  от  $x$ , и на рис. 11–13, где показаны зависимости  $\eta$ ,  $x^*$ ,  $n_0$  от  $\alpha$  при различных значениях других параметров. Штриховой линией на рис. 8–10 обозначены решения, при которых производная  $d\theta/dx$  дважды меняет свой знак.

Как видно, это наблюдается при малых значениях параметра  $\Omega$  (точнее, при  $0,5 < \Omega < 1$ ), когда за счет резкого возрастания поля вблизи границы разряда происходит увеличение электронной температуры по сравнению с ее значением в центральной области. Это имеет место и в пренебрежении диффузией [10]. Такие физически непримлемые решения (так как в силу цилиндрической симметрии должно выполняться условие  $dT_e/dr > 0$ ) более точно указывают область применимости исходной системы уравнений (34)–(37). Как следует из расчетов, локальная связь между  $E$  и  $T_e$  нарушается при  $\Omega \lesssim 0,5$ .

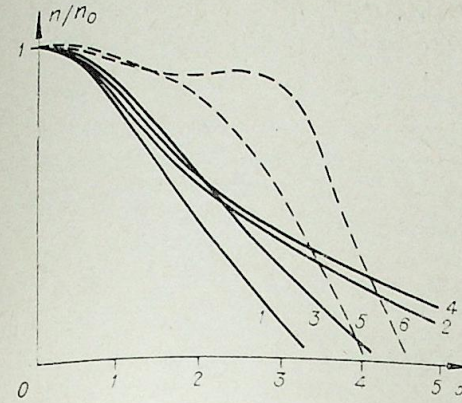


Рис. 9. Зависимость  $n/n_0$  от  $x$  при  $\chi = 1$  и  $\alpha = 10^{-0,5}$ ,  $\Omega^2 = 10$  (1);  $\alpha = 10^{-1,25}$ ,  $\Omega^2 = 10$  (2);  $\alpha = 10^{-0,5}$ ,  $\Omega^2 = 1$  (3);  $\alpha = 10^{-1,25}$ ,  $\Omega^2 = 1$  (4);  $\alpha = 10^{-0,5}$ ,  $\Omega^2 = 0,5$  (5);  $\alpha = 10^{-1,25}$ ,  $\Omega^2 = 0,5$  (6).

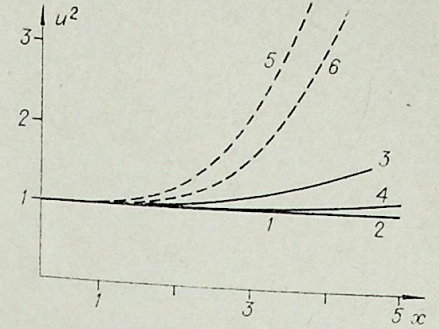


Рис. 10. Зависимость  $u$  от  $x$  при  $\chi = 1$  и  $\alpha = 10^{-0,5}$ ,  $\Omega^2 = 10$  (1);  $\alpha = 10^{-1,25}$ ,  $\Omega^2 = 10$  (2);  $\alpha = 10^{-0,5}$ ,  $\Omega^2 = 1$  (3);  $\alpha = 10^{-1,25}$ ,  $\Omega^2 = 1$  (4);  $\alpha = 10^{-0,5}$ ,  $\Omega^2 = 0,5$  (5);  $\alpha = 10^{-1,25}$ ,  $\Omega^2 = 0,5$  (6).

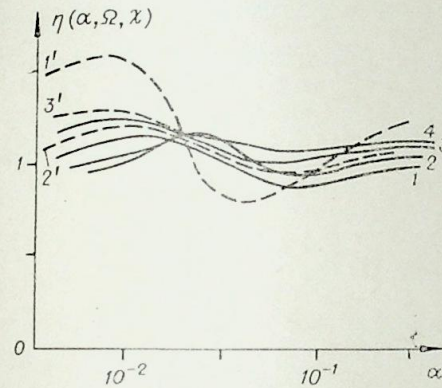


Рис. 11. Зависимость  $\eta$  от  $\alpha$  при  $\Omega^2/\chi^2 = 10^{-1}$  (1, 1');  $\Omega^2/\chi^2 = 1$  (2, 2');  $\Omega^2/\chi^2 = 10$  (3, 3');  $\Omega^2/\chi^2 = 10^2$  (4, 4'). На рис. 11, 12, 13 штриховые линии построены для  $\Omega^2 = 1$ , сплошные — для  $\Omega^2 \gg 1$ .

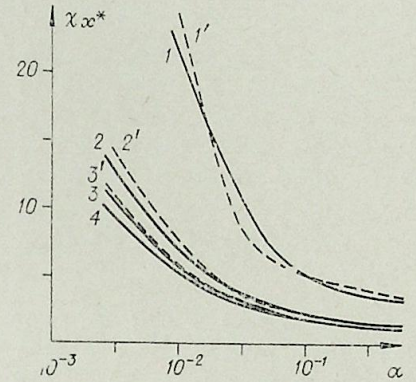


Рис. 12. Зависимость  $\chi x^*$  от  $\alpha$  при  $\Omega^2/\chi^2 = 10^{-1}$  (1, 1');  $\Omega^2/\chi^2 = 1$  (2, 2');  $\Omega^2/\chi^2 = 10$  (3, 3');  $\Omega^2/\chi^2 = 10^2$  (4, 4').

Рассмотрим результаты, представленные на рис. 11–13. Отметим, что в случае слабых скин-эффектов ( $\Omega \gg 1$ ),  $\eta$ ,  $x^*$  и  $n_0$  являются однородными функциями параметров  $\Omega$  и  $\chi$ , т. е.

$$\eta(\alpha, \Omega, \chi) = \eta(\alpha, k\Omega, k\chi),$$

$$x^*(\alpha, \Omega, \chi) = k^{-1} x^*(\alpha, k\Omega, k\chi),$$

$$n_0(\alpha, \Omega, \chi) = n_0(\alpha, k\Omega, k\chi),$$

причем при  $\Omega^2 \gg \alpha \chi^2$ , когда можно полностью пренебречь рекомбинацией,

$$n_0(\alpha, \Omega, \chi) = k^{-2} n_0(\alpha, k\Omega, k\chi) = k^2 n_0(\alpha, \Omega, k\chi).$$

Случаи, когда скинирование начинает играть заметную роль, отмечены на рис. 11–12 штриховой линией. Как видно, они имеют место на границе применимости данной модели. Из рис. 11 следует, что константа интегрирования  $\eta(\alpha, \Omega, \chi)$  меняется незначительно в широком диапазоне изменения своих параметров, т. е. газовая температура во многих случаях в основном определяется мощностью  $\omega_0$  и практически не зависит от значений таких параметров плазмы, как  $T_e$ ,  $N_e$  и т. п.

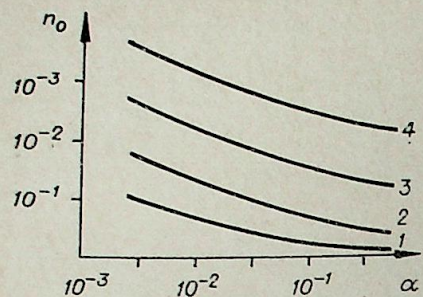


Рис. 13. Зависимость  $n_0$  от  $\alpha$  при  $\Omega^2/\chi^2 = 10^{-1}$  (1, 1');  $\Omega^2/\chi^2 = 1$  (2, 2');  $\Omega^2/\chi^2 = 10$  (3, 3');  $\Omega^2/\chi^2 = 10^2$  (4, 4').

Зависимости рис. 12 характеризуют эквивалентный радиус разряда. Действительно, согласно каналовой модели разряда, имеем

$$\rho_0 = R \exp\left(\frac{1}{2} - \frac{2\pi S(T_m)}{\omega_0}\right),$$

где  $\rho_0$  — радиус зоны проводимости в каналовой модели; сравнение с (42) показывает, что

$$\rho_0 = \delta_{em} e^{1/2} \chi^* (\alpha, \Omega, \chi).$$

Из зависимостей, представленных на рис. 13, видно, что учет диффузии может приводить к значительному отличию истинной концентрации электронов от равновесной, определяемой только ионизацией и рекомбинацией, даже в случае, когда диффузионная длина мала по сравнению с геометрическими размерами разряда  $\frac{D_a}{\alpha_p N_{em}} \ll R^2$ , т. е. подобная оценка не может служить критерием для пренебрежения диффузией (вопреки выводам работы [11]).

Сделаем оценку параметров  $\alpha$ ,  $\Omega^2$ ,  $\chi^2$  для азота, используя для  $\nu$ ,  $\delta$  значения, приведенные в [5]. Полагая  $T_e = 10^4$  К и  $T < 4 \cdot 10^3$  К при  $f = \omega/2\pi = 3 \cdot 10^7$  Гц, получим

$$\alpha \approx 0,34; \Omega^2 \approx 9,2 \cdot 10^7 \frac{P^2}{T^4}; \zeta^2 = \frac{\Omega^2}{\chi^2} = \frac{3D_a \delta \nu T_e}{\lambda(T) T \alpha_p} \approx 1,1 \cdot 10^5 T^{-2},$$

где  $P$  выражено в н/м<sup>2</sup>;  $T$  — в К. Отсюда следует, что в области средних давлений  $P \approx 10^{-2}$  н/м<sup>2</sup> для ВЧ-разряда в азоте реализуется в основном ионизационно-рекомбинационный режим горения. Однако при низких температурах поправки, связанные с диффузией, могут быть существенны, так как условие  $\zeta^2 \ll \alpha$  строго не выполняется.

Таким образом, полученные результаты, уточняя представление о влиянии ВЧ-поля на параметры плазмы, позволяют оценивать основные характеристики ВЧ-разряда.

Институт физико-химических основ  
переработки минерального сырья  
СО АН СССР,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
20/II 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Моделирование и методы расчета физико-химических процессов в низкотемпературной плазме. М., «Наука», 1974. 270 с.
2. Цендин Л. Д. Распределение электронов по энергии в слабоионизированной плазме с током и конечной неоднородностью. — Ж. эксперим. и теорет. физики, 1974, 66, с. 1638—1650.
3. Дресвин С. В., Донской Л. В., Гольдфарб В. М., Клубникин В. С. Физика и техника низкотемпературной плазмы. М., Атомиздат, 1972. 352 с.
4. Вашуков С. И., Марусин В. В. К оценке характеристик ВЧ-факельного разряда. Сообщ. 1. Распределение полей в разряде. — Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1973, № 13, сер. техн. наук, вып. 3, с. 81—85.

5. Вашуков С. И., Марусин В. В. К оценке характеристик ВЧ-факельного разряда. II. Балансные соотношения. — Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1974, № 3, сер. техн. наук, вып. 1, с. 26—30.
6. Гуревич А. В., Шварцбург А. Б. Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере. М., «Наука», 1973. 272 с.
7. Цендин Л. Д. О влиянии неупругих ударов на функцию распределения электронов в электрическом поле. — ЖТФ, 1971, 41, № 11, с. 2271—2277.
8. Вашуков С. И., Марусин В. В. Распределение электронов по скоростям в слабоионизированной ВЧ-плазме. — Теплофизика высоких температур, 1976, XIV, № 6, 1166—1174.
9. Ерощенко Е. К., Малкин О. А. Функция распределения электронов по энергиям в вихревом ВЧ-разряде. — ЖТФ, 1971, 41, № 3, с. 654—656.
10. Вашуков С. И., Марусин В. В. К теории ВЧ-одноэлектродного разряда. — В кн.: VI Всес. конф. по генераторам низкотемпературной плазмы. Тез. докл. Фрунзе, «Илим», 1974, с. 222—225.
11. Елецкий А. В., Смирнов Б. М. Сжатие положительного столба тлеющего разряда. — ЖТФ, 1970, 40, № 8, с. 1682—1685.

А. Н. ВАЛИУЛЛИН, В. И. ПААСОНЕН, Н. Е. САПУНОВ,  
Р. И. САФИН

РАСЧЕТ ТЕПЛООВОГО РЕЖИМА  
ЛЕДОПОРОДНЫХ ЕМКОСТЕЙ В ФИЛЬТРУЮЩИХ ПЛАСТАХ

Цель настоящей работы состоит в создании численной модели тепловых процессов, протекающих при строительстве и эксплуатации подземных низкотемпературных ледопородных емкостей-хранилищ сжиженного газа, в условиях омыwania ледопородной оболочки фильтрационным потоком грунтовых вод.

Рассматриваются две постановки задачи, ориентированные на осесимметричные и плоскосимметричные объекты. В случае осесимметричной емкости наличие фильтрационного потока нарушает осевую симметрию процесса и приводит к трехмерной задаче. Ввиду известных затруднений, связанных с решением трехмерной задачи, целесообразно выделить зону, в которой можно пренебречь зависимостью теплового процесса от одной из координат. Таковой зоной является полоса, расположенная между уровнем дна резервуара и поверхностным слоем грунта (рис. 1), в котором существенную роль играют сезонные колебания температуры. В указанной полосе тепловые процессы слабо зависят от глубины, что дает возможность заменить трехмерную задачу рядом двумерных задач в горизонтальных сечениях (рис. 2).

Ниже уровня дна цилиндрической емкости трудно пренебречь зависимостью от той или иной координаты. Для полного исследования процесса в этой зоне необходимо решение трехмерной задачи. Однако для получения качественной картины, не претендующей на существенную точность, можно воспользоваться плоской постановкой задачи в плоскости фильтрационного потока, проходящей через ось резервуара.

Предполагается, что скорость промерзания грунта меньше скорости фильтрации. Это естественное предположение позволяет считать поле скоростей фильтрации квазистационарным, что дает возможность сегментировать задачу на две более простые, решаемые попеременно: задачу Стефана с учетом конвективных процессов и задачу определения стационарного в данный отрезок времени поля скоростей. Решение пер-

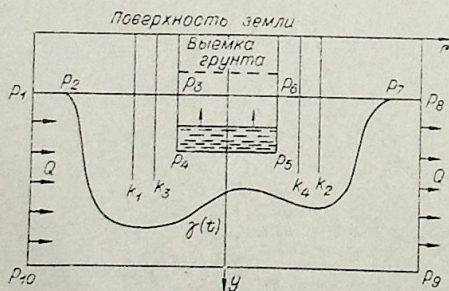


Рис. 1.

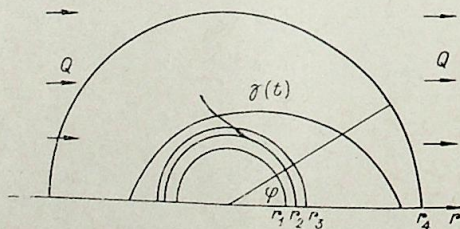


Рис. 2.

вой задачи в принципе базируется на подходе, разработанном в работах [1—4], для решения второй задачи использован метод фиктивных областей [5].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СТЕФАНА  
В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Рассмотрим плоскую задачу в области  $G(t)$ , зависящей от времени (см. рис. 1). Требуется определить поле температур  $T$ , удовлетворяющее определенным начальным данным и внешним граничным условиям, и найти фазовый фронт  $\gamma(t)$  из следующих уравнений:

$$c \left( \frac{\partial T}{\partial t} + au \frac{\partial T}{\partial x} + av \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \lambda \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (1)$$

$$T = T^*, \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right)_+ - \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right)_- = \frac{\sigma}{|\text{grad } \Phi|} \frac{d\Phi}{dt} \text{ на } \gamma(t), \quad (2)$$

где  $u, v$  — компоненты скорости фильтрационного потока;  $a$  — массовая концентрация грунтовых вод в среде;  $c, \lambda$  — разрывные теплофизические характеристики грунта, зависящие от фазы;  $\sigma$  — удельная теплота фазового перехода;  $\Phi(x, y, t) = 0$  — уравнение фазового фронта  $\gamma(t)$ ;  $n$  — нормаль к нему. Область  $G(t)$  и граничные условия зависят от этапа в строительстве и эксплуатации емкости.

В период активного замораживания резервуар отсутствует и область  $G(t)$  представляет собой прямоугольник  $P_1P_8P_9P_{10}P_1$  с разрезами  $K_i$  ( $i=1, 4$ ), соответствующими замораживающим колонкам. Граничные условия в этом случае имеют вид

$$T = T(y) \text{ на } P_8P_9, P_1P_{10}, \quad (3)$$

$$T = T_2 = \text{const} \text{ на } P_9P_{10}, \quad (4)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_1 (T - T_1) \text{ на } P_1P_8, \quad (5)$$

$$T = T_g = \text{const} \text{ на } K_i (i=1, 4). \quad (6)$$

Начальные данные в области  $G(t)$  задаются в соответствии с распределением по глубине (3).

Затем начинается процесс выемки грунта и пассивного замораживания. Пока уровень выемки не достиг сечения  $P_3P_6$  и колонки продолжают функционировать, область  $G(t)$  и граничные условия остаются прежними. Если же колонки отключаются, то разрезы  $K_i$  ( $i=1, 4$ ) игнорируются и граничные условия (6) снимаются. Когда уровень выемки достигает границы исследуемой области ( $P_3P_6$ ),  $G(t)$  превращается в область  $P_1P_3P_4P_5P_6P_8P_9P_{10}P_1$ ; положение точек  $P_4, P_5$  линейно зависит от времени, достигая в некоторый момент уровня дна проектируемого резервуара. При выемке грунта и пассивном замораживании на границе обнажения ставится условие теплообмена с внешней средой

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha_B (T_B - T) \text{ на } P_3P_4P_5P_6. \quad (7)$$

По окончании пассивного замораживания происходит залив сжиженного газа с постоянной скоростью. На смоченной поверхности ставится условие термостата

$$T = T_{ж}, \quad (8)$$

на несмоченной поверхности — линейное распределение, меняющееся от  $T_{ж}$  до температуры  $T_R(t)$  в контрольной точке.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Для решения задачи в горизонтальных сечениях осесимметричных емкостей удобно воспользоваться полярными координатами  $(r, \varphi)$ . Уравнение теплопроводности после приведения к форме (9) в переменных  $(r, \varphi)$  принимает вид

$$\tilde{c} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + a p_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{a p_\varphi}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \lambda \frac{\partial T}{\partial \varphi}, \quad (17)$$

где  $P_r, P_\varphi$  — компоненты скорости, связанные с  $u, v$ , и потенциалом  $P$  соотношениями

$$\begin{aligned} P_r &= \frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial r} = u \cos \varphi + v \sin \varphi, \\ P_\varphi &= \frac{1}{rk} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = v \cos \varphi - u \sin \varphi. \end{aligned} \quad (18)$$

Уравнение для потенциала в полной области, аналогичное уравнению (14), примет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \vartheta \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vartheta \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0. \quad (19)$$

Граничные условия для уравнения (17) задаются в соответствии с этапом в строительстве и эксплуатации резервуара и в зависимости от глубины выбранного сечения: на бесконечности ( $r=r_4$ ) — условие типа (3); на колонках, если они функционируют, ( $r=r_2, r=r_3$ ) — условие (6); на стенке резервуара ( $r=r_1$ ) — условие (7) при пассивном замораживании и условие Дирихле при заливе и хранении; на плоскости симметрии ( $\varphi=0, \varphi=\pi$ )  $\partial T / \partial \varphi = 0$ .

Уравнение (19) замыкается граничными условиями непротекания на плоскости симметрии  $\partial p / \partial \varphi = 0$  и невозмущенного потока на бесконечности  $\frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial r} = Q \cos \varphi$ .

Последовательность расчета такова: из уравнения (19) находится потенциал, затем из закона Дарси (18) вычисляются компоненты скорости и, наконец, решается приведенная задача Стефана (17).

## МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

В области, содержащей исследуемый объект, вводится неравномерная сетка, согласованная с особенностями его геометрии. При решении задачи в полярных координатах для лучшей аппроксимации граничных условий в центре симметрии используется смещенная на полшага сетка.

Значение сеточной функции  $W$  в узле  $(i, j)$  обозначим  $W_{ij}$ , шаги сетки —  $H^1_{i+\frac{1}{2}}, H^2_{j+\frac{1}{2}}$ , временной шаг —  $\tau$ .

Определим разностные операторы, аппроксимирующие

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \lambda \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \lambda \frac{\partial}{\partial y}:$$

$$(\Delta_x W)_{ij} = \frac{H^1_{i-\frac{1}{2}}}{H^1_{i+\frac{1}{2}} + H^1_{i-\frac{1}{2}}} \frac{W_{i+1j} - W_{ij}}{H^1_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{H^1_{i+\frac{1}{2}}}{H^1_{i+\frac{1}{2}} + H^1_{i-\frac{1}{2}}} \frac{W_{ij} - W_{i-1j}}{H^1_{i-\frac{1}{2}}} \approx \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)_{ij}, \quad (20)$$

В процессе хранения газа граничные условия остаются стационарными. С помощью известного подхода [1—3] задача Стефана (1)—(8) с внутренним граничным условием (2) сводится к краевой задаче (3)—(9) для уравнения

$$\tilde{c} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + au \frac{\partial T}{\partial x} + av \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \lambda \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (9)$$

где  $\tilde{c} = c + \delta(T - T^*)\sigma$ ;  $\delta(T - T^*)$  — дельта-функция Дирака. Таким образом, если предположить, что поле скоростей  $u, v$  известно, то определение температурного поля  $T$  и фазового фронта  $\gamma(t)$  сведено к решению краевой задачи (3)—(8) для уравнения (9).

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Если предположить, что зона мерзлого грунта нарастает настолько медленно, что это не вносит быстрых возмущений в фильтрационный поток, то поле скоростей можно считать стационарным и определять из закона Дарси

$$u = \frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial x}, v = \frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial y} \text{ в } \bar{G}(t), \quad (10)$$

где  $P$  — потенциал;  $k$  — фазовая проницаемость; область  $\bar{G}(t) = P_1 P_2 \gamma P_7 P_8 P_9 P_{10} P_{11}$  — талая зона.

Потенциал  $P$  находится из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \text{ в } G(t). \quad (11)$$

Уравнение (11) замыкается условиями заданного потока

$$\frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial x} = Q \text{ на } P_1 P_{10} \text{ и } P_8 P_9 \quad (12)$$

и непротекания

$$\frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \text{ на } P_9 P_{10}, P_1 P_2 \gamma P_7 P_8. \quad (13)$$

Для решения задачи (11)—(13) удобен метод фиктивных областей [5], который в данном случае состоит в следующем: криволинейная область  $\bar{G}(t)$  дополняется до прямоугольника  $\tilde{G} = P_1 P_8 P_9 P_{10} P_{11}$ , граничное условие с  $\gamma(t)$  выносится на фиктивную границу  $P_2 P_7$ , а коэффициент  $1/k$  в фиктивной области  $P_2 P_7 \gamma$  дополняется нулем. В результате получается краевая задача в прямоугольнике  $\tilde{G}$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \vartheta \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \vartheta \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \text{ в } \tilde{G}, \quad (14)$$

$$\frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial x} = Q \text{ на } P_1 P_{10}, P_8 P_9, \quad (15)$$

$$\frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \text{ на } P_1 P_8, P_9 P_{10}. \quad (16)$$

Таким образом, задача распадается на 3 взаимосвязанные части:

1. Определение методом фиктивных областей поля потенциала  $P$  из краевой задачи (14)—(16).
2. Вычисление скорости фильтрации из закона Дарси (10).
3. Решение задачи Стефана (9), (3)—(8).

$$(\Delta_y W)_{ij} = \frac{H^2_{j-\frac{1}{2}}}{H^2_{j+\frac{1}{2}} + H^2_{j-\frac{1}{2}}} \frac{W_{ij+1} - W_{ij}}{H^2_{j+\frac{1}{2}}} + \frac{H^2_{j+\frac{1}{2}}}{H^2_{j+\frac{1}{2}} + H^2_{j-\frac{1}{2}}} \frac{W_{ij} - W_{ij-1}}{H^2_{j-\frac{1}{2}}} \approx \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)_{ij},$$

$$(\Delta_x W)_{ij} = \left( \lambda_{i+\frac{1}{2},j} \frac{W_{i+1,j} - W_{ij}}{H^2_{i+\frac{1}{2}}} - \lambda_{i-\frac{1}{2},j} \frac{W_{ij} - W_{i-1,j}}{H^2_{i-\frac{1}{2}}} \right) \left| \frac{H^2_{i+\frac{1}{2}} + H^2_{i-\frac{1}{2}}}{2} \right. \approx$$

$$\approx \left( \frac{\partial}{\partial x} \lambda \frac{\partial W}{\partial x} \right)_{ij}. \quad (21)$$

$$(\Delta_y W)_{ij} = \left( \lambda_{ij+\frac{1}{2}} \frac{W_{ij+1} - W_{ij}}{H^2_{j+\frac{1}{2}}} - \lambda_{ij-\frac{1}{2}} \frac{W_{ij} - W_{ij-1}}{H^2_{j-\frac{1}{2}}} \right) \left| \frac{H^2_{j+\frac{1}{2}} + H^2_{j-\frac{1}{2}}}{2} \right. \approx$$

$$\approx \left( \frac{\partial}{\partial y} \lambda \frac{\partial W}{\partial y} \right)_{ij};$$

Схема в дробных шагах строится в форме метода переменных направлений (см., например, [6]):

$$\tilde{c}^n \left[ \frac{T^{n+\frac{1}{2}} - T^n}{\tau/2} + u \Delta_x T^{n+\frac{1}{2}} + v \Delta_y T^n \right] = \Lambda_x T^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_y T^n, \quad (22)$$

$$\tilde{c}^{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{T^{n+1} - T^{n+\frac{1}{2}}}{\tau/2} + u \Delta_x T^{n+\frac{1}{2}} + v \Delta_y T^{n+1} \right] = \Lambda_x T^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_y T^{n+1}.$$

Система (22) решается одномерными прогонами при простейшей аппроксимации граничных условий. Коэффициенты  $c$  и  $\lambda$  на интервале  $-\Delta < T - T^* < \Delta$  сглаживаются, эффективная теплоемкость  $\tilde{c}$ , учитывающая фазовый переход при  $T = T^*$ , определяется через дельтообразную функцию [2—4]:

$$\tilde{c} = c + \sigma \cdot \delta(T - T^*, \Delta),$$

где  $\delta(T, \Delta) = 0$  вне интервала  $|T - T^*| < \Delta$  и  $\delta(T, \Delta) = 1/2\Delta$  внутри него.

Для решения уравнения (14) используется метод переменных направлений как метод стационаривания

$$\frac{p^{k+\frac{1}{2}} - p^k}{\alpha/2} = \bar{\Lambda}_x p^{k+\frac{1}{2}} + \bar{\Lambda}_y p^k, \quad (23)$$

$$\frac{p^{k+1} - p^{k+\frac{1}{2}}}{\alpha/2} = \bar{\Lambda}_x p^{k+\frac{1}{2}} + \bar{\Lambda}_y p^{k+1}.$$

В схеме (23)  $\alpha$  — итерационный параметр;  $\bar{\Lambda}_x, \bar{\Lambda}_y$  — аналоги производных  $\frac{\partial}{\partial x}$  в  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$  в  $\frac{\partial}{\partial y}$  типа (21).

Метод фиктивных областей реализуется с помощью точной интегральной аппроксимации фазового фронта. Это достигается специальной аппроксимацией коэффициента  $b$ : на линиях сетки в полуцелых узлах  $b$  определяется как  $b = \frac{1}{k} s$ , где  $s$  — доля площади пары смежных ячеек сетки, занятая талой зоной.

Запись разностных схем типа (22), (23) применительно к уравнениям в полярных координатах (17), (19) не представляет особой сложности и ввиду громоздкости опускается.

## РЕЗУЛЬТАТЫ НЕКОТОРЫХ РАСЧЕТОВ

По предложенной методике были рассчитаны тепловые режимы ряда резервуаров. Здесь приведены результаты расчета для цилиндрической емкости 2 тыс. м<sup>3</sup>. Геометрические размеры объекта следующие:  $r_1 = 6$  м;  $r_2 = 7,5$  м;  $r_3 = 9$  м. Необходимая толщина ледопородной оболочки 6 м. Температура кипения сжиженного газа  $-40^\circ\text{C}$ , температура замораживающих колонок  $-18^\circ\text{C}$ . Скорость фильтрации 0,2 м/сут.

На рис. 3 приведено поле температур и в талой зоне — поле потенциалов в период активного замораживания (время — 3600 ч) в вертикальном сечении.

На рис. 4 изображены указанные поля, рассчитанные в период заполнения (время — 9000 ч).

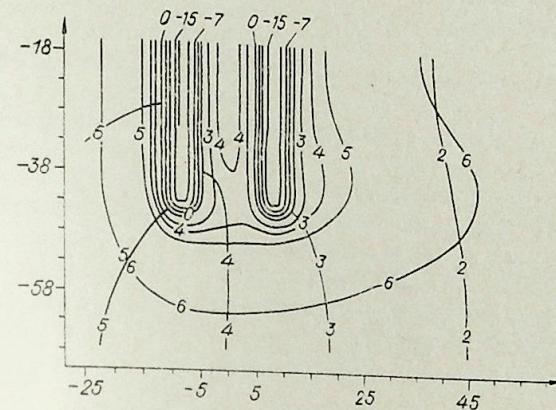


Рис. 3.

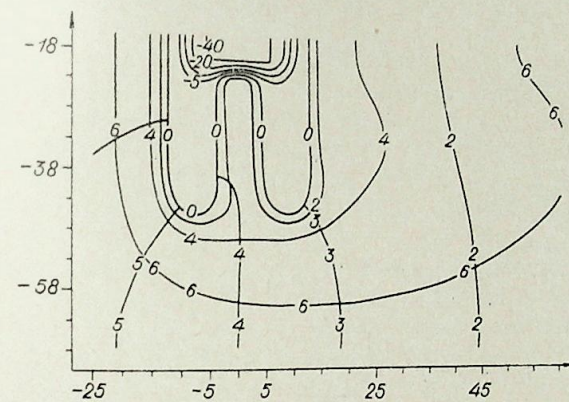


Рис. 4.

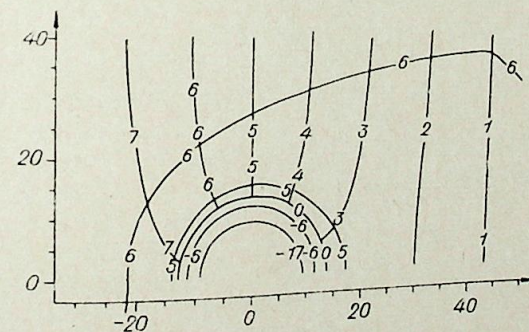


Рис. 5.

На рис. 5 показана температурная картина в период эксплуатации емкости (время — 14 500 ч) в горизонтальном сечении.

Как показали расчеты, температурные поля, полученные в декартовой системе координат и в ряде горизонтальных сечений в полярной системе координат, хорошо согласуются между собой.

Новосибирский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
16/IX 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Олейник О. А. Об одном методе решения общей задачи Стефана.— Докл. АН СССР, 1960, 135, № 5.
2. Самарский А. А., Монсеенко Б. Д. Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана.— ЖВМ и МФ, 1965, 5, № 5.
3. Будаков Б. М., Соловьева Е. Н., Успенский Л. Б. Разностный метод со сглаживанием коэффициентов для решения задач Стефана.— ЖВМ и МФ, 1965, 5, № 5.
4. Валиуллин А. Н., Воронко В. П., Сафин Р. И. Экономичная разностная схема сквозного счета для решения осесимметричной задачи Стефана.— В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Сб. статей. Т. 4, № 3. Новосибирск, 1973.
5. Коновалов А. Н. Метод фиктивных областей в задачах фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости с учетом капиллярных сил.— В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Т. 5, № 5. Новосибирск, 1972.
6. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической функции. Новосибирск, «Наука», 1967.

А. А. КИРИЯНЕНКО

### ИССЛЕДОВАНИЕ ВЯЗКОСТИ РАЗБАВЛЕННЫХ РАСТВОРОВ ПОЛИЭТИЛЕНОКСИДА

Изучение концентрационной зависимости вязкости растворов высокомолекулярных соединений представляет практический и теоретический интерес.

Исследуя зависимость вязкости раствора от концентрации, с помощью количественного геометрического анализа можно обнаружить в системе качественные изменения, определить константы, характеризующие структуру макромолекул и их поведение в растворе. Особенно перспективными являются исследования разбавленных растворов, в которых ослаблены межмолекулярные взаимодействия. Это приводит к упрощению закономерностей, которым подчиняются свойства таких растворов.

В настоящей работе представлены результаты исследования концентрационной зависимости вязкости разбавленных водных растворов американского полиэтиленоксида (ПЭО) марки WSR-301 с молекулярным весом  $3,8 \cdot 10^6$ .

Вязкость растворов полимера измеряли ротационным вискозиметром из нержавеющей стали, описанным в работе [1]. В его конструкцию внесли некоторые изменения: повысили точность измерения угла поворота внутреннего цилиндра, применив выносную шкалу значительно большего радиуса, скорость вращения цилиндра с исследуемым раствором определяли по измерениям периода вращения частотомером ЧЗ-33.

Внесенные изменения снизили среднеквадратичную ошибку измерения вязкости растворов до 1% и повысили воспроизводимость результатов измерения. Ввиду того, что в данной работе интерес представляли качественные изменения вязкости растворов, использовали относительный вариант метода. В качестве эталонных жидкостей применяли бидистиллированную воду, на которой готовили растворы, и ацетон марки ЧДА. Термостатировали с помощью ультратермостата УТ-15. В опытах разброс экспериментальных точек не превышал 0,5%.

Исследования проводили в области концентраций ( $10^{-6}$ — $10^{-4}$ ) г/см<sup>3</sup> в температурном интервале (20—50°)С.

Как показал анализ экспериментальных данных, аномалии на концентрационной зависимости вязкости исследованных растворов наблюдаются в узкой области концентраций ( $10^{-6}$ — $10^{-5}$ ) г/см<sup>3</sup>.

На рис. 1 показана концентрационная зависимость приведенной вязкости растворов ПЭО при температуре 30°С.

Вязкость определяли при постоянном градиенте скорости  $g = 0,6 \text{ с}^{-1}$ , когда течение растворов имело ньютоновский характер. На рис. 1 видно, что в растворах ПЭО при концентрации  $10^{-5}$  г/см<sup>3</sup> наблюдается резкий скачок значения удельной вязкости растворов.

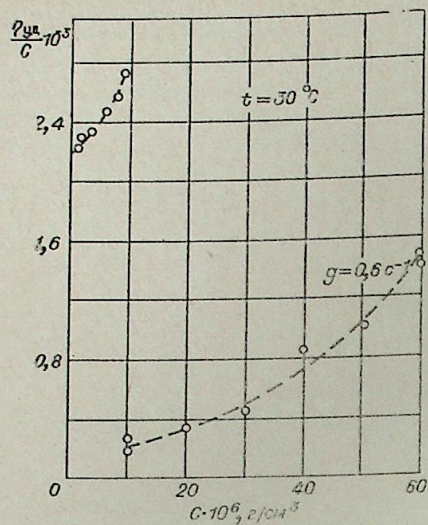


Рис. 1.

$a$  — величина, характеризующая конформацию молекул в растворе. При достаточно большом числе сегментов в макромолекуле для гауссовых клубков можно пользоваться формулой (2). Если известны  $K_0$  и  $M$ , то по определяемой из эксперимента характеристической вязкости  $[\eta]$  можно вычислить  $a$  и по его изменениям макромолекул в растворе.

Используя полученное в наших опытах значение  $[\eta]$  и  $K_0$  для водных растворов ПЭО из [4], определили величину коэффициента  $a$  до излома на кривой (рис. 1). Она оказалась равной 0,81, что соответствует клубкообразной конформации молекул ПЭО [3]. Скачок на графике и изменение закона вязкости после излома можно объяснить изменением конформации макромолекул ПЭО в растворе.

Так как вода является хорошим растворителем для ПЭО, в разбавленных растворах из-за отсутствия сил взаимодействия между макромолекулами полимера, взаимодействия дальнего порядка в макромолекулах приводят к образованию статистических молекулярных клубков [3]. Это подтверждает полученное из опытов значение коэффициента  $a$  в уравнении (2). С увеличением концентрации раствора появляются силы взаимодействия между молекулами ПЭО, которые вызывают концентрационный переход типа «клубок — спираль».

Подобные структурные переходы, вызванные влиянием температуры, или заменой растворителя, описаны в работах [2, 3, 5]. Экспериментально также установлено, что в концентрированных растворах макромолекулы ПЭО имеют форму спирали [6] с периодом идентичности  $19,25 \text{ \AA}$  (тип спирали  $F_2$ ).

После излома (см. рис. 1) при концентрации  $c_{кр} = 10^{-5} \text{ г/см}^3$  вязкость раствора резко падает. Можно ввести понятие «условной характеристической вязкости», считая  $[\eta]' = [\eta]_{кр}$ . Тогда в уравнении (2) коэффициент  $a = 0,67$ , что на первый взгляд кажется странным, так как при  $c > c_{кр}$  асимметрия макромолекул ПЭО возрастает и коэффициент  $a$  должен возрастать.

Однако имеются экспериментальные данные и с понижением вязкости при переходах «клубок — спираль» [3; 5]. Авторы объясняют это явление деформацией и ориентацией гибких цепных молекул в ламинарном потоке. Для подтверждения последнего предположения на рис. 2 показана концентрационная зависимость приведенной вязкости

Характеристическая вязкость, определяемая из выражения

$$[\eta] = \lim_{c \rightarrow 0} (\eta_{уд}/c), \quad (1)$$

равна  $2,18 \cdot 10^3 \text{ см}^3/\text{г}$ , что хорошо согласуется с данными для ПЭО в  $\theta$ -растворителе [2], т. е. при  $30^\circ\text{C}$  вода является для ПЭО хорошим растворителем (близким к  $\theta$ -растворителю). Для гибких полимеров в  $\theta$ -растворителе выполняются равенства [3]:

$$[\eta] = K_0 M^a, \quad (2)$$

$$[\eta] = \Phi_0 \frac{(\bar{h}^2)^{3/2}}{M}, \quad (3)$$

где  $K_0$  — постоянный коэффициент для данной системы полимер — растворитель (при данной температуре);  $\Phi_0$  — коэффициент Флори;

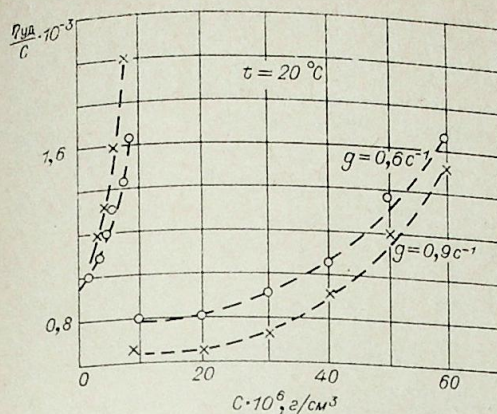


Рис. 2.

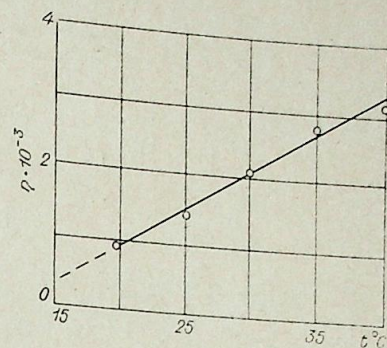


Рис. 3.

растворов ПЭО при  $20^\circ\text{C}$  для двух сдвигов. Из графика видно, что с увеличением сдвига вязкость до излома на кривой возрастает, а после излома заметно не изменяется. Сравнивая рис. 1 и 2, видим, что  $[\eta]$  повышается с ростом температуры.

На рис. 3 приведена зависимость  $[\eta]$  от температуры. Из графика видно, что  $[\eta]$  с повышением температуры изменяется по линейному закону. Характеристическая вязкость раствора является мерой потерь энергии, вызванных вращением макромолекул в среде растворителя, поэтому ее изменение связано с вращательной подвижностью молекул ПЭО. Экстраполируя температурную зависимость  $[\eta]$  до пересечения с температурной осью, можно сделать вывод, что при температуре  $12^\circ\text{C}$  характеристическая вязкость равна нулю. Так как на графике  $[\eta]$  зависит от температуры по линейному закону, можно записать:

$$K_0 M^a = A(T - T_0),$$

где  $A$  — угловой коэффициент.

При  $T = T_0$   $K_0 M^a = 0$ , откуда  $K_0 = 0$ . Коэффициент  $K_0$  в уравнении (2) приобретает физический смысл: он характеризует гидродинамические потери, в частности вращательную подвижность молекул в потоке. Следовательно, при температуре  $12^\circ\text{C}$  в ламинарном потоке различные участки макромолекул ПЭО перемещаются с одинаковой скоростью и вращательное движение прекращается.

Таким образом, экспериментальные исследования вязкости разбавленных водных растворов ПЭО показали, что фазовые переходы типа «клубок — спираль» наблюдаются в растворах не только при температурных воздействиях, или замене растворителя, но также и при увеличении концентрации растворов.

Хабаровский государственный  
медицинский институт

Поступила в редакцию  
7/VII 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Генрих В. Н., Груздев В. А., Захаренко Д. Г. Исследование теплофизических свойств растворов и расплавов. Новосибирск, ИТФ СО АН СССР, 1974. 21 с.
2. Флори П. Статистическая механика цепных молекул. М., «Мир», 1971. 55 с.
3. Цветков В. Н., Эскин В. Е., Френкель С. Я. Структура макромолекул в растворах. М., «Наука», 1964. 125 с.
4. Mark I. E., Flory P. J. — J. Am. Chem. Soc., 1965, 87, 1415.
5. Бирштейн Т. М., Птицын О. Б. Конформация макромолекул. М., «Наука», 1964. 304 с.
6. Miyazawa T., Fukushima K., Idguchi J. — J. Polymer Sci., 1962, 62, 146.

И. М. ГРАЧ

МЕТОД РАСЧЕТА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА  
ВДОЛЬ ОСИ СИММЕТРИИ ПОЛЯ

В ряде электромагнитных устройств, таких как, например, электронные линзы, фокусирующие устройства и т. д., требуется знание распределения потенциала только вдоль оси симметрии поля. Поэтому большой интерес представляют методы, позволяющие по известным граничным условиям находить достаточно просто аналитическое выражение потенциала на оси симметрии, минуя расчет поля во всей области его существования. Кроме того, зная распределение потенциала вдоль оси симметрии, можно найти его значение в любой точке наблюдения [1].

Целью настоящей работы и является разработка метода, позволяющего находить аналитическое выражение потенциала на оси симметрии, минуя расчет поля во всей области его существования.

Уравнение Лапласа для плоскомеридианного поля в цилиндрических координатах  $r, z$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

умножим на  $rdr$  и проинтегрируем в пределах  $0 \leq r \leq P(z)$ , где функция  $P(z)$  определяет границу поля. Получим

$$\int_0^{P(z)} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) r dr - V(z) = -U[P(z), z] = -U_0(z), \quad (2)$$

где  $V(z) = U(0, z)$  — значение потенциала на оси симметрии поля;  $U_0(z)$  — известное значение потенциала на границе. С помощью интеграла Шернера [1]

$$U(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(z + jr \sin \alpha) d\alpha, \quad (3)$$

связывающего потенциал в любой точке наблюдения с потенциалом на оси симметрии, найдем выражение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial W^2} \cos^2 \alpha d\alpha, \quad W = z + jr \sin \alpha. \quad (4)$$

Подставим выражение (4) в уравнение (2)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{P(z)} r \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial W^2} \cos^2 \alpha d\alpha dr - V = -U_0. \quad (5)$$

Искомая функция потенциала на оси симметрии  $V(z)$  является решением интегродифференциального уравнения (5). Перепишем уравнение (5) в виде

$$-LV + V = U_0, \quad (6)$$

где

$$L = \frac{1}{2\pi} \int_0^{P(z)} r \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial W^2} \cos^2 \alpha d\alpha dr - \quad (7)$$

— интегродифференциальный оператор.

Общее решение неоднородного уравнения (6) можно представить как  $V = V_1 + V_0$ , где  $V_1$  — частное решение неоднородного уравнения (6);  $V_0$  — общее решение однородного уравнения (6). Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде ряда

$$V_1(z) = U_0 + LU_0 + L^2U_0 + \dots + L^nU_0 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} L^nU_0, \quad (8)$$

где  $L^0 = 1$  — тождественный оператор, не меняющий значение функции, т. е.  $L^0U_0 = U_0$ ;  $L^n$  — оператор  $L$  в  $n$ -й степени, равный  $L(L^{n-1})$ . Если ряд (8) сходящийся, то непосредственной подстановкой его в уравнение (6) убеждаемся в том, что он позволяет находить частное решение этого уравнения.

Для того чтобы решить, является ли ряд (8) сходящимся или расходящимся, можно применить следующие признаки сходимости рядов [2]:

необходимый признак сходимости ряда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L^nU_0 = 0 \quad \text{для } z \in \Omega, \quad (9)$$

где  $\Omega$  — область изменения переменной  $z$ ;

необходимый и достаточный признак сходимости ряда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{L^{n+1}U_0}{L^nU_0} \right| = q \quad \text{для } z \in \Omega. \quad (10)$$

Если  $q < 1$ , то ряд (8) сходится, а если  $q > 1$ , то этот ряд расходится. При  $q = 1$  признак не дает однозначного ответа.

Заметим, что расходимость ряда (8) в некоторой точке на оси симметрии (или на некотором отрезке) соответствует расположению в этой точке (или на отрезке) источника поля — заряда.

Если функция  $U_0$  представляет полином степени  $p$

$$U_0 = \sum_{k=0}^p A_k z^k, \quad (11)$$

то после воздействия на нее оператором  $L$  получим

$$LU_0 = \sum_{k=2}^p A_k k(k-1) \sum_{m=0,2,4}^{k-2} D_{k-2}^m \frac{p^{m+2}(z)}{m+2} z^{k-2-m}, \quad (12)$$

где

$$D_{k-2}^m = (j)^m C_{k-2}^m \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (m+2)};$$

$C_{k-2}^m$  — число сочетаний из  $k-2$  по  $m$ . Так, при  $p=6$  формула (12) дает

$$LU_0 = A_2 1/2 p^2 + A_3 3/2 p^2 z + 3A_4 (p^2 z^2 - 1/8 p^4) + 5A_5 (p^2 z^3 - 3/8 p^4 z) + 15A_6 (1/2 p^2 z^4 - 3/8 p^4 z^2 + 1/48 p^6). \quad (13)$$

Как видно из выражения (12), в случаях, когда потенциал на границе есть постоянная величина или линейная функция, выполняется условие  $LU_0=0$ . Когда функция  $P(z)$  или  $P^2(z)$  является полиномом, то и потенциал на оси симметрии также есть полином. Причем если функция  $P^2(z)$  есть квадратный полином, то полиномы потенциалов на оси симметрии и на границе имеют равные наибольшие показатели степеней. Общее решение однородного уравнения (6)

$$LV_0=V_0, L^2V_0=LV_0=V_0, \dots, L^nV_0=V_0 \quad (14)$$

представляет собственное решение этого уравнения и является одновременно решением интегрального уравнения первого рода

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_0 [z + jP(z) \sin \alpha] d\alpha = 0. \quad (15)$$

Применение альтернативы Фредгольма [3] и условия однозначного определения потенциала на оси симметрии, удовлетворяющего определенным граничным условиям, приводит к выводу о том, что общее решение  $V_0$  следует брать равным нулю. Поэтому

$$V=V_{\pi}. \quad (16)$$

Потенциал на оси (8) совместно с выражением (3) позволяет построить решение уравнения Лапласа для любой точки наблюдения

$$U(r, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} (L^n U_0)(z + jr \sin \alpha) d\alpha, \quad (17)$$

где скобки введены для того, чтобы подчеркнуть, что вначале на функцию  $U_0$  нужно воздействовать оператором  $L^n$ , а затем уже брать интеграл.

Решение задачи Дирихле в виде (17), позволяющем сразу находить потенциал в любой точке наблюдения по известному потенциалу на границе, как нам кажется, неизвестно в литературе и представляет большой практический и теоретический интерес, так как не требует дополнительного определения функции Грина.

Если на границе области задано условие Неймана, то, раскрывая в выражении (2) интеграл  $\int_0^{P(z)} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} r dr$ , находим

$$\int_0^{P(z)} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} r dr = -P(z) \frac{\partial U}{\partial r} [P(z), z]. \quad (18)$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 U}{\partial W^2} d\alpha; \quad \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial r} \sqrt{1 + [P'(z)]^2}, \quad (19)$$

получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{P(z)} r \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial W^2} d\alpha dr = \frac{-P(z)}{\sqrt{1 + [P'(z)]^2}} \cdot \frac{\partial U}{\partial n} [P(z), z], \quad (20)$$

где  $\frac{\partial U}{\partial n} [P(z), z]$  — известное значение производной от потенциала по нормали к границе области.

Если поверхность  $r=P(z)$  эквипотенциальная, то выполняется условие

$$\frac{\partial U}{\partial n} = -\sigma/\epsilon_a, \quad (21)$$

где  $\sigma$  — функция плотности распределения заряда;  $\epsilon_a$  — абсолютная диэлектрическая проницаемость. В этом случае уравнением (20) связывается значение потенциала на оси симметрии с функцией  $\sigma$ . Уравнение (20) можно еще представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{P(z)} r \int_0^{2\pi} \frac{\partial V}{\partial W} d\alpha dr \right) = -P(z) \left[ \frac{\partial U}{\partial r} - P'(z) \frac{\partial U}{\partial z} \right]_{r=P(z)} = -P(z) \sqrt{1 + [P'(z)]^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial n} [P(z), z]. \quad (22)$$

Уравнения (20, 22) представляют интегральные уравнения первого рода. Если правая часть в этих уравнениях имеет вид полинома, то и решение целесообразно отыскивать в виде полинома.

В общем случае решение можно находить методом последовательных приближений и вариационными методами [3].

Необходимо знать не только распределение потенциала, но и напряженности поля вдоль оси симметрии. С этой целью продифференцируем выражения (1), (3) по координате  $z$ . Получим

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = 0, \quad (23)$$

$$E_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega(z + jr \sin \alpha) d\alpha, \quad (24)$$

где  $\omega(z) = E_z(z, r=0)$  — значение напряженности поля на оси симметрии.

Сопоставляя формулы (1), (3) с формулами (23), (24), приходим к выводу, что все выражения, полученные ранее для потенциала на оси симметрии, будут справедливы и для напряженности поля на оси симметрии при формальной замене функции  $V$  на  $\omega$  и граничного условия  $U_0$  на  $\omega_0 = E_z[z, r=P(z)] = \frac{P'(z)}{\sqrt{1 + [P'(z)]^2}} E_n$ , где  $E_n$  — нормальная составляющая напряженности поля на границе области.

Таким образом, если на границе задано условие Неймана, то расчет напряженности поля на оси симметрии выполняется по тем же формулам, что и расчет потенциала на оси симметрии в случае условия Дирихле

$$E_z(z, r=0) = \omega_0 + L\omega_0 + L^2\omega_0 + \dots \quad (25)$$

Интересно отметить, что напряженность поля принимает экстремальные значения в тех точках на оси симметрии, в которых выполняется равенство

$$-\frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{P(z)} r \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \omega}{\partial W^2} \cos^2 \alpha d\alpha dr \right] = \frac{d\omega_0}{dz}, \quad (26)$$

которое непосредственно получается после дифференцирования уравнения  $-L\omega + \omega = \omega_0$  по координате  $z$  при  $d\omega/dz=0$ .

Условие (26) для цилиндра радиусом  $r_0$  имеет вид

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{r_0} r \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \omega}{\partial W^2} \cos^2 \alpha d\alpha dr = \frac{d\omega_0}{dz}. \quad (27)$$



где  $J_0(j\omega r_0) = I_0(\omega r_0)$  — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Признаки сходимости ряда (9, 10) выполняются при условии  $|1 - J_0(j\omega r_0)| < 1$ .

Сумма ряда равна

$$V_1(z) = \frac{U_m}{J_0(j\omega r_0)} \cos \omega z.$$

Вычисляя таким же образом составляющие, созданные третьей и пятой гармониками, получим

$$V(z) = U_n/2 + V_{m1} \cos \omega z - V_{m3} \cos 3\omega z + V_{m5} \cos 5\omega z - \dots, \quad (33)$$

где  $V_{m1} = \frac{U_m}{J_0(j\omega r_0)}, \quad V_{m3} = \frac{U_m}{3J_0(j3\omega r_0)},$

$$V_{m5} = \frac{U_m}{5J_0(j5\omega r_0)}.$$

При  $l \rightarrow \infty, \omega \rightarrow 0$  формула (33) дает  $V = U_n$ .

**Пример 4.** Требуется найти распределение потенциала вдоль оси симметрии двух расположенных друг против друга тонкостенных полых коаксиальных цилиндров одинакового радиуса  $r_0$ , находящихся под разными постоянными потенциалами  $U_1$  и  $U_2$ . Такие электроды встречаются в фокусирующих устройствах почти всех электронных и ионных ускорителей [6].

Потенциал на поверхности такого цилиндра можно записать с помощью интеграла Фурье в виде

$$U_0(z, r_0) = \frac{U_1 + U_2}{2} + \frac{U_2 - U_1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin xz}{x} dx. \quad (34)$$

Для решения задачи воспользуемся формулой (8). Имеем

$$\begin{aligned} LU_0 &= \frac{U_2 - U_1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin xz}{x} [1 - J_0(jr_0x)] dx, \\ L^2U_0 &= \frac{U_2 - U_1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin xz}{x} [1 - J_0(jr_0x)]^2 dx, \\ &\dots \\ L^nU_0 &= \frac{U_2 - U_1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin xz}{x} [1 - J_0(jr_0x)]^n dx. \end{aligned} \quad (35)$$

Суммируя члены ряда (8), получим

$$\begin{aligned} V &= \frac{U_1 + U_2}{2} + \frac{U_2 - U_1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin xz}{x} \{1 + [1 - J_0(jr_0x)] + \\ &+ [1 - J_0(jr_0x)]^2 + \dots\} dx = \frac{U_1 + U_2}{2} + \frac{U_2 - U_1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin xz}{x J_0(jr_0x)} dx. \end{aligned}$$

Полученный результат точно совпадает с решением этой задачи, приведенным в литературе [6].

Заметим, что предложенный метод особенно упрощает расчет потенциалов в случае цилиндрических электродов.

При цилиндрической форме границы уравнение (5) позволяет сравнительно просто найти условие для определения координаты  $z$ , при которой разность потенциалов на оси симметрии и на границе становится максимальной (или минимальной):

$$\frac{\partial^3}{\partial z^3} \int_0^{r_0} r \int_0^{2\pi} V(W) \cos^2 \alpha d\alpha dr = 0. \quad (36)$$

В приведенных примерах в отличие от известных в литературе методов предложенный метод позволил сравнительно просто найти распределение потенциала на оси симметрии, не рассчитывая потенциал во всей области существования поля.

Фрунзенский политехнический институт

Поступила в редакцию 20/V 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Брюхе Е., Шерцер О. Электронная оптика. Гостехиздат, 1943.
2. Воробьев Н. Н. Теория рядов. М., «Наука», 1973.
3. Цлаф Л. Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. М., «Наука», 1970.
4. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. Физматгиз, 1963.
5. Грач И. М. Применение интегральных решений для расчета потенциальных полей. — Электромеханика, 1975, № 10.
6. Шимиони К. Теоретическая электротехника. «Мир», 1964.

УДК 621.311.016; 621.86.062

А. Х. КАЛЮЖНЫЙ, Ю. В. СОКОЛОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТАНОВИВШИХСЯ  
И КВАЗИУСТАНОВИВШИХСЯ ПОСЛЕАВАРИЙНЫХ РЕЖИМОВ  
С УЧЕТОМ ДИНАМИКИ ЧАСТОТЫ

При возникновении в энергосистемах различных аварийных возмущений во многих случаях удается сохранить динамическую устойчивость. Тогда электромеханические качания роторов и колебания перетоков мощности по линиям электропередач быстро затухают. Если возмущения связаны с появлением небалансов мощности, в энергосистеме наблюдается изменение частоты. При этом электрический режим меняется сравнительно медленно, в течение секунд и даже минут. Такой режим обычно называют квазиустановившимся послеаварийным режимом [1]. Изменение частоты приводит к изменению загрузки генераторов, величин нагрузок и к действию противоаварийной автоматики. Перераспределение потоков мощности может привести к нарушению статической устойчивости квазиустановившихся режимов, делению энергосистемы на части и к усугублению аварии. Поэтому прогнозирование квазиустановившихся и установившихся послеаварийных режимов с учетом динамики частоты позволит более обоснованно сформулировать требования к противоаварийной автоматике и разработать мероприятия, обеспечивающие сохранение устойчивости.

Удовлетворительные программы расчета квазиустановившихся режимов фактически отсутствуют. Программа, разработанная в АрмНИИЭ [2], учитывающая динамику частоты, основана на грубом допущении постоянства мощности турбин. Программа РАПУС-4 (или РАПУС-ОМЕГА) позволяет рассчитать установившиеся послеаварийные режимы при произвольной частоте и проверить их устойчивость. Эта программа учитывает действие регуляторов скорости турбин, ограничения по активности и реактивной мощности генераторов, статические характеристики нагрузок и действия противоаварийной автоматики. Однако она не позволяет учесть динамику частоты, т. е. зависимость изменения частоты от времени.

В настоящей работе излагается алгоритм, предусматривающий определение зависимости частоты от времени, расчет квазиустановившихся режимов в заданные моменты времени и проверку статической устойчивости этих режимов. Рассмотрена возможность применения программы, реализующей описанный алгоритм, для управления послеаварийными режимами.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

В качестве основы использована математическая модель для расчета установившихся послеаварийных режимов при произвольной частоте [3]. Эта модель дополнена учетом динамики частоты. Соответственно моделируется зависимость мощностей турбин не только от ско-

рости, но и от времени. Учитывается вторичное регулирование частоты и перетоков мощности.

Основным упрощающим допущением является пренебрежение электромеханическими колебаниями взаимных углов между роторами генераторов. Оно основано на предположении о сохранении динамической устойчивости и быстром затухании качаний о сохранении динамической частоты и установлением послеаварийного по сравнению с изменением основного допущением предполагается, что мгновенное значение частоты в каждой точке схемы равно среднему значению  $\omega$ , а ускорения роторов всех генераторов системы одинаковы. Тогда движение всей энергосистемы может быть описано одним дифференциальным уравнением

$$T_{j\Sigma} P_{\Sigma} \omega \dot{\omega} + \sum_i P_{Gi} = \sum_i P_{Ti}, \quad (1)$$

где  $\omega$  — частота в системе или скорость вращения генераторов в относительных единицах;  $T_{j\Sigma}$ ,  $P_{\Sigma}$  — инерционная постоянная вращающихся масс и номинальная мощность всех станций;  $\sum_i P_{Gi}$  — электромагнитные

мощности всех генераторов;  $\sum_i P_{Ti}$  — мощности всех турбин. Мощности генераторов  $P_{Gi}$  характеризуют установившийся или квазиустановившийся режим системы. Мощности турбин зависят от скорости их вращения и момента времени. Величины  $P_{Ti}$  определяются действием регуляторов скорости турбин, частоты, мощности котлов.

При расчете квазиустановившихся режимов с учетом динамики частоты моделируются основные постоянные времени элементов энергосистемы, составляющие более секунды. Меньшие постоянные времени не учитываются, так как моделируется сравнительно медленное изменение среднего значения частоты, а не колебания углов.

Тепловая турбина с автоматическим регулятором скорости АРС приближенно моделируется звеном первого порядка:

$$p\mu = \frac{1}{T_s} \left[ \frac{1}{s} (1 - \omega) + \mu_0 - \mu \right], \quad (2)$$

где  $\mu_0$ ,  $\mu$  — открытие регулирующих клапанов в исходном и квазиустановившихся режимах;  $s$  — статизм АРС;  $T_s$  — эквивалентная постоянная времени.

Изменение генерации пара в котле  $D$  и давления пара на входе в турбину  $\pi$  приближенно описывается двумя уравнениями

$$pD = \frac{1}{T_D} \left[ \frac{1}{s} (1 - \omega) - \frac{1}{\sigma_{\pi}} (\pi - 1) - (D - \mu_0) \right], \quad (3)$$

$$p\pi = \frac{1}{T_{\pi}} \frac{D - \mu\pi}{1 + 2\mu^2\pi k_{\pi}},$$

где  $T_D$ ,  $T_{\pi}$  — постоянные времени котла;  $\sigma_{\pi}$  — статизм регулирования котла по отклонению давления пара;  $k_{\pi}$  — коэффициент, характеризующий аэродинамические свойства котла.

Поскольку величины  $\mu$ ,  $\pi$ ,  $D$  рассматриваются в относительных единицах, мощность турбины может быть вычислена через ее номинальную величину  $P_{Tn}$  по следующему выражению:  $P_T = P_{Tn} \pi D$ .

Большую роль в регулировании частоты, как известно, играют гидростанции. Гидравлическая турбина моделируется с учетом сервомотора системы регулирования, гибкой и жесткой обратных связей

$$pP_T = \frac{1}{T_c} \left[ P_{Tn} \mu_0 + P_{Tn} \frac{1}{s} (1 - \omega) - \varepsilon P_T - Y_{\text{гос}} \right], \quad (4)$$

$$pY_{\text{гос}} = \frac{\eta}{T_c} \left[ P_{Tn} \mu_0 + P_{Tn} \frac{1}{s} (1 - \omega) - \varepsilon P_T \right] - \left( \frac{\eta}{T_c} + \frac{1}{T_i} \right) Y_{\text{гос}},$$

где  $T_c, T_i$  — постоянные времени сервомотора и изодрома;  $\epsilon, \eta$  — коэффициенты жесткой и гибкой обратных связей;  $Y_{гос}$  — сигнал гибкой обратной связи.

Поскольку постоянные времени  $T_c$  и  $T_i$  выбираются таким образом, чтобы исключить явление гидравлического удара, последний в расчетах не учитывается.

Вторичное регулирование частоты и управление перетоками мощности по межсистемным связям моделируются следующим образом:

$$\begin{aligned} p\Delta P_T &= \frac{1}{T_{мисв}} [P_{пз} + P_{п} - k''_{чк}(1 - \omega) + P_{тз} - P_T + k'_{чк}(1 - \omega)], \\ pP_{тз} &= \frac{1}{T_{цр}} [P_{пз} - P_{п} + k''_{чк}(1 - \omega)], \end{aligned} \quad (5)$$

где  $T_{мисв}, T_{цр}$  — постоянные времени механизма изменения скорости вращения и центрального регулятора;  $P_{тз}, P_{пз}$  — заданные мощности станции перетока по электропередаче;  $P_{тз}, P_{п}$  — текущие значения мощностей станции и по передаче;  $k'_{чк}, k''_{чк}$  — коэффициенты частотной коррекции.

Квазиустановившийся режим описывается, как и установившийся, системой уравнений в форме баланса мощностей в узлах:

$$P_{гi}(\omega) + P_i(\omega, U_i) + \sum P_{ik}(U_i, U_k, \delta_i, \delta_k, \omega) = 0, \quad (6)$$

$$Q_{гi}(\omega, U_i) + Q_i(\omega, U_i) + \sum Q_{ik}(U_i, U_k, \delta_i, \delta_k, \omega) = 0,$$

где мощности нагрузок  $P_i(\omega, U_i), Q_i(\omega, U_i)$  задаются статическими характеристиками аналогично [3], реактивные мощности генераторов находятся из условия постоянства напряжения с учетом ограничения по току возбуждения [5], а активные мощности генераторов  $P_{гi}$  определяются с учетом ускорения системы. Согласно (1), для каждого генератора или станции

$$P_{гi} = P_{Ti} - T_{ji}\omega\theta, \quad (7)$$

где  $\theta = p\omega$ , а мощности турбин определяются в результате интегрирования уравнений (2) — (5).

Проверка устойчивости квазиустановившегося режима производится по знаку свободного члена характеристического уравнения  $a_n$ , как, например, в [3]. Поскольку доаварийный режим заведомо устойчив, смена знака  $a_n$  квазиустановившегося режима свидетельствует о нарушении статической устойчивости этого режима. Вместо  $a_n$  вычисляется определитель матрицы линеаризованных уравнений установившегося режима с учетом вариации частоты. В этом случае для схемы из  $n$  узлов нагрузки составляется специальная матрица  $2n$ -го порядка.

### АЛГОРИТМ РАСЧЕТА

Предварительно рассчитывается доаварийный установившийся режим при номинальной или близкой к ней частоте  $\omega_0$ , составляется специальная матрица системы и вычисляется ее определитель  $A_0$ . Затем моделируется аварийное возмущение: отключаются генераторы мощности или нагрузки. Сразу после ввода возмущения рассчитывается послеаварийный квазиустановившийся режим при  $t = t_0$ . Предполагается, что электромагнитные и электромеханические колебания затухают мгновенно, небаланс мощности воспринят инерционными массами всех станций, роторы агрегатов которых приобрели конечное ускорение  $\theta_0$ , а частота в системе не изменилась. Для расчета квазиустановившегося

режима в начальный момент времени  $t_0$  определяется первое приближение величины начального ускорения роторов  $\theta_{01}$  по выражению

$$\theta_{01} = \frac{\Delta P_0}{T_{j\sum} \omega_0 P_{H\sum}},$$

где  $\Delta P_0$  — небаланс, обусловленный аварией.

Величина  $\theta_{01}$  подставляется в (7) и определяются новые значения мощностей генераторов при неизменных еще мощностях турбин. Эти значения мощностей  $P_{гi}$  подставляются в (6) и рассчитывается первое приближение квазиустановившегося режима при  $t_0$  в схеме, один из узлов которой назначен условно в качестве балансирующего. Поскольку квазиустановившийся режим характеризуется новыми уровнями напряжений, изменением потерь в схеме и т. д., мощность балансирующего узла, вычисленная из расчета режима, в общем случае будет отличаться от действительной мощности в этом узле. Небаланс мощности  $\Delta P_1$  обычно составляет от 1 до 10% величины  $\Delta P_0$ . Уточняя величину ускорения

$$\theta_{02} = \theta_{01} + \frac{\Delta P_1}{T_{j\sum} \omega_0 P_{H\sum}},$$

можно в результате двух-трех итераций по  $\theta_0$  найти с заданной точностью ( $\Delta P < \epsilon$ ) квазиустановившийся режим в момент времени  $t_0$ . Для этого режима вычисляется определитель  $A_0$  и проводится проверка устойчивости. Квазиустановившийся режим устойчив, если  $A_0 A_0 > 0$ .

Используя полученное из расчета квазиустановившегося режима значение  $\theta_0$ , выполняется интегрирование уравнений (2) — (5). Интегрирование осуществляется, например, методом Рунге — Кутты. Если выполняется несколько шагов интегрирования подряд, то после каждого шага корректируется значение  $\theta$  без расчета режима, но с учетом изменения мощности турбин. После каждого шага интегрирования, при необходимости, вводятся ограничения по активной мощности турбин и моделируются действия противоаварийной автоматики (АЧР I, АЧР II и т. д.). В результате интегрирования определяются в момент времени  $t_1$  частота в системе  $\omega_1$ , мощности турбин и нагрузок, а также приближенное значение ускорения  $\theta_{11}$ .

Далее рассчитывается в момент времени  $t_1$  квазиустановившийся режим при соответствующей частоте в системе. Расчет этого режима и проверка его устойчивости осуществляется так же, как в случае  $t = t_0$ . В результате уточняется значение ускорения  $\theta_1$  при  $t_1$ . Интегрирование дифференциальных уравнений позволяет определить частоту  $\omega_2$  в момент  $t_2$ , а также соответствующие значения мощностей турбин и нагрузок. Расчет зависимости  $\omega = F(t)$  и квазиустановившихся режимов в заданные моменты времени осуществляется до нарушения устойчивости или до прекращения переходного процесса и установления стационарного послеаварийного режима.

Допущение о мгновенном затухании электромеханических колебаний углов делает условными первые один-два квазиустановившихся режима, рассчитываемых согласно описанному алгоритму. Однако, поскольку переходный процесс, связанный с изменением частоты, длится сколько переходный процесс, идеализация квазиустановившихся режимов в обычно десятки секунд, идеализация квазиустановившихся режимов в первые две-три секунды не должна приводить к заметным погрешностям при исследовании всего процесса. В то же время описанный алгоритм дает возможность создать такие программы, которые позволяют исследовать послеаварийные режимы с учетом динамики частоты в сложных схемах, включающих сотни узлов. Область применения таких программ может быть определена с помощью более точной программы расчета электромеханических переходных процессов [6] на примере более простых схем.

Создание программы расчета послеаварийных режимов, учитывающей динамику частоты и позволяющей проверить устойчивость всех квазиустановившихся режимов, позволит по-новому осуществить управление этими режимами. Обычно выбор АЧР I и АЧР II осуществляется из условий ограничения снижения частоты. Устойчивость послеаварийных режимов оценивается очень приближенно. Поэтому на практике бывает развитие аварии в результате нарушения устойчивости послеаварийных режимов. Так как разрабатываемая программа позволяет анализировать устойчивость непрерывно изменяющихся квазиустановившихся режимов, то с ее помощью можно выбирать законы вторичного регулирования и рекомендовать место и последовательность действия АЧР из условия сохранения статической устойчивости послеаварийных режимов. Использование такого критерия при управлении квазиустановившимися режимами позволит не только сохранить устойчивость и предотвратить развитие аварии, но и обеспечить ограничение снижения частоты соответствующим объемом АЧР.

Сибирский научно-исследовательский  
институт энергетики,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
22/VI 1977

## ЛИТЕРАТУРА

1. Иофьев Б. И. Автоматическое аварийное управление мощностью энергосистем. М., «Энергия», 1974. 415 с.
2. Адонц Г. Т., Айрапетян Г. А., Гарибян Г. В., Мусаелян А. Н. Алгоритм и программа расчета режимов энергосистем при больших дефицитах мощности. — В кн.: Проблемы технической электродинамики. Вып. 25. Киев, «Наукова думка», 1970, с. 56—61.
3. Калюжный А. X., Соколов Ю. В. Алгоритм и программа расчета установившихся нормальных и послеаварийных режимов сложных электроэнергетических систем с учетом изменения частоты. — Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1977, № 3, сер. техн. наук, вып. 1, 126—131.
4. Стернисон Л. Д. Переходные процессы при регулировании частоты и активной мощности в электрических системах. М., «Энергия», 1975. 216 с.
5. Калюжный А. X. Статические характеристики генераторов для расчета установившихся режимов энергосистем с учетом изменения частоты. — В кн.: Применение частотных методов в электроэнергетике. Тр. СибНИИЭ. Новосибирск, 1978, с. 127—135.
6. Лукашов Э. С., Лизалек Н. Н., Лукин А. Н. К вопросу об анализе электро-механических переходных процессов с учетом изменения частоты в системе. Тез. докл. V науч.-техн. конф. энергетиков. Ташкент, 1976, с. 106.

УДК 621.315.1.064.1

Б. И. КОВАЛЕВ, А. К. МИЛЕВСКИЙ

ВЛИЯНИЕ ПОВЕРХНОСТНОГО ЭФФЕКТА В ЗЕМЛЕ  
НА ВОССТАНАВЛИВАЮЩИЕСЯ НАПРЯЖЕНИЯ  
ПРИ ОТКЛЮЧЕНИИ НЕУДАЛЕННЫХ КОРОТКИХ ЗАМЫКАНИЙ

В настоящее время неудаленное короткое замыкание (замыкание на расстоянии нескольких километров от подстанции) является одним из расчетных видов аварии для установления требований к отключающей способности выключателей [1]. Небольшое реактивное сопротивление участка линии между линейным выключателем и местом аварии может незначительно снизить ток КЗ по сравнению с током при КЗ в непосредственной близости от подстанции. В то же время после обрыва дуги в выключателе процесс восстановления напряжения на его контактах протекает с дополнительным наложением высокочастотных колебаний за счет волнового процесса на участке линии от выключателя до места КЗ. Частота этих колебаний может достигать нескольких десятков кГц и оценивается примерно как  $f=1/4\tau$ , где  $\tau$  — время пробега волны между выключателем и местом КЗ. Наличие высокочастотной составляющей повышает значение начальных скоростей восстанавливаемых напряжений (ВН), которые приближенно оцениваются с учетом малых длительностей процессов

$$V_H = \frac{dU_{BH}}{dt} = Z_0 \frac{di_K}{dt} = Z_0 \frac{dI_m \sin \omega t}{dt} \approx Z_0 I_m \omega,$$

где  $Z_0$  — эквивалентное волновое сопротивление отключаемой линии, зависящее от номера отключаемого полюса выключателя;  $i_K = I_m \sin \omega t$  — отключаемый ток короткого замыкания промышленной частоты;  $U_{BH}$  — восстанавливаемое напряжение на контактах выключателя со стороны линии.

Амплитуда первого максимума ВН без учета затухания и искажения волнового процесса в линии оценивается

$$U_m = 2\tau V_H.$$

Нормативные материалы [1], согласно которым ВН при отключении неудаленных КЗ оцениваются только по величине первого максимума высокочастотной составляющей со стороны отключаемой линии, обладают очевидными недостатками. При удаленности КЗ на сотни метров от выключателя высокочастотные колебания имеют незначительную амплитуду, и оценка ВН по первому максимуму сомнительна. В этом случае необходимо знать поведение ВН на более длительном отрезке времени, поскольку повторные зажигания дуги в выключателе могут происходить и после первого максимума ВН [2]. В существующей методике отсутствует также оценка амплитуды полной кривой ВН при отключении неудаленных КЗ, которую можно определить с учетом поведения высокочастотной составляющей.

В данной работе сделана попытка оценить влияние поверхностного эффекта в линии на переходный процесс ВН при отключении удаленных КЗ. Основное препятствие в решении этого вопроса — сложность математической задачи и высокая трудоемкость расчетов. Этим объясняется то, что до настоящего времени исследование ВН при отключении удаленных КЗ ведется по максимально упрощенной методике [3], а попытки некоторых авторов [4] косвенно оценивать влияние активных потерь и поверхностного эффекта приводят к заключению о возможном повышении ВН.

Известны опыты в реальных сетях [5], когда наблюдалось интенсивное затухание высокочастотных составляющих ВН при отключении удаленных КЗ. Общеизвестно значительное демпфирующее влияние поверхностного эффекта в земле на электромагнитные переходные процессы коммутационного происхождения [6]. Целесообразность учета этого фактора отмечалась еще в [7].

Для расчета ВН при отключении удаленных КЗ в данной работе использовался специальный комплекс программ, разработанных в СибНИИЭ. При этом исследовалось влияние на процесс ВН активных и реактивных параметров земли как функции от частоты переходного процесса. Участок линии между выключателем и точкой КЗ представлялся однородной симметричной линией с разземленными тросами. Активные потери в тросах, концевой эффект в короткозамкнутой линии [8] и склестывание проводов [9], которые могут привести к некоторому дополнительному изменению количественных результатов, не учитывались. Подробно методика учета поверхностного эффекта реализуется программой, изложенной в [10].

Исходная электрическая система и ее схема замещения, используемая в расчетах, представлены на рис. 1. Место КЗ выбиралось на расстоянии 1, 3 и 5 км от линейного выключателя при различном моделировании параметров участка  $l_1$ . Предполагалось, что линии  $l_2$  и  $l_3$  имеют значительную длину, поэтому удаленные подстанции не влияют на формирование процесса ВН в течение 0—400 мкс. Линии эти представляются в схеме замещения волновыми сопротивлениями прямой и нулевой последовательностей. Расчетные кривые ВН при отключении трехфазных удаленных КЗ (при отключении первой фазы) представлены на рис. 2, 3, а на рис. 4 — результаты обработки полученных кривых.

Следует отметить, что при моделировании отключаемой линии как линии идеальной или искажающей, когда активные сопротивления принимаются нулевыми или постоянными, соответствующими частоте 50 Гц, результаты расчета ВН со стороны линии практически полностью совпадают (рис. 2, кривая 2; рис. 3, а и б, кривые 1). При этом средний период высокочастотных колебаний  $T_1$  из-за различия параметров каналов прямой и нулевой последовательностей на 15—17% превышает используемое обычно оценочное значение  $T_0 = 4\tau$  (рис. 4).

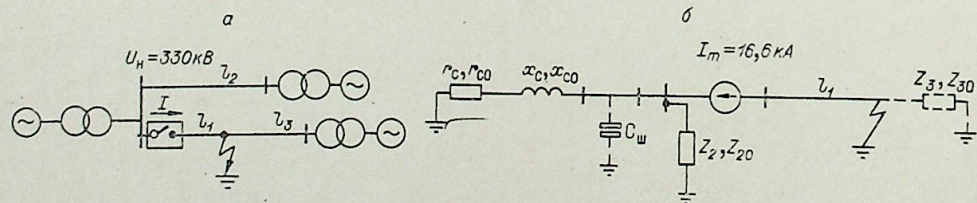


Рис. 1. Электрическая система (а) и эквивалентная схема замещения (б) для исследования поверхностного эффекта на ВН при отключении удаленных КЗ.

Параметры схемы со стороны системы:  
 $x_c = 35,1$  Ом;  $x_{c0} = 10,5$  Ом;  $C_{ш} = 50$  нф;  $Z_2 = 295$  Ом;  $Z_{20} = 590$  Ом;  $r_c = 1$  Ом;  $r_{c0} = 1$  Ом;  
 параметры отключаемой линии  $l$ :  $x_1 = x_3 = 0,321$  Ом/км,  $x_{10} = x_{30} = 1,150$  Ом/км,  $Z_1 = Z_3 = 295$  Ом;  
 $Z_{10} = Z_{30} = 590$  Ом.

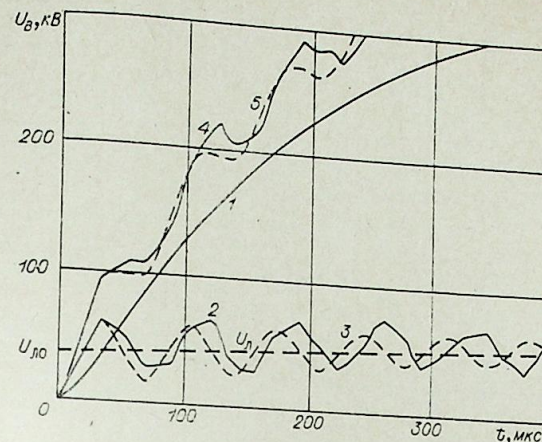


Рис. 2. Кривые восстанавливающегося напряжений на контактах выключателя при отключении трехфазного короткого замыкания, удаленного от выключателя на 5 км.

1 — ВН со стороны станции; 2, 3 — разность между начальным напряжением и ВН со стороны отключаемой линии, соответственно без учета поверхностного эффекта и с его учетом; 4, 5 — полные кривые ВН, соответственно без учета поверхностного эффекта и с его учетом.

Первые максимумы кривых ВН со стороны отключаемой линии без учета поверхностного эффекта и с его учетом практически полностью совпадают. Однако далее кривые ВН, рассчитанные с учетом поверхностного эффекта, приобретают вид затухающих гармонических колебаний, период которых  $T$  превышает значение  $4\tau$  примерно на 5%.

С уменьшением длины отключаемой линии, наблюдается также некоторое повышение логарифмического декремента затухания  $\delta$ , которое способствует более резкому затуханию переходного процесса при малых длинах линии. При отключении километровой линии высокочастотная составляющая затухает практически полностью через 200—300 мкс. При удалении точки КЗ на 5 км от выключателя высокочастотная составляющая, имея значительно большую первоначальную амплитуду и меньшую частоту колебаний, затухает в несколько раз медленнее. Тог-

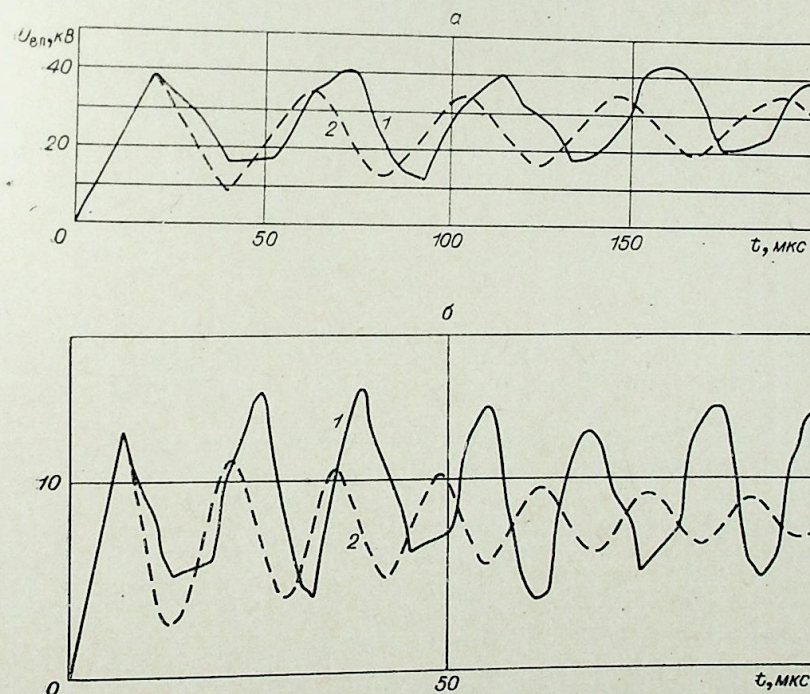


Рис. 3. Отключение трехфазного КЗ.

а — на расстоянии 3 км от выключателя; б — на расстоянии 1 км от выключателя.  
 1 — разность между начальным напряжением и ВН со стороны отключаемой линии без учета поверхностного эффекта; 2 — то же, но с учетом поверхностного эффекта.

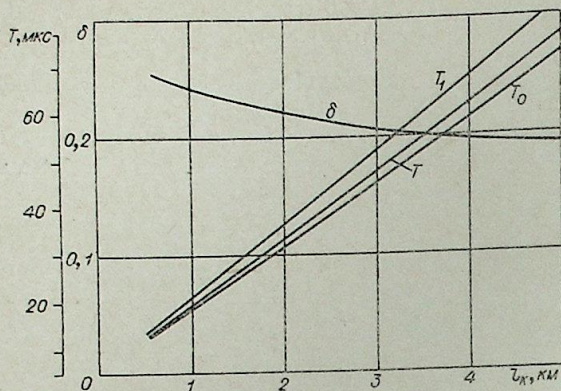


Рис. 4. Зависимость логарифмического декремента затухания и периода колебаний высокочастотной составляющей ВН со стороны отключаемой короткозамкнутой линии.

$\delta$  — логарифмический декремент затухания на период;  $T_1$  — период колебаний высокочастотной составляющей без учета поверхностного эффекта в трехфазной линии;  $T$  — период колебаний с учетом поверхностного эффекта;

$$T_0 = 4\tau = 4 \frac{l_k}{v} = 4 \frac{l_k}{3 \cdot 10^8} -$$

оценочная величина периода колебаний без учета трехфазности и поверхностного эффекта.

да существенное влияние переходного процесса со стороны линии на общий процесс ВН может наблюдаться вплоть до максимальных значений ВН, которые возникают в сетях 330 кВ через 500—600 мкс после обрыва дуги.

Численные расчеты ВН с учетом поверхностного эффекта показали, что анализ подобных переходных процессов очень трудоемок и сложен даже с применением современных вычислительных машин. Алгоритм учета поверхностного эффекта должен быть работоспособным в спектре частот от промышленной и до частоты 100 кГц. Поэтому шаг численного расчета необходимо уменьшать на порядок по сравнению с аналогичными расчетами без учета поверхностного эффекта.

В связи с изложенным для практических целей нужна упрощенная инженерная методика построения кривых ВН с учетом поверхностного эффекта. Такая методика может основываться на том, что частотные зависимости параметров нулевого канала обусловлены в основном частотными характеристиками земли, которые мало зависят от конструкции опор и фаз линии электропередачи, от удельного сопротивления грунтов [10].

Из рис. 2 и 3 видно, что высокочастотные колебания с учетом поверхностного эффекта и без его учета происходят вокруг некоторой средней линии  $U_{л}$ , которую можно принять как наклонную прямую, исходящую из точки

$$U_{л0} \approx I_m x_0 l_k = I_m \frac{3x_1 x_{10}}{2x_{10} + x_1} l_k,$$

где  $U_{л0}$  — начальное напряжение на короткозамкнутом отрезке линии, кВ;  $I_m$  — амплитуда тока, кА;  $x_1$ ,  $x_{10}$  — индуктивные сопротивления по каналам прямой и нулевой последовательностей на единицу длины линии, Ом/км;  $l_k$  — длина отключаемой линии, км.

Наклон прямой  $U_{л}$ , определяемый наводками от токов КЗ, протекающих в соседних фазах, по результатам выполненных расчетов может быть оценен усредненной величиной

$$a \approx 6 \cdot 10^{-4} \text{ кВ/мкс} \cdot \text{кА} \cdot \text{км}.$$

В этом случае уравнение прямой  $U_{л}$  можно представить в виде

$$U_{л} = U_{л0} + al_k I_m t. \quad (1)$$

В момент времени  $t=2\tau$  кривая ВН со стороны линии достигает максимума, который весьма точно оценивается значением

$$U_{m1} = I_m \omega Z_0 2\tau = I_m \omega \frac{3Z_1 Z_{10}}{2Z_{10} + Z_1} 2\tau.$$

Превышение этого максимума над прямой  $U_{л}$  можно оценить как

$$\Delta U_{m1} \approx I_m \omega Z_0 2\tau - U_{л0} - al_k I_m 2\tau \approx I_m \omega_0 2\tau - U_{л0}. \quad (2)$$

После первого максимума высокочастотная составляющая ВН со стороны отключаемой линии может быть представлена затухающим гармоническим процессом. Логарифмические декременты затухания для построения кривой  $\delta$  (рис. 4) вычислялись, исходя из средних значений отношений соседних амплитуд:

$$\frac{\delta}{2} = \ln \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\Delta U_{mK}}{\Delta U_{m(K+1)}} \right| = \ln \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n A_k = \ln A,$$

где

$$A_k = \left| \frac{\Delta U_{mK}}{\Delta U_{m(K+1)}} \right|.$$

При этом максимальные отклонения величин  $A_k$  от среднего значения  $A$  не превышали 3%. Это обстоятельство еще раз подтверждает возможность замены высокочастотной составляющей ВН кривой с одним декрементом затухания.

Если известна длина линии  $l_k$  и по выражению (2) найдено значение  $\Delta U_{m1}$ , то абсолютные значения максимумов и минимумов кривой ВН со стороны линии определяются как

$$U_{mN} = U_{л0} + al_k I_m (2\tau + TN - T) + (-1)^{N+1} \Delta U_{m1} e^{-\delta/2(N-1)}. \quad (3)$$

При известных экстремальных значениях (3) кривую ВН со стороны отключаемой линии  $U_{вл}$  можно построить графически.

Для построения полной кривой ВН на контактах выключателя необходимо знать кривую  $U_{вс}$  со стороны системы или станции (рис. 2, кривая 1), расчет которой эквивалентен расчету ВН при КЗ непосредственно за выключателем и может быть выполнен аналитически [3] или на цифровой ЭВМ.

Полную кривую ВН на контактах выключателя, отключающего удаленное короткое замыкание, с учетом поверхностного эффекта находим как

$$U_{в}(t) = U_{вс}(t) + U_{вл}(t). \quad (4)$$

Можно предположить, что, начиная с момента времени  $t=2\tau$ , высокочастотная составляющая ВН является затухающей косинусоидой. В этом случае построение кривой ВН со стороны отключаемой линии с учетом поверхностного эффекта может быть осуществлено по алгоритму, пригодному для вычислений на цифровых машинах:

$$U_{вл} = \begin{cases} I_m \omega Z_0 t & \text{при } t \leq 2\tau \\ (I_m \omega Z_0 2\tau - I_m x_0 l_k) \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) e^{-\frac{\delta}{T} t} + \\ + al_k I_m t & \text{при } t > 2\tau. \end{cases} \quad (5)$$

Кривые, рассчитанные по выражению (5), дают практически полное совпадение с результатами расчетов на цифровой ЭВМ (рис. 2, кривая 3; рис. 3, кривая 2).

Предлагаемый способ позволяет достаточно легко и точно получить кривую ВН, не прибегая к трудоемким расчетам. Представляется целесообразным использовать подобный алгоритм для разработки специальных программ, пригодных для массовых и оперативных расчетов ВН при отключении удаленных коротких замыканий. Для этой цели путем выполнения серий контрольных расчетов, подобных приведенным в данной работе, необходимо получить исходную информацию о характере влияния поверхностного эффекта на ВН при удаленных коротких замыканиях различного вида в сетях различных классов напряжения.

## ВЫВОДЫ

1. При отключениях неудаленных КЗ поверхностный эффект оказывает значительное воздействие на высокочастотную составляющую ВН со стороны отключаемой линии.

2. Поверхностный эффект практически не оказывает влияния на значение первого максимума высокочастотной составляющей. После первого максимума интенсивное затухание этой составляющей полностью объясняется демпфирующим действием поверхностного эффекта.

3. Если поверхностный эффект не учитывать, ошибка в определении частоты высокочастотной составляющей может превысить 10%.

4. В численных расчетах ВН при отключении неудаленных КЗ с малыми длинами короткозамкнутых участков линий требуется значительное уменьшение шага расчета для полного представления переходных функций нулевого канала линий. Это делает прямые численные методы расчета ВН с учетом поверхностного эффекта в земле очень трудоемкими и мало пригодными для массовых исследований.

5. В статье предлагается упрощенная инженерная методика построения кривых ВН при отключении неудаленных КЗ, которая базируется на возможности простого описания высокочастотной составляющей, демпфированной поверхностным эффектом. Данная методика может быть успешно использована при разработке программ упрощенного численного расчета ВН при отключении неудаленных КЗ.

Сибирский научно-исследовательский  
институт энергетики,  
Новосибирск

Поступила в редакцию  
15/VII 1977

## ЛИТЕРАТУРА

1. Выключатели переменного тока высокого напряжения. Методы испытаний на коммутационную способность. ОСТ 16.0.688.010—71. Введ. 1/VII 1970. М. 90 с.
2. Залесский М. Л. Электрическая дуга отключения. М., Госэнергоиздат, 1963. 266 с.
3. Акотис М. М., Корзун П. А. Определение восстанавливающихся напряжений на контактах выключателя. М., «Энергия», 1968. 188 с.
4. Славин Г. А. Восстанавливающееся напряжение на контактах выключателя при отключении коротких замыканий. М., «Энергия», 1974. 81 с.
5. Чернышев Н. М., Щеглов Н. П., Кузнецова В. В. Параметры воздушных линий электропередачи, характеризующие условия отключения неудаленных коротких замыканий.— Электричество, 1969, № 2, с. 22—29.
6. Коммутационные перенапряжения при включении ненагруженных линий и переходные восстанавливающиеся напряжения, при отключении коротких замыканий вблизи трансформаторов. СИГРЭ, сессия 1968, докл. № 13-05. М., «Энергия», 1969, с. 60—76. Авт.: Главин, Руосс, Талер, Вютрич.
7. Хаммарлунд П. Восстанавливающиеся напряжения на контактах выключателя. М., Госэнергоиздат, 1956. 296 с.
8. Костенко М. В., Перельман Л. С., Шкарин Ю. П. Волновые процессы и электрические помехи в многопроводных линиях высокого напряжения. М., «Энергия», 1973. 271 с.
9. Щеглов Н. П., Быструев А. К. Об условиях отключения неудаленных коротких замыканий на линиях с расщепленными проводами.— Электрические станции, 1974, № 1, с. 46—48.
10. Самородов Г. И., Хорошев М. И. Учет поверхностного эффекта земли при расчетах коммутационных переходных процессов.— В кн.: Работы в области электроэнергетических систем. Тр. СибНИИЭ. Вып. 20, Новосибирск, 1971, с. 51—56.

Ц. Т. ЖАНАЕВ, Т. Б. ЗАСЛАВСКАЯ

## УРАВНЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ РЕЖИМА В ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ТОЧКАХ ЭЛЕКТРОПЕРЕДАЧИ

При проектировании и эксплуатации электрических сетей появляется необходимость знать параметры аварийных режимов в любых точках электропередачи. Для одноцепных ЛЭП эта задача решается достаточно просто. Ток короткого замыкания при повреждении в произвольной точке сети определяется равенством

$$I_{ki} = \frac{U_{пр}}{z_{hi}} \quad (1)$$

Напряжение доаварийного режима в точке несимметрии описывается уравнением

$$U_{пр} = \frac{B_{II}U_I + B_I U_{II}}{B_{\Sigma}} \quad (2)$$

где  $B_I$ ,  $B_{II}$  — коэффициенты эквивалентных четырехполюсников, замещающих электропередачу соответственно от передающей станции до точки повреждения и от нее до приемной системы;  $B_{\Sigma}$  — коэффициент четырехполюсника, замещающего магистральную электропередачу.

Значение входного сопротивления схемы замещения относительно точки повреждения при различных видах короткого замыкания приведено ниже.

Виды короткого замыкания	Трехфазное	Двухфазное	Однофазное	Двухфазное на землю
--------------------------------	------------	------------	------------	---------------------

$$z_{hi} = \frac{B_I B_{II}}{B_{\Sigma}} \quad \sum_{i=1}^2 \frac{B_{II} B_{IIi}}{B_{\Sigma i}} \quad \sum_{i=0}^2 \frac{B_{II} B_{IIi}}{B_{\Sigma i}} \quad \frac{B_{II} B_{II1}}{B_{\Sigma 1}} + \left( \frac{B_{I2} B_{II2}}{B_{\Sigma 2}} \parallel \frac{B_{I0} B_{II0}}{B_{\Sigma 0}} \right)$$

( $i=0, 1, 2$  — индекс последовательности симметричных составляющих).

После нахождения параметров режима в местах несимметрии расчет сети может быть произведен любыми известными способами, в частности методом активного трехполюсника [1—3].

Для ЛЭП связанного варианта исполнения определение напряжения доаварийного режима и входного сопротивления значительно упрощается. Рассмотрим этот вариант на примере электропередачи, разбитой на  $n$  одинаковых участков длиной  $\lambda/n$ .

Повреждение может быть как на переключательных пунктах, так и на одной из цепей любого участка, причем короткие замыкания на переключательных пунктах рассматриваемого варианта равносильны повреждению в точках с той же волновой длиной линии блочного варианта исполнения. В этом случае напряжение предшествующего режима и входное сопротивление определяются соответствующими выражениями, приведенными ранее.

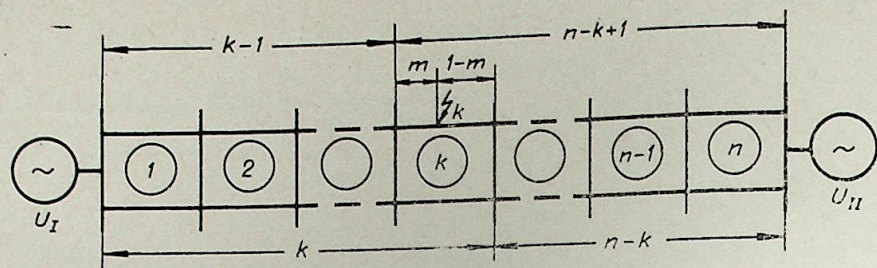


Рис. 1.

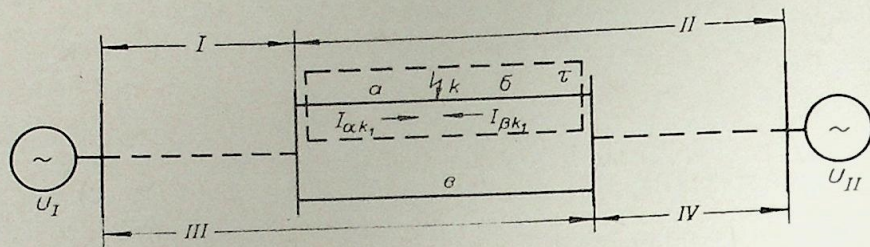


Рис. 2.

Теперь рассмотрим повреждение на одной из цепей между переключательными пунктами (рис. 1). Определим для этого случая закон изменения напряжения доаварийного режима и входного сопротивления. Напряжения  $u_\alpha$  и  $u_\beta$  на шинах участка, содержащего повреждение (рис. 2), с учетом (2) описываются уравнением

$$U_\alpha = \frac{B_{II}U_I + B_I U_{II}}{B_\Sigma}, \quad (3a)$$

$$U_\beta = \frac{B_{IV}U_I + B_{III}U_{II}}{B_\Sigma}. \quad (3б)$$

Эти напряжения связаны с напряжением и током в месте повреждения следующим образом:

$$U_\alpha = A_a U_{пр.к} + B_a I_{пр.к}, \quad (4, a)$$

$$U_\beta = D_b U_{пр.к} - B_b I_{пр.к}, \quad (4, б)$$

где  $A_a, B_a, D_b, B_b$  — коэффициенты эквивалентных четырехполюсников, замещающих участок электропередачи от переключательных пунктов  $\alpha$  и  $\beta$  до места повреждения к;  $U_{пр.к}, I_{пр.к}$  — напряжение и ток доаварийного режима в точке короткого замыкания к.

Решая совместно уравнения (3) и (4) относительно  $U_{пр.к}$ , находим напряжение доаварийного режима в точке к:

$$U_{пр.к} = \frac{(B_{II}U_I + B_I U_{II}) B_b + (B_{IV}U_I + B_{III}U_{II}) B_a}{B_\Sigma B_b}, \quad (5)$$

где коэффициенты  $B_a = j \sin m \frac{\lambda}{n}$  и  $B_b = j \sin (1-m) \frac{\lambda}{n}$ , при повреждении цепи на любом участке зависят от переменной величины  $m$ , изменяющейся от нуля до единицы;  $m$  — относительное расстояние места повреждения к от шин переключательного пункта  $\alpha$ . При  $m$ , равном нулю или единице, равенство (5) принимает вид уравнения (2).

Далее определим значение  $z_{вх}$  относительно точки несимметрии к (рис. 2, 3). При учете места короткого замыкания источником тока в месте повреждения [1] схема может быть представлена тремя каскадно соединенными четырехполюсниками (а, к, б). Постоянные четырехполюсника  $\tau$ , эквивалентного

трем вышеуказанным четырехполюсникам, равны

$$[M_i] = \begin{vmatrix} A_b & B_b & B_a I_k \\ C_b & D_b & D_a I_k \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (6)$$

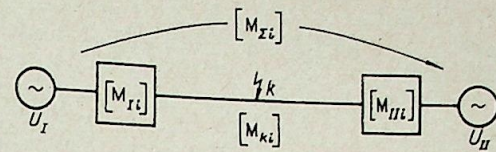


Рис. 3.

Сложив параллельно соединенные четырехполюсники  $\tau$  и  $\nu$ , получим три цепочно соединенных четырехполюсника (рис. 3). Постоянные эквивалентного им четырехполюсника определяются

$$[M_\Sigma] = \begin{vmatrix} A_\Sigma & B_\Sigma & B' I_k \\ C_\Sigma & D_\Sigma & D' I_k \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (7)$$

где  $B' = j0,5 \sin (k-1+m) \frac{\lambda}{n}$ ;  $D' = \cos (k-1+m) \frac{\lambda}{n}$ .

При коротком замыкании в любой промежуточной точке электропередачи токи и напряжения по концам электропередачи связаны соотношением

$$U_I = A_\Sigma U_{II} + B_\Sigma I'_{II} + B' I_k, \quad (8a)$$

$$I'_I = C_\Sigma U_{II} + D_\Sigma I'_{II} + D' I_k. \quad (8б)$$

Эти уравнения содержат три неизвестных величины  $I'_I, I'_{II}$  и  $I_k$ . Недостающее для определения этих величин уравнение можно получить из граничных условий, которыми характеризуется вид короткого замыкания.

### ТРЕХФАЗНОЕ КОРОТКОЕ ЗАМЫКАНИЕ

1. Из равенства (8) следует

$$I'_{II} = \frac{U_I - A_\Sigma U_{II} - B' I_k}{B_\Sigma}, \quad (9a)$$

$$I'_I = \frac{-U_{II} + D_\Sigma U_I - D_\Sigma B' I_k + B_\Sigma D' I_k}{B_\Sigma}. \quad (9б)$$

2. Напряжения короткого замыкания на переключательных пунктах  $\alpha$  и  $\beta$  с учетом (9a) и (9б) определяются следующими выражениями

$$U_\alpha = \frac{B_{II}U_I + B_I U_{II} + D_\Sigma B_I B' I_k - B_\Sigma B_I D' I_k}{B_\Sigma}, \quad (10a)$$

$$U_\beta = \frac{B_{IV}U_I + B_{III}U_{II} - B_{IV} B' I_k}{B_\Sigma}. \quad (10б)$$

3. Токи, подтекающие к месту короткого замыкания, определяются из равенства (рис. 3)

$$U_\alpha = A_a u_k + B_a I_{\alpha k} = B_a I_{\alpha k}, \quad (11a)$$

$$U_\beta = D_b U_k - B_b I_{\beta k} = B_b I_{\beta k}. \quad (11б)$$

Из этих уравнений находим ток в месте повреждения

$$I_k = I_{\alpha k} - I_{\beta k} = \frac{U_\alpha B_b + U_\beta B_a}{B_a B_b} = \frac{(B_{II}U_I + B_I U_{II}) B_b + (B_{IV}U_I + B_{III}U_{II}) B_a}{B_\Sigma B_a B_b - D_\Sigma B_I B' B_b + B_\Sigma B_I D' B_b + B_{IV} B' B_a}. \quad (12)$$

Умножив числитель и знаменатель этого равенства на величину  $B_{\Sigma} B_B$  и с учетом (5), получим выражение (1), где  $U_{np}$  определяется соотношением (5), а

$$z_R^{(3)} = \frac{B_I B'' B_{\sigma} + B_{IV} B' B_a}{B_{\Sigma} B_B} + \frac{B_a B_{\sigma}}{B_B}, \quad (13)$$

$$B'' = (B_{\Sigma} D' - D_{\Sigma} B') = j0,5 \sin(n - k - m + 1) \frac{\lambda}{n}.$$

### НЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОРОТКИЕ ЗАМЫКАНИЯ

Составляя уравнения, аналогичные (10) — (12) для всех последовательностей симметричных составляющих, и используя граничные условия рассматриваемого вида повреждения, получим выражение входных сопротивлений.

Виды к. з.	Двухфазное	Однофазное	Двухфазное на землю
	$\sum_{i=1}^2 \frac{B_{Ii} B'' B_{\sigma i}}{B_{\Sigma i} B_{Vi}}$	$\sum_{i=0}^2 \frac{B_{Ii} B'' B_{\sigma i}}{B_{\Sigma i} B_{Vi}}$	$\left( \frac{B_{I1} B'' B_{\sigma 1} + B_{IV1} B' B_{a1}}{B_{\Sigma 1} B_{V1}} + \frac{B_{a1} B_{\sigma 1}}{B_{V1}} \right) +$
	$\sum_{i=1}^2 \frac{B_{IVi} B' B_{ai}}{B_{\Sigma i} B_{Vi}}$	$\sum_{i=0}^2 \frac{B_{IVi} B' B_{ai}}{B_{\Sigma i} B_{Vi}}$	$\left( \frac{B_{I2} B'' B_{\sigma 2} + B_{IV2} B' B_{a2}}{B_{\Sigma 2} B_{V2}} + \frac{B_{a2} B_{\sigma 2}}{B_{V2}} \right) \parallel$
	$\sum_{i=1}^2 \frac{B_{ai} B_{\sigma i}}{B_{Vi}}$	$\sum_{i=0}^2 \frac{B_{ai} B_{\sigma i}}{B_{Vi}}$	$\left( \frac{B_{x0} B'' B_{\sigma 0} + B_{IV0} B' B_{a0}}{B_{\Sigma 0} B_{V0}} + \frac{B_{a0} B_{\sigma 0}}{B_{V0}} \right) \parallel$

При  $m$ , равным нулю или единице, равенство (13) принимает вид соответствующих выражений, приведенных ранее.

В выражении (13) составляющую  $\frac{B_a B_{\sigma}}{B_B}$  можно рассматривать как входное сопротивление относительно точки короткого замыкания в системе, состоящей из ЛЭП длиной  $\lambda/n$  и двух систем бесконечной мощности, причем это сопротивление, как входное сопротивление любой короткой линии, имеет индуктивный характер.

### ВЫВОДЫ

1. Полученные уравнения могут быть использованы при расчете аварийных режимов сети в любых промежуточных точках многоцепной электропередачи.

2. Известные соотношения для ЛЭП блочного варианта исполнения являются частными случаями соответствующих выражений связанной схемы электропередачи.

Поступила в редакцию  
21/IX 1977

### ЛИТЕРАТУРА

- Борисов Р. И. Установившиеся несимметричные режимы при неполнофазной работе длинных линий электропередач. Автореф. канд. дис. Томск, Том. политех. ин-т, 1955.
- Пухов Г. Е. Методы анализа и синтеза квазианалоговых электронных цепей. Киев. «Наукова думка», 1967.
- Вайнштейн Л. М., Мельников Н. А. Расчет аварийных режимов электрических систем при сложных видах повреждений. — Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1970, № 5.
- Алексеев Г. Е. Уравнение напряжения и тока в промежуточной точке линии электропередачи. — Изв. вузов. Энергетика, 1970, № 5.

### СПИСОК СТАТЕЙ, ОПУБЛИКОВАННЫХ В СЕРИИ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК В 1978 г.

- Альбазаров Б. Ш. Геометрические характеристики сверхзвуковой недорасширенной струи. № 13, вып. 3.
- Алексев Г. А., Дараган В. Д., Завидей В. И., Мельников Г. Н., Пустогаров А. В. Нестационарный метод комплексного определения теплофизических свойств высокотемпературных материалов. № 8, вып. 2.
- Алаев Г. П., Поляков В. В., Сколяров Я. Н., Апасов В. Л. Некоторые мероприятия по снижению взрывоопасности систем пылеприготовления на тепловых электростанциях Иркутскэнерго. № 3, вып. 1.
- Батеник В. М. Возможности СВЧ-метода генерации плазмы. № 13, вып. 3.
- Барбасов В. В., Урюков В. А. Влияние закрутки на свойства электрической дуги в цилиндрическом канале. № 8, вып. 2.
- Баранников А. А., Пекшев П. Ю. Особенности рабочих процессов в сильноточных газоразрядных приборах с отрицательной проводимостью. № 8, вып. 2.
- Блохин А. М., Роменский Е. И. Устойчивость предельного стационарного решения при обтекании кругового конуса. № 13, вып. 3.
- Бобиев А. А. Динамические характеристики электрической дуги, горящей в цилиндрическом канале. № 8, вып. 2.
- Бродецкий М. Д., Максимов А. И., Харитонов А. М. Методика экспериментальных исследований аэродинамической интерференции небольших подстроек с несущей поверхностью. № 13, вып. 3.
- Валиуллин А. И., Паасонен В. И., Сапунов Н. Е., Сафин Р. И. Расчет теплового режима ледопородных емкостей в фильтрующих пластах. № 13, вып. 3.
- Ващуков С. И., Марусин В. В. Некоторые вопросы моделирования ВЧ-разряда. № 13, вып. 3.
- Волчков Э. П., Спотарь С. Ю., Терехов В. И. Тепломассообмен в неизотермическом турбулентном пограничном слое с положительным градиентом давления. № 13, вып. 3.
- Волкова Л. М., Девятов А. М., Кралькина Е. А., Меченов А. С. О возможности выявления структуры функции распределения электронов по энергиям. № 3, вып. 1.
- Гамм Б. З., Ефименко Н. Н. Некоторые особенности расчетов электромеханических переходных процессов. № 8, вып. 2.
- Горбунов Ю. К. Расчет собственных и взаимных активно-индуктивных волновых параметров катушек обмотки статора электрической машины. № 3, вып. 1.
- Горбунов Ю. К., Основич В. Л. Влияние короткозамкнутого витка на волновые обмотки статора электрической машины. № 3, вып. 1.
- Горбунов Ю. К., Основич В. Л. Активно-индуктивные волновые параметры витка напряжения и параметры обмоток электрических машин. № 3, вып. 1.
- Гопонов В. А., Лебедев А. Д., Назарук В. И. Некоторые аспекты гармонического анализа пульсаций «турбулентной» дуги. № 13, вып. 3.
- Горбань И. А., Липовцев Ю. В. Конечно-разностное решение нестационарных краевых задач лучисто-кондуктивного теплообмена и оценка двухпоточкового приближения для конденсированных сред. № 13, вып. 3.
- Гроссман А. Г. Процессы переноса в дисперсиях при умеренных концентрациях. № 8, вып. 2.
- Грач И. М. Метод расчета распределения потенциала вдоль оси симметрии поля. № 13, вып. 3.
- Демиденко Н. Д. Оптимизация системы контроля управляемых технологических процессов тепломассообмена. № 13, вып. 3.
- Демиденко Н. Д., Девятов Б. Н., Елин М. В. Оптимальное управление технологическими процессами с рециркуляцией взаимодействующих потоков. № 8, вып. 2.
- Дербунович Г. И., Репик Е. У., Соседко Ю. П. Об экспериментальном определении интегрального масштаба турбулентности в пограничном слое. № 3, вып. 1.

- Денисов С. П. Сопоставление методов учета неизотермичности объема газа в расчетах поглощения лучистых потоков. № 3, вып. 1.
- Дмитриев В. А., Затолока В. В., Звегинцев В. И. Весовые испытания тяжелых моделей в импульсной аэродинамической трубе. № 3, вып. 1.
- Ефремов И. А., Левинштейн М. Л., Смирнов Е. А. Определение вероятности перекрытия системы воздушных промежутков при различных аппроксимациях законов распределения разрядного напряжения и воздействующих перенапряжений. № 8, вып. 2.
- Жанаев Ц. Т., Заславская Т. Б. Уравнения параметров режима в промежуточных точках электропередачи. № 13, вып. 3.
- Жуков М. Ф., Козлов Н. П., Аньшаков А. С., Пустогаров А. В., Дандарон Г.—Н. Б., Хвостюк В. И. Исследования термоэмиссионных катодов. № 13, вып. 3.
- Зайцев В. П. Расчет обтекания прямой решетки произвольных профилей стационарным потоком газа. № 13, вып. 3.
- Затолока В. В., Звегинцев В. И., Шумский В. В. Влияние процесса сжатия в воздухозаборнике на удельные тяговые характеристики ГПРРД. № 8, вып. 2.
- Захаркин Р. Я., Пустогаров А. В., Халбошин А. П. Двухступенчатый многоэлектродный плазмотрон. № 8, вып. 2.
- Затолока В. В., Зудов В. Н., Шевченко В. И., Лушанов В. И. Экспериментальное исследование течений на режимах перерасширения в плоском сопле. № 3, вып. 1.
- Калюжный А. Х., Соколов Ю. В. Влияние поверхностного эффекта в земле на восстанавливающиеся напряжения при отключении удаленных коротких замыканий. № 13, вып. 3.
- Кирияненко А. А. Исследование вязкости разбавленных растворов полиэтиленоксида. № 13, вып. 3.
- Корнев Е. П. Экспериментальное исследование локальных характеристик закрученного турбулентного течения в цилиндрическом канале. № 8, вып. 1.
- Ковалев Б. И., Милевский А. К. Влияние поверхностного эффекта в земле на восстанавливающиеся напряжения при отключении удаленных коротких замыканий. № 13, вып. 3.
- Курочкин Ю. В., Пустогаров А. В., Уколов В. В. Численное исследование течения и теплообмена в пористом канале плазмотрона. № 3, вып. 1.
- Ландман А. К., Чебан В. М. Приближенное аналитическое решение уравнения движения ротора генератора. № 3, вып. 1.
- Лебедев О. Н., Марченко В. Н. Экспериментальное исследование испарения капель углеводородных топлив при высоких температурах и давлениях газовой среды. № 8, вып. 2.
- Лебедев О. Н., Солоненко О. П. Расчет нестационарной турбулентной двухфазной струи распыленной жидкости. № 13, вып. 3.
- Лукашов Э. С. О синхронизирующей мощности в сложной электроэнергетической системе. № 3, вып. 1.
- Макаров В. М. Расчет собственных и взаимных активно-индуктивных волновых параметров катушек обмотки статора электрической машины. № 3, вып. 1.
- Манусов В. З., Кучеров Ю. Н. Статистические модели эквивалентирования расчетных схем электрических систем. № 3, вып. 1.
- Мардер Л. И., Морозова Н. С., Мызин А. Л. Некоторые способы улучшения статистических моделей электропотребления и электрических нагрузок энергосистем. № 3, вып. 1.
- Малков В. А., Томсон Я. Я. Анализ схем включения электродиффузионного датчика скорости потоков и трения на стенке. № 3, вып. 1.
- Манусов В. З., Вечерский М. И. Информационное и алгоритмическое обеспечение пакета прикладных программ машинного проектирования электрических сетей энергосистем. № 8, вып. 2.
- Мельникова Т. С., Попенко В. Г., Уланов И. М. Экспериментальное исследование стабилизированной вихрем электрической дуги в продольном магнитном поле. № 8, вып. 2.
- Мельман М. М., Попов Ю. А., Невский А. С. Влияние отражения кладки на лучистый теплообмен в слое неизотермического селективного газа. № 3, вып. 1.
- Мельников Т. С., Пикалов В. В. Измерение локальных температур нестационарной асимметричной дуги. № 13, вып. 3.
- Москвичева В. Н., Огуречников А. А., Петин Ю. М. К выбору исходной технико-экономической информации для расчетных исследований эффективности фреоновых энергетических установок. № 3, вып. 1.
- Немировский Ю. В., Хейнлоо Я. Л. Локально-вихревой подход при описании вращательно-неизотропных турбулентных потоков. I. Основные уравнения. № 13, вып. 3.

- Ноздренко Г. В., Кузьмина И. А., Сычева Н. Д. Разделение затрат топлива при производстве тепла и электроэнергии на ТЭЦ. № 8, вып. 2.
- Попов А. Н. Оптимальный режим регулируемого двигателя смешанного возбуждения. № 3, вып. 1.
- Правдина М. Х. К определению длины пути смещения для турбулентного течения в канале. № 8, вып. 2.
- Пустогаров А. В., Халбошин А. П., Захаркин Р. Я., Завидей В. И. Исследование вольфрамовых катодов плазмотрона. № 8, вып. 2.
- Пустогаров А. В., Завидей В. И., Захаркин Р. Я., Халбошин А. П. Измерение температуры электронов плазмотрона. № 8, вып. 2.
- Рычков С. Н. Релаксационные колебания в системах на туннельных переходах. Джозефсона. № 8, вып. 2.
- Рычков С. Н. Исследование устойчивости колебаний в автогенераторах на сверхпроводящих переключающих элементах. № 3, вып. 1.
- Стронгин М. П., Лукарь И. Я. Численное исследование нестационарной электрической дуги. № 13, вып. 3.
- Сухович Е. П. Экспериментальное исследование локальных характеристик закрученного турбулентного течения в цилиндрическом канале. № 8, вып. 2.
- Суринов Ю. А. Об интерационно-зональном методе исследования и расчета лучистого теплообмена в поглощающей и рассеивающей среде. № 8, вып. 2.
- Суриц А. Л. Скорость закалки в плазмохимических реакторах. № 3, вып. 1.
- Сухович Е. П. Конвективный теплообмен при турбулентном смещении ограниченных коаксиальных струй. № 3, вып. 1.
- Урюков Б. А. Вероятностная модель электрической дуги в турбулентном потоке. № 13, вып. 3.
- Филиппов Ю. Е., Малков Ю. П. Исследование дугового пористого термокатада. № 13, вып. 3.
- Целиковский Е. Ф. Об одном методе определения граничных условий при решении задач магнитостатики. № 3, вып. 1.

**Исследования термоэмиссионных катодов.** Жуков М. Ф., Козлов Н. П., Пустогаров А. В., Аньшакова А. С., Дандарон Г.-Н. Б., Хвесюк В. И. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 13, сер. техн. наук, вып. 3.

В работе представлен обзор литературы по экспериментальным и теоретическим исследованиям термоэмиссионных катодов. Проведен подробный анализ имеющихся данных и на их основе выявлены основные закономерности изменения интегральных характеристик прикатодной области дуги.

Обсуждены распространенные в настоящее время модели прикатодных участков и предложена модель, наиболее полно охватывающая различные особенности работы прикатодных участков дуг. Рис. 20, библи. 39.

УДК 537.527

**Вероятностная модель электрической дуги в турбулентном потоке.** Урюков Б. А. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 13, сер. техн. наук, вып. 3.

Предложена модель электрической дуги в турбулентном потоке, основанная на учете вероятности пребывания элементов столба дуги в турбулентных молях. Считается, что в течение «времени жизни» моля развитие дуги в нем происходит, как в безграничном пространстве, поэтому возможно использовать результаты уже имеющихся соответствующих решений. Проведены оценки времени жизни моля и развития дуги в нем. Показано, что предлагаемая модель выполняется в обычных экспериментальных условиях. Рекомендован путь учета влияния собственных магнитных сил на вероятность распределения столба дуги в сечениях потока. Рис. 1, библи. 9.

УДК 533.9.08

**Измерение локальных температур нестационарной асимметричной дуги.** Мельникова Т. С., Пикалов В. В. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 13, сер. техн. наук, вып. 3.

В работе изучается форма электрической дуги в продольном магнитном поле в закрученном потоке аргона при атмосферном давлении. Определены изолинии температурного поля винтовой дуги в предположении их эллиптичности и сдвинутости вдоль одного из направлений наблюдения. Рассмотрен «верный» вариант схемы измерений поперечного распределения интенсивности излучения. Рис. 5, библи. 7.

УДК 533.924

**Исследование дугового пористого терموкатада.** Филиппов Ю. Е., Малков Ю. П. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 13, сер. техн. наук, вып. 3.

Приводятся результаты исследования пористого катода из вольфрама, работающего с дугой при атмосферном давлении и продуваемого горячим (до 2000°C) аргоном. Показано, что подача нагретого газа через пористый катод позволяет регулировать параметры прикладной области дуги. Рис. 5, библи. 5.

УДК 537.525.1

**Численное исследование нестационарной электрической дуги.** Стронгин М. П., Яцкарь И. Я. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 13, сер. техн. наук, вып. 3.

Представлены результаты численного расчета уравнений безрасходной электрической дуги в канале с учетом излучения при гашении стационарной дуги и при наложении на дугу постоянного тока ее переменной составляющей или напряжения конечной амплитуды.

Проведено сравнение динамической и статической ВАХ, показавшее существенное их различие, особенно при больших частотах и амплитудах возмущений. Рассмотрено влияние активного сопротивления в цепи на динамику выхода дуги на рабочий режим.

Расчеты, в частности, показали важность учета излучения дуги и несущественность влияния на теплообмен радиальной скорости газа в канале. Рис. 6, библи. 5.

Редактор *И. Н. Стригун*  
Художественный редактор *Э. С. Филонычева*  
Технический редактор *А. В. Семкова*  
Корректоры *С. В. Блинова, А. А. Надточий*

Сдано в набор 20.07.78. Подписано к печати 9.11.78. МН-10311. Формат 70×108<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Литературная гарнитура. Высокая печать. Усл. печ. л. 16,1. Уч.-изд. л. 16,4. Тираж 2108 экз. Заказ № 221.

Издательство «Наука», Сибирское отделение. 630099, Новосибирск, 99, Советская, 18, 4-я типография издательства «Наука». 630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25.

Некоторые аспекты гармонического анализа пульсаций «турбулентной» дуги. Гапонов В. А., Лебедев А. Д., Назарук В. И. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 13, сер. техн. наук, вып. 3.

С помощью оптоэлектронной системы исследуется поведение дуги, горящей в затопленной струе газа, в ряде сечений потока. Дается методика цифровой обработки эксперимента, основанная на спектральном анализе пульсаций дуги с применением алгоритма быстрого преобразования Фурье и проиллюстрированная результатами счета. Рис. 4, библи. 9.

УДК 537.523

Возможности СВЧ метода генерации плазмы. Батенин В. М. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 13, сер. техн. наук, вып. 3.

В статье дан обзор современного состояния теоретических и экспериментальных исследований СВЧ разрядов повышенного давления в молекулярных и инертных газах. Демонстрируется бесперспективность использования таких разрядов для получения равновесной плазмы со сравнительно высокой температурой. Обсуждаются возможные механизмы установления стационарного неравновесного состояния в простейших смесях инертных газов с молекулярными добавками. Обращено внимание на возможности использования нового класса СВЧ разрядов — движущихся. Приведены результаты исследований механизмов движения фронта ионизации в различных газах и свойств комбинированных СВЧ и дуговых разрядов и их устойчивости во внешнем магнитном поле. Рис. 5, библи. 16.

УДК 536.24 : 537.312.51

Конечно-разностное решение нестационарных краевых задач лучисто-кондуктивного теплообмена и оценка точности двухпоточкового приближения для конденсированных сред. Горбань И. А., Липовцев Ю. В. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 13, сер. техн. наук, вып. 3.

Разработан универсальный алгоритм конечно-разностного решения широкого класса одномерных нестационарных задач радиационно-кондуктивного теплообмена в плоском слое полупрозрачной среды. Поверхности слоя предполагаются оптически гладкими и проницаемыми для тепловых лучей, а решение проводится с учетом нерегулярностей углового и спектрального распределения радиации в слое, обусловленного селективностью радиационных характеристик материала, эффектами многократного внутреннего и полного внутреннего отражений на границах и неравномерностью внешнего потока лучистой энергии по угловой и спектральной переменным.

Разработанный алгоритм использован в качестве критерия оценки существующих упрощенных схем двухпоточкового приближения. На характерном примере показаны возможные погрешности приближенных решений и основные факторы их возникновения. Рис. 6, библи. 17.

УДК 532.526.4

Тепломассообмен в неизотермическом турбулентном пограничном слое с положительным градиентом давления. Волчков Э. П., Спатарь С. Ю., Терехов В. И. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 13, сер. техн. наук, вып. 3.

Изучено влияние положительного градиента давления на процессы тепло-массообмена в неизотермическом турбулентном пограничном слое. Получена относительная функция тепломассообмена в зависимости от продольного положительного градиента давления. Приведены экспериментальные результаты по выгоранию графитовых диффузоров с различным углом раскрытия ( $\alpha = 6 \div 20^\circ$ ).

В работе показано, что коэффициент теплообмена в точке отрыва турбулентного неизотермического ( $\psi = 7$ ) пограничного слоя возрастает в  $\sim 1,4$  раза по сравнению с безградиентным течением. Рис. 4, библи. 8.

УДК 532.01+532.517.4

Локально-вихревой подход при описании вращательно неизотропных потоков. I. Основные уравнения. Немировский Ю. В., Хейнлоо Я. Л. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 13, сер. техн. наук, вып. 3.

На основе представления о турбулентных течениях, как о движениях иерархически непрерывно образующихся, дробящихся, закручивающихся, переориентирующе-неизотропных турбулентных потоков. Уравнения внешне подобны уравнениям асимметричной гидромеханики, но имеют иное внутреннее содержание. На основе исследования баланс энергии вращательно неизотропных турбулентных потоков. Библи. 7.

УДК 532.542.4

Локально-вихревой подход при описании вращательно неизотропных турбулентных потоков. II. Турбулентные течения в плоском канале, в круглой трубе и между вращающимися цилиндрами. Немировский Ю. В., Хейнлоо Я. Л. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 13, сер. техн. наук, вып. 3.

На основании уравнений, выведенных в I части данной работы получены аналитические решения задач об установившихся турбулентных течениях в плоском канале (течения типа Пуазейля и Куэтта), в цилиндрических трубках и между вращающимися цилиндрами. Показано во всех случаях вполне удовлетворительное соответствие теоретических и известных экспериментальных профилей течения. Исследована структура энергетического баланса при течении в плоском канале. Показано ее существенно различный характер в центральной части канала и в области пограничного слоя. Рис. 4, библи. 5.

УДК 533.6.07

Методика экспериментальных исследований аэродинамической интерференции небольших надстроек с несущей поверхностью. Бродецкий М. Д., Максимов А. И., Харитонов А. М. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 13, сер. техн. наук, вып. 3.

В работе изложена методика экспериментальных исследований аэродинамической интерференции небольших надстроек с несущей поверхностью при сверхзвуковых скоростях.

Методика основана на измерении аэродинамических характеристик исследуемой надстройки с помощью тензометрических весов и распределения давления на поверхности модели в зоне интерференции.

Особенностью разработанной методики является установка надстроек с небольшим зазором относительно несущей поверхности при тензометрических измерениях, что приводит к необходимости введения поправок на донное давление и сопротивление трения в донной части надстроек.

Приведены результаты методических исследований, проведенных на схематизированной модели плоского полукрыла при числах  $M = 2,5$  и  $Re = 28 \cdot 10^5$  (на 1 м). Показана удовлетворительная сходимость результатов измерений по разработанной методике с результатами весовых испытаний на механических весах аэродинамической трубы. Рис. 5, библи. 2.

УДК 517.945

Устойчивость предельного стационарного решения при обтекании кругового конуса. Блохин А. М., Роменский Е. И. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 13, сер. техн. наук, вып. 3.

В работе исследуются уравнения для распространения малых возмущений при обтекании кругового конуса сверхзвуковым потоком газа под нулевым углом атаки. С помощью энергетических оценок установлено, что стационарное течение устойчиво по отношению к малым возмущениям. Вычислено несколько точек спектра уравнений для малых возмущений и на основании полученных собственных функций проанализирована разностная схема Mac Cormack'a. Рис. 10, библи. 7.

Расчет нестационарной турбулентной двухфазной струи распыленной жидкости. Лебедев О. Н., Солоненко О. П. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 13, сер. техн. наук, вып. 3.

Математически поставлена задача о нестационарном развитии турбулентной двухфазной струи. На основе теории подобия и опытного материала различных исследований получена зависимость для числа Шмидта. Путем сопоставления результатов расчета и эксперимента найдена формула, определяющая закономерности изменения коэффициента турбулентной вязкости в двухфазной струе распыленного топлива. Рис. 8, библи. 23.

УДК 533.6.011.5

Геометрические характеристики сверхзвуковой недорасширенной струи. Альбазаров Б. Ш. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 13, сер. техн. наук, вып. 3.

Рассматривается метод аппроксимации всякого скачка и границы недорасширенной сверхзвуковой струи четырехпараметрической кривой. Записана и решена система уравнений для определения параметров. Полученные результаты расчета кривых сравниваются с численными, приближенными и экспериментальными данными. Рис. 4, библи. 7.

УДК 533.6 : 532.5

Расчет обтекания прямой решетки произвольных профилей стационарным потоком газа. Зайцев В. П. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 13, сер. техн. наук, вып. 3.

Рассматривается течение невязкого и нетеплопроводного газа в плоской решетке. Стационарная картина течения получается в процессе установления при интегрировании нестационарных уравнений газодинамики по конечно-разностной схеме С. К. Годунова.

Приводятся результаты исследования влияния густоты решетки и скорости набегающего потока на аэродинамические характеристики решетки симметричных профилей. Рис. 5, библи. 13.

УДК 62.52

Оптимизация системы контроля управляемых технологических процессов тепломассообмена. Демиденко Н. Д. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 13, сер. техн. наук, вып. 3.

В работе рассматриваются задачи моделирования, оптимального контроля и управления объектами с распределенными параметрами, в которых осуществляется рециркуляция взаимодействующих потоков. Поставлена краевая задача для анализа статических и динамических характеристик процесса тепломассообмена. Получены необходимые условия оптимальности контроля и оптимального управления. Для получения передаточных функций применяются инерционности процесса. Проведено численное исследование пульсирующих режимов. Рис. 3, библи. 6.

УДК 537.523.74

Некоторые вопросы моделирования ВЧ-разряда. Вашук С. И., Марусин В. В. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 13, сер. техн. наук, вып. 3.

В работе сформулирована система балансных уравнений для ВЧ-разряда. При этом учтено, что усредненная по времени функция распределения электронов по скоростям в ВЧ-поле может отличаться от своего эффективного значения. Сделана оценка степени отличия усредненных по времени параметров плазмы от своих эффективных значений. Проведен численный анализ уравнений баланса, оценены основные характеристики ВЧ-разряда. Рис. 13, библи. 11.

УДК 517.944/947

Расчет теплового режима ледопородных емкостей в фильтрующих пластах. Валиуллин А. Н., Паасонен В. И., Сапунов Н. Е., Сафин Р. И. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 13, сер. техн. наук, вып. 3.

Описана численная модель тепловых процессов, протекающих при строительстве и эксплуатации подземных низкотемпературных ледопородных резервуаров-хранилищ сжиженного газа, в условиях омывания объекта направленным фильтрационным потоком грунтовых вод. Предполагается, что скорость промерзания грунта ниже скорости фильтрации. Это предположение позволяет считать поле скоростей квазистационарным, что, в свою очередь, делает возможным сегментировать задачу на две более простые: задачу фильтрации и тепловую задачу с учетом конвективных процессов в талой зоне.

Рассматриваются две постановки задачи, ориентированные на расчет осесимметричных и плоскосимметричных объектов. Рис. 5, библи. 6.

УДК 541.64 : 539.55; 532.135

Исследование вязкости разбавленных растворов полиэтиленоксида. Кирияненко А. А. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 13, сер. техн. наук, вып. 3.

Исследована концентрационная зависимость вязкости сильно разбавленных водных растворов американского полиэтиленоксида WSR-301. На основе данных о вязкости проанализированы термодинамические и гидродинамические характеристики молекулы полиэтиленоксида в растворе. Экспериментально доказано, что фазовые переходы типа «клубок — спираль» наблюдаются в растворах не только при воздействии температур и замене растворителя, но и при увеличении концентрации растворов. Рис. 3, библи. 6.

УДК 537.213

Метод расчета распределения потенциала вдоль оси симметрии поля. Грач И. М. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 13, сер. техн. наук, вып. 3.

Предложен метод, позволяющий по известной границе поля и значениям потенциала на границе находить распределение потенциала вдоль оси симметрии плоскомеридианного поля, не рассчитывая поле во всей области его существования. Библи. 6.

УДК 621.311.016; 621.86.062

Исследование установившихся и квазиустановившихся послеаварийных режимов с учетом динамики частоты. Калужный А. Х., Соколов Ю. В. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 13, сер. техн. наук, вып. 3.

Описана математическая модель энергосистемы для расчета установившихся и квазиустановившихся послеаварийных режимов с учетом динамики частоты. Изложен алгоритм расчета этих режимов и проверки их статической устойчивости. Рассмотрена возможность применения программы, реализующей описанный алгоритм, для управления послеаварийными режимами. Библи. 6.

УДК 621.315.1.064.1

Влияние поверхностного эффекта в земле на восстанавливающиеся напряжения при отключении неудаленных коротких замыканий. Ковалев Б. И., Милевский А. К. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 13, сер. техн. наук, вып. 3.

В данной работе рассматривается влияние поверхностного эффекта на процесс восстановления напряжения при отключении неудаленных КЗ. Известно, что на практике поверхностный эффект в значительной степени определяет интенсивное затухание высокочастотных составляющих, имеющих частоту до нескольких десятков кГц.

Расчеты показали, что учет поверхностного эффекта резко усложняет решение задачи и делает прямые численные расчеты мало пригодными для практических исследований. В статье предлагается упрощенная инженерная методика построения кривых ВН при отключении удаленных КЗ, основанная на том, что высокочастотная составляющая ВН, демпфированная поверхностным эффектом, может быть достаточно точно описана аналитически как затухающий гармонический процесс. Рис. 4, библиограф. 10.

УДК 621.315.1.052.63

Уравнения параметров режима в промежуточных точках электропередачи. Жанаев Ц. Т., Заславская Т. Б. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 13, сер. техн. наук, вып. 3.

В работе получены уравнения напряжения доаварийного режима, входного сопротивления и тока короткого замыкания в ЛЭП связанного варианта исполнения, разбитой на  $n$  участков.

Показано, что известные аналитические соотношения для ЛЭП блочного варианта исполнения являются частными случаями соответствующих выражений связанной схемы электропередачи.

Полученные уравнения могут быть использованы при расчете аварийных режимов сети в любых промежуточных точках многоценной электропередачи. Рис. 3, библиограф. 4.

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
ИЗДАТЕЛЬСТВА «НАУКА»

готовит к выпуску в 1979 г. следующие книги:

- Хрилев Л. С. Теплофикация и тепло-энергетический комплекс. 20 л. 3 р. 50 к.
- Строительство и эксплуатация гидротехнических сооружений в Западной Якутии. 6 л. 90 к.
- Кобзев А. В. Многозонная импульсная модуляция (теория и применение в системах преобразования параметров электрической энергии). 20 л. 3 р. 50 к.
- Цифровые методы измерения сдвига фаз. 16 л. 3 р.

*Книги высылаются наложенным платежом.  
Заказы направляйте по адресу:  
630090, Новосибирск-90 Морской пр., 22,  
магазин «Наука»*

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
ИЗДАТЕЛЬСТВА «НАУКА»

готовит к выпуску в 1979 г. следующие книги:

- Теория устойчивости и ее приложения. 20 л. 3 р. 50 к.  
Динамика управляемых систем. 20 л. 3 р. 50 к.  
Орлов Ю. Ф. Потенциал ускорений в гидродинамике корабельных волн. 13 л. 2 р.  
Стохастические системы управления 7 л. 1 р. 10 к.  
Матросов В. М., Анапольский Л. Ю., Васильев С. Н. Метод сравнения в математической теории систем. 25 л. 4 р. 30 к.  
Шокин Ю. И. Метод дифференциального приближения. 10 л. 1 р. 50 к.

*Книги высылаются наложенным платежом.*

*Заказы направляйте по адресу:*

*630090, Новосибирск-90 Морской пр., 22.*

*магазин «Наука»*