

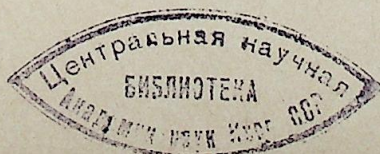
ИЗВЕСТИЯ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

СЕРИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

Год основания журнала 1957 Год основания серии 1963	Периодичность журнала 15 номеров в год Периодичность серии 3 номера в год	№ 8 (293) Вып. 2	Июнь 1978
--	--	---------------------	--------------

СО Д Е Р Ж А Н И Е

В. В. Затолока, В. И. Звезгинцев, В. В. Шумский. Влияние процесса сжатия в воздухозаборнике на удельные тяговые характеристики ГПВРД	3
В. В. Бербасов, В. А. Урьков. Влияние закрутки на свойства электрической дуги в цилиндрическом канале	13
А. А. Бобнев. Динамические характеристики электрической дуги, горящей в цилиндрическом канале	18
Т. С. Мельникова, В. Г. Попенко, И. М. Уланов. Экспериментальное исследование стабилизированной вихрем электрической дуги в продольном магнитном поле	31
А. В. Пустогаров, А. П. Халбошин, Р. Я. Захаркин, В. И. Завидей. Исследование вольфрамовых катодов плазмотрона	39
Р. Я. Захаркин, А. В. Пустогаров, А. П. Халбошин. Двухступенчатый многоэлектродный плазмотрон	46
А. В. Пустогаров, В. И. Завидей, Р. Я. Захаркин, А. П. Халбошин. Измерение температуры электронов плазмотрона	51
А. Л. Бараников, П. Ю. Пекшев. Особенности рабочих процессов в сильноточных газоразрядных приборах с отрицательной проводимостью	62
Г. А. Алексеев, В. Д. Дараган, В. И. Завидей, Г. Н. Мельников, А. В. Пустогаров. Нестационарный метод комплексного определения теплофизических свойств высокотемпературных материалов	78
О. Н. Лебедев, В. Н. Марченко. Экспериментальное исследование испарения капель углеводородных топлив при высоких температурах и давлениях газовой среды	82
М. Х. Правдина. К определению длины пути смешения для турбулентного течения в канале	86
Е. П. Сухович. Экспериментальное исследование локальных характеристик закрученного турбулентного течения в цилиндрическом канале	91
В. М. Корнев. Плотность движений при флаттере бесконечных пластин	101
Ю. А. Суринов. Об итерационно-зональном методе исследования и расчета лучистого теплообмена в поглощающей и рассеивающей среде	106
Н. Д. Демиденко, Б. Н. Девятков, М. В. Елин. Оптимальное управление технологическими процессами с рециркуляцией взаимодействующих потоков	126
А. Г. Гроссман. Процессы переноса в дисперсиях при умеренных концентрациях	131
С. Н. Рычков. Релаксационные колебания в системах на туннельных переходах Джозефсона	135
Б. З. Гамм, Н. Н. Ефименко. Некоторые особенности расчетов электромеханических переходных процессов	140
З. З. Манусов, М. И. Вечерский. Информационное и алгоритмическое обеспечение пакета прикладных программ машинного проектирования электрических сетей энергосистем	146
И. А. Ефремов, М. Л. Левинштейн, Е. А. Смирнов. Определение вероятности перекрытия системы воздушных промежутков при различных аппроксимациях законов распределения разрядного напряжения и воздействующих перенапряжений	152
Г. В. Ноздренко, И. А. Кузьмина, Н. Д. Сычева. Разделение затрат топлива при производстве тепла и электроэнергии на ТЭЦ	161



ИЗВЕСТИЯ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

Главный редактор журнала чл.-кор. М. Ф. Жуков
Заместитель главного редактора д-р физ.-мат. наук В. Г. Дулов

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ СЕРИИ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

Ответственный редактор серии чл.-кор. М. Ф. Жуков

Чл.-кор. О. Ф. Васильев, д-р техн. наук Б. Н. Деятов, д-р физ.-мат. наук В. Г. Дулов, чл.-кор. Н. А. Желтухин (зам. ответственного редактора), д-р техн. наук В. Е. Накоряков, д-р техн. наук Н. А. Рубцов (ответственный секретарь серии), д-р техн. наук Б. А. Урюков, д-р техн. наук В. К. Щербаков

Адрес редакции: 630099, Новосибирск, 99, Советская, 18, комн. 331, тел. 22—00—44

Редактор Т. Б. Мелкозерова
Художественный редактор Э. С. Филонычева
Технический редактор А. В. Семкова
Корректоры М. В. Ржевцева, О. А. Макеева

Сдано в набор 28.03.78. Подписано к печати 13.06.78. МН 01557. Бумага 70×108¹/₁₆, машиномелованная. Литературная гарнитура. Высокая печать. 10,5 печ. л., 14,7 усл.-печ. л., 14,7 уч.-изд. л. Тираж 2080 экз. Заказ № 100. Цена журнала 70 коп.

Издательство «Наука», Сибирское отделение. 630099, Новосибирск, 99, Советская, 18. 4-я типография издательства «Наука», 630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25.

© Издательство «Наука»,
«Известия Сибирского отделения АН СССР», 1978 г.

В. В. ЗАТОЛОКА, В. И. ЗВЕГИНЦЕВ, В. В. ШУМСКИЙ

ВЛИЯНИЕ ПРОЦЕССА СЖАТИЯ В ВОЗДУХОЗАБОРНИКЕ
НА УДЕЛЬНЫЕ ТЯГОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГПВРД

При исследованиях прямооточных воздушно-реактивных двигателей для гиперзвукового полета (ГПВРД) возникает вопрос о том, какой степени совершенства целесообразно требовать от составных частей двигателя (воздухозаборника, камеры сгорания, сопла). Для обоснованного ответа на этот вопрос необходимы сведения о влиянии газодинамических и геометрических параметров составных частей двигателя на его удельные характеристики по тяге и расходу топлива. В данной статье рассматривается влияние на удельные тяговые параметры двигателя характеристик процесса сжатия захватываемой струи воздуха в воздухозаборнике.

1. На рис. 1 изображены схемы двигателя. Воздух с давлением p_n и температурой T_n , соответствующими высоте полета H , набегает на двигатель со скоростью V_n и числом Маха полета M_n . В воздухозаборнике происходит его торможение до скорости V_2 , числа Маха $M_2 \geq 1$ и сжатие до давления p_2 . Сечение 2—2 является сечением выхода из воздухозаборника и одновременно началом камеры сгорания. В сечении 2—2 впрыскивается водород, и образующиеся в камере сгорания продукты горения водорода с воздухом, истекая через сопло (участок 3—4), покидают двигатель со скоростью V_a и давлением p_a .

В принятой схеме расчета подвод тепла осуществляется в комбинированной камере сгорания, смысл этого процесса заключается в следующем.

Пока в канале постоянного сечения при подводе тепла, выделяющегося при сгорании водорода, не наступает «тепловой кризис», камера

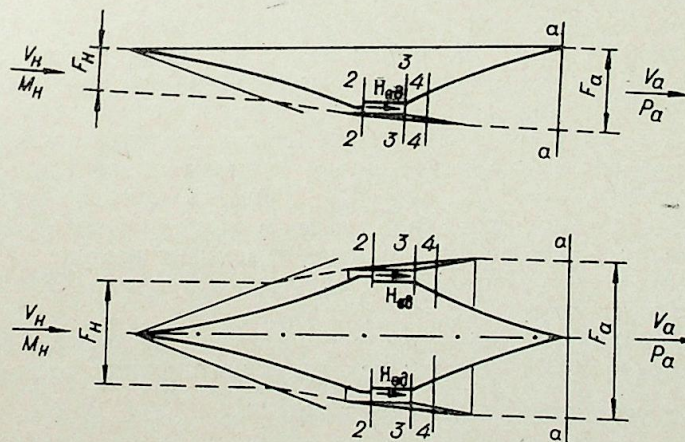


Рис. 1. Схемы двигателя.

сгорания состоит лишь из одного участка 2—3 с постоянной площадью поперечного сечения $F_k = F_2 = F_3$. Если же в канале постоянного сечения невозможно подвести все тепло, выделяющееся при сгорании топлива, то на участке 2—3 с $F_k = \text{const}$ подводится лишь часть тепла до достижения $M_3 = 1$ ($M_3 = V_3/a_3$, где a_3 — скорость звука в газе в сечении 3). Оставшаяся часть тепла подводится в расширяющемся канале при $M=1$ (участок 3—4). В качестве расширяющегося канала в этом случае может быть использован начальный участок сопла. Комбинированная камера выбрана для данного анализа потому, что подвод тепла осуществляется в ней с минимальными потерями [1].

2. При расчетах приняты следующие основные допущения: а) течение в сечении тракта считается одномерным; б) воздух и продукты сгорания находятся в равновесном состоянии; воздух состоит из компонентов N_2 , O_2 , NO , O , N , Ag , продукты сгорания из компонентов O_2 , H_2 , N_2 , H_2O , OH , NO , N , O , H , Ag ; в) потерь тепла через стенки двигателя нет; г) водород впрыскивается в камеру сгорания в сечении 2—2 параллельно вектору основного потока с температурой торможения $T_{0\text{вд}} = 200$ К. Давление водорода на срезе впрыскивающего устройства равно давлению в сечении 2—2, давление торможения водорода $p_{0\text{вд}} = = 2 p_2$. В этом случае скорость водорода на срезе практически равна звуковой. Коэффициент избытка воздуха $\alpha = 1$, коэффициент полноты сгорания равен единице.

Для определения параметров воздуха за воздухозаборником составляется система уравнений из следующих групп:

$$\begin{aligned} \text{уравнение расхода } m_n &= \rho_2 V_2 F_2 = \rho_n V_n F_n, \\ \text{уравнение сохранения энергии } i_2 + \frac{V_2^2}{2} &= i_n + \frac{V_n^2}{2}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{уравнение прироста энтропии } S_2 = S_n + \Delta S,$$

$$\text{уравнение состояния } \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{R_0}{\mu_2} T_2,$$

уравнения сохранения количества атомов химических элементов N , O , Ag ,

уравнения реакций,

уравнение закона Дальтона.

Здесь m_n , i , S , p , ρ , μ — массовый расход, кг/с, удельная энтальпия, Дж/кг, удельная энтропия, Дж/кг·град, давление, н/м², плотность, кг/м³, и молекулярный вес воздуха на выходе из воздухозаборника (индекс 2) и в набегающем потоке (индекс «н»).

Метод составления трех последних групп уравнений и решения системы (1) изложен в [2]. В этой системе удельные потери механической энергии при сжатии воздуха в воздухозаборнике оцениваются приростом удельной энтропии $\Delta S = S_2 - S_n$. Решая систему при заданных величинах ΔS и заданной степени уменьшения площади поперечного сечения струи воздуха в воздухозаборнике (относительной площади горла воздухозаборника) $f_2 = F_2/F_n$, где F_2 — площадь канала двигателя на выходе из воздухозаборника (на входе в камеру сгорания), а F_n — площадь сечения струи воздуха в невозмущенном потоке, захватываемой воздухозаборником, определяем параметры в сечении 2, т. е. на выходе из воздухозаборника.

Система уравнений для расчета параметров на выходе из камеры сгорания (сечение 3—3) состоит из следующих групп уравнений:

$$\text{уравнение сохранения массы } m_3 = m_n + m_{\text{вд}},$$

$$\text{уравнение сохранения количества движения}$$

$$m_3 V_3 - m_{\text{вд}} V_{\text{вд}} - m_n V_2 = F_3 (p_3 - p_2),$$

уравнение сохранения энергии

$$i_3 + \frac{V_3^2}{2} = \frac{m_n \left(i_2 + \frac{V_2^2}{2} \right) + m_{\text{вд}} i_{0\text{вд}}}{m_n + m_{\text{вд}}}, \quad (2)$$

$$\text{уравнение состояния } \frac{p_3}{\rho_3} = \frac{R_0}{\mu_3} T_3,$$

уравнения сохранения количества атомов химических элементов H , N , O , Ag ,

уравнения реакций,

уравнение закона Дальтона.

Индекс «вд» относится к водороду, индекс «н» — к воздуху; $i_{0\text{вд}}$ — полная удельная энтальпия водорода.

Если в результате решения системы уравнений (2) число Маха в сечении 3 $M_3 \geq 1$ (т. е. $V_3 \geq a_3 = \sqrt{\kappa_3 \frac{R_0}{\mu_3} T_3}$), то сечение 3 считается выходом из камеры сгорания, и на следующем шаге определяются параметры на срезе сопла (сечение a). Если же в процессе решения системы уравнений (2) при определении p_3 и V_3 получаются мнимые величины, то это означает, что на участке 2—3 ($F = F_2 = F_3 = \text{const}$) к газу невозможно подвести все тепло, выделяющееся при сгорании водорода с $\alpha = 1$: наступает термическое заклинивание камеры сгорания. В этом случае уравнения (2) решаются при таком $\alpha_3 > 1$, когда скорость в сечении 3 становится равной скорости звука, т. е. $M_3 = 1$. Оставшееся количество тепла, соответствующее разности коэффициентов избытка воздуха $\alpha = 1$ и $\alpha = \alpha_3$, подводится в расширяющемся участке 3—4 при $M = 1$, постоянном вдоль этого участка. Система уравнений для определения параметров газа в сечении 4 аналогична в этом случае системе (2), только вместо уравнения сохранения количества движения берется условие $M = \text{const} = 1$.

Аналогичная система уравнений для сечений 3— a (при отсутствии «теплового кризиса») или 4— a (при наличии «теплового кризиса») составляется и для расчета параметров на срезе сопла, только здесь вместо уравнения сохранения количества движения берется уравнение сохранения удельной энтропии $S_a = S_3$ или $S_a = S_4$.

После определения параметров потока на выходе из сопла вычисляются внутренняя удельная тяга $R_{\text{уд}}$, равная отношению внутренней тяги двигателя $R_{\text{дв}}$ к расходу воздуха m_n , и внутренний удельный импульс $I_{\text{уд}}$, равный отношению внутренней тяги двигателя к расходу водорода $m_{\text{вд}}$:

$$\begin{aligned} R_{\text{дв}} &= (m_n + m_{\text{вд}}) V_a \varphi_c - m_n V_n + F_a (p_a - p_n), \\ R_{\text{уд}} &= \frac{1 + \alpha L_0}{\alpha L_0} V_a \varphi_c - V_n + F'_a (p_a - p_n), \\ I_{\text{уд}} &= \alpha L_0 R_{\text{уд}}, \end{aligned} \quad (3)$$

где L_0 — теоретически необходимое количество воздуха, кг, для полного сжигания 1 кг топлива; φ_c — коэффициент скорости, учитывающий потери энергии в сопле, для расчетов принимался постоянным и равным 0,98; $F'_a = F_a/m_n$ — площадь среза сопла, отнесенная к 1 кг воздуха, проходящего через тракт двигателя. Для расчетов принималось $F_a = 1,5 F_n$.

Задаваясь различными значениями двух параметров, характеризующих процесс сжатия воздуха в воздухозаборнике (если пользоваться для вычислений описанными выше системами уравнений, то удобно брать параметры ΔS и f_2), можно проанализировать влияние процесса в воздухозаборнике на внутренние удельные тяговые характеристики ГПВРД. На рис. 2 для чисел Маха полета $M_n = 8, 10, 12$ и 15 приведены значения внутренней удельной тяги $R_{\text{уд}}$ и удельного импульса

$I_{уд}$ в зависимости от характеристик процесса сжатия воздуха в воздухозаборнике в широком диапазоне их изменения. Эти графики получены путем расчетов по описанным выше системам уравнений. На графиках представлены четыре параметра, характеризующие процесс в воздухозаборнике: степень сжатия по давлению p_2/p_n , относительная площадь горла воздухозаборника f_2 (можно ввести степень сжатия поперечного сечения захватываемой струи $1/f_2$), число Маха M_2 на входе в камеру сгорания, коэффициент восстановления полного давления $v = p_{02}/p_{0n}$, сечение H , (где p_{0n} и p_{02} — давление торможения воздуха в атмосфере, сечение H , и на выходе из воздухозаборника, сечение 2). Параметра v нет в использованных системах уравнений — в них используются лишь статические параметры воздуха или газа. Однако v широко применяется в качестве характеристики процесса сжатия в воздухозаборнике. Необходимые для определения v величины p_{0n} и p_{02} вычислялись с учетом химического и термодинамического равновесия изоэнтальпически заторможенного воздуха сечений H и 2 на основе равенства полных энтальпий $i_{02} = i_{0n}$ и заданных значений ΔS .

Графики, аналогичные приведенным на рис. 2, можно построить для любых значений M_n и H работы ГПВРД.

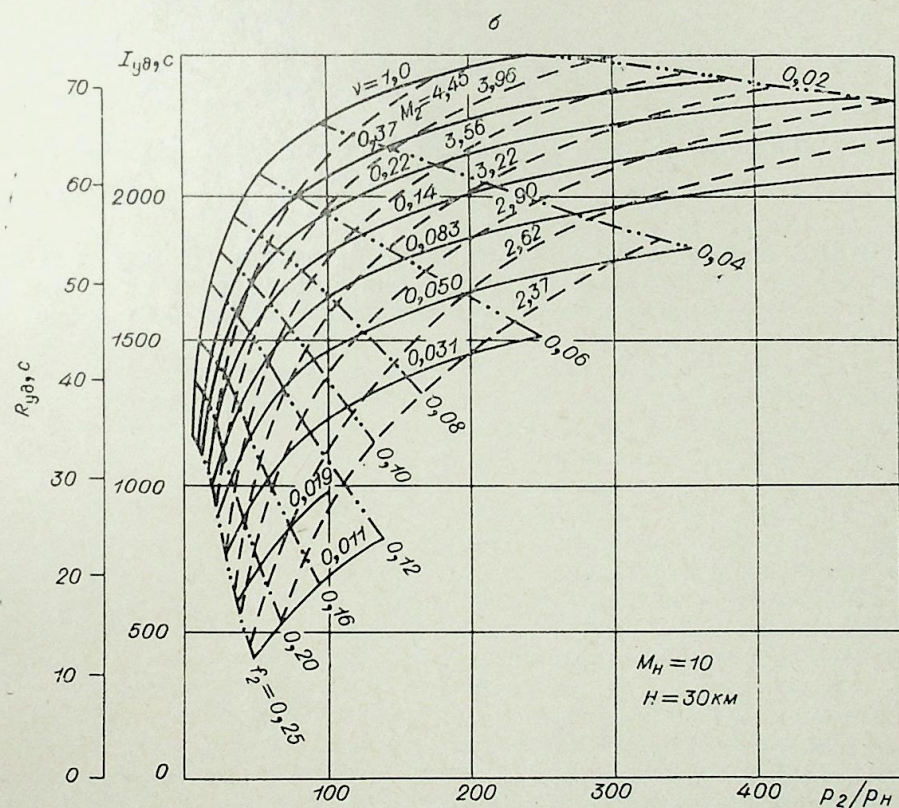
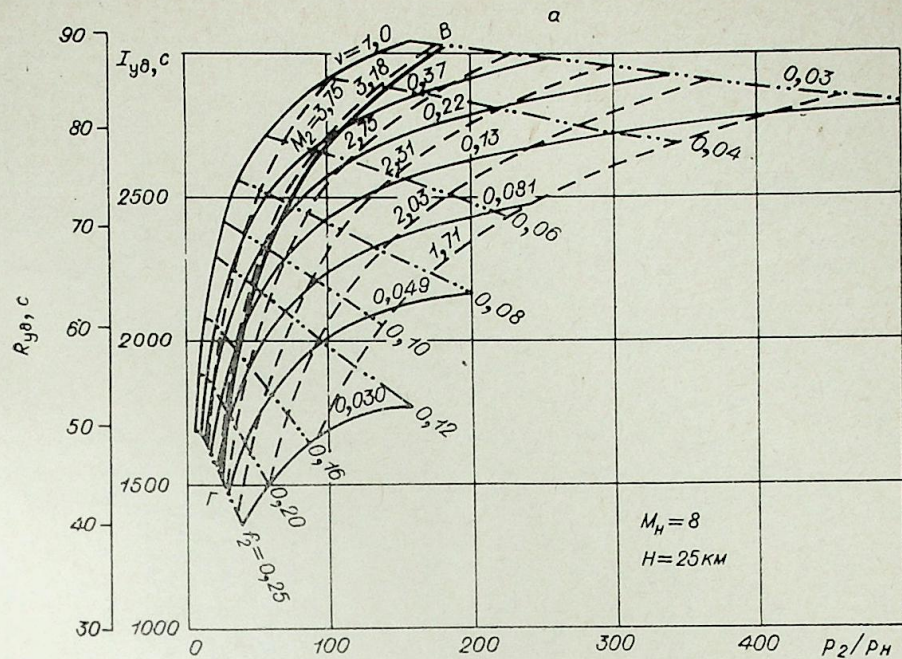
3. Из анализа физического смысла явлений в ГПВРД и использованных уравнений (как и других возможных уравнений, например, для идеального газа) следует, что влияние процесса в воздухозаборнике на $I_{уд}$ и $R_{уд}$ характеризуется двумя параметрами этого процесса, например p_2/p_n и f_2 , или p_2/p_n и v , или M_2 и f_2 и т. д. Это видно на рис. 2. Аналогичные соображения о необходимости характеристики процесса сжатия в воздухозаборнике двумя параметрами отмечаются в работах [3, 4].

Весьма удобна пара параметров p_2/p_n и f_2 , так как они легко определяются в эксперименте и носят конструктивный характер: f_2 характеризует одно из основных требований к конфигурации поверхностей, образующих воздухозаборник, а p_2/p_n показывает, какое повышение давления должна преодолеть в воздухозаборнике захватываемая струя, что важно для ее пограничного слоя.

Известно, что использование одного параметра для оценки качества сжатия возможно для воздухозаборников двигателей небольших сверхзвуковых скоростей полета — с дозвуковой скоростью в контрольном сечении (на входе в турбореактивный двигатель или на входе в камеру сгорания прямоточного двигателя с дозвуковой скоростью в камере сгорания), где качество сжатия оценивается одной величиной — коэффициентом $v = p_{02}/p_{0n}$. В случае ГПВРД такая возможность не найдена — процесс сжатия характеризуется двумя параметрами. Более того, эффективность воздухозаборника как составной части ГПВРД определяется в конечном счете эффективностями всех составных частей двигательного процесса: сжатия, теплоподвода в камере сгорания, расширения в сопле, которые взаимосвязаны и влияют друг на друга. Однако для того, чтобы выяснить, насколько хорош или плох тот или иной воздухозаборник, для сравнения между собой различных воздухозаборников, для оценки силы влияния характеристик сжатия в воздухозаборнике желательно, чтобы качество сжатия в воздухозаборнике оценивалось одним параметром.

Для случая ГПВРД удобным способом оценки может служить использование одного из тяговых удельных параметров ($I_{уд}$ или $R_{уд}$ двигательного газотермодинамического процесса какой-либо определенной схемы, например величин $I_{уд}$ или $R_{уд}$, приведенных на рис. 2. При $\alpha = \text{const}$ они однозначно связаны между собой соотношением (3), но имеют разный физический смысл и оба являются важными характеристиками двигателя. Графики рис. 2 могут служить для такой оценки.

При параметрах сжатия в воздухозаборнике, взятых левее линии ВГ на рис. 2, а, поток по всему тракту ГПВРД остается сверхзвуковым.



При параметрах, соответствующих линии ВГ, в конце камеры сгорания при $F_k = \text{const}$ (рис. 1, сечение 3—3) достигается $M_3 = 1$. При параметрах, взятых правее ВГ, $I_{уд}$ и $R_{уд}$ рассчитаны для комбинированной камеры сгорания. Она позволяет существенно расширить диапазон рабо-

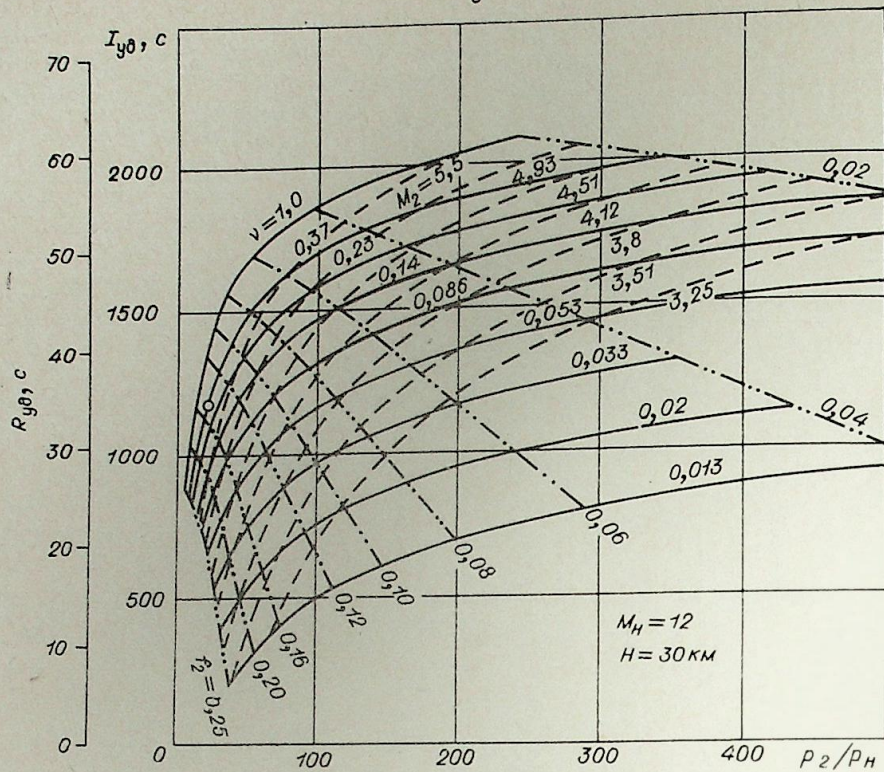


Рис. 2. Зависимость удельных тяговых параметров от характеристик процесса сжатия в воздухозаборнике.

а) $M_H = 8, H = 25$ км; б) $M_H = 10, H = 30$ км; в) $M_H = 12, H = 30$ км; г) $M_H = 15, H = 35$ км.

ты ГПВРД в область меньших значений M_H полета. На рис. 2, б, в, г, линия ВГ не попала в поле графика — она лежит при больших степенях сжатия в воздухозаборнике p_2/p_H и $1/f_2$, чем представленные на рисунках.

График рис. 3, построенный на основании результатов, аналогичных приведенным на рис. 2, показывает влияние f_2 при $v = \text{const}$ на I_{yd} .

Здесь по оси абсцисс отложены значения f_2 , а по оси ординат — значения I_{yd} , деленные на I_{yd} при $f_2 = 0,08$. Согласно графику, который получился в виде довольно узкой полоски для диапазона $v = 1 \div 0,14$, для ГПВРД желательны воздухозаборники с возможно меньшей площадью горла f_2 . Это справедливо, если с уменьшением f_2 второй параметр — величина v — изменяется незначительно. Если же уменьшение f_2 сопровождается заметным изменением v , вывод о влия-

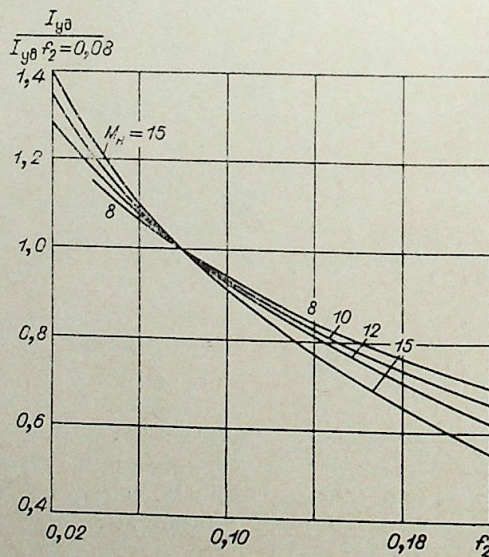
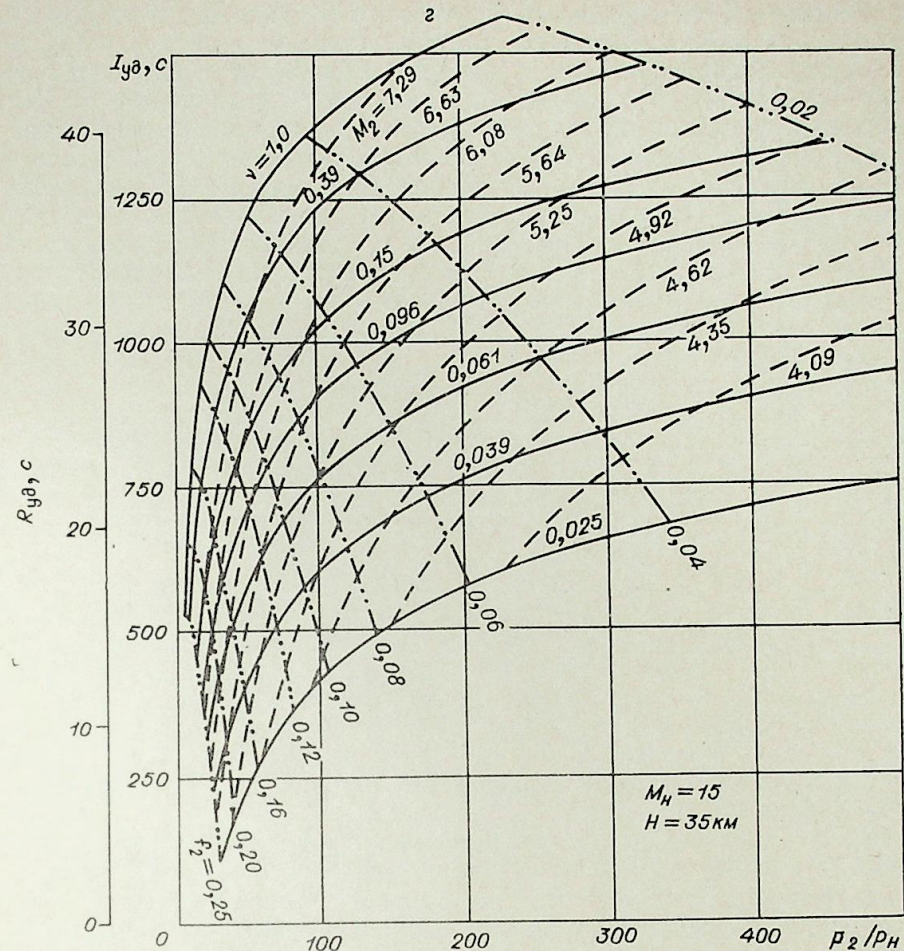


Рис. 3. Зависимость I_{yd} от относительной площади горла воздухозаборника при $v = \text{const}$.



нии f_2 на I_{yd} или R_{yd} должен основываться на рассмотрении влияния обоих параметров, т. е. например, по графикам, аналогичным приведенным на рис. 2.

Следует отметить общую тенденцию: чем меньше f_2 , тем меньше v . Однако корреляция между f_2 и v не жесткая: при помощи мер по улучшению процесса сжатия, геометрии и регулирования различных воздухозаборников возможно при уменьшении f_2 постоянно или увеличении v . Поскольку каждой паре чисел — значений f_2 и v соответствуют определенные значения в любой другой паре, о которых было сказано выше: p_2/p_H и f_2 , p_2/p_H и v , M_2 и v и т. д. (это следует из уравнений процесса в воздухозаборнике и отчетливо видно на рис. 2), то и параметры в любой из этих пар тоже можно рассматривать как независимые, хотя между ними и может существовать корреляция, соответствующая корреляции между f_2 и v , о которой сказано выше.

Опорная величина $f_2 = 0,08$ для графика рис. 3 выбрана потому, что по имеющимся экспериментальным данным можно рассчитывать на относительно простую запускаемость воздухозаборников с примерно этим значением f_2 . При уменьшении относительной площади горла f_2 вдвое (от 0,08 до 0,04), I_{yd} при $v = \text{const}$ увеличивается на 13—23%, а при увеличении f_2 вдвое (от 0,08 до 0,16) уменьшается на 20—30. При этом необходимо иметь в виду, что уменьшение f_2 от 0,08 может встретить затруднения из-за усложнения конструкции и условий протекания струи в воздухозаборнике — сильного повышения p_2/p_H (см. рис. 2). Для ослабления роста p_2/p_H следует принимать меры для повышения v , т. е.

для уменьшения интенсивности скачков уплотнения в течении сжатия в воздухозаборнике и уменьшения потерь на трение в пограничном слое.

На рис. 4 показана степень влияния ν на $I_{уд}$ (или $R_{уд}$) при постоянных значениях f_2 , т. е. имеются в виду воздухозаборники, имеющие одинаковые значения одного из главных геометрических параметров — площади сечения горла, а точнее ее безразмерной величины f_2 . По оси ординат отложено значение $I_{уд}$, деленное на $I_{уд}$ при $\nu=1$. Видно слабое влияние ν при $f_2=\text{const}$ в широком диапазоне изменения ν — от 1 до примерно 0,2 — и более сильное влияние при дальнейшем уменьшении ν .

Результаты анализа, представленные на рис. 3, показывают увеличение $I_{уд}$ по мере уменьшения f_2 при $\nu=\text{const}$. Но такая зависимость, имеющая место при $\nu=\text{const}$, вовсе не означает, что уменьшение f_2 всегда приводит к увеличению $I_{уд}$. Другой характер связи между f_2 и ν (если уменьшение f_2 сопровождается уменьшением ν) может дать максимум $I_{уд}$ по f_2 . Например, в [5] приведены результаты расчетов $I_{уд}$ при условии постоянства кинетического КПД η_c воздухозаборника: $\eta_c = \text{const}$ для $V_2/V_n = \text{var}$. Соблюдение этого условия означает, что уменьшение f_2 сопровождается уменьшением ν . Расчеты [5] показывают, что наличие этого условия дает максимум $I_{уд}$ по V_2/V_n и, следовательно по f_2 .

Тем не менее анализ влияния f_2 на $I_{уд}$ при $\nu=\text{const}$ и ν на $I_{уд}$ при $f_2=\text{const}$ имеет практическое значение: на рис. 3 показана степень роста $I_{уд}$ с уменьшением f_2 при условии $\nu=\text{const}$, которое возможно реализовать путем вариаций геометрии воздухозаборника. Из рис. 4 видно влияние ν (весьма слабое) при легко реализуемой и практически интересной ситуации: для воздухозаборников, имеющих одинаковый параметр f_2 и отличающихся друг от друга разной величиной потерь ν (например, из-за разных конфигураций поверхностей, образующих скачки уплотнения).

Как указывалось выше, величины ν , приведенные на рис. 2, 3, вычислялись с учетом химического и термодинамического равновесия воздуха в сечениях $H-H$ и $2-2$. Зная прирост энтропии воздуха в воздухозаборнике ΔS , величину ν можно вычислить также по формуле, приведенной, например, в [6]:

$$\ln \nu = -\frac{\Delta S}{R_0} \mu_n.$$

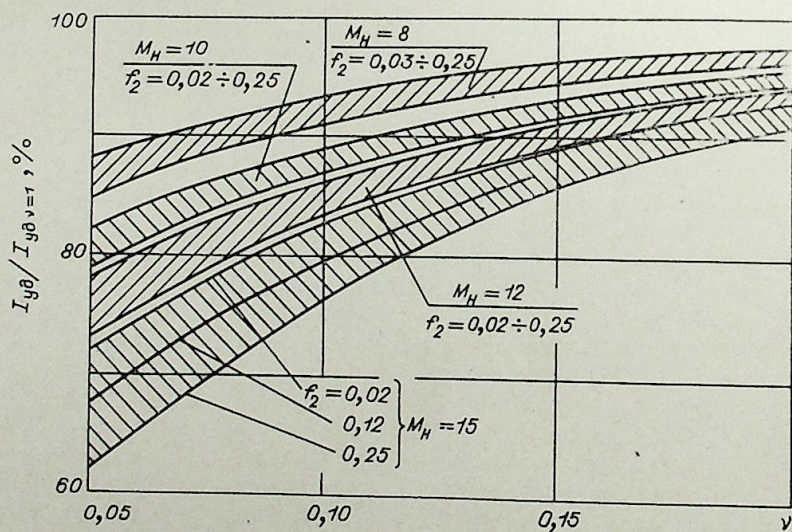


Рис. 4. Зависимость $I_{уд}$ от коэффициента восстановления полного давления в воздухозаборнике при $f_2=\text{const}$.

ΔS , Дж/кг·град	$\nu = e^{-\frac{\Delta S}{R_0} \mu_n}$	γ			
		$M_n=8$, $H=25\text{км}$	$M_n=10$, $H=30\text{км}$	$M_n=12$, $H=30\text{км}$	$M_n=15$, $H=35\text{км}$
265	0,4	0,4	0,4	0,408	0,42
465	0,2	0,2	0,204	0,208	0,218
727	0,08	0,08	0,082	0,085	0,094
1012	0,03	0,03	0,031	0,033	0,039
1160	0,02	—	0,021	0,022	0,0275
1330	0,01	—	0,011	0,012	0,016

В таблице показаны значения ν , определенные по формуле (4) и с учетом химического и термодинамического равновесия. Видно, что до $M_n=12$ различие незначительно и только при $M_n=15$ и больших потерях в воздухозаборнике ($\Delta S > 700$ Дж/кг·град, $\nu < 0,1$) оно становится заметным. Однако влияние этого различия на $I_{уд}$ в случае, когда вычисление удельных тяговых характеристик проводилось без применения величины ν , незначительно и при $\Delta S \leq 1000$ Дж/кг·град ($\nu \approx 0,03 \div 0,04$) не превышало 4%. Отсюда следует, что при рассмотрении влияния ν на удельные тяговые характеристики двигателя в случае, если само значение ν не участвует в их вычислении, коэффициент ν можно определять с помощью уравнения (4).

4. При принятом допущении, что $F_a = 1,5 F_n$, сопло ГПВРД работает с недорасширением. Максимум тяги при отсутствии потерь в сопле достигается при полном расширении, т. е. когда $p_a = p_n$, а при наличии в сопле потерь максимум тяги достигается при несколько меньшем расширении (см. например [7]). На рис. 5 для $M_n=8$ и 12 показан возможный выигрыш в величине удельного импульса за счет расширения

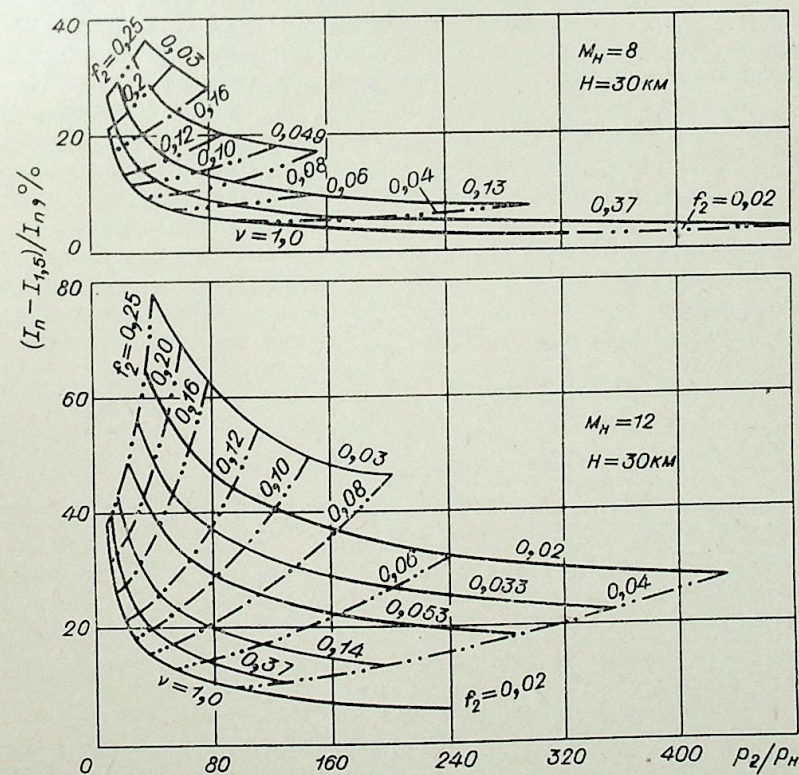


Рис. 5. Выигрыш в тяге при полном расширении в сопле.

В. В. БЕРБАСОВ, В. А. УРЮКОВ

ВЛИЯНИЕ ЗАКРУТКИ НА СВОЙСТВА
ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ДУГИ
В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ

В плазмотронах с вихревой стабилизацией дуги [1] рабочий газ имеет закрутку, которая стабилизирует столб дуги вблизи оси канала за счет архимедовых сил. Кроме того, архимедовы силы через перераспределение массового расхода (отжатие более холодных слоев газа к стенкам) и давления (создание разрежения на оси) могут изменять свойства столба дуги в отличие от незакрученного потока газа. В свою очередь выделение джоулева тепла в дуге влияет на характеристики газового вихря.

Во всех проводившихся до сих пор расчетах дуги в потоке газа (а их насчитываются уже десятки) этим эффектом, внешнего воздействия на дугу пренебрегали. Очевидные, казалось бы, доводы к этому таковы: 1) энтальпия газа, нагретого дугой, настолько велика, что эффект какой-либо перестройки профилей скорости (или кинетической энергии) обычно мал и им можно пренебречь; 2) разрежение на оси дуги мало вследствие малой плотности газа (в соответствии с формулой $\frac{dp}{dr} \approx \rho \omega^2 / r$), к тому же оно компенсируется пинч-эффектом. При этом, однако, упускается из виду, что несмотря на малый градиент давления в пределах столба дуги, общий градиент (по радиусу всего канала) может быть значительным, как уже указывалось в [2]. Вследствие этого и влияние закрутки может быть существенным.

В данной работе решена в определенном смысле автомодельная задача, позволяющая, по-видимому, наиболее просто исследовать влияние закрутки на свойства дуги в канале и, наоборот, влияние дуги на характеристики вихря.

Рассмотрим стационарное, осесимметричное, ламинарное течение в трубе. Через пористую стенку канала подается рабочий газ так, что тангенциальная скорость на стенке отлична от нуля и равна некоторому значению w_0 . В работе [3] проводились расчеты влияния пористого охлаждения (при отсутствии тангенциальной скорости) на электрогазодинамические характеристики дуги. Считалось, что расход вдуваемого газа постоянен по длине пористого канала ($\rho_w v_w = \text{const}$). Расчеты показали, что такие параметры, как плотность, температура, радиальная скорость, напряженность электрического поля достаточно быстро по длине канала становятся практически не зависящими от продольной координаты x , а продольная скорость становится линейной функцией x : $u = x f(r)$. При этом давление мало меняется по длине канала, что позволяет считать профили температуры и плотности стабилизированными одновременно. И в данном случае закрученного потока в пористом канале, когда расход вдуваемого газа через стенку постоянен по длине канала, можно принять плотность, температуру, радиальную и тангенциальную скорости и напряженность электрического поля не зависящими от продольной координаты. Продольная скорость линейно зависит от

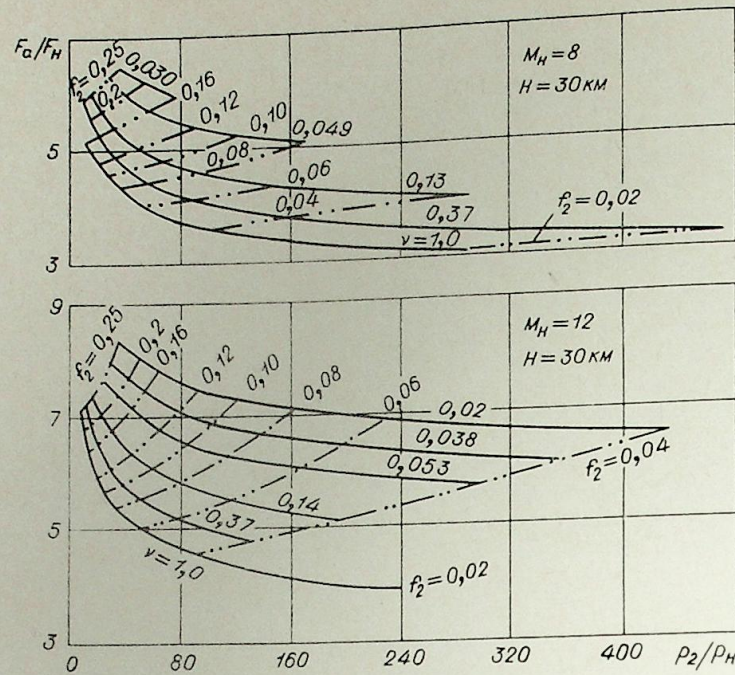


Рис. 6. Влияние характеристик процесса сжатия в воздухозаборнике на степень расширения сопла F_a/F_n .

продуктов сгорания в сопле до $p_a = p_n$ по сравнению с выбранным значением $F_a = 1,5 F_n$ в зависимости от параметров сжатия в воздухозаборнике. На графике I_n и $I_{1,5}$ — внутренние удельные импульсы двигателя соответственно при $p_a = p_n$ и $F_a = 1,5 F_n$. Видно, что при малых степенях сжатия p_2/p_n и $1/\sqrt{2}$ этот выигрыш может быть велик, с увеличением p_2/p_n и уменьшением f_2 он уменьшается. Для реализации полного расширения требуется значительное увеличение площади сопла. На рис. 6 показана величина F_a/F_n , требуемая для расширения продуктов сгорания в сопле до давления $p_a = p_n$. Так как геометрия сопла ГПВРД, как и воздухозаборника, определяет в значительной мере форму летательного аппарата, связанное с увеличением площади F_a дополнительное внешнее сопротивление может превышать добавку в тяге. Как видно на рис. 5, улучшением параметров сжатия в воздухозаборнике — увеличением степеней сжатия p_2/p_n и $1/\sqrt{2}$ и коэффициента восстановления полного давления ν можно и при $F_a/F_n = 1,5$ получить удельный импульс, близкий к импульсу при полном расширении газа в сопле.

Институт теоретической и прикладной механики
СО АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
8/XII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Г. Леонова. О термодинамическом совершенстве течений с тепло- и массоподводом в каналах при сверхзвуковой скорости газа на входе. — Уч. зап. ЦАГИ, 1972, 1, № 5.
2. В. Е. Алемасов, А. Ф. Дрегаллин, А. П. Тишин. Теория ракетных двигателей. М., «Машиностроение», 1969.
3. E. T. Cugan, J. Swithenbank. Really high speed propulsion by scramjets. — Aircraft Eng., 1966, 1, N 1.
4. В. С. Зуев, В. С. Макарон. Теория прямоточных и ракетнопрямоточных двигателей. М., «Машиностроение», 1971.
5. Теория ВРД под ред. С. М. Шляхтенко. М., «Машиностроение», 1975.
6. Г. Н. Абрамович. Прикладная газовая динамика. М., «Наука», 1969.
7. Е. Д. Стенькин. Оптимальное расширение в реактивном сопле. — Изв. вузов, «Авиационная техника», 1968, № 1.

длины канала $u = x f(r)$, а давление представляет определенную функцию от r и x , но изменение давления вдоль оси считается малым.

Таким образом, задача в определенном смысле сводится к автономной модели.

Учитывая сказанное, запишем уравнения неразрывности, движения и энергии (в безразмерном виде):

$$\partial(\rho v r) / \partial r + r \rho f = 0, \quad (1)$$

$$\rho f^2 + \rho v (\partial f / \partial r) = -a (\partial p / \partial x) / x + (1 / \text{Re } r) \partial(r \mu \partial f / \partial r) / \partial r, \quad (2)$$

$$\rho v (\partial v / \partial r) - \rho \omega^2 / r = -a (\partial p / \partial r) - A (\sigma \beta^2 / r) \int_0^r \sigma r dr + (4/3 \text{Re } r).$$

$$\partial(r \mu \partial v / \partial r) / \partial r - (2/3 \text{Re } r) \partial[\mu(v + r f)] / \partial r - (4/3 \text{Re } r^2) \times \times (\mu v) + (2/3 \text{Re } r) \mu (\partial v / \partial r + f) + \mu \partial f / \partial r, \quad (3)$$

$$\rho v (\partial \omega / \partial r) + \rho \omega \omega / r = (1 / \text{Re } r^2) \partial[r^3 \mu d(\omega / r) / \partial r] / \partial r, \quad (4)$$

$$\rho v (\partial h / \partial r) = (1 / \text{Pe } r) \partial(\mu \partial h / \partial r) / \partial r + \sigma \beta^2 / \text{Re} - \Phi \epsilon. \quad (5)$$

Уравнение состояния и уравнение сохранения полного тока

$$p = p h^{0.85}, \quad (6)$$

$$\alpha = \beta \int_0^1 \sigma r dr. \quad (7)$$

Безразмерные параметры имеют тот же вид, что и в работе [3]. Безразмерный параметр магнитного давления

$$A = \sigma_0 \lambda_0 h_0 \mu_e / c_{p0} \rho_0 u_0^2 = \text{Rm} / (\kappa - 1) \text{M}^2 \text{Pe}. \quad (8)$$

Штрихом отмечены размерные параметры; μ_e магнитная проницаемость. Рассмотрим уравнение движения (2). Нетрудно заметить (при указанном выше предположении), что

$$(\partial p / \partial x) / x = C = \text{const}; \quad p = C x^2 / 2 + p_1(r). \quad (9)$$

Следовательно, уравнение движения в проекции на ось x примет вид

$$\rho f^2 + \rho v df / dr = -a C + (1 / \text{Re } r) d(r \mu df / dr) / dr. \quad (10)$$

Из уравнения неразрывности следует интегральное условие на расход газа в пористом канале:

$$\int_0^1 \rho f r dr = m, \quad (11)$$

где $m = |v'_w / u'_0|$ — параметр вдува.

Граничные условия для системы (1—7)

$$\begin{aligned} r=0, \quad v=0, \quad \omega=0, \quad df/dr=0, \quad dh/dr=0; \\ r=1, \quad v=-m, \quad f=0, \quad \omega=\omega_0, \quad h=1, \quad p=1. \end{aligned} \quad (12)$$

Система уравнений (1—7) решалась численно для разных параметров силы тока α , параметров вдува m и разных скоростей начальной закрутки ω_0 . Зависимости для свойств переноса воздуха (вязкость, теплопроводность, удельное излучение) принимались такими же, как и в работе [3]. В зависимости для электропроводности вводилась поправка на давление, достаточно справедливая вплоть до температуры $\sim 10^4$ К: $\sigma = p^{-1/2} \sigma_1(h)$, где $\sigma_1(h)$ — зависимость электропроводности от энтальпии при $p' = 10^5$ н/м². Расчеты проводились для $\text{Re} = 700$; параметр вдува изменялся от 0 до 1; безразмерная тангенциальная скорость от 0 до 500.

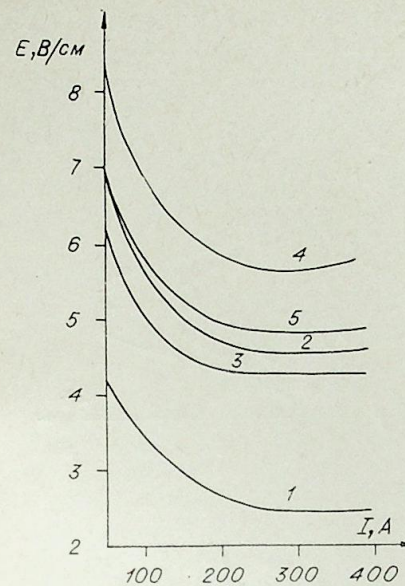


Рис. 1. Влияние вдува и закрутки газа на вольт-амперные характеристики дуги.

$R=3$ см, 1 — $m=0$; 2 — $m=0.5$, $\omega_0=0$; 3 — $m=0.5$, $\omega_0=500$; 4 — $m=1$, $\omega_0=0$; 5 — $m=1$, $\omega_0=500$.

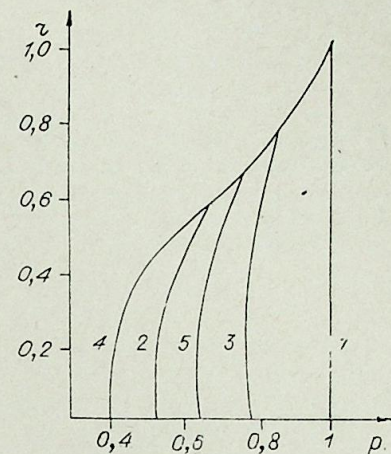


Рис. 2. Распределение давления по радиусу канала в зависимости от силы тока и вдува газа.

$R=3$ см, $\omega_0=500$, 1 — $m=0.5$, $I=50$ А; 2 — $m=0.5$, $I=300$ А; 3 — $m=1$, $I=50$ А; 4 — $m=1$, $I=300$ А; 5 — $m=1$, $I=500$ А.

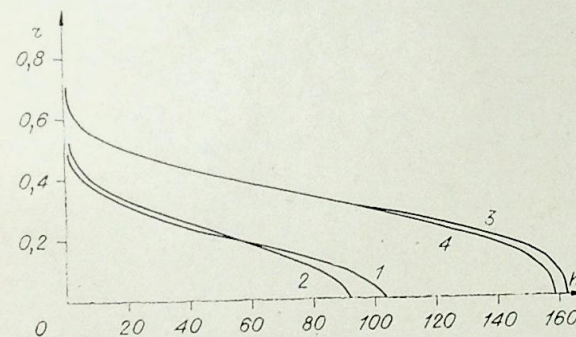


Рис. 3. Распределение энтальпии по радиусу канала в зависимости от силы тока и закрутки газа.

$R=3$ см, $m=1$, 1 — $I=50$ А, $\omega_0=0$; 2 — $I=50$ А, $\omega_0=500$; 3 — $I=300$ А, $\omega_0=0$; 4 — $I=300$ А, $\omega_0=500$.

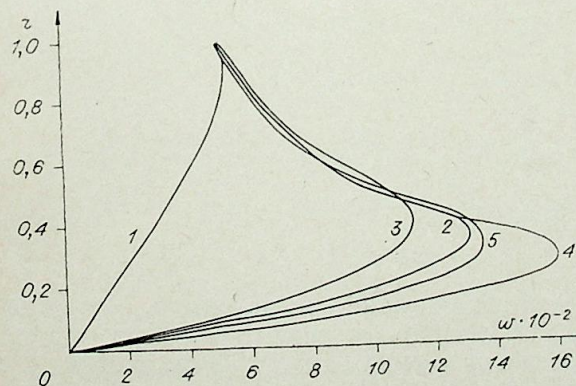


Рис. 4. Влияние силы тока и вдува газа на профили тангенциальной скорости.

$R=3$ см, 1 — $m=10^{-2}$; 2 — $m=0.5$, $I=50$ А; 3 — $m=0.5$, $I=300$ А; 4 — $m=1$, $I=50$ А; 5 — $m=1$, $I=300$ А.

Рис. 5. Влияние силы тока и закрутки газа на профили радиальной скорости.
 $R=3$ см; $m=1$. 1 — $I=50$ А, $\omega_0=0$; 2 — $I=50$ А, $\omega_0=500$; 3 — $I=300$ А, $\omega_0=0$; 4 — $I=300$ А, $\omega_0=500$.

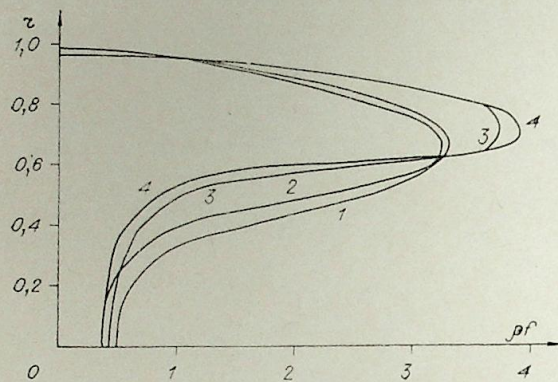
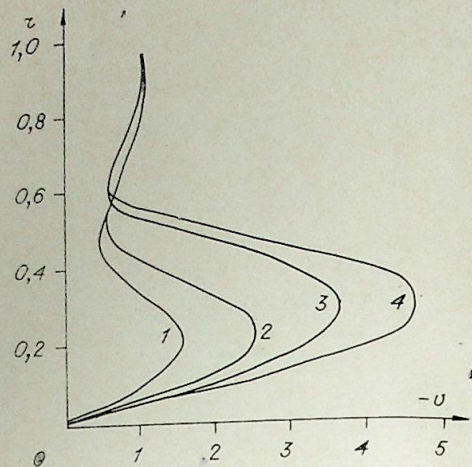


Рис. 6. Профили массового расхода в зависимости от силы тока и закрутки газа.
 $R=3$ см, $m=1$. 1 — $I=50$ А, $\omega_0=0$; 2 — $I=50$ А, $\omega_0=500$; 3 — $I=300$ А, $\omega_0=0$; 4 — $I=300$ А, $\omega_0=500$.

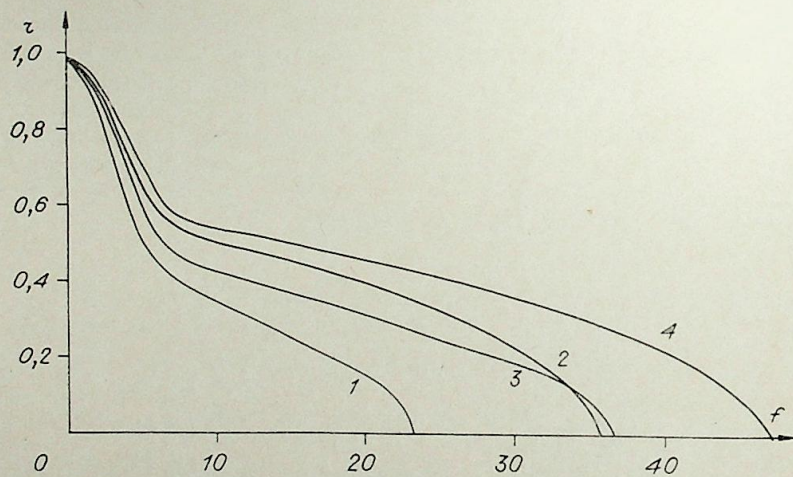


Рис. 7. Профили продольной скорости в зависимости от силы тока и закрутки газа.
 $R=3$ см; $m=1$. 1 — $I=50$ А, $\omega_0=0$; 2 — $I=50$ А, $\omega_0=500$; 3 — $I=300$ А, $\omega_0=0$; 4 — $I=300$ А, $\omega_0=500$.

С точки зрения поставленной задачи наибольший интерес представляют, несомненно, изменения вольт-амперных характеристик в зависимости от тангенциальной скорости на стенке. Для удобства оценок ряд параметров приведен ниже в размерном виде для случая $R=3$ см,

$u_0=0,36$ м/с. Влияние ω_0 и m на вольт-амперные характеристики показано на рис. 1, из которого явственно следуют по крайней мере два вывода. Во-первых, при достаточно больших вдувах закрутка может существенно уменьшить напряженность электрического поля (при $m=1$ напряженность электрического поля для $\omega_0=500$ на $\sim 20\%$ ниже напряженности для $\omega_0=0$). Во-вторых, влияние закрутки снижается с уменьшением параметра вдува и при $m=0$ практически пропадает. Причины этого явления, по-видимому, заключаются в изменении давления по радиусу канала. Из рис. 2 видно, что давление на оси может уменьшиться в 2—3 раза при малых токах и при достаточно большой закрутке. При малом вдуве изменение давления относительно слабо даже при большой закрутке (рис. 3), хотя с ростом тока явление закрутки на профиль энтальпии становится несколько меньше.

Интересно поведение профилей тангенциальной скорости в зависимости от параметра вдува и силы тока дуги. Из рис. 4 видно, что при достаточно больших вдувах поток можно четко разделить на две области: внешнюю зону, где тангенциальная скорость достаточно точно отвечает закону потенциального течения ($\omega \sim 1/r$), и внутреннюю, где зависимость ω от радиуса линейна, т. е. вращение происходит по закону твердого тела. Точка максимума ω смещается к оси с уменьшением силы тока и ростом параметра вдува. При этом максимум ω растет (при $I=50$ А и $m=1$ он превышает ω_0 в 3 раза). При очень малых вдувах вращение газа практически во всем канале происходит по закону твердого тела. Расчеты показали также, что при прочих неизменных условиях уменьшение радиуса канала приводит к сужению зоны потенциального течения и соответственно к уменьшению изменения давления. Свообразно поведение радиальной скорости по радиусу канала (рис. 5). В периферийной зоне распределение $v(r)$ близко к линейному, хотя даже здесь заметно влияние силы тока дуги. В районе границы дуги (это видно из сравнения с рис. 3) абсолютная величина радиальной скорости резко возрастает, причем знак ее не меняется. Это несколько неожиданно, так как именно в этой области начинается интенсивное вытеснение массы газа из области столба дуги — см. рис. 6, где показано распределение массового расхода по сечению канала. Из рис. 6 видно также слабое влияние закрутки на профиль массового расхода. Это еще раз подтверждает, что основное влияние закрутки на напряженность электрического поля проявляется через перестройку распределения давления.

На рис. 7 показаны профили продольной скорости по сечению канала. В районе границы дуги форма распределения скорости резко изменяется, скорость начинает быстро расти. По-видимому, именно этим объясняется возрастание абсолютной величины радиальной скорости в данной зоне.

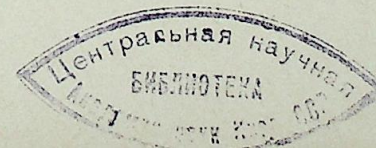
Итак, влияние закрутки на электрофизические характеристики дуги может быть существенным, причем оно тем более сильно, чем больше параметр вдува и больше диаметр канала.

Красноярский государственный университет

Поступила в редакцию
14/II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Ф. Жуков, В. Я. Смоляков, Б. А. Урюков. Электродуговые нагреватели газа (плазматроны). М., «Наука», 1973. 232 с.
2. М. Ф. Жуков, А. С. Коротеев, Б. А. Урюков. Прикладная динамика термической плазмы. Новосибирск, «Наука», 1975. 298 с.
3. В. В. Бербасов, Б. А. Урюков. Ламинарная электрическая дуга в канале с пористым охлаждением стенок. — В кн.: Теория электрической дуги в условиях вынужденного теплообмена. Новосибирск, «Наука», 1977. с. 49.



А. А. БОБНЕВ

ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ
ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ДУГИ,
ГОРЯЩЕЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ

При исследовании устойчивости электрической цепи, в которую включена дуга, возникает проблема связи между малым изменением полного тока дуги и малым изменением напряжения на электродах дуги, в предположении, что зависимость от времени этих малых возмущений экспоненциальна. Ниже будут выведены уравнения, позволяющие установить подобную зависимость в общем случае для электрической дуги, а также показана эта связь для простейших малых возмущений при некоторых модельных теплофизических и электрических свойствах среды.

Предполагая плазму термической, безразмерные уравнения для электрической дуги, горящей в цилиндрическом канале, можно записать в виде

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\nabla p_g + S \mathbf{j} \times \mathbf{H} + P_5 \rho_e \mathbf{E} + \frac{1}{P} \text{Div } \tau, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} &= 0, \\ c_v \rho \frac{dT}{dt} &= -P_0 \rho T \text{div } \mathbf{v} + \text{div } (\lambda \nabla T) + \mathbf{E} \mathbf{j} - P_2 \omega(T), \\ \rho T &= \frac{1}{P_1} p_g, \\ \mathbf{j} &= \sigma (\mathbf{E} + P_3 \mathbf{v} \times \mathbf{H}) + P_4 \rho_e \mathbf{v}, \\ \text{rot } \mathbf{H} &= \mathbf{j} + P_4 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -P_3 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \text{div } \mathbf{H} &= 0, \\ \rho_e &= \text{div } \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ρ , p_g , T — плотность, давление, температура; c_v , λ , σ — удельные теплоемкость при постоянном давлении, теплопроводность, электропроводность; \mathbf{v} — вектор скорости, \mathbf{j} — вектор плотности тока; \mathbf{H} — напряженность магнитного поля, \mathbf{E} — напряженность электрического поля, ρ_e — плотность зарядов, τ — тензор вязких напряжений, $\omega(T)$ — заданная функция, характеризующая излучение. В качестве масштабов ρ , T , c_v , λ , σ выбраны значения соответствующих параметров на оси канала ρ_m , T_m , c_{vm} , λ_m , σ_m (здесь и в дальнейшем индексом m помечены масштабные величины). За масштаб длины выбран радиус канала R_m .

Масштабами времени, скорости, давления, напряженности электрического поля, напряженности магнитного поля, плотности тока, плотности заряда выражены соответственно формулами

$$\begin{aligned} t_m &= \frac{\rho_m c_{vm} R_m^2}{\lambda_m}, \\ v_m &= R_m / t_m, \\ p_{gm} &= \rho_m v_m^2, \\ E_m &= \sqrt{\lambda_m T_m / \sigma_m} / R_m, \\ H_m &= E_m \sigma_m R_m, \\ j_m &= E_m \sigma_m, \\ \rho_{em} &= \epsilon_e E_m / R_m. \end{aligned}$$

Здесь ϵ_e — диэлектрическая проницаемость.

Безразмерные параметры в системе уравнений (1) определяются выражениями

$$\begin{aligned} S &= \mu_e j_m H_m t_m^2 / \rho_m R_m = \mu_e \sigma_m T_m c_{vm}^2 R_m^2 / \lambda_m — \text{число Стюарта}, \\ P &= \rho_m v_m R_m / \mu_m = \lambda_m / c_{vm} \mu_m — \text{параметр вязкости}, \\ P_0 &= p_0 R_m^2 / t_m \lambda_m T_m = R_{gm} / c_{vm}, \\ P_1 &= p_0 / p_{gm}, \\ P_2 &= \omega_m R_m^2 / \lambda_m T_m, \\ P_3 &= \mu_e \sigma_m \lambda_m / \rho_m c_{vm}, \\ P_4 &= \epsilon_e \lambda_m / \sigma_m \rho_m c_{vm} R_m^2, \\ P_5 &= \epsilon_e E_m^2 t_m / R_m \rho_m v_m, \end{aligned}$$

где R_{gm} — газовая постоянная; $\mu_e = 4\pi \cdot 10^{-7}$ кг·м/кл² — магнитная проницаемость; p_0 — газодинамическое давление в центре канала; μ_m — вязкость в центре канала; ω_m — значение функции излучения при $r=0$.

Оценим порядки величин безразмерных параметров, входящих в систему уравнений (1). Полагая, что $\mu_e \sim 10^{-6}$, $\sigma_m \sim 10^3$, $T_m \sim 10^4$, $\rho_m \sim 10^{-2}$, $c_{vm} \sim 10^4$, $R_m \sim 10^{-2}$, $\omega_m \sim 10^7$, $\mu_m \sim 10^{-6}$, $\epsilon_e \sim 10^{-12}$, $\lambda_m \sim 10^{-1}$ (значения масштабных величин даны в системе СИ), получаем $S \sim 10^3$, $P \sim 10^1$, $P_0 \sim 1$, $P_1 \sim 10^5$, $P_2 \sim 10^{-1}$, $P_3 \sim 10^{-4}$, $P_4 \sim 10^{-12}$, $P_5 \sim 10^{-6}$.

Из системы уравнений (1) можно вывести уравнения для стационарной электрической дуги, горящей в цилиндрическом канале, когда течения газа в канале нет:

$$\begin{aligned} r^{-1} [r \lambda(T) T']' + E^2 \sigma(T) - P_2 \omega(T) &= 0, \\ r^{-1} (rH)' = \sigma(T), \quad \rho T = 1 + P_1^{-1} p_H, \quad p_H' &= -SE^2 \sigma H, \quad H_\varphi = EH, \quad p_g = P_1 + p_H, \\ c_v = c_v(T), \quad c_p = c_p(T), \quad \mu = \mu(T). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь и далее штрих означает производную по r , r , φ , z — цилиндрические координаты; c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении; p_H — добавка к газодинамическому давлению за счет электромагнитных сил; E — напряженность приложенного постоянного электрического поля в направлении оси z ; H_φ — напряженность собственного магнитного поля; величина H введена для придания уравнениям (4) и нижеследующим вида, симметричного относительно E .

В качестве граничных условий можно выбрать

$$T|_{r=0} = 1, \quad T'|_{r=0} = H|_{r=0} = p_H|_{r=0} = 0, \quad T|_{r=1} = T_R, \quad (5)$$

где T_R — безразмерная температура стенки. Из трех граничных усло-

вий, наложенных на первое уравнение системы (4), следует определить неизвестную постоянную E .

Для построения динамической вольт-амперной характеристики, т. е. зависимости $\tilde{e}_z = \tilde{e}_z(\tilde{i}_z)$ (здесь \tilde{e}_z — возмущение напряженности электрического поля в проекции на ось z ; \tilde{i}_z — возмущение тока дуги), на стационарно горящую дугу наложим малые возмущения (более строго динамическая вольт-амперная характеристика есть зависимость возмущенной разности потенциалов на электродах дуги \tilde{u}_z от \tilde{i}_z , однако в нашем случае \tilde{u}_z связано с возмущением напряженности электрического поля \tilde{e}_z и длиной дуги формулой $\tilde{u}_z = l\tilde{e}_z$). Предполагая симметричность возмущений, а также достаточную протяженность канала, можно положить, что в уравнениях (1) $\partial/\partial\varphi = \partial/\partial z = 0$. Тогда возмущения можно задавать в виде $\tilde{u}(r, t)$, где $\tilde{u}(r, t)$ — возмущение некоторой функции из системы уравнений (1), ε — малый параметр. То есть напряженность электрического поля в проекции на ось z , например, будет складываться из стационарного (невозмущенного) решения и возмущенного $E_z = E + \varepsilon\tilde{e}_z(r, t)$. Считая, что параметр ε достаточно мал, систему уравнений (1) можно линеаризовать. Тогда, расписав линеаризованные уравнения (1) в проекциях, решения для возмущений будем искать в виде

$$\varepsilon\tilde{u}(r, t) = \varepsilon u(r)e^{i\omega t}, \quad (6)$$

где $u(r)$ — вообще комплексная амплитуда возмущений, ω — комплексное число, характеризующее скорость роста и частоту возмущений. Имея в виду (6), а также (4), уравнения для амплитуд возмущений преобразуем к виду

$$\rho\omega v_\varphi = -E^2 S \sigma h_r + P^{-1} r^{-2} [r^2 \mu (v_\varphi/r)']', \quad (7)$$

$$\rho\omega v_z = P^{-1} r^{-1} (r\mu v_z)',$$

$$r^{-1} (rh_r)' = 0,$$

$$r^{-1} (re_\varphi)' = 0,$$

$$\sigma e_r = 0;$$

$$p' = -\rho\omega v_r - E^2 S [H(\sigma e_z + (d\sigma/dT)\theta/\lambda) + \sigma h_\varphi] + P^{-1} [2r^{-1} [(r\mu v_r)' - \mu r^{-1} v_r] - (2/3) [\mu r^{-1} (rv_r)']'],$$

$$\omega g + r^{-1} (r\rho v_r)' = 0,$$

$$g/\rho + \theta/(\lambda T) = P_1^{-1} p / (1 + P_1^{-1} \rho_H),$$

$$r^{-1} (r\theta)' = c_v \rho \omega \theta / \lambda + c_v \rho T' v_r + P_0 (1 + P_1^{-1} \rho_H) r^{-1} (rv_r)' - E^2 (2\sigma e_z + (d\sigma/dT)\theta/\lambda) + P_2 (d\omega/dT)\theta/\lambda,$$

$$r^{-1} (rh_\varphi)' = \sigma e_z + (d\sigma/dT)\theta/\lambda,$$

$$e_z' = 0.$$

Здесь v_r, v_φ, v_z — амплитуды проекций вектора возмущенной скорости на оси r, φ, z ; $p, \theta/\lambda, g$ — амплитуды возмущений соответственно давления, температуры, плотности; $Ee_r, Ee_\varphi, Ee_z, Eh_r, Eh_\varphi, Eh_z$ — r, φ, z -составляющие амплитуд возмущений напряженностей соответственно электрического и магнитного полей.

При написании систем уравнений (7), (8) членами в системе (1) с параметрами P_3, P_4, P_5 пренебрегли, хотя более строго следовало бы их учесть, а затем, поставив к полученной системе уравнений для амплитуд возмущений необходимые граничные условия, провести разложение решений поставленной задачи по степеням малых параметров P_3, P_4, P_5 , в результате чего получилась бы в нулевом приближении система уравнений (8), (7) с соответствующими граничными условиями. Однако в связи с очевидной простотой такого разложения не проведено.

Для системы (7) в предположении, что h_r, e_φ ограничены при $r=0$, следует, что $h_r = e_\varphi = 0$. Имея в виду это, а также поставив условие ограниченности при $r=0$ и условие прилипания при $r=1$, для v_φ, v_r (при произвольном ω) получим только тривиальные решения. Поэтому при дальнейших исследованиях рассматривается только система уравнений (8).

Из вида уравнений (8) следует, что система (8) допускает возмущение порядка. В самом деле, из второго уравнения системы (8) (уравнения неразрывности) можно, например, определить v_r' и подставить в первое уравнение (сохранения импульса). В качестве граничных условий для уравнений (8) можно выбрать условие прилипания жидкости к стенке канала, условие постоянства температуры стенки и условия ограниченности функций при $r=0$. Тогда эти условия запишутся как

$$v_r = \theta' = h_\varphi = 0 \text{ при } r=0, \quad v_r = \theta = 0 \text{ при } r=1. \quad (9)$$

Амплитуду возмущения напряженности электрического поля будем считать заданной (в связи с линейностью задачи конкретизировать величину возмущения напряженности электрического поля не имеет смысла). Поэтому пусть

$$e_z = C, \quad (10)$$

где C — некоторая постоянная.

Итак, первые четыре уравнения вместе с условиями (9), (10) образуют замкнутую линейную неоднородную краевую задачу, решив которую, находим амплитуду возмущения тока

$$i_z = 2\pi E \int_0^1 [e_z \sigma(T) + (d\sigma/dT)\theta/\lambda] r dr, \quad (11)$$

с использованием пятого уравнения системы (8),

$$i_z = 2\pi E h_\varphi(1). \quad (12)$$

Задавая ω и e_z и определяя i_z , легко построить функцию $Z(\omega)$, определяемую равенством

$$\tilde{e}_z(\omega, r, t) = Z(\omega) \tilde{i}_z(\omega, r, t). \quad (13)$$

Функцию $Z(\omega)$ можно трактовать следующим образом. Умножив правую и левую части равенства (13) на некоторую безразмерную длину l , получим

$$\tilde{u}_z(\omega, r, t) = lZ(\omega) \tilde{i}_z(\omega, r, t).$$

Тогда $lZ(\omega)$ представляет собой дифференциальное сопротивление электрической дуги длиной l относительно экспоненциальных во времени возмущений. Очевидно, что

$$Z(\omega) = Ee_z/i_z = \left\{ 2\pi \int_0^1 [\sigma(T) + (d\sigma/dT)\theta/(\lambda e_z)] r dr \right\}^{-1}. \quad (14)$$

Следует отметить, что все решения задачи (8), (9), (10) определены с точностью до множителя C , значит, как следует из выражения (14), $Z(\omega)$ от C не зависит.

При исследовании горения электрической дуги часто считают, что существует поверхность разрыва, отделяющая электропроводную область от неэлектропроводной. Тогда вид уравнений, описывающих область, где $\sigma=0$, очевиден (в системе (8) следует положить $\sigma = d\sigma/dT = 0$), но при сшивке решений, полученных для областей, где $\sigma \neq 0$ и $\sigma = 0$, необходимо соблюдать условия сращивания. В качестве примера рассмотрим сращивание производной по радиусу от амплитуды возмущения температуры. На поверхности разрыва $r_0 = r_{00} + \varepsilon r_{01} e^{i\omega t}$ (здесь r_{00} — ради-

ус невозмущенной поверхности разрыва, $r_{\sigma 1}$ — амплитуда возмущения радиуса поверхности разрыва) необходимо приравнять тепловые потоки до поверхности разрыва и после или, предполагая непрерывность коэффициента удельной теплопроводности при переходе через поверхность разрыва, приравнять производные от температуры

$$T'_{+|r=r_{\sigma 0}+\varepsilon r_{\sigma 1}e^{\omega t}} + \varepsilon (\theta_+/\lambda)'_{|r=r_{\sigma 0}} e^{\omega t} = T'_{-|r=r_{\sigma 0}} + \varepsilon (\theta_-/\lambda)'_{|r=r_{\sigma 0}} e^{\omega t}$$

(здесь индекс плюс соответствует величинам в электропроводной области, индекс минус — в неэлектропроводной) или, разложив ряд Тейлора по степеням $\varepsilon r_{\sigma 1}e^{\omega t}$, найти

$$\begin{aligned} T'_{+|r=r_{\sigma 0}} + \varepsilon [r_{\sigma 1}T''_{+|r=r_{\sigma 0}} + (\theta_+/\lambda)'_{|r=r_{\sigma 0}}] e^{\omega t} + O(\varepsilon^2) = \\ = T'_{-|r=r_{\sigma 0}} + \varepsilon [r_{\sigma 1}T''_{-|r=r_{\sigma 0}} + (\theta_-/\lambda)'_{|r=r_{\sigma 0}}] e^{\omega t} + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (15)$$

Предположив, что $d\lambda/dT$ и $\omega(T)$ непрерывны при переходе через поверхность разрыва, получим из (15) с помощью (4)

$$\theta'_+ - \theta'_- - E^2\sigma_+ r_{\sigma 1} = 0 \quad \text{при } r = r_{\sigma 0}. \quad (16)$$

Аналогично определяются остальные условия срачивания:

$$\begin{aligned} \theta_+ - \theta_- = 0, \\ \rho_+ - \rho_- - SE^2 H \sigma_+ r_{\sigma 1} = 0, \\ v_+ - v_- = 0 \\ h_+ - h_- + \sigma_+ r_{\sigma 1} = 0 \quad \text{при } r = r_{\sigma 0}. \end{aligned} \quad (17)$$

Неизвестная постоянная $r_{\sigma 1}$ находится из определения поверхности разрыва. Пусть, например, поверхность разрыва — изотерма с температурой T_{σ} . Тогда на поверхности разрыва

$$T_{|r=r_{\sigma 0}+\varepsilon r_{\sigma 1}e^{\omega t}} + \varepsilon (\theta/\lambda)_{|r=r_{\sigma 0}} e^{\omega t} = T_{\sigma},$$

откуда

$$r_{\sigma 1} = -[\theta/(\lambda T')]_{|r=r_{\sigma 0}} + 0(\varepsilon). \quad (18)$$

Поверхность разрыва можно задавать и по-другому. Пусть, например, в невозмущенном состоянии задано ее положение в пространстве ($r_{\sigma} = r_{\sigma 0}$). При наложении возмущений на стационарное состояние будем считать, что поверхность разрыва перемещается вместе с плазмой, тогда

$$\frac{d}{dt}(r_{\sigma 0} + \varepsilon r_{\sigma 1}e^{\omega t}) = \varepsilon v_{r|r=r_{\sigma 0}} e^{\omega t}$$

или

$$r_{\sigma 1} = (v_{r|r=r_{\sigma 0}})/\omega + 0(\varepsilon). \quad (19)$$

Таким образом, выражение (18) (или (19)) замыкает условия срачивания (16), (17). В случае непрерывности электропроводности при переходе через поверхность разрыва ($\sigma_+(r_{\sigma 0}) = 0$) необходимость в замыкающих условиях (16), (17) и выражениях (18), (19), вообще говоря, отпадает; однако из них можно определить амплитуду возмущения радиуса электрической дуги.

Из оценки безразмерных параметров следует, что P_1 — величина порядка 10^5 . Однако в данном случае нельзя чисто формально пренебречь членами в уравнениях (8), содержащими в знаменателе P_1 , так как при этом возникает краевая задача на собственные значения (т. е. нельзя произвольно задавать ω). Чтобы этого избежать, построим разложение решений задачи (8), (9), (10) по степеням малого параметра P_1^{-1}

$$\begin{aligned} v_r &= v_{r0} + P_1^{-1}v_{r1} + P_1^{-2}v_{r2} + \dots, \\ \rho &= P_1(p_0 + P_1^{-1}p_1 + \dots), \\ \theta &= \theta_0 + P_1^{-1}\theta_1 + \dots, \\ h_{\varphi} &= h_{\varphi 0} + P_1^{-1}h_{\varphi 1} + \dots, \\ e_z &= e_{z0} + P_1^{-1}e_{z1} + \dots \end{aligned} \quad (20)$$

Решения невозмущенной задачи (4), (5) также разложим в ряд по степеням P_1^{-1}

$$\begin{aligned} T_{\pm} &= T_0 + P_1^{-1}T_1 + P_1^{-2}T_2 + \dots, \quad \rho = \rho_0 + P_1^{-1}\rho_1 + \dots, \\ \rho_H &= \rho_{H0} + P_1^{-1}\rho_{H1} + \dots, \quad H = H_0 + P_1^{-1}H_1 + \dots \end{aligned} \quad (21)$$

Тогда, подставив ряды (20), (21), в задачу (8), (9), (10), после несложных преобразований в нулевом приближении по P_1^{-1} получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} p' &= 0, \\ r^{-1}(r\rho v_r)' &= -\omega(\rho p - \rho T/(\lambda T)), \\ r^{-1}(\theta')' &= c_v\rho\omega\theta/\lambda + c_v\rho T'v_r + P_0 r^{-1}(rv_r)' - \\ &= -E^2[2\sigma e_z + (d\sigma/dT)\theta/\lambda], \\ r^{-1}(rh_{\varphi})' &= \sigma e_z + (d\sigma/dT)\theta/\lambda, \\ e'_z &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

(здесь нулевой индекс опущен) с граничными условиями (9), (10). Подставив ряды (21) в задачу (4), (5), получим, опустив нулевой индекс, задачу же (4), (5), за исключением третьего уравнения системы (4) (уравнения состояния), которое запишется в виде

$$\rho T = 1. \quad (23)$$

При выводе системы (22) использовалось уравнение (23). При подстановке рядов (20), (21) в условия срачивания (16) — (18) или (19) изменилось только второе условие в выражениях (17). Опустив, как и прежде, нулевой индекс, получим

$$\rho_+ - \rho_- = 0. \quad (24)$$

Таким образом, для случая $P_1^{-1} \ll 1$ поставлена задача определения стационарного состояния электрической дуги; это первое уравнение системы (4) с соответствующими граничными условиями (5) и уравнение состояния в форме (23). Для амплитуд возмущений замкнутая задача определена первыми тремя уравнениями системы (22), соответствующими этим уравнениям условиями (9), (10) и условиями срачивания (16), (17), (24), (18), или (19). Определив $\theta(r)$, можно по формуле (11) или (12) определить i_z , а затем уже и $Z(\omega)$ по формуле (14). Из вида уравнений (22), условий (9), (10), (16), (17), (18) или (19), формул (11), (14) следует

$$Z(\omega) = \bar{Z}(\omega)$$

(здесь черта сверху означает комплексное сопряжение). Подобным же свойством будет обладать и более общая задача, когда не выполняется условие $P_1^{-1} \ll 1$.

Задача определения $Z = Z(\omega)$ была решена при

$$\lambda = c_v = 1,$$

$$\sigma = \begin{cases} 1 & \text{при } T > T_0, \\ 0 & \text{при } T < T_0, \end{cases} \quad (25)$$

$$P_0 = 5/2 \quad (c_{pm}/c_{vm} = 1,4) \quad P_2 = 0.$$

При подстановке выражений (25) в задачу (4), (5), получены выражения

$$T_+ = 1 - E^2 r^2 / 4,$$

$$T_- = T_R - 0,5 E^2 r_{\sigma 0}^2 \ln r,$$

$$E^2 = 4(1 - T_k) / [(1 - 2 \ln r_{\sigma 0}) r_{\sigma 0}^2], \quad (26)$$

$$r_{\sigma 0}^2 = 4(1 - T_{\sigma}) / E^2 \quad \rho_+ = T_+^{-1}, \quad \rho_- = T_-^{-1}.$$

Из формул (26) следует, что в качестве варьируемого параметра проще всего задавать $r_{\sigma 0}$, откуда можно определить и все остальные интересующие нас невозмущенные параметры и функции. При этом для замыкания условий сращивания (16), (17) использовалось определение (18).

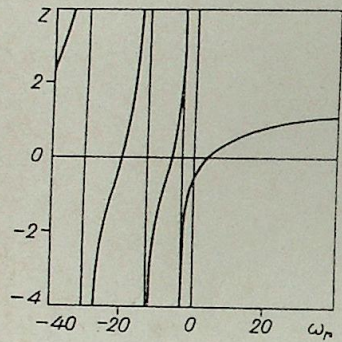


Рис. 1.

На рис. 1 представлена зависимость $Z = Z(\omega)$, полученная при задании невозмущенных функций в виде (25), (26) при $T_R \rightarrow 0$, $r_{\sigma 0} = 0,4$ в случае вещественных значений $\omega = \omega_r$. При $\omega_r \rightarrow \infty$ $Z(\omega_r)$ выходит на асимптоту $Z = (\pi r_{\sigma 0}^2)^{-1}$. При $\omega_r = 0$ $Z(\omega_r)$ есть не что иное, как dE/dI в статическом режиме. Когда величина ω_r становится отрицательной, функция $Z(\omega_r)$ может принимать нулевые и бесконечные значения. Нетрудно сообразить, что дифференциальное сопротивление $IZ(\omega)$ становится равным нулю, когда ω является собственным

значением задачи

$$p' = 0,$$

$$r^{-1}(r\rho v_r)' = -\omega(\rho p - \rho\theta/(\lambda T)),$$

$$r^{-1}(r\theta')' = c_v \rho \omega \theta / \lambda + c_v \rho T' v_r + P_0 r^{-1}(r v_r)' + P_2 (d\omega/dT) \theta / \lambda;$$

$$v_r = \theta' = 0 \text{ при } r=0, \quad v_r = \theta = 0 \text{ при } r=1, \quad (28)$$

с соответствующими условиями сращивания (16), (17), (24), (18) или (19). Множество собственных значений задачи (27), (28) счетно. В самом деле, при $E^2 \ll 1$ (случай, когда температура стенки примерно равна единице) можно построить следующие разложения собственных функций и собственных значений задачи (27), (28) по степеням малого параметра E^2

$$p = p_0 + E^2 p_1 + E^4 p_2 + \dots, \quad v_r = v_{r0} + E^2 v_{r1} + \dots, \quad (29)$$

$$\theta = \theta_0 + E^2 \theta_1 + \dots, \quad \omega = \omega_0 + E^2 \omega_1 + \dots$$

Тогда, подставив ряды (29) в задачу (27), (28) и имея в виду, что

$$T = 1 - E^2 r^2 / 4 + O(E^4), \quad \lambda = 1 + O(E^2), \quad (30)$$

$$\rho = 1 + O(E^2), \quad c_v = 1 + O(E^2),$$

$$d\omega/dT = b^2 + O(E^2) \quad (\text{здесь } b^2 = (d\omega/dT)|_{r=1}),$$

получим в нулевом приближении по E^2 следующую задачу

$$p'_0 = 0,$$

$$r^{-1}(r v_{r0})' = -\omega_0(p_0 - \theta_0),$$

$$r^{-1}(r\theta'_0)' = (\omega_0 + P_2 b^2) \theta_0 + P_0(\omega_0 \theta_0 - \omega_0 p_0); \quad (31)$$

$$v_{r0} = \theta'_0 = 0 \quad \text{при } r=0,$$

$$r_{r0} = \theta_0 = 0 \quad \text{при } r=1. \quad (32)$$

Спектр собственных значений задачи (31), (32) определяется формулой

$$\omega_{0n} = -(\gamma_n^2 + b^2 P_2) / (1 + P_0), \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (33)$$

где γ_n — занумерованные в порядке возрастания положительные корни уравнения

$$\frac{1}{2} J_0(\gamma) + \frac{(\gamma^2 + b^2 P_2) P_0}{(\gamma^2 - P_0 b^2 P_2) \gamma} J_1(\gamma) = 0,$$

где J_0, J_1 — функции Бесселя. Очевидно, что множество γ_n счетно, следовательно, множество ω_{0n} также счетно. Полученное при $E^2 \ll 1$ счетное множество собственных значений варьированием E (или T_R) можно продолжить в любую интересующую нас область задания E (или T_R). Таким образом, множество собственных значений задачи (27), (28) (число нулей дифференциального сопротивления $IZ(\omega)$) также счетно.

Очевидно также, что дифференциальное сопротивление стремится к бесконечности, когда ω становится собственным значением задачи, описываемой системой уравнений (22) с граничными условиями

$$v_r = \theta' = h_\varphi = 0 \quad \text{при } r=0, \quad (34)$$

$$v_r = \theta_\varphi = h_\varphi = 0 \quad \text{при } r=1.$$

Нетрудно провести рассуждения, аналогичные изложенным выше, чтобы показать счетность множества собственных значений задачи (22), (34) (полюсов дифференциального сопротивления $IZ(\omega)$).

В связи со счетностью множества нулей и полюсов динамическую вольт-амперную характеристику электрической дуги нельзя, строго говоря, описать уравнением типа

$$\sum_{j=0}^m a_j \frac{d^j}{dt^j} \tilde{e}_z = \sum_{j=0}^n b_j \frac{d^j}{dt^j} \tilde{i}_z, \quad (35)$$

где a_j, b_j — векторы не зависящих от t и ω величин; m, n — размерность соответственно векторов a_j и b_j (см. [1]). В самом деле, при подстановке $\tilde{e}_z = E e_z e^{\omega t}$ и $\tilde{i}_z = i_z e^{\omega t}$ в (35) величина $Z(\omega)$ оказывается равной отношению двух полиномов

$$Z(\omega) = E e_z / i_z = \left(\sum_{j=0}^n b_j \omega^j \right) / \left(\sum_{j=0}^m a_j \omega^j \right), \quad (36)$$

при этом число нулей у величины $Z(\omega)$ равно n , а число полюсов равно m , что противоречит установленной выше счетности множеств нулей и полюсов $Z(\omega)$. Таким образом, представление динамической вольт-амперной характеристики в виде (35) неприемлемо во всей области задания комплексного переменного ω ($0 \leq |\omega| < \infty$, $0 \leq \arg(\omega) \leq \pi$), следовательно, неприемлемо для электрической дуги и такое понятие, как постоянная времени, вводимое на основании выражений вида (35), например в работах [1, 2].

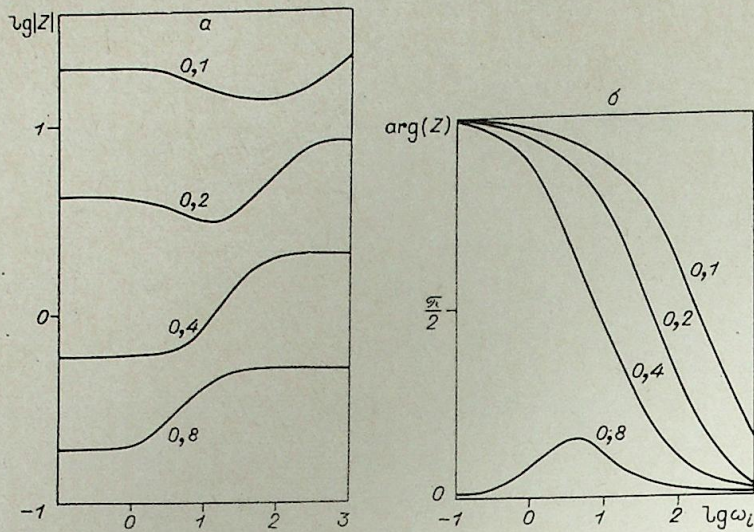


Рис. 2.

На рис. 2 представлена зависимость комплексной величины $Z = Z(\omega_i)$ при чисто мнимых значениях $\omega = i\omega_i$ (случай гармонических малых возмущений). Как и в предыдущем случае, невозмущенные функции и параметры определялись выражениями (25), (26), замыкающее условие срачивания (16), (17) определено в форме (18), при этом $T_r \rightarrow 0$. Цифры у кривых означают соответствующую для данной кривой радиус электрической дуги r_{00} .

На рис. 2, а изображен модуль Z как функция ω_i при разных радиусах дуги r_{00} . При $\omega_i = 0$ $|Z| = dE/dI$ в статическом режиме, при $\omega_i \rightarrow \infty$ $|Z| \rightarrow \text{const}$, величина этой постоянной зависит от радиуса дуги (стационарного режима). Любопытно, что при уменьшении невозмущенного радиуса дуги на кривой $|Z| = |Z|(\omega)$ появляется провал (довольно значительный, ведь на рис. 2, а отложена величина $\lg|Z|$), т. е. при некоторой частоте наблюдается минимум дифференциального сопротивления. С уменьшением радиуса дуги этот минимум смещается в сторону увеличения частоты. На рис. 2, б изображен аргумент комплексной величины Z при тех же значениях радиуса дуги. Очевидно, что для толстых дуг величина $\arg(Z)$ положительна и невелика и при $\omega_i \rightarrow 0$ или $\omega_i \rightarrow \infty$ $\arg(Z) \rightarrow 0$ (под толстыми дугами в данном случае можно понимать растущий участок статической вольт-амперной характеристики). Когда дуги тонки, аргумент дифференциального сопротивления меняется от π до 0 с изменением ω_i от 0 до ∞ , т. е. при некоторой частоте электрическая дуга ведет себя по отношению к малым гармоническим возмущениям как чисто реактивное сопротивление ($\arg(Z) = \pi/2$). Однако, на наш взгляд, даже когда $\arg(Z) = \pi/2$, не следует электрическую дугу отождествлять с индуктивностью. В самом деле, модуль чисто индуктивного сопротивления по переменному току

$$Y = \omega_i L.$$

Здесь L — индуктивность, т. е.

$$\frac{Y}{\omega_i} = \frac{dY}{d\omega_i} = L. \quad (37)$$

Для электрической дуги при фиксированном значении ω_i , соответствующем $\arg(Z) = \pi/2$, можно выполнить лишь одно из двух равенств (37).

Предельное поведение кривых $|Z| = |Z(\omega)|$ и $\arg(Z) = \arg(Z(\omega))$ в случае, когда $|\omega| \ll 1$, поясним следующим образом. Пусть

$$\omega = \kappa e^{i\psi},$$

где $\psi = \arg(\omega)$, $\kappa = |\omega|$. Тогда при $\kappa \ll 1$ можно построить следующее разложение решений задачи (22), (9), (10), (16), (17), (24), (18) или (19) по степеням малого параметра κ

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \kappa p_1 + \kappa^2 p_2 + \dots, \quad v_r = \kappa(v_{r0} + \kappa v_{r1} + \dots), \\ \theta &= \theta_0 + \kappa \theta_1 + \dots, \quad h_\varphi = h_{\varphi 0} + \kappa h_{\varphi 1} + \dots, \end{aligned} \quad (39)$$

$$e_z = e_{z0} + \kappa e_{z1} + \dots, \quad r_{01} = r_{010} + \kappa r_{011} + \dots$$

Подставив ряды (39) в задачу (22), (9), (10), (16), (17), (24), (18) или (19), получим в нулевом приближении по κ следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} r^{-1}(r\rho v_r)' - e^{i\psi}(\rho p - \rho\theta/\lambda T), \\ p' &= 0, \\ r^{-1}(r\theta')' &= -E^2(2\sigma e_z + (d\sigma/dT)\theta/\lambda) + P_2(d\omega/dT)\theta/\lambda, \\ e_z' &= 0, \\ r^{-1}(rh_\varphi)' &= \sigma e_z + (d\sigma/dT)\theta/\lambda. \end{aligned} \quad (40)$$

(нулевой индекс опущен) с условиями (9), (10), (16), (17), (24), (18) или (19). Очевидно, что $Z(\omega)$ при $|\omega| \ll 1$ не зависит от $\arg(\omega)$ и, как нетрудно сообразить, величина $Z(\omega)$ при $\omega \rightarrow 0$ становится равна dE/dI для статической вольт-амперной характеристики.

В случае больших по модулю ω и $T_{r=1} = T_r = 0$ предельное поведение кривых $|Z| = |Z(\omega)|$ и $\arg(Z) = \arg(Z(\omega))$ объясняется так. Пусть, как и прежде, ω определяется формулой (38). Тогда при $\kappa \gg 1$ можно построить следующее разложение решений задачи (22), (9), (10), (16), (17), (24), (18) или (19) по степеням малого параметра κ^{-1} :

$$\begin{aligned} p &= \kappa^{-1}(p_\infty + \kappa^{-1}p_{\infty 1} + \kappa^{-2}p_{\infty 2} + \dots), \quad v_r = v_\infty + \kappa^{-1}v_{\infty 1} + \dots, \\ \theta &= \kappa^{-1}(\theta_\infty + \kappa^{-1}\theta_{\infty 1} + \dots), \quad e_z = e_\infty + \kappa^{-1}e_{\infty 1} + \dots, \\ h_\varphi &= h_\infty + \kappa^{-1}h_{\infty 1} + \dots, \quad r_{01} = \kappa^{-1}(r_{\infty 0} + \kappa^{-1}r_{\infty 1} + \dots). \end{aligned} \quad (41)$$

Подставив ряды (41) в систему уравнений (22) и в условия (9), (10), (16), (17), (24), (18) или (19), получаем в нулевом приближении по κ^{-1} систему уравнений

$$\begin{aligned} p_\infty' &= 0, \\ r^{-1}(r\rho v_\infty)' &= -e^{i\psi}\rho(p_\infty - \theta_\infty/\lambda T), \\ c_r e^{i\psi}\theta_\infty/\lambda + c_v T'v_\infty + P_0 T r^{-1}(rv_\infty)' - 2E^2 T \sigma e_\infty &= 0, \\ e_\infty' &= 0, \\ r^{-1}(rh_\infty)' &= \sigma e_\infty, \end{aligned} \quad (42)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} v_\infty = \theta_\infty = h_\infty = 0 \quad \text{при } r = 0, \\ v_\infty = \theta_\infty = 0 \quad \text{при } r = 1. \end{aligned} \quad (43)$$

и условиями срачивания при $r = r_{00}$

$$\begin{aligned} \theta_{\infty+}' - \theta_{\infty-}' - E^2 \sigma_+ r_{00} &= 0, \\ \theta_{\infty+} - \theta_{\infty-} &= 0, \\ p_{\infty+} - p_{\infty-} = 0, \quad v_{\infty+} - v_{\infty-} &= 0; \end{aligned} \quad (44)$$

$$r_\infty = -(\theta_\infty / \lambda T')|_{r=r_{\sigma 0}} \quad (\text{из (18)}); \quad (45)$$

$$r_\infty = e^{-i\psi} v_\infty|_{r=r_{\sigma 0}} \quad (\text{из (19)}). \quad (46)$$

Порядок системы уравнений (22) в нулевом приближении по κ^{-1} понизился на два (см. систему уравнений (42)), однако если выполняются граничные условия $v_\infty(0) = v_\infty(1) = 0$, то автоматически (это следует из третьего уравнения системы (42)) выполняются и граничные условия $\theta'_\infty(0) = \theta'_\infty(1) = 0$ (нужно помнить, что $T|_{r=1} = 0$).

Амплитуда возмущения тока, как следует из четвертого уравнения системы (42), равна

$$i_z = 2\pi E e_z \int_0^1 r \sigma dr,$$

т. е. величина $Z(\omega)$ при $|\omega| \rightarrow \infty$ независимо от $\arg(\omega)$ выходит на асимптоту

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} (Z) = \left(2\pi \int_0^1 r \sigma dz \right)^{-1}. \quad (47)$$

Необходимо помнить, что степенные разложения (41), а значит, и формула (47), неприемлемы в случае, если ω является собственным значением задачи (27), (28) или задачи (22), (34).

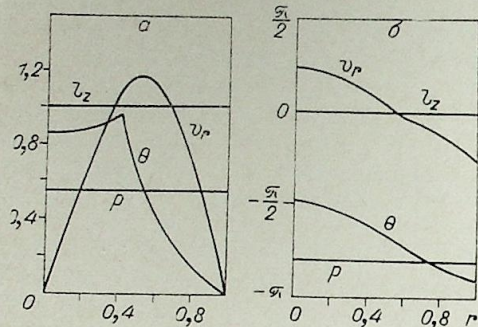


Рис. 3.

равна единице. Из рис. 3, а видно, что модуль амплитуды возмущения температуры имеет максимум на границе электропроводящей зоны, а максимум модуля радиальной составляющей скорости лежит около середины канала. Производная от θ по радиусу терпит разрыв при $r = r_{\sigma 0}$ за счет того, что электропроводность в этой точке скачком изменяется от 1 до 0 при возрастании радиуса.

Определив из решения задачи (22), (9), (10), (16), (17), (24), (18) или (19) для чисто гармонических во времени возмущений комплексные величины θ , v_r , ρ , i_z , e_z как функции частоты, ω_i , можно, воспользовавшись преобразованием Фурье, получить решения для произвольных во времени малых возмущений. Пусть, например, задано во времени возмущение величины

$$\tilde{e}_z = f(t),$$

где абсолютная величина $|f(t)|$ интегрируема на интервале $-\infty < t < \infty$. Тогда можно положить

$$e_z = e_z(\omega_i) = (V\sqrt{2\pi} E)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega_i \tau} d\tau,$$

а для амплитуды возмущения, например тока,

$$i_z = i_z(\omega_i) = Z^{-1}(\omega_i) E e_z(\omega_i).$$

При этом возмущение тока во времени $\tilde{i}_z(t)$ при заданном во времени возмущении $\tilde{e}_z(t)$ определяется по формуле

$$\tilde{i}_z(t) = (2\pi)^{-1/2} E \int_{-\infty}^{\infty} Z^{-1}(\omega_i) e_z(\omega_i) e^{i\omega_i t} d\omega_i.$$

На рис. 4 построены формы импульса, тока, давления, температуры на оси канала при заданной форме импульса напряженности электрического поля при $r_{\sigma 0} = 0,4$, $T_R = 0$; возмущение во времени \tilde{e}_z определялось при этом как

$$\tilde{e}_z = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < t < a \quad (a > 0) \\ 0 & \text{при } t < 0, t > a, \end{cases}$$

значения остальных возмущенных величин при $t < 0$ принимались равными нулю. На рис. 4 сплошные кривые соответствуют случаю $a \gg 1$,

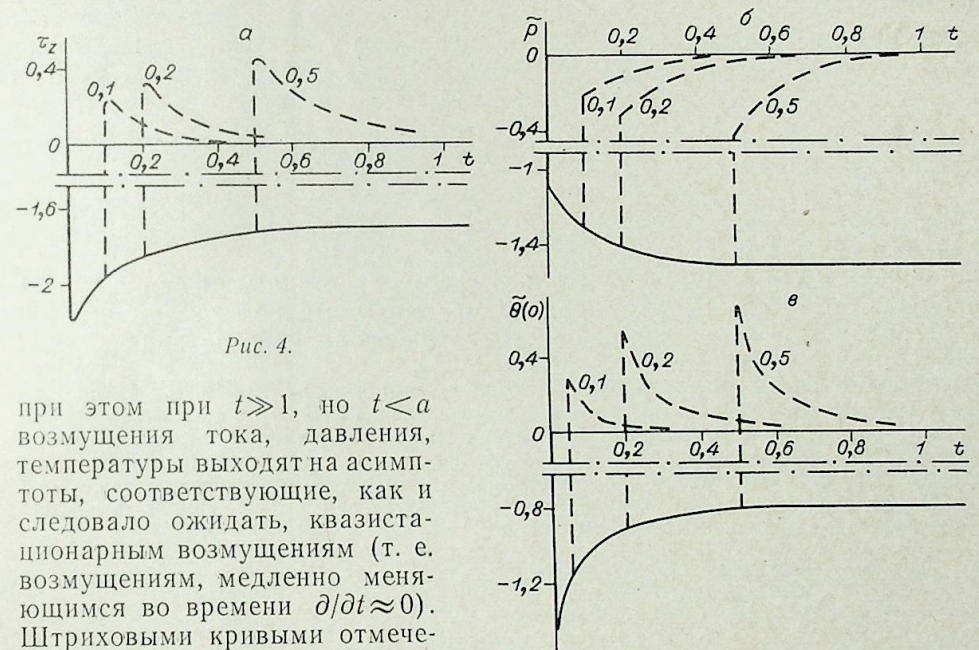


Рис. 4.

при этом при $t \gg 1$, но $t < a$ возмущения тока, давления, температуры выходят на асимптоты, соответствующие, как и следовало ожидать, квазистационарным возмущениям (т. е. возмущениям, медленно меняющимся во времени $\partial/\partial t \approx 0$). Штриховыми кривыми отмечены импульсы \tilde{i}_z , \tilde{p} , $\theta|_{r=0}$ при длительности импульса \tilde{e}_z $a =$

$= 0,1; 0,2; 0,5$ (цифры у штриховых кривых соответствуют длительности импульса \tilde{e}_z). Характерно, что в момент окончания импульса \tilde{e}_z ток \tilde{i}_z меняется скачком, изменив направление.

Теоретическому исследованию динамических вольт-амперных характеристик посвящено значительное число работ (например, сборник «Устойчивость горения электрической дуги». Новосибирск, 1973), однако всем им свойствен фактически один и тот же недостаток, заключающийся в противоречивости уравнения состояния и уравнения сохранения импульса для возмущений. В рассмотренном нами случае ($\partial/\partial \varphi = \partial/\partial z = 0$) этот недостаток состоит в том, что в уравнении сохранения энергии пренебрегают конвективным потоком тепла и работой сил давления (т. е. полагают, что $v_r = 0$), а это приводит к тому, что из уравнения неразрывности амплитуда возмущения плотности становится рав-

ной нулю. Тогда из уравнения состояния можно определить амплитуду возмущения давления (см. третье уравнение системы (8))

$$p = P_1 (1 + P_1^{-1} p_H) \theta / (\lambda T) \quad (48)$$

(для θ и h_v при $v_r = 0$ получается замкнутая задача). Однако из проекции уравнения импульсов на ось r следует (см. первое уравнение системы (8)) при $v_r = 0$

$$p' = -E^2 S [H (\sigma e_z + (d\sigma/dT) \theta / \lambda + \sigma h_v)]. \quad (49)$$

Уравнения (48) и (49) противоречивы, следовательно, $v_r \neq 0$.

ВЫВОДЫ

1. Получены уравнения с соответствующими граничными условиями, позволяющие строить динамические характеристики электрических дуг; выявлены недостатки прежних математических моделей.

2. Показано, что для связи между малыми возмущениями тока и напряжения на дуге нельзя пользоваться эмпирическими уравнениями вида

$$\sum_{j=0}^m a_j \frac{d^j}{dt^j} \tilde{u}_z = \sum_{j=0}^n b_j \frac{d^j}{dt^j} \tilde{i}_z$$

(a_j, b_j не являются функциями t, ω) во всем диапазоне задания комплексной величины ω ($0 \leq |\omega| < \infty, 0 \leq \arg(\omega) \leq \pi$).

3. Обнаружен эффект уменьшения модуля дифференциального сопротивления тонких электрических дуг в некотором диапазоне частот накладываемых на дугу гармонических колебаний.

4. На простом примере показана возможность выявления влияния произвольных малых возмущений на динамические характеристики электрической дуги с помощью интегрального преобразования Фурье.

Расчеты кривых, изображенных на рисунках, выполнены на ЭВМ БЭСМ-6. При численном решении краевых задач использовался метод линейно-независимых решений, численное интегрирование осуществлялось по методу Рунге—Кутты, вычисление определенных интегралов проводилось по методу парабол, время расчета величины $Z(\omega)$ при фиксированном комплексном значении ω с относительной точностью не ниже 10^{-3} составляло ~ 1 с, время вычисления интегралов Фурье при фиксированном значении t составляло при точности не ниже $10^{-2} \sim 3$ с.

Институт теплофизики СО АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
23/1 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. П. Камаев, В. Н. Шапенко, М. И. Уманский, В. М. Егоров, Н. Г. Бабенко. Локальные частотные характеристики электрической дуги.— В кн.: Устойчивость горения электрической дуги. Новосибирск, 1973.
2. В. С. Перегудов, Б. А. Урюков. Динамические характеристики.— В кн.: Устойчивость горения электрической дуги. Новосибирск, 1973.

Т. С. МЕЛЬНИКОВА, В. Г. ПОПЕНКО, И. М. УЛАНОВ

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СТАБИЛИЗИРОВАННОЙ ВИХРЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ДУГИ В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Исследования электрической дуги в небольшом продольном магнитном поле при атмосферном давлении, сравнительно малых расходах газа изложены в работах [1—3]. Основное внимание в них обращалось на характеристики стабилизированной стенкой электрической дуги в аргоне и спиральную неустойчивость.

В данной работе выяснилось влияние продольного магнитного поля на электрические, тепловые и температурные характеристики дуги в плазменных устройствах при вихревой стабилизации.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Схема экспериментальной установки показана на рис. 1. Плазменная камера 1 представляла собой медную водоохлаждаемую обойму, в которую вклеена кварцевая трубка внутренним диаметром $2 \cdot 10^{-2}$ м. Наряду с кварцевой камерой применялась плазменная камера, собранная из медных водоохлаждаемых шайб толщиной $12 \cdot 10^{-3}$ м, внутренним диаметром $2 \cdot 10^{-2}$ м. Применение камеры из медных шайб с раздельным охлаждением каждой шайбы при изучении стационарной электрической дуги позволило показать, что тепловой режим дуги по длине камеры меняется незначительно (измерялся тепловой поток в каждую шайбу). Для наблюдения за дугой и проведения спектральных измерений на расстоянии $4 \cdot 10^{-2}$ м от катода в плазменной камере имелось оптическое окно, закрытое кварцевыми пластинками. Катод 2 представлял собой медный водоохлаждаемый стержень диаметром $14 \cdot 10^{-3}$ м, на конце которого запаян вольфрамовый стерженек, заточенный под углом 60° . В качестве анода 3 применялась медная водоохлаждаемая шайба с внутренним диаметром, равным диаметру плазменной камеры. Камера 4 имела сужающее сопло, чтобы предотвратить подсос наружного воздуха в область горения электрической дуги.

Для создания продольного магнитного поля были установлены два соленоида 5, соединенные последовательно. Внутреннее отверстие соленоидов 0,1 м. Максимальное магнитное поле при мощности, вкладываемой в соленоиды, 360 кВт составляло 1,2 Тесла. Длина участка магнитного поля с равномерностью порядка 2% равна 0,25 м.

Для создания закрученного потока газа применялась вихревая камера 6. При расчете камеры и вихревого течения в канале использовались гипотезы и расчетные формулы, развитые в работе [4]. Согласно [4], вся область течения была разбита на две зоны. Упрощенная схематическая модель такого течения представлена на рис. 2, где d_H — наружный диаметр вихря, равный внутреннему диаметру трубы; d_B — внутренний диаметр вихря, определяющий зону перехода потенциально-го вращения во вращение по закону квазитвердого тела.

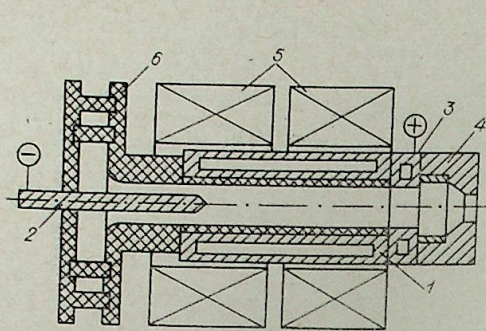


Рис. 1. Схема экспериментальной установки.

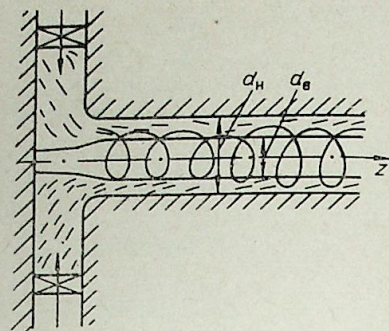


Рис. 2. Принципиальная схема для расчета вихревой камеры.

В предлагаемой работе не ставилась задача исследования вихревых течений газа, однако ниже приведены расчетные формулы, которые по нашему мнению, чрезвычайно полезны при проектировании вихревых камер. Детальное объяснение формул можно найти в [5].

$$r_B = \frac{d_B}{2}, \quad a = \frac{d_H}{2}, \quad x = \frac{r_B}{a},$$

$$m^2 = \frac{(1-x^2) + 2x^2(1-x^2)2.3 \lg x}{2x^2},$$

m — параметр, зависящий от d_H и d_B .

$$G = \pi a^2 \sqrt{\frac{2H}{\frac{1}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{m^2 x^2}}},$$

где, G — расход газа, м³/с; H — напор газа; $H = \Delta P / \rho = \Delta P_g / \gamma$. Если P — перепад давлений на входе в камеру, атм, то $P = P \cdot 10^4$ кг/м²; g — ускорение силы тяжести, м/с; γ — объемный вес газа, кг/м³.

$$V_z = \frac{G}{\pi a^2 (1-x^2)}; \quad V_\varphi = \frac{G}{\pi a^2 x m},$$

где V_z — скорость газа в направлении оси z , м/с; V_φ — круговая скорость газа, м/с.

Эксперименты были проведены с вихревой камерой, для которой $x=0,75$, т. е. $d_H=1,5 \cdot 10^{-2}$ м, при трех расходах аргона. $G=2$ г/с, соответственно $V_\varphi=22$ м/с, $G=4$ г/с, соответственно $V_\varphi=45$ м/с; $G=8$ г/с, соответственно $V_\varphi=90$ м/с; для гелия $G=1,2$ г/с, соответственно $V_\varphi=120$ м/с.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Все проведенные эксперименты можно условно разбить на две группы: а) эксперименты со стационарной электрической дугой при токах 30—300 А; б) эксперименты с импульсной дугой при токах до 25 кА. Стационарная дуга исследовалась в аргоне и гелии, импульсная — в аргоне. Во всех случаях средняя длина дуги равнялась примерно $12 \cdot 10^{-2}$ м (расстояние между торцом катода и дальней от катода кромкой анода). При исследовании стационарной дуги измерялись ток и напряжение, суммарные тепловые потоки в стенку плазменной камеры, в анод и катод, проводилось также фотографирование дуги через щель камерой СКС-1М в режиме непрерывной развертки.

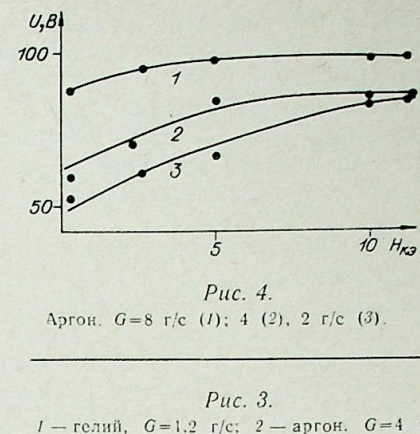
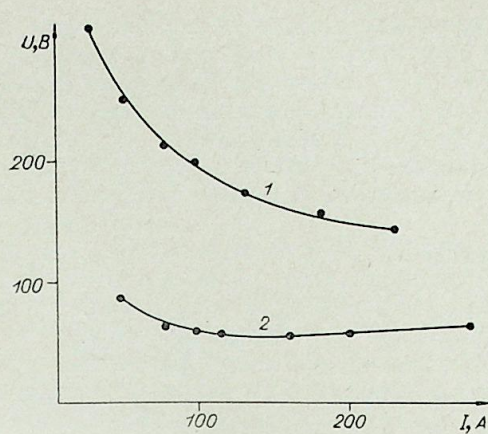


Рис. 4. Аргон. $G=8$ г/с (1); 4 (2), 2 г/с (3).

Рис. 3. 1 — гелий, $G=1,2$ г/с; 2 — аргон. $G=4$ г/с.

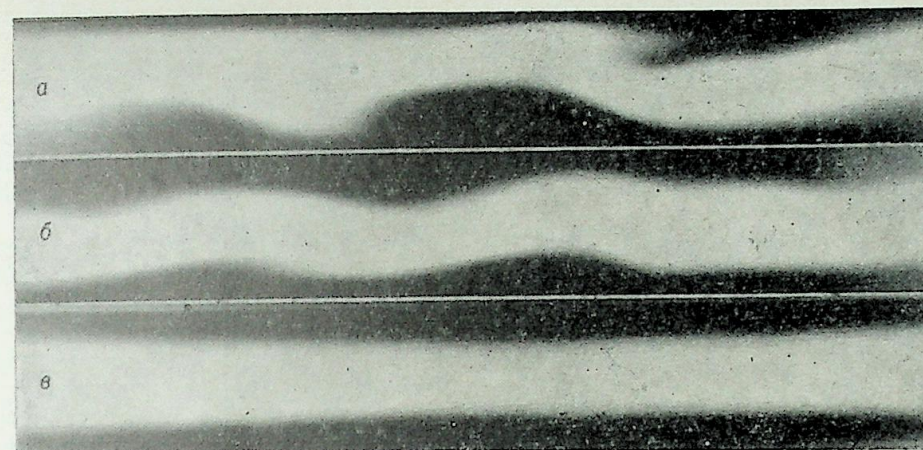


Рис. 5. Аргон. $I_g=170$ А, $H=0,03$ Т, $G=2$ г/с (а); 4 (б); 8 г/с (в).

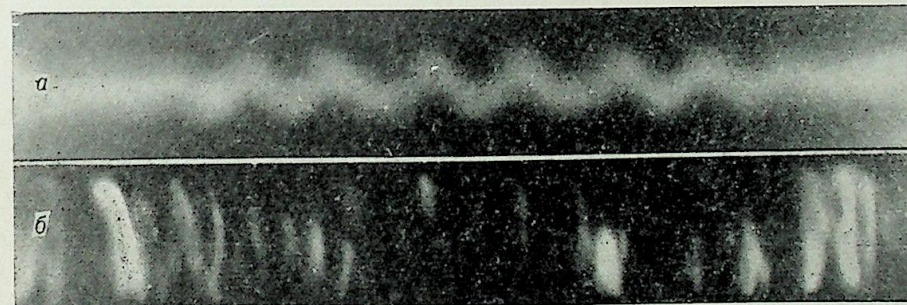


Рис. 6. Гелий. $I=170$ А, $G=1,2$ г/с. 1 см=330 мс, $H=0,03$ Т (а); 0,6 Т (б).

На рис. 3 представлены вольт-амперные характеристики дуги, горящей в гелии и аргоне. Сравнение напряжения аргоновой дуги при одинаковом токе и длине ее с результатами, полученными в работе [6, рис. 3], показало, что напряжение дуги в нашем случае в 3 раза

меньше. По-видимому, такое расхождение можно объяснить тем, что вихревое течение, организованное при помощи вихревой камеры, примененной нами, более сформированно и устойчиво. Возможно также, что на вихревое течение в работе [6] большое влияние оказывают торцевые эффекты, которых в нашем случае нет. Напряжение дуги в потоке гелия хорошо совпадает с напряжением в работе [7], где изучалась дуга в канале диаметром $2 \cdot 10^{-2}$ м, стабилизированная вихревым движением газа.

Следует отметить, что напряжение горения дуги в аргоне с увеличением его расхода от 2 до 8 г/с увеличивается более чем в 1,5 раза (рис. 4), в то время как напряжение гелиевой дуги практически не зависит от расхода газа (данные работы [7] и наши измерения).

На рис. 5, 6 приведены фотографии непрерывной развертки дуги в аргоне и гелии. Видно, что световой диаметр дуги в аргоне составляет $1-1,2 \cdot 10^{-2}$ м, в гелии (рис. 6, а) $0,4-0,6 \cdot 10^{-2}$ м. Используя модель вихря, изображенную на рис. 2, можно предположить, что наружные слои аргонной дуги интенсивно охлаждаются вихрем и поэтому напряжение на дуге возрастает, в то время как гелиевая дуга находится в центре зоны, ограниченной d_v , слабо взаимодействует с потоком газа и вследствие этого напряжение ее не зависит от расхода.

На рис. 7 представлены радиальные распределения температуры газа для трех расходов аргона и тока дуги 100 А. Температурный профиль определялся по поперечному распределению интенсивности излучения сплошного спектра аргона в длине волны 4285 нм через щель в плазменной камере, расположенную на расстоянии $4 \cdot 10^{-2}$ м от катода.

Для определения коэффициента излучения плазмы проводился абелевский пересчет интенсивности по радиусу с использованием метода Боккастена [8]. Температура определялась по зависимости коэффициента излучения сплошного спектра аргона от температуры [9] для случая локального термодинамического равновесия ЛТР. Известно, что для аргона при $\rho = 1 \cdot 10^5$ н/м² ЛТР выполняется [10], если концентрация электронов $N_e \geq 8 \cdot 10^{15}$ см⁻³, т. е. если $T \geq 9500$ К. Погрешности измерения температуры в описываемых экспериментах не превосходят 10%.

С увеличением расхода от 4 до 8 г/с температура в центре понижается, профиль становится уже. Этим также подтверждается предположение об охлаждении дуги. Однако дальнейшее увеличение расхода до 24 г/с не приводит к сколько-нибудь заметному изменению профиля температуры аргона. Можно предположить, с некоторой осторожностью, что при $V_v \geq 100$ м/с зона вихря, ограниченная d_v , хорошо сформирована, и поэтому дуга в аргоне при данном токе также начинает слабо взаимодействовать с потоком газа, а это не приводит к изменению профиля температуры и росту напряжения дуги.

Рассмотрим экспериментальные результаты исследования электрической дуги в продольном магнитном поле. На рис. 4 представлена зависимость напряжения дуги в аргоне при токе дуги 170 А. Видно, что при больших расходах, т. е. при больших круговых скоростях газа, напряжение дуги с ростом магнитного поля увеличивается слабо. На рис. 5, 8, 9 приведены фотографии непрерывной развертки дуги в аргоне при разных магнитных полях для трех расходов газа. С увеличением напряженности магнитного поля дуга становится все более неустойчивой и при малых расходах газа, т. е. при малых круговых скоростях занимает почти все сечение плазменной камеры. На рис. 10 показана зависимость теплового потока в стенку камеры от напряженности магнитного поля. Рост магнитного поля приводит к резкому увеличению теплового потока в стенку камеры. С увеличением круговой ско-

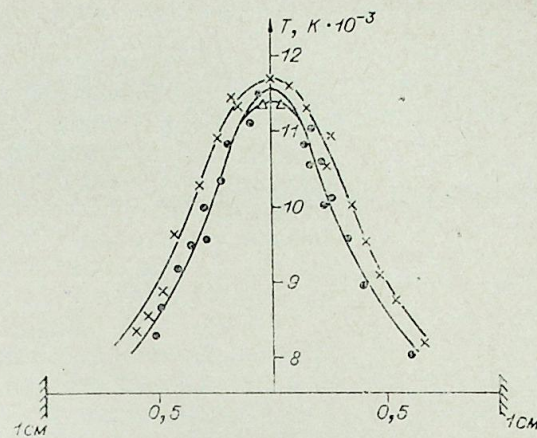


Рис. 7.

$G = 4$ г/с (·); 8 г/с (○); 24 г/с (×).

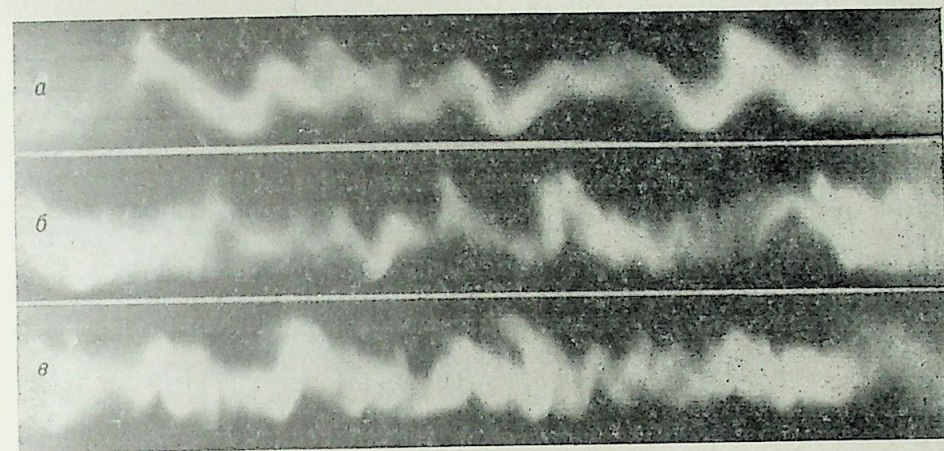


Рис. 8.

Аргон. $I_g = 170$ А, $H = 0,6$ Т. 1 см = 333 мс. $G = 2$ г/с (а); 4 г/с (б); 8 г/с (в).

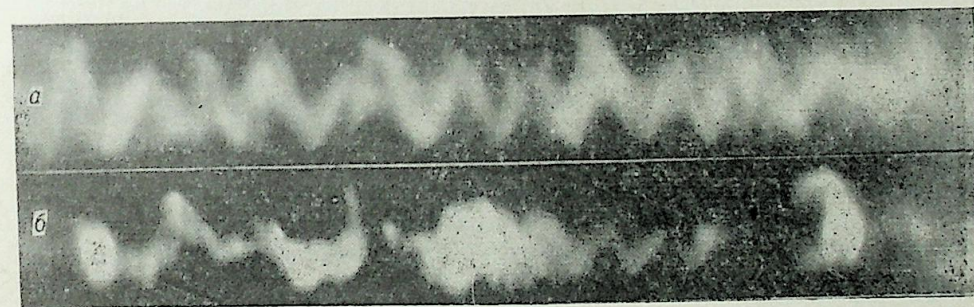


Рис. 9.

Аргон. $I_g = 170$ А, $H = 1,2$ Т. 1 см = 330 мс. $G = 2$ г/с (а); 8 г/с (б).

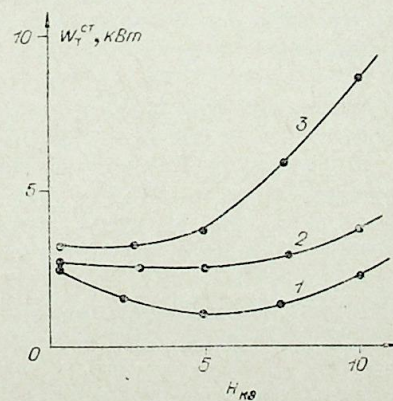


Рис. 10.

Аргон. $I_g = 170$ А, $G = 8$ г/с (1); 4 г/с (2); 2 г/с (3).

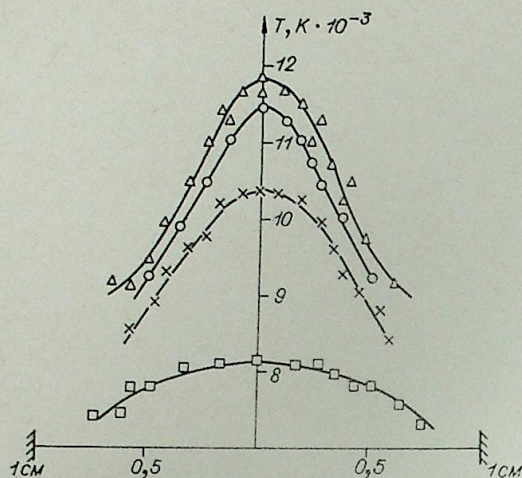


Рис. 11.
 $H=0$ (Δ); $0,03$ Т (\circ); $0,09$ (\times); $0,6$ (\square).

свидетельствует о том, что с увеличением магнитного поля уменьшается излучение дуги, что также отмечалось в работе [4], где измерялся интегральный выход излучения. Учитывая все сказанное, можно объяснить минимум на кривой 1, рис. 10. До поля 5 кЭ тепловой поток в стенку камеры падает из-за уменьшения излучения дуги. При $H \geq 5$ кЭ увеличение теплового потока вызвано тем, что уменьшение потока тепла за счет излучения перекрывается увеличением передачи тепла в стенку камеры за счет увеличивающейся неустойчивости дуги. Эту же точку зрения подтверждает слабо выраженный минимум на кривой 2 и полное отсутствие его на кривой 1.

Несколько по-другому ведет себя дуга в гелии. Наложение продольного магнитного поля приводит к значительному увеличению напряжения дуги. Так, магнитное поле напряженностью 6 кЭ увеличивает напряжение дуги в 2 раза (155 В без поля, 310 В с полем, при токе дуги 170 А). Рост магнитного поля резко увеличивает тепловой поток в стенку плазменного канала. Так, при $H=0,03$ Т, $G=1,2$ г/с,

$I=180$ А, $W_T^{CT}=0,42$ кВт, $W_T^{ВЫН}=31,3$ кВт. $\eta = \frac{W_T^{ВЫН}}{W_T^{CT}} = 93\%$, где W_T^{CT} — тепловой поток в стенку канала; $W_T^{ВЫН}$ — электрическая мощность дуги, $W_T^{ВЫН}$ — тепловой поток, выносимый газом за пределы дуги; при $H=0,6$ Т, $G=1,2$ г/с, $I=180$ А, $W_T^{CT}=13$ кВт, $W_T^{ВЫН}=54$ кВт, $W_T^{ВЫН}=33,2$ кВт, $\eta=61\%$.

Таким образом, в гелии не удается так стабилизировать дугу, как в аргоне, т.е. отжать ее от стенок. Это видно на рис. 6. Применяемые нами круговые скорости газа как в аргоне, так и в гелии ($V_{\phi}=150$ м/с) еще далеки до звуковых, и эксперименты в этом направлении будут продолжаться.

Перейдем к некоторым результатам исследований импульсной сильноточной дуги. Получение импульсной сильноточной дуги осуществляется рядом батарей конденсаторов на работающую стационарную электрическую дугу. Небольшая батарея конденсаторов с запасом энергии 12 кДж позволила получить токи в дуге до 30 кА. Импульс тока общей длительностью 250—300 мкс имел резкий фронт нарастания и «полочку» длительностью 100—120 мкс.

Через поперечное оптическое окно проводилось фотографирование разряда камерой СФР в режиме непрерывной развертки. На рис. 12

рости газа при $G=4$ и 8 г/с дуга отжимается от стенки холодным потоком, что видно на фотографиях дуги (рис. 5, 8, 9). В этом случае уже не наблюдается такого резкого увеличения теплового потока в стенку плазменной камеры (рис. 10, кривые 1, 2), как при малых расходах (кривая 3).

На рис. 11 показаны радиальные профили температуры для тока дуги 100 А и магнитного поля до 6 кЭ. Видно, что с увеличением магнитного поля профиль температуры становится более плоским, максимальная температура в центре значительно уменьшается. Это



Рис. 12.
 Аргон. $I_g=25$ кА, 1 см=12,5 мкс, $G=8$ г/с, а) $H=0,08$ Т, б) $H=1$ Т.

представлены две фотографии разряда в магнитном поле 0,08 и 1,0 Т при разных расходах аргона. Разряд достаточно стабилен и занимает среднюю зону вихря. Зная коэффициент увеличения оптической системы (в нашем случае он равен 0,85), можно измерить световой диаметр разряда. Измерения показали, что световой диаметр разряда слабо зависит от расхода аргона, не зависит от приложенного магнитного поля и составляет 15—17 мм, что соответствует зоне вихря, заключенной в a_v . Отсутствие вихря приводит к развитию разряда «бочкообразной» формы, если разряд осуществляется в широкой камере [11], или к полному заполнению диаметра разрядной трубки, как, например, в капиллярных разрядах. Предположение об устойчивом характере разряда можно было бы опровергнуть ссылкой на передержку негатива во время фотографирования. Однако изучение фотоснимков с меньшим временем разрешения (1 см=5 мкс) показало, что и в этом случае разряд не имеет внутренней структуры, за исключением, может быть, структуры волокнистого характера.

Для определения радиального профиля температуры с помощью спектрографа ИСП-30 фотографировался спектр разряда. Анализ состава спектра показал, что при токе дуги 30 кА на фоне довольно сильного сплошного спектра наблюдаются линии Ag II в излучении и резонансные линии Cu I и Al I в поглощении. Температура плазмы определялась по относительной интенсивности линий 460,9 и 465,8 нм, она сильно зависит от температуры в области до 4 эВ. Для определения радиального распределения коэффициента излучения проводился абелевский пересчет полученного поперечного распределения интенсивностей линий по методу Боккастена [8]. Профиль температуры удалось построить до $1,2 \cdot 10^{-2}$ м по радиусу, так как вблизи стенки камеры из-за значительного спада интенсивности используемый метод имеет значительные погрешности. Полученный радиальный профиль имеет плоский вид. Температура на полочке составляет 3,4 эВ. Проведенные оценки показали, что при данной температуре: 1) поглощением линий Ag II 460,9 нм и 465,8 нм можно пренебречь; 2) для верхних уровней используемых линий выполняется частичное ЛТР (ЧЛТР), это означает, что измеренная температура является температурой электронов; 3) ЧЛТР устанавливается за время порядка $2 \cdot 10^{-9}$ с; 4) погрешность измерения зависит в основном от погрешностей определения интенсивностей обеих линий; она составляет около 20%.

ВЫВОДЫ

1. Стационарная электрическая дуга в измеренных диапазонах токов и напряженностей магнитного поля становится неустойчивой и за счет сильных поперечных колебаний стремится занять все сечение дуговой камеры. Напряжение дуги возрастает, особенно сильно в гелии.

Выход излучения значительно уменьшается за счет снижения температуры центра дуги.

2. Вихревое движение аргона при определенных круговых скоростях газа позволяет отжать дугу от стенки плазменной камеры и тем самым уменьшить тепловой поток в нее. В гелии этого эффекта не наблюдается.

3. Импульсная электрическая дуга в аргоне при измеренных значениях магнитного поля и тока дуги, по-видимому, устойчива, располагается в средней зоне вихря, не касаясь стенок разрядной камеры.

Авторы приносят глубокую благодарность М. Ф. Жукову, М. А. Гольдштику, Б. А. Урюкову за полезные советы и замечания, а также С. С. Кутателадзе за внимание и поддержку в работе.

Институт теплофизики СО АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
7/VII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Ch. Yuen. Stability of the poiseuille plasma arc in an axial magnetic field.— *Phys. Fluids*, 1966, 9, 6, 1140—1150.
2. Э. И. Асиновский, А. А. Афанасьев, Е. П. Пахомов. Спиральная форма дугового столба: условия и область существования.— *Докл. АН СССР*, 1976, 231, № 2.
3. Э. И. Асиновский, А. А. Афанасьев, Е. П. Пахомов. Исследование характеристик стабилизированной стенкой дуги высокого давления в продольном магнитном поле.— *ТВТ*, 1976, 695, № 4.
4. М. А. Гольдштик, А. К. Леонтьев, И. Г. Палеев. Аэродинамика вихревой камеры.— *Теплоэнергетика*, 1961, № 2.
5. М. А. Гольдштик, Г. П. Зыкин, Ю. И. Петухов, В. Н. Сорокин. Об определении радиуса воздушного вихря в центробежной форсунке.— *ПМТФ*, 1969, № 4.
6. L. Camp. An experimental investigation of a vortex stabilised arc an axial magnetic field.— *ARL*, 1973, 73—0043, March.
7. Г. Ю. Даутов, М. И. Сазонов. Исследование напряженности электрического поля в стабилизированных дугах.— В кн.: *Генераторы низкотемпературной плазмы*. М., «Энергия», 1969.
8. K. Bockasten. Transformation of observed radiances into radial distribution of the emission of a plasma.— *JOSA*, 1961, 1, 9, 943.
9. Schulz-Gulde. The continuous emission of argon in the visible spectral range.— *Z. für Physik*, 1970, 230, 449—459.
10. В. Н. Колесников. *Физическая оптика*.— Тр. ФИАН СССР, 1964, 30, 66—175.
11. Е. С. Боровик, В. И. Петренко, Р. В. Митин, В. П. Канцендал, Ю. Р. Князев. Исследование импульсных дуг в аргоне и гелии при сверхвысоких давлениях.— В кн.: *Магнитные ловушки*, вып. 4, Киев, 1969.

УДК 537.525.5

А. В. ПУСТОГАРОВ, А. П. ХАЛБОШИН, Р. Я. ЗАХАРКИН,
В. И. ЗАВИДЕЙ

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛЬФРАМОВЫХ КАТОДОВ ПЛАЗМОТРОНА

Электроды плазмотронов работают в экстремальных условиях по уровням температур, плотностей тока и тепловых потоков, градиентов температур. Все это усложняет их экспериментальное исследование. Вольфрам широко применяется для катодов благодаря своим уникальным свойствам — максимальным температурам плавления и кипения, минимальным скоростям испарения, высоким скрытым теплотам плавления и испарения, прочностным свойствам.

Нами проведено исследование работы вольфрамовых катодов в диапазоне плотностей тока $j=10^7-10^9$ А/м² в атмосфере He ($p=10^5$ Па). Режим работы катода варьировался за счет изменения диаметра d_k и длины вылета l_k стержня из поликристаллического вольфрама, заделанного в медный охлаждаемый корпус. В процессе эксперимента осуществлялось измерение температуры, плотностей тока и удельного теплового потока, эрозии электрода. Описание экспериментальной установки приведено в [1]. Выбор в качестве рабочего тела He обусловлен его прозрачностью в отличие от Ar в «красной» длине волны ($\lambda=0,65 \cdot 10^{-6}$ м) яркостного пирометра [2].

Температура в зоне привязки разряда измерялась с помощью универсального быстродействующего фотоэлектрического микропирометра [3], позволяющего измерять яркостную и цветовую температуру в одной или двух смежных точках, а при постановке сканирующего зеркала на входе в оптическую систему — поле температур. Основная погрешность определения температуры лимитировалась погрешностью перехода от измеряемых пирометром температур (яркостной T_n , цветовой T_c) к истинной в связи с неопределенностью монохроматической излучательной способности ϵ_λ , особенно для жидкого вольфрама.

Средняя плотность тока определялась по току разряда и площади его привязки, измеряемой по следам разряда на электроде (метод автографов), по ярко светящейся зоне, по световому диаметру столба дуги у электрода [4]. В общем случае все полученные значения площади могут не совпадать с действительной площадью привязки тока. Плотность теплового потока q находилась по теплоотводу в электрод и площади привязки разряда. Специфика работы вольфрамовых катодов плазмотронов не позволяет определять распределение плотности тока по измерению электрического поля в электроде (метод тонкой пластины [5]), тока в электрод (метод секционированного электрода [6]). Однако распределение плотности тока в этом случае может быть оценено по плотности тока в плазме у катода и по полю температуры катода в зоне привязки разряда [7].

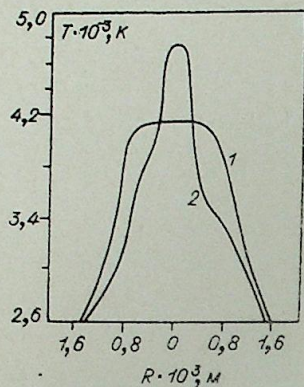


Рис. 1. Распределение температуры по торцу вольфрамового катода в He при токе $I=150$ А.

1 — $d_k = 2 \cdot 10^{-3}$ м, $l_k = 2 \cdot 10^{-3}$ м;
2 — $d_k = 4 \cdot 10^{-3}$ м, $l_k = 15 \cdot 10^{-3}$ м.

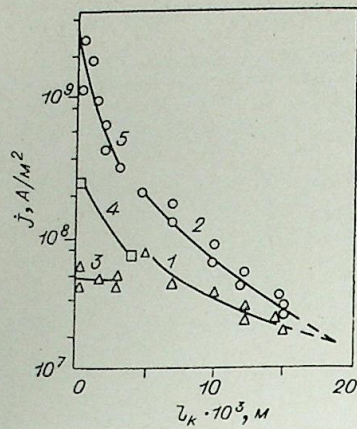


Рис. 2. Зависимость плотности тока от диаметра и длины вольфрамового катода при $I=150$ А в He.

1, 3 — метод автографов; 2, 5 — по свечению плазмы на катоде; 4 — по полю температуры; $d_k = 4 \cdot 10^{-3}$ м при $l_k < 5 \cdot 10^{-3}$ м, $d_k = 2 \cdot 10^{-3}$ м.

При использовании метода автографов за определяющий размер привязки выбиралась поверхность оплавления после $(3-6) \cdot 10^2$ с работы катода на стационарном режиме. Под ярко светящейся зоной на катоде понималась зона с температурой на границе, равной температуре плавления ($T_{пл} = 3660$ К), определяемая с помощью пирометра со сканирующим зеркалом за время 10^{-3} с (рис. 1). В данном случае установление границы привязки разряда по $T_{пл}$ оправдано не только возможностью сравнения результатов двух методов, но и тем, что температура основной части расплавленной поверхности существенно выше $T_{пл}$. Это указывает на основную ее роль в переносе тока. Если нет резких температурных градиентов по расплавленной поверхности и по близлежащей зоне, то выбор $T_{пл}$ за границу привязки разряда не является очевидным.

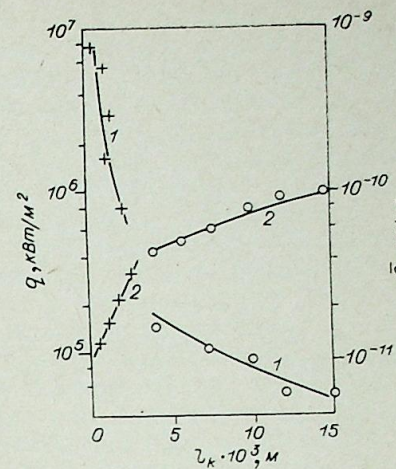
Различие этих методов определяется тем, что в случае автографов фиксируется суммарная за время работы расплавленная поверхность, тогда как во втором случае — в конкретный момент времени. Если привязка разряда стабильна, не наблюдается ее перемещения по поверхности за все время работы, то оба метода дают одинаковые результаты.

При определении плотности тока по светящемуся диаметру плазмы на катоде его изображение проектировалось на масштабный экран ($\times 140$). Следует отметить, что световой диаметр может не соответствовать электрическому, поскольку излучение и электропроводность плазмы по-разному зависят от температуры [8]. Кроме того, плотность тока в плазме в исследуемом сечении может существенно отличаться от плотности тока на самом электроде.

С уменьшением длины вылета катода l_k улучшаются условия охлаждения и возрастает плотность тока (рис. 2), температура в зоне привязки (рис. 1). При $d_k = 4 \cdot 10^{-3}$ м и $l_k > 10 \cdot 10^{-3}$ м наблюдается хорошее согласование результатов, полученных методами автографов и температурного поля. Скоростная киносъемка ($v = 4 \cdot 10^3$ кадр/с) показывает, что стабильность привязки разряда ухудшается с уменьшением l_k . Для уменьшения нестабильности привязки при $l_k < 5 \cdot 10^{-3}$ м использовались катоды диаметром $d_k = 2 \cdot 10^{-3}$ м.

Рис. 3. Зависимость удельного теплового потока (1) и эрозии (2) от диаметра и длины вольфрамового катода при $I=150$ А в He.

○ — $d_k = 4 \cdot 10^{-3}$ м; × — $d_k = 2 \cdot 10^{-3}$ м.



Наибольшее различие результатов по всем трем методам получается при $l_k = 0$. Заниженное значение j , полученное методом автографов, объясняется тем, что и в этом случае привязка разряда перемещается. Эти результаты согласуются с данными, полученными аналогичным способом в сходных условиях в Ag [9]. Значения, определенные по температурному полю катода и границе светящейся плазмы в период неподвижной привязки, различаются приблизительно на порядок, что свидетельствует о том, что привязка осуществляется не ко всей расплавленной поверхности.

Проведенные с помощью «стреляющих» зондов измерения [1] показали, что в данном случае на расстоянии $(0,2-0,4) \cdot 10^{-3}$ м от катода граница светящейся зоны хорошо согласуется с электрической. По-видимому, этот метод дает наиболее достоверные значения плотности тока на катоде. Однако в каждом конкретном случае необходим контроль соответствия оптического диаметра плазмы электрическому. Все три рассмотренных метода дают сходные результаты в случае стабильной привязки разряда ко всей расплавленной зоне, что приблизительно соответствует случаю $l_k = 15 \cdot 10^{-3}$ м. В зависимости от геометрии и условий охлаждения плотность тока на вольфрамовом катоде в He при $I=150$ А изменяется от $8 \cdot 10^6$ до $2 \cdot 10^9$ А/м², т. е. почти на три порядка.

При исследовании вольфрамовых катодов с присадками материалов с низким значением работы выхода электронов, когда возможен режим работы без расплавления поверхности, необходимы другие критерии определения границы привязки разряда по методу автографов и полю температур. Ни один из рассмотренных методов не позволяет непосредственно определить долю ионного или электронного тока, без чего трудно свести баланс энергии на поверхности катода и решить вопрос о механизме эмиссии электронов. Делаются попытки косвенного определения доли электронного тока по соотношению рассчитанного тока термоэмиссии I_e , полученному на основании измеренного поля температуры катода и закона термоэмиссии (задаются значения постоянной Ричардсона A и работа выхода электронов ϕ) и измеренному суммарному току I . Однако точность определения T , достоверность и постоянство значений A и ϕ , неучет тока обратных электронов делают такое определение доли электронного тока малодостоверным. Определение доли ионного тока на основании равенства скоростей испарения и конденсации углерода на угольном катоде в углеродсодержащей атмосфере [10] присущи те же недостатки.

При нахождении удельного теплового потока q площадь привязки разряда определялась по диаметру светящегося столба плазмы на катоде. При исследованных диаметрах, длинах катода и уровнях тока отливом тепла, подводимого через привязку, от снимаемого охлаждающей водой, согласно [2], можно пренебречь. Результаты (рис. 3) показывают, что только за счет изменения геометрии катода удельный тепловой поток при постоянном уровне тока может изменяться больше, чем на два порядка. Настоящие удельные тепловые потоки приблизи-

тельно на порядок превышают значения, полученные в сходных условиях ($l_k=0$, $I=150$ А), когда площадь привязки разряда определялась по эродированной поверхности [9]. С уменьшением длины катода при постоянном токе удельный по плотности тока тепловой поток q/j возрастает с 1,2 до 4,8 В. С повышением тока от 100 до 200 А при постоянной геометрии ($d_k=2 \cdot 10^{-3}$ м, $l_k=2 \cdot 10^{-3}$ м) температура катода возрастает с 3950 до 4750 К, а q/j снижаются с 4,5 до 3,5 В.

Эрозия катода является следствием взаимодействия сложных физических процессов, протекающих на поверхности в зоне привязки разряда и вблизи нее, в самом материале электрода. При температурах $T > 3100$ К за счет кипения примесей в вольфраме образуются поры, которые диффундируют в область повышенных температур [11], из 1 м³ вольфрама может выделяться до 10 м³ газообразных продуктов [12]. Так, в зоне привязки разряда ($d_k=4 \cdot 10^{-3}$ м, $l_k=4 \cdot 10^{-3}$ м, $I=150$ А), как показывает скоростная киносъемка ($v=4 \cdot 10^{-3}$ кадр/с), может образоваться жидкий «выступ» высотой $\sim 0,6 \cdot 10^{-3}$ м, из которого затем прорываются газообразные примеси, после чего он «схлопывается». Измеренная температура поверхности расплава не превышает 4200 К.

При отсутствии газывыделения через расплавленную зону привязки разряда в спектре излучения плазмы вблизи поверхности ($\sim 5 \times 10^{-5}$ м) не обнаружено линий вольфрама [1]. Это указывает на возможность «безэрозийного» режима работы катода за счет «циркуляции» материала электрода в прикатодной зоне (испарившиеся атомы ионизируются и в виде ионов возвращаются на катод) [9]. Эрозия вольфрамового катода в этом случае определяется окислением и испарением материала с высокотемпературной поверхности ($T > 1200$ К) вне зоны привязки разряда.

С уменьшением длины катода (рис. 3) при $I = \text{const}$ плотность тока и температура в пятне возрастают, но резко снижается его высокотемпературная поверхность, а следовательно, и эрозия. Определяющая роль окисления и испарения материала на эрозию вольфрамового катода подтверждается образованием утоньшения («шейки») на высокотемпературной цилиндрической поверхности, тогда как торцевая поверхность под пятном изменяется незначительно [9].

Если воспользоваться расчетными значениями скорости испарения жидкого вольфрама в вакууме (при $T=5000$ К $G=1$ кг/м²·с) [13], снятым профилем температуры катода ($d_k=2 \cdot 10^{-3}$ м, $l_k=0$, $I=150$ А, $T_{\text{max}} \approx 5000$ К), то расчетное значение эрозии составит 10^{-8} кг/Кл. Экспериментальное значение эрозии катода оказывается на три порядка ниже $\sim 10^{-11}$ кг/Кл. При этом следует иметь в виду, что при увеличении длительности испытаний экспериментальное значение эрозии может быть снижено до 10^{-12} — 10^{-13} кг/Кл. [9]. Таким образом, эрозия вольфрамового катода может быть ниже величины, определяемой испарением материала с нагретой поверхности.

Влияние пульсаций тока на эрозию исследовалось при $I=150$ А на катодах с плотностью тока $j \approx 10^7$ А/м² ($d_k=4 \cdot 10^{-3}$ м, $l_k=45 \cdot 10^{-3}$ м) и $j \approx 10^8$ А/м² ($d_k=3 \cdot 10^{-3}$ м, $l_k=4 \cdot 10^{-3}$ м). Эрозия существенно повышается при уменьшении частоты выпрямленного тока ниже 300 Гц. При постоянной амплитуде пульсаций тока ($\pm 16\%$) уменьшение частоты со 150 до 50 Гц (наложение на постоянную составляющую тока от генератора однофазного переменного) повышает эрозию приблизительно на порядок. При постоянной частоте $f=50$ Гц с повышением амплитуды пульсаций тока от 1 до $\pm 40\%$ эрозия возрастает на два порядка. Более чувствителен к пульсациям тока с точки зрения эрозии катод с более высокой плотностью тока, за счет больших амплитуд пульсаций температуры.

Металлографические исследования катода после 15—20 мин работы показывают, что поликристаллическая структура под расплавленной

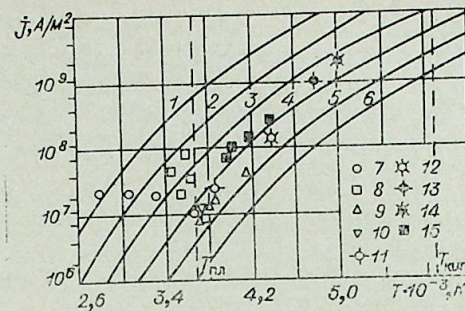


Рис. 4. Зависимость плотности тока от температуры катода (расчет).

1 — $\phi=3,2$ эВ; 2 — 3,6; 3 — 4,0; 4 — 4,4; 5 — 4,8; 6 — 5,2 эВ; 7 — ВТ-15 в He; 8 — ВЛ-10 в Ar; 9, 12 — W в He; 10 — W в Ar; 11 — W в He; 13 — W ($d_k=2 \cdot 10^{-3}$ м, $l_k=2 \cdot 10^{-3}$ м) в He; 14 — W ($d_k=2 \cdot 10^{-3}$ м, $l_k=0$) в He; 15 — W в вакууме [13].

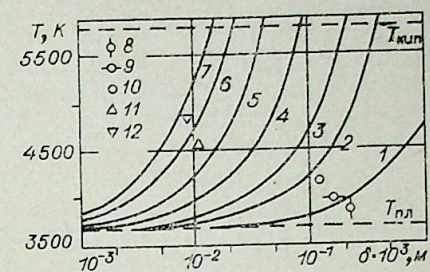


Рис. 5. Зависимость температуры катода от толщины оплавленной пленки и удельного теплового потока (расчет):

1 — $q=1 \cdot 10^4$ кВт/м²; 2 — $5 \cdot 10^4$; 3 — $1 \cdot 10^5$; 4 — $2,5 \cdot 10^5$; 5 — $5 \cdot 10^5$; 6 — $1 \cdot 10^6$; 7 — $1,5 \cdot 10^6$; 8 — $0,8 \cdot 10^4$; 9 — $1,2 \cdot 10^4$; 10 — $5 \cdot 10^4$; 11 — $2 \cdot 10^4$; 12 — $1 \cdot 10^7$ кВт/м².

пленкой в твердой фазе превращается в монокристаллическую с ориентацией грани {100} по оси. Это, по-видимому, связано с тем, что поверхность жидкой пленки, находящейся под действием сильных электрических полей прикатодной области, является как бы «затравкой» для образования монокристалла в твердой фазе со строго определенной ориентацией грани.

Минимальной эрозией в рассмотренных условиях обладает катод из плотного вольфрама с минимальным содержанием примесей при обеспечении стабильной привязки дугового пятна с высокой плотностью тока.

Представляет интерес сопоставить имеющиеся экспериментальные данные по измерению температуры и плотности тока на вольфрамовых катодах (рис. 4). Для сравнения на рис. 4 нанесены значения тока термоэмиссии, рассчитанные при $A=120 \cdot 10^4$ А/м²·К² и без учета эффекта Шоттки. Несколько необычный характер зависимости $j(T)$ для катодов из торированного (ВТ-15) и лантанированного (ВЛ-10) вольфрама объясняется тем, что концентрация присадок в их поверхностном слое не постоянна во времени. По мере выхода присадок и при оплавлении поверхности эти катоды имеют те же параметры, что и катоды из чистого вольфрама (W), т. е. при $T > T_{\text{пл}}$ характеристики всех исследованных вольфрамовых катодов идентичны.

При определении температуры катода в интервале 4000—5000 К предполагалось, что погрешность перехода от измеренной яркостной температуры ($\lambda=0,65 \cdot 10^{-6}$ м) к истинной может составлять ± 200 К. С учетом этого допущения все экспериментальные данные по вольфрамовым катодам в диапазоне температур 3600—5000 К описываются законом термоэмиссии при эффективной работе выхода электронов $\phi_{\text{эф}}$, лежащей в диапазоне (4,2—4,6) эВ. При $\phi_{\text{эф}}=4,4$ эВ и температуре кипения вольфрама $T_{\text{кип}} \approx 6 \cdot 10^3$ К плотность тока термоэмиссии может достигать $\sim 7 \cdot 10^9$ А/м². Однако данное сопоставление носит скорее качественный характер и указывает возможные значения плотностей тока при $T > 5 \cdot 10^3$ К, которые экспериментально еще не подтверждены.

Рассмотрим температурное поле катода под привязкой разряда. Если принять, что теплопроводность жидкого вольфрама $\kappa = 0,1$ кВт/мК, то при увеличении удельного теплового потока от 10^5 до 10^6 кВт/м² градиент температуры у поверхности катода должен возрасти с 10^7 до 10^8 К/м. При заданном градиенте температур перегрев поверхности над температурой плавления будет определяться толщиной

расплавленной пленки δ . Толщина расплавленной пленки зависит от многих факторов: удельного теплового потока, условий охлаждения, свойств материала и т. д. Расчетное ее определение затруднено, поскольку свойства жидкого вольфрама недостаточно исследованы. Однако можно предположить, что температура катода не превысит температуру кипения вольфрама $T_{\text{кп}}$.

На рис. 5 представлена зависимость температуры поверхности вольфрамового катода от толщины оплавленной пленки δ и удельного теплового потока q , рассчитанная в предположении, что градиент температуры по толщине пленки постоянен, а теплопроводность жидкого вольфрама $\kappa = 0,1$ кВт/мК. Здесь же нанесены экспериментально полученные значения. Вместе с тем, если q возрастает с 10^5 до 10^6 кВт/м², то предельная (по температуре кипения) толщина пленки δ уменьшается приблизительно с $0,2 \cdot 10^{-3}$ до $0,02 \cdot 10^{-3}$ м.

В условиях громадных плотностей тока и удельных тепловых потоков, реализуемых на электродах плазмотронов, необходимо учитывать термоэлектрические эффекты и возможный разрыв температуры электронного газа T_e и кристаллической решетки T_p . Так, по оценкам [14] при прохождении через металл электрического тока плотностью $j = 10^{12}$ А/м² отношение $(T_e - T_p)/T_p$ может достигать 1. Наличие теплового потока в электроде также может привести к отрыву T_e от T_p . По аналогии с [15] для вольфрамового катода при реализуемых тепловых потоках $10^6 - 10^7$ кВт/м² перегрев электронного газа ΔT_e может составить $10^2 - 10^3$ К.

Более строго этот вопрос исследован в [16], где рассматривается уравнение для распределения электронной температуры по глубине катода, из решения находится электронная температура на поверхности. Указывается, что при высоких плотностях тока может наблюдаться запыление теплового потока в электрод, обусловленное термоэлектрическими эффектами.

Если учесть, что при плавлении вольфрама работа выхода электронов ϕ может снижаться [17], возможен «перегрев» электронного газа, то в силу экспоненциальной зависимости эмиссии от ϕ и T на вольфрамовых катодах при определенных условиях плотность термоэмиссионного тока может составить $10^{10} - 10^{11}$ А/м².

Поступила в редакцию
20/VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. С. Гаврюшенко, Р. Я. Кучеров, А. В. Пустогаров, В. В. Уколов, А. П. Халбошин. Исследование катода и близлежащей области дугового разряда в Аг и Не. Ж. техн. физ., 1975, № 10, 2119—2125.
2. А. В. Пустогаров, А. Н. Колесниченко, Б. С. Гаврюшенко, Р. Я. Захаркин, В. Д. Дараган. Измерение температуры поверхности вольфрамового катода плазмотрона.—Теплофизика высоких температур, 1973, № 1, 174—179.
3. А. В. Пустогаров, А. Н. Колесниченко, В. И. Завидей, А. И. Самсонов. Универсальный микропирометр.—Приборы и техника эксперимента, 1976, № 3, 239—242.
4. Н. Г. Кесаев. Катодные процессы ртутной дуги и вопросы ее устойчивости. М.—Л., Госэнергоиздат, 1961. 320 с.
5. И. Д. Кулагин, А. В. Николаев. Определение плотности тока в пятнах сварочной дуги.—Тр. ИМЕТ, вып. 3. М., 1958, с. 250—261.
6. П. А. Шоек. Исследование баланса энергии на аноде сильноточных дуг, горящих в атмосфере аргона.—В кн.: Современные проблемы теплообмена. М.—Л., «Энергия», 1966, с. 110—139.
7. K. R. Heaghe, S. A. Nixon. Electrode temperatures of carbon and graphite arcs.—Brit. J. Appl. Phys., 1969, ser. 2, 2, 413—419.
8. В. Финкельбург, Г. Меккер. Электрические дуги и термическая плазма. М., ИЛ, 1961. 270 с.

9. М. Ф. Жуков, А. С. Коротеев, Б. А. Урюков. Прикладная динамика плазмы. Новосибирск, «Наука», 1975. 300 с.
10. М. Г. Фридлянд, М. А. Немойтин, В. А. Косс. Катод, формирующийся из газовой фазы при горении сжатой дуги в углеводородах, как источник информации о прикладных процессах. Теплофизика высоких температур, 1976, 14, № 1, 21—25.
11. H. Cline, D. P. Ferriss. Void Formation in Tungsten above 2800°C.—Trans. of the Metallurgical Soc. AIME, 1962, 224, N 3, 632—634.
12. Э. И. Мармер, О. С. Гурвич, Л. Ф. Мальцева. Высокотемпературные материалы. М., «Металлургия», 1967. 216 с.
13. M. Ozawa. A study of electrode phenomena of a high current arc.—Bull. of the Electrotechnical Laboratory, 1962, 26, N 5, 329—348.
14. В. Л. Гинзбург, В. П. Шабанский. Кинетическая температура электронов в металлах и аномальная электронная эмиссия.—Докл. АН СССР, 1955, 100, 445—448.
15. А. П. Невский. Об электронной температуре на поверхности металлов при воздействии мощных тепловых потоков.—Теплофизика высоких температур, 1970, 8, № 4, 898—899.
16. В. И. Арефьев, С. Д. Гришин, В. А. Емельянов, Л. В. Лесков. Термоэлектрический эффект в поверхностном слое металла при воздействии на него теплового потока большой мощности.—Теплофизика высоких температур, 1976, 14, № 1, 163—173.
17. А. А. Ерохин. Кинетика металлургических процессов дуговой сварки. М., «Машиностроение», 1964. 255 с.

УДК 621.387.143 : 546.11

Р. Я. ЗАХАРКИН, А. В. ПУСТОГАРОВ, А. П. ХАЛБОШИН

ДВУХСТУПЕНЧАТЫЙ МНОГОЭЛЕКТРОДНЫЙ ПЛАЗМОТРОН

Работоспособность катода наиболее энергонапряженного узла плазмотронов определяет в конечном счете ресурс работы плазмотронов. В настоящее время исследуются вольфрамовые катоды, запрессованные в медном интенсивно охлаждаемом водой корпусе [1], и термокатоды с диффузной привязкой дуги [2]. Рассматривается возможность создания определенных условий обтекания и интенсивного охлаждения стержневых катодов [3, 4], использования новых материалов с малой работой выхода [5, 6] и пористого катода с протоком через него предварительно подогретого рабочего тела [7]. Уделяется внимание распределению тока по нескольким термокатадам [8—10].

В данной работе исследуется двухступенчатый многоэлектродный плазмотрон, в котором обеспечивается равномерное распределение тока по четырем термокатадам без использования дополнительных балластных сопротивлений.

Принципиальная схема двухступенчатого плазмотрона. Отличительной особенностью данного плазмотрона (рис. 1) является наличие первой ступени, состоящей из термокатада 1, анода 11 и многоэлектродного катодного блока 10. Термокатоды 10 второй ступени (лантанированный вольфрам ВЛ-10, $d_2 = (3 \div 5) \cdot 10^{-3}$ м, $l_2 = 6 \cdot 10^{-2}$ м) размещаются в медном корпусе анода 11 ($d = 3 \cdot 10^{-2}$ м, $l = 0,12$ м) под углом в 45° к оси. К выходному фланцу анода 11 пристыковывается медный анод второй ступени 9 ($d = 4 \cdot 10^{-2}$ м, $l = 0,12$ м) с размещенным на нем соленоидом 7.

Питание обеих ступеней проводилось от отдельных источников постоянного тока, причем оба анода находились под одинаковым потенциалом. Для устранения шунтирования тока от источника второй ступени 6 через электрическую цепь источника первой ступени 3 использовалась батарея 4 из кремниевых диодов ВК-200. В процессе испытаний измерялся ток, идущий через каждый из четырех термокатадов 10.

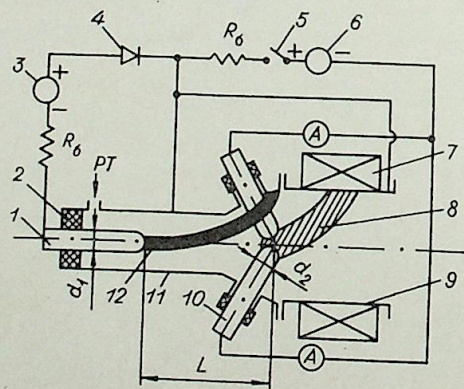


Рис. 1. Принципиальная схема плазмотрона.

1 — термокатод первой ступени; 2 — изолятор; 3 — источник питания первой ступени; 4 — батарея диодов; 5 — выключатель; 6 — источник питания второй ступени; 7 — соленоид; 8 — дуговой разряд второй ступени; 9 — анод второй ступени; 10 — катод второй ступени; 11 — анод первой ступени; 12 — дуговой разряд первой ступени.

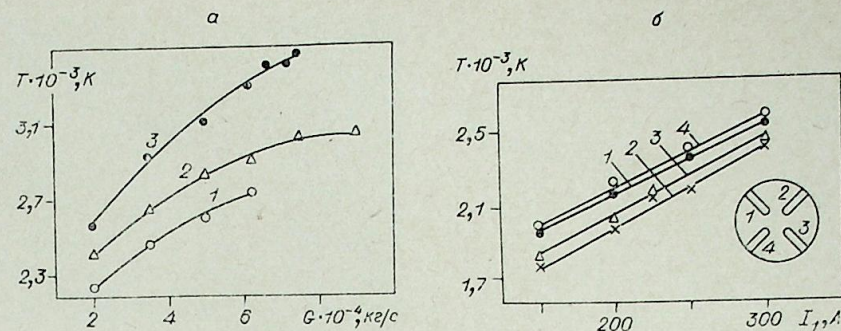


Рис. 2. Зависимость температуры основных катодов на торце от расхода гелия (а) и тока первой ступени (б):

а) $d_2 = 3 \cdot 10^{-3}$ м; $V = 3,5 \cdot 10^{-6}$ тл; $I_1 = 200$ А (1); $I_1 = 250$ (2); $I_1 = 300$ А (3); б) $d_2 = 3 \cdot 10^{-3}$ м; $G = 2 \cdot 10^{-4}$ кг/с; $V = 3,5 \cdot 10^{-6}$ тл. 1, 2, 3 и 4 — номера катодов.

Запуск первой ступени осуществлялся с помощью взрывающейся проволочки, после чего включалась вторая ступень.

Яркостная температура основных катодов измерялась визуальным (микропирометр ЛМП-066) и фотографическим (съемка фотокамерой «Киев-10» через интерференционный светофильтр $(0,65 \pm 0,005) \cdot 10^{-6}$ м) методами [2]. Нормальная монохроматическая излучательная способность ϵ_λ ($\lambda = 0,65 \cdot 10^{-6}$ м) материала катода из ВЛ-10 при $T = 2800$ К в атмосфере He равна 0,42. Согласно [11], для вольфрама при $T = 2800$ К и угле к нормали 45° (как и в нашем случае) значение ϵ_λ ($\lambda = 0,65 \cdot 10^{-6}$ м) возрастает приблизительно на 15%. Поэтому при переходе от измеренной яркостной температуры катода к истинной использовалось значение $\epsilon_\lambda = 0,48$.

При фотографическом методе, позволяющем одновременно получать информацию о температурном поле всех четырех катодов, привязка по температуре осуществлялась с помощью микропирометра ЛМП-0,66 вблизи торца одного из катодов. Предполагалось, что излучением плазмы He в выбранном спектральном интервале можно пренебречь. Это подтверждается данными работы [2], полученными в сходных условиях.

Влияние параметров первой ступени на нагрев основных термокатадов. На этом этапе исследований вторая ступень не работала. Киносъемка кинокамерой СКС-1М со скоростью $4 \cdot 10^3$ кадр/с через синий светофильтр (пленка типа А-2) показала, что анодная привязка дуги первой ступени, вращаясь по цилиндрической поверхности анода, выходит на конусную поверхность, где попеременно пересекает термокатоды второй ступени, нагревая их до высокой температуры.

Частота вращения анодной привязки дуги, полученная из киносъемки на режиме ток $I_1 = 300$ А, расход гелия $G = 75 \cdot 10^{-4}$ кг/с и расстояние между катодами $L = 7 \cdot 10^{-2}$ (см. рис. 1) изменялась от 1350 до 1750 Гц, а скорость перемещения пятна по конусной поверхности с радиусом $\sim 2 \cdot 10^{-2}$ м — от 170 до 220 м/с. Время взаимодействия дуги с термокатодом, у которого $d_2 = 3 \cdot 10^{-3}$ м, если дуга пересекает его в области, ограниченной наружным диаметром $3,4 \cdot 10^{-2}$ м и внутренним $2,2 \cdot 10^{-2}$ м, составляет $(1,3 \div 3,2) \cdot 10^{-5}$ с, а для $d_2 = 5 \cdot 10^{-3}$ м при скважности между двумя актами взаимодействия $(5,5 \div 7,2) \cdot 10^{-4}$ с оно равно $(2,3 \div 5,4) \cdot 10^{-5}$ с.

Существенное влияние на нагрев термокатадов оказывают расстояние между катодами L , ток, расход гелия и внешнее магнитное поле, поскольку этими параметрами определяется взаимодействие дугового

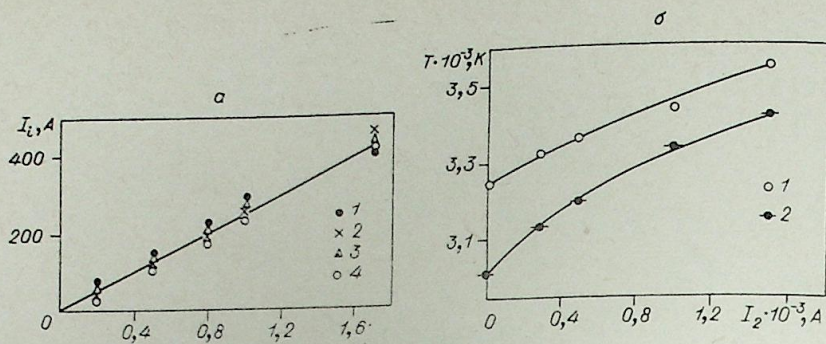


Рис. 3. Зависимость распределения тока по отдельным катодам второй ступени (а) и температуры катодов второй ступени (б) от суммарного тока второй ступени.

$I_1=300$ А, $G=2,5 \cdot 10^{-4}$ кг/с; $d_2=5 \cdot 10^{-3}$ м, $V=3,5 \cdot 10^{-6}$ тл, $L=7 \cdot 10^{-2}$ м.
а) 1, 2, 3 и 4 — номера катодов; б) 1 — основание первого катода; 2 — торец первого катода.

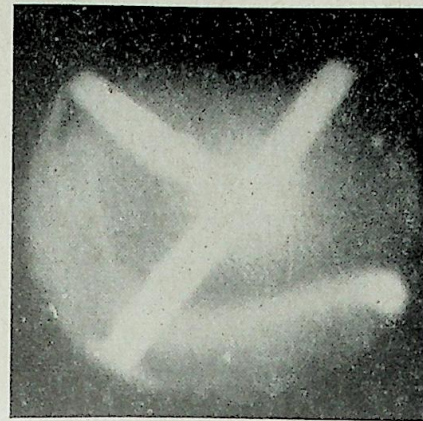


Рис. 4. Скоростная киносъемка при совместной работе двух ступеней:

$I_1=300$ А; $G=7,5 \cdot 10^{-4}$ кг/с; $d_2=3 \cdot 10^{-3}$ м;
 $V=3,5 \cdot 10^{-6}$ тл; $L=7 \cdot 10^{-2}$ м; $I_2=1000$ А.

термоэмиссии, согласно уравнению Ричардсона — Дэшмана, при данном температурном профиле может составлять с каждого катода из лантанированного вольфрама ($\varphi=2,7$ в, $A=120$ А/см² К) около 10^5 А, из чистого вольфрама ($\varphi=4,5$ в, $A=120$ А/см² К) около 10^3 А. Поскольку при включении тока второй ступени температура основных термокатодов возрастает слабо (см. рис. 3), а их термоэмиссионная способность значительна, следует предположить, что тепловой баланс на термокатадах существенно изменяется по сравнению с катодом без дополнительного подогрева.

Наличие низкотемпературной плазмы, генерируемой первой ступенью, и высокотемпературной поверхности на термокатадах приводит к диффузной привязке дуги, границы которой с помощью киносъемки определить не удалось. В результате трудно оценить действительную плотность тока на катодах, поскольку снимаемый с каждого катода ток не превышает 200 А, а ток термоэмиссии может составлять величину на порядки выше.

Проведено определение уноса массы с катодов второй ступени за счет испарения и окисления при работе только первой ступени. Унос массы за 20 мин работы ($I_1=300$ А, $G=7,5 \cdot 10^{-4}$ кг/с, $d_2=3 \cdot 10^{-3}$ м, $V=3,5 \cdot 10^{-6}$ тл, $L=7 \cdot 10^{-2}$ м) составил от $2,8 \cdot 10^{-5}$ до $3,5 \cdot 10^{-5}$ кг. В работе [12] было показано, что при диффузной привязке дуги на катодах эрозия целиком определяется скоростью уноса массы за счет испарения и окисления. Согласно этому с учетом диффузного характера привязки дуги второй ступени максимальная эрозия при токе с каждого катода ~ 500 А не должна превышать 10^{-10} кг/кл.

Таким образом, наличие низкотемпературной плазмы и постоянный подогрев термокатодов дуговым разрядом дают возможность равномерно распределять ток по нескольким термокатадам с диффузной привязкой дуги без дополнительных балластных сопротивлений. Это позволяет надеяться, что ресурс непрерывной работы двухступенчатого плазмотрона окажется приемлемым для осуществления многих технологических процессов в различных отраслях народного хозяйства.

Поступила в редакцию
21/IV 1977

столба с термокатадами. Оптимальная величина L составила $7 \cdot 10^{-2}$ м, при $L \geq 9 \cdot 10^{-2}$ м не удалось прогреть термокатоды выше 2200 К, а при $L \leq 5 \cdot 10^{-2}$ м дуга срезала их у основания. Изменение тока первой ступени от 150 до 300 А (рис. 2, а) и расхода гелия от $2 \cdot 10^{-4}$ до $9 \cdot 10^{-4}$ кг/с (рис. 2, б) вызвало рост температуры термокатодов на $500 \div 700$ К. Кроме того, с ростом I_1 и G снижалась разница в температурах отдельных катодов до 7—8%. С увеличением внешнего магнитного поля от $3,5 \cdot 10^{-6}$ до $5 \cdot 10^{-6}$ тл частота осевого шугирования возрастала, дуга реже выходила на конусную поверхность, в результате температура термокатодов снижалась на 200 К.

Исследование совместной работы первой и второй ступеней плазмотрона. После создания на основных термокатадах развитой высокотемпературной поверхности ($T=3000 \div 3200$ К) включилась вторая ступень. Положительным моментом совместной работы двух ступеней является плавный запуск второй ступени, практически с нулевого напряжения U_2 , и равномерное распределение тока по всем четырем термокатадам. С ростом тока второй ступени разброс значений тока по отдельным термокатадам снижается (рис. 3, а) и на уровне $I_i \sim 400$ А составляет около 5%.

Дополнительный подвод тепла от дугового разряда второй ступени с увеличением I_2 вызывает плавный рост температуры термокатодов (рис. 3, б), что может привести к их перегреву. Это имело место при $I_2=1000$ А ($I_1=300$ А, $G=7,5 \cdot 10^{-4}$ кг/с, $V=3,5 \cdot 10^{-6}$ тл, $d_2=3 \cdot 10^{-3}$ м, $L=7 \cdot 10^{-2}$ м). На этом режиме первый катод срезало у основания в зоне его взаимодействия с дугой первой ступени (рис. 4). В результате ток с катодов перераспределился следующим образом: 140 А (1); 350 А (2); 270 А (3); 240 А (4). Представляет интерес, что, несмотря на значительную величину токов, снимаемых с катодов 2, 3 и 4, на них не просматриваются привязки дуг и сам дуговой столб и вместе с тем на катоде 1 при $I_i=140$ А наблюдаются ярко выраженное катодное пятно и столб дуги. Увеличение диаметра основных термокатодов с $3 \cdot 10^{-3}$ до $5 \cdot 10^{-3}$ м повысило их надежность в работе, и при суммарном токе до 1700 А не наблюдалось случаев их выхода из строя. Снижение тока I_1 с 300 до 150 А ($I_2=260$ А, $G=2,5 \cdot 10^{-4}$ кг/с, $V=3,5 \cdot 10^{-6}$ тл, $d_2=5 \cdot 10^{-3}$ м, $L=7 \cdot 10^{-2}$ м) привело к существенной неравномерности нагрузки катодов: нагрузка возросла на 1 и 2 катоды вдвое, а катоды 3 и 4 не участвовали в работе.

Температурное поле термокатодов (рис. 5) имеет ярко выраженный максимум в области нагрева катодов разрядом первой ступени. Ток

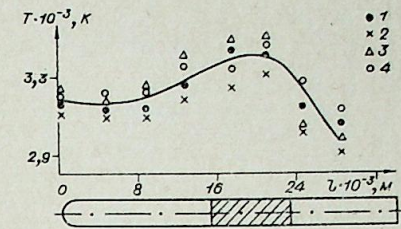


Рис. 5. Температурное поле термокатодов второй ступени:

$I_1=300$ А, $G=7,4 \cdot 10^{-4}$ кг/с, $d_2=3 \cdot 10^{-3}$ м, $V=3,5 \cdot 10^{-6}$ тл, $L=7 \cdot 10^{-2}$ м, $I_2=800$ А.
1, 2, 3 и 4 — номера катодов. Заштрихованная область взаимодействия дуги первой ступени с термокатадами.

1. М. Ф. Жуков, В. Я. Смоляков, Б. А. Урюков. Электродуговые нагреватели газа (плазмотроны). М., «Наука», 1973.
2. А. В. Пустогаров, А. Н. Колесниченко, Б. С. Гаврюшенко, Р. Я. Захаркин, В. Д. Дараган. Измерения температуры поверхности вольфрамового катода плазмотрона.—ТВТ, 1973, 11, № 1.
3. В. В. Аверьянов, Н. И. Бортничук, И. А. Зибер, М. М. Крутянский. Авт. свид. № 450385. Бюлл. изобретений 1974, № 42.
4. Г. А. Фарнасов, Л. Г. Фридман, В. Н. Каринский. Плазменная плавка. М., «Металлургия», 1968.
5. Д. Г. Быховский. Плазменная резка. Л., «Машиностроение», 1972.
6. В. И. Козлов, А. А. Андреев, В. А. Осипов. Авт. свид. № 461463, Бюлл. изобретений, 1975, № 7.
7. Ю. П. Малков, Ю. Б. Филиппов, В. А. Новожилов, Е. М. Озолин, В. А. Бренайзен. Авт. свид. № 497756, Бюлл. изобретений, 1975, № 48.
8. Патент ЧССР, 1968, № 135987.
9. Р. Я. Захаркин, Б. С. Гаврюшенко, А. В. Пустогаров, А. Н. Колесниченко. Авт. свид. № 469406, Бюлл. изобретений, 1972, № 16.
10. Р. Я. Захаркин, А. В. Пустогаров, Б. С. Гаврюшенко, Ю. В. Курочкин. Водородный плазмотрон мощностью 2 Мвт. Тр. VI Всес. конф. по генераторам низкотемпературной плазмы. Фрунзе, 1974, с. 137—140.
11. L. K. Thomas. Thermal radiation from rough tungsten surfaces in normal and off-normal direction.—J. Appl. Phys., 1968, 39, N 10, 4681—4686.
12. Д. Ф. Божко, Б. С. Гаврюшенко, Р. Я. Захаркин, А. В. Пустогаров. Эрозия вольфрамового катода плазмотрона.—Тр. V Всес. конф. по генераторам низкотемпературной плазмы, т. II. Новосибирск, 1972, с. 53—55.

А. В. ПУСТОГАРОВ, В. И. ЗАВИДЕЙ, Р. Я. ЗАХАРКИН,
А. П. ХАЛБОШИН

ИЗМЕРЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ЭЛЕКТРОДОВ ПЛАЗМОТРОНА

Температура электрода — один из основных параметров, определяющих режим его работы: эмиссию электронов, испарение материала (экспоненциально зависящих от температуры), баланс энергии на поверхности и эрозию. Измерение температуры в условиях больших ее градиентов по поверхности и времени может быть выполнено методами оптической пирометрии. Однако надо иметь в виду, что под привязкой разряда может происходить изменение исходного состояния поверхности за счет образования кратеров, роста кристаллов, плавления, испарения, кипения, что приведет к изменению ее излучательной способности.

Кроме того, наличие излучающего объема плазмы над зоной привязки разряда может вносить существенные погрешности в результаты измерений. Поэтому погрешность измерения температуры будет складываться из погрешностей пирометра, перехода от измеренной температуры (яркостной T_n , цветовой T_c) к истинной T , учета вклада излучения плазмы. Радиационный метод для измерения температур с повышенной точностью, как правило, не применялся даже в обычных условиях [1].

При реализуемых на электродах уровнях температур становится существенной погрешность использования приближения Вина вместо точного выражения Планка для перехода от T_n к T . Так, для «красной» области ($\lambda = 0,65 \cdot 10^{-6}$ м) при температуре плавления вольфрама ($T_{пл} = 3660$ К) эта погрешность составляет всего $\sim 0,1\%$, при температуре кипения ($T_{кип} \approx 5900$ К) — уже более 1% . Поправки на переход от T_n к T , рассчитанные по Планку, представлены на рис. 1. Если исходить из условия, что погрешность перехода от измеренной температуры T_n к T не превышает $\pm 1\%$, то неопределенность в монохроматической излучательной способности ϵ_λ ($\lambda = 0,65 \cdot 10^{-6}$ м) при $T = 3500$ К составляет менее $\pm 5\%$, а при $T = 4500$ К — менее $\pm 2\%$.

Пирометры для измерения температуры электродов должны иметь широкий рабочий диапазон, малый показатель визирования, высокое быстродействие, низкие погрешности при наличии электромагнитных полей. В общем случае могут быть использованы визуальные, фотографические и фотоэлектрические пирометры. Технические характеристики некоторых пирометров приведены в таблице. В пирометре ВИМП-015 [8] в отличие от ЛМП-066 для измерения температуры в диапазоне 670—1120 К используется электронно-оптическая приставка. В микропирометре П-70 [9] площадка визирования снижена $20 \cdot 10^{-6}$ м. Визуальные пирометры с исчезающей нитью позволяют выполнять измерения со скоростью до 3 отсчетов в минуту с воспроизводимостью (2—3) К и точностью (7—8) К на уровне температуры ~ 2000 К [10].

Для измерения температуры электродов разработан универсальный быстродействующий фотоэлектрический микропирометр ПФМ-315 [6], позволяющий измерять яркостные и цветные температуры в одной или

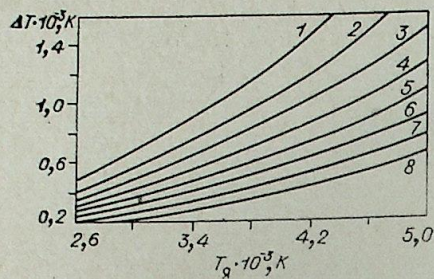
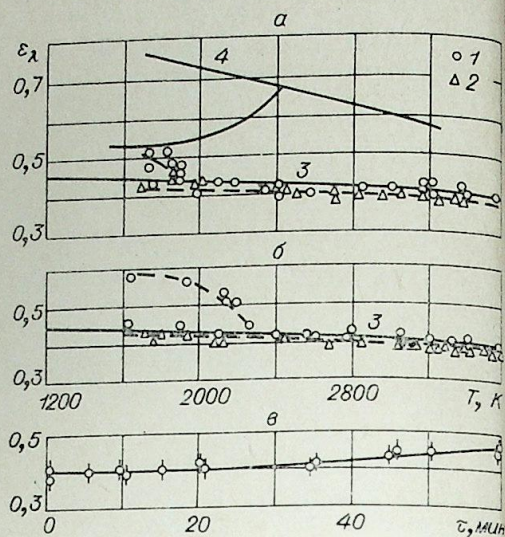


Рис. 1. Поправка на переход от яркостной температуры T_a к истинной T ($\lambda = 0,65 \cdot 10^{-6}$ м).

$\epsilon_\lambda = 0,25$ (1); 0,3 (2); 0,35 (3); 0,4 (4); 0,45 (5); 0,5 (6); 0,55 (7); 0,6 (8).

Рис. 2. Зависимость монохроматической излучательной способности вольфрама ($\lambda = 0,65 \cdot 10^{-6}$ м) от температуры (а, б) и времени выдержки (в):

а) 1 — W в He; 2 — W в H₂; 3 — W в вакууме [21]; 4 — W (Π=20%) в вакууме [22]; б) 1 — ВЛ-10 в He; 2 — ВЛ-10 в H₂; 3 — W в вакууме [21]; в) ВЛ-10 в H₂ при $T = 3450$ К.



двух смежных точках и монохроматическую излучательную способность, если в одной из них выполнена модель абсолютно черного тела. Принцип действия пирометра основан на периодическом сравнении яркости встроенной эталонной лампочки постоянного накала с яркостью исследуемого объекта, редуцируемой поглотителями различной плотности [11]. Относительный принцип измерений позволил повысить точность измерений, стабильность градуировки во времени, снизить влияние электромагнитных полей по сравнению с абсолютным методом. Универсальность пирометра обеспечивается сменой отдельных элементов (оптической системы, обтюратора, светофильтров). На входе в оптическую систему предусмотрена возможность постановки сканирующего зеркала.

Для измерения распределения T в зоне привязки разряда на электроде применяются сканирующие фотоэлектрические пирометры. Это осуществляется с помощью сканирующего зеркала на входе в пирометр (площадка визирования $d_n \approx 2 \cdot 10^{-4}$ м, быстродействие $\tau = 10^{-1}$ с, $\lambda = 0,65 \cdot 10^{-6}$ м, скорость сканирования $\sim 2 \cdot 10^{-4}$ м/с) [12] либо с помощью эксцентричного вращения объективной линзы пирометра ($d_n \approx 5 \cdot 10^{-4}$ м, $\tau = 10^{-1}$ с, $\lambda = 1,5 \cdot 10^{-6}$ м) [13]. Разрешающая способность фотоэлектрического пирометра ($\lambda = 0,65 \cdot 10^{-6}$ м) без модуляции излучения при регистрации на электронном осциллографе достигает $\sim 5 \cdot 10^{-7}$ с [14], в трехцветном фотоэлектрическом пирометре ($\lambda_1 = 0,394 \cdot 10^{-6}$ м, $\lambda_2 = 0,531 \cdot 10^{-6}$ м, $\lambda_3 = 0,703 \cdot 10^{-6}$ м) — около 10^{-6} с [15].

Из оценок стабильности флуктуации числа электронов (ф. э. у. за время экспозиции) показано, что при $T = 2000$ К ($\lambda = 0,65 \cdot 10^{-6}$ м) измерение температуры может быть выполнено при временном разрешении $\sim 10^{-6}$ с с неопределенностью $\sim 0,06$ К [10].

При фотографическом методе погрешность измерения температуры складывается из погрешностей привязки к температуре, фотометрирования, построения характеристической кривой, неравномерностей чувствительности и проявления фотоматериала кадра. Предельная среднеквадратичная погрешность измерения температуры может быть сведена до 2—3% [16, 17]. Преимущество фотографического метода заключается в возможности получения мгновенного значения поля температур

Технические характеристики оптических пирометров

Характеристики	Эталонный оптический пирометр ЭОП-66 [2]				Лабораторный микропирометр ЛМП-066 [3]		Фотоэлектрический микропирометр ФЭМП-016 [4]		Цветовой пирометр «Веселка» [5]		Универсальный быстродействующий фотоэлектрический микропирометр ПФМ-315 [6]				Фотографический пирометр ИФ-87 [7]				
	1200—1700 1700—2300 2300—3300 3300—6300 6300—10300	10 ⁻³ м	0,65	—	1200—1700 1500—2300 2100—4300	1 : 2000	0,5; 0,65	—	1100—2100 1900—3800	1 : 2000	0,65	10 ⁻²	—	1 : 2000		1 : 2000	1 : 2000	1 : 2000	1700—3300 (3 поддиапазона)
Рабочий диапазон, К																			
Показатель визирования (минимальная площадь визирования)																			
Эффективная длина волны, мкм																			
Быстродействие, с																			
Число отсчетов, 1/с																			
Инструментальная погрешность, %																			

объекта. Кроме температуры он может дать наглядную картину динамики процессов на электродах (образование и перемещение пятна, разбрызгивание капель и т. д.). Однако фотографический метод — один из наиболее трудоемких, он не нашел пока широкого применения при измерении температуры электродов. Перспективно в этом плане применение электронно-оптических преобразователей [18, 19].

Значения монохроматической излучательной способности ϵ_λ , необходимые для перехода от T_n , T_c к T , зависят от химического состава, состояния поверхности, условий работы и могут изменяться в широких пределах. Достоверные значения ϵ_λ реальных тел могут быть получены экспериментально. Ниже приведены некоторые данные по ϵ_λ вольфрама, используемого для электродов плазмотронов.

Данные по ϵ_λ (нормальной к излучающей поверхности) вольфрама марок ВМ и ВЛ-10, полученные на цилиндрических образцах ($d = 2 \cdot 10^{-3}$ м) при их омическом нагреве с помощью фотоэлектрического датчика [20], приведены на рис. 2. Поверхность образцов специально не обрабатывалась (исходная шероховатость $h_{ск} \approx 2 \cdot 10^{-6}$ м). При первоначальном нагреве наблюдаются завышенные значения ϵ_λ , но при $T > 2000$ — 2300 К они выходят на прямую ($h_{ск} \approx 1 \cdot 10^{-6}$ м), которая воспроизводится при нагреве и охлаждении. Аналогичные результаты получены и для ВТ-15. Погрешность определения ϵ_λ оценивается в $\pm 2\%$.

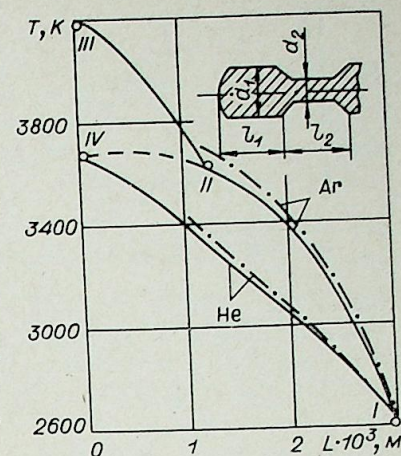
В рассмотренных условиях при $T > 2000$ К состояние исходной поверхности, наличие присадок лантана, тория, окружающая среда не сказываются существенно на ϵ_λ ($\lambda = 0,65 \cdot 10^{-6}$ м) и согласуются с данными для полированного вольфрама в вакууме [21]. Вместе с тем при нагреве образца из ВЛ=10 в H_2 при $T = \text{const}$ (рис. 2, в) наблюдается повышение ϵ_λ в связи с рекристаллизацией и повышением $h_{ск}$ до $2 \cdot 10^{-6}$ м. Шероховатость поверхности более существенно сказывается на ϵ_λ в инфракрасной области спектра, чем в видимой [23].

Для полированной поверхности вольфрама отношение $\epsilon_{0,65}/\epsilon_{0,47}$ («красно-синее» отношение для определения T_c) уменьшается с ростом T с 1000 до 3600 К от 0,94 до 0,9 [21]. Увеличение шероховатости поверхности до $h_{ск} = 1,4 \cdot 10^{-6}$ м приводит к повышению этого отношения с 0,92 до 0,98 [23], еще в большей степени сказывается наличие пористости. Значение ϵ_λ зависит от угла к нормали $-\epsilon_\lambda(\varphi)$. Для вольфрама относительная яркость начинает возрастать при $\varphi > 30^\circ$ и при $\lambda = (0,5-0,6) \cdot 10^{-6}$ м и $T = 2800$ К повышается на 20—30% [23], тогда как для угля при $\varphi > 30^\circ$ она монотонно спадает [1]. Влияние угловой зависимости спектральной яркости снижается с ростом $h_{ск}$ и λ [23].

Если проэкстраполировать рекомендованную в [24] зависимость $\epsilon_\lambda(T)$ ($\lambda = 0,65 \cdot 10^{-6}$ м) для вольфрама $\epsilon_\lambda = (0,387 \pm 0,01) - (0,74 \pm 0,03) \times 10^{-5} T$ на температуры 4000 и 5000 К, то соответственно получим значения $\epsilon_\lambda = 0,36$ и $\epsilon_\lambda = 0,35$. Однако нет экспериментальных подтверждений такой экстраполяции. Для меди общая закономерность снижения ϵ_λ ($\lambda = 0,65 \cdot 10^{-6}$ м) с ростом температуры наблюдается и в области, существенно превышающей температуру плавления [25]. Для железа, кобальта и никеля при температуре фазового перехода наблюдается резкое изменение ϵ_λ [24].

Наиболее детальные исследования температуры тугоплавких электродов выполнены в кратере анода угольной дуги в воздухе ($I = 5-30$ А), поскольку воздух используется в качестве температурного эталона [26]. Вначале было определено влияние вклада излучения плазмы в спектральном диапазоне $\lambda = (0,25 \div 10) \cdot 10^{-6}$ м по измерению энергии излучения «кратер+плазма» и «плазмы» перпендикулярно к оси у поверхности электрода. Показано, что при $\lambda > 0,6 \cdot 10^{-6}$ м вкладом излучения плазмы можно пренебречь. В спектре излучения при $\lambda < 0,6 \cdot 10^{-6}$ м зарегистрированы в основном линии С, полосы CN и континуум электронов, интенсивность которого возрастает в коротковолновую область спектра.

Рис. 3. Распределение температуры по катоду при токе $I = 100$ А [29].
— фотографический метод; - - - визуальный метод.



В области прозрачности плазмы с помощью неодимового лазера измерен коэффициент отражения ρ_λ ($\lambda = 1,06 \cdot 10^{-6}$ м), а затем осуществлен переход к $\epsilon_\lambda = 1 - \rho_\lambda$ и истинной температуре $T = 3926$ К. Полученное при этом распределение ϵ_λ по спектру оказалось близким к серому излучению. Данные других авторов о температуре кратера имеют отличные значения — 3720 ± 15 К [14], 3803 ± 20 К [27], 3995 ± 20 К [28].

Ниже приведены результаты измерения температуры вольфрамовых катодов в атмосфере Ag и He ($p = 10^5$ Па), выполненные различными методами. На стержневом вольфрамовом катоду с «пережатием» (рис. 3) в исследованном диапазоне токов $I = 50-250$ А обеспечивался диффузный режим привязки разряда ($j \approx 10^7$ А/м²). Распределение температуры по длине катода визуальным микропирометром ЛМП-066 (см. табл.) снималось до расстояния $\sim 1 \cdot 10^{-3}$ м от торца, где нет излучения плазмы [29]. Для перехода от T_n к T использовались данные по ϵ_λ (рис. 2).

Фотографирование катода через интерференционный светофильтр ($\lambda = 0,65 \cdot 10^{-6}$ м, $\Delta\lambda = \pm 90$ Å) показало, что в Ag наблюдается центральное ярко светящееся ядро плазмы у катода, а в He излучения плазмы не зарегистрировано. Спектрографические исследования излучения плазмы у катода не обнаружили линий вольфрама. В случае Ag показана осевая симметрия излучения плазмы в зоне привязки разряда.

Привязка по температуре при фотографическом методе осуществлялась в точке I (рис. 3) с помощью визуального микропирометра. Учет вклада излучения плазмы Ag проводился в предположении осевой симметрии, отсутствия реабсорбции излучения [29]. Если привязка осуществляется по истинной температуре объекта $T_{оп}$, то выражения для определения поля истинных температур записываются в виде

$$T_x = \{T_{оп}^{-1} - 2,303\lambda [\lg H_{\lambda x} - \lg H_{\lambda оп} - \lg (\epsilon_\lambda(T_{оп})/\epsilon_\lambda(T_x))] C_2^{-1}\}^{-1},$$

где $H_{\lambda оп}$, $H_{\lambda x}$, $\epsilon_\lambda(T_{оп})$ и $\epsilon_\lambda(T_x)$ — интенсивность излучения и монохроматическая излучательная способность при $T_{оп}$ и T_x ; C_2 — постоянная Планка. В случае учета излучения плазмы $H_x = H_\Sigma - H_{пл}$, где H_Σ — суммарная интенсивность излучения катода и плазмы, $H_{пл}$ — интенсивность излучения плазмы.

Участок II—III (рис. 3) соответствует излучению «катод+плазма», а II—IV построен с вычетом излучения плазмы, которое дает завышение температуры на ~ 700 К. В случае He излучение плазмы пренебрежимо мало по сравнению с излучением катода. В условиях плоского пористого вольфрамового катода при $I = 200$ А излучение плазмы Ag оказалось настолько существенным, что не позволило провести измерение температуры его поверхности [30].

Температура торца катода в He измерялась также визуальным пирометром, предварительно определялось ϵ_λ с помощью фотоэлектрического датчика [20], для чего выполнялась модель а. ч. т. на торце в виде полости диаметром $\sim 0,15 \cdot 10^{-3}$ м и глубиной $\sim 1 \cdot 10^{-3}$ м. В процессе эксперимента при $I = 100$ А полость модели а. ч. т. не заплывалась,

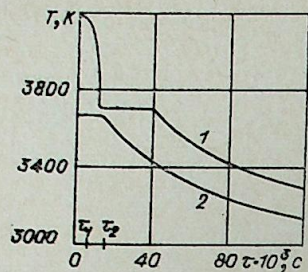


Рис. 4. Изменение температуры торца катода, измеряемой пирометром при отключении тока $I=100$ А.
 τ_1 — начало отключения; τ_2 — $t=0$. 1 — Ag; 2 — He.

а значение ϵ_λ ($\lambda=0,65 \cdot 10^{-6}$ м) составило 0,5. Это объясняется увеличением шероховатости торца катода в зоне привязки разряда в связи с образованием микрократеров со средним диаметром $\sim 5 \cdot 10^{-5}$ м, как это следует из анализа поверхности после работы. Изменение значения ϵ_λ с 0,39 до 0,5 дает разницу при переходе от измеренной яркостной температуры $T_n=3240$ К к истинной T в 160 К (рис. 1) или занижение температуры на 3%.

Определение ϵ_λ на катоде в зоне привязки разряда может быть выполнено, если поверхность не оплавляется, плазма прозрачна, градиент температуры под поверхностью не велик, как в случае катода с «пережатием» (рис. 3). Перепад температуры по глубине модели ($\sim 1 \cdot 10^{-3}$) м не превышает 100 К. В He в тех же условиях проведено определение температуры на торце катода спектрографическим методом по относительной интенсивности излучения катода в длинах волн $\lambda_1=0,53 \cdot 10^{-5}$ м и $\lambda_2=0,55 \cdot 10^{-6}$ м. Полученное значение температуры составляет 3760 К [29], что указывает на существенную погрешность метода.

Наличие вклада излучения плазмы в случае Ag наблюдается и при измерении температуры торца катода (рис. 3) при резком отключении тока разряда (рис. 4). Способ измерения температуры в зоне привязки разряда при отключении тока позволяет при определенных условиях исключить влияние излучающего объема плазмы между поверхностью электрода и пирометром, определить прозрачность плазмы. Для его реализации необходимы малые времена отключения тока, распада плазмы, высокое быстродействие пирометра и достаточная тепловая инерционность электрода. Поэтому для определения методической погрешности измерения данным способом необходимо знать времена отключения тока, распада плазмы, постоянную времени пирометра и темп изменения температуры электрода после отключения тока.

Скорость распада плазмы разряда после отключения тока определяется сложным механизмом энергообмена, зависит от исходного состава плазмы и т. д. Для слабо ионизованной плазмы Ag, He, N_2 (давление $\sim 10^3$ Па) экспериментально полученные времена релаксации составляют $(30-40) \cdot 10^{-6}$ с [31]. Для сильно ионизованной плазмы разрядного канала с плотностью тока $\sim 4 \cdot 10^7$ А/м² (давление $\sim 10^5$ Па) время релаксации составляет для H_2 и $N_2 \sim 60 \cdot 10^{-6}$ с, для He $\sim 90 \cdot 10^{-6}$ с, для Ag $\sim 120 \cdot 10^{-6}$ с [31]. В Xe (давление $\sim 10^4$ Па) спад светимости линии XeI $4830 \cdot 10^{-10}$ м на 3 порядка происходит примерно за $300 \cdot 10^{-6}$ с [32].

Оценка скорости распада плазмы может быть проведена по восстановлению электрической прочности разрядного промежутка после отключения тока. Так, при отключении тока разряда в Ag ($I=140$ А, $p=10^5$ Па) время восстановления составило $(4-5) \cdot 10^{-6}$ с [33], в воздухе ($I=120$ А, $p=10^5$ Па) — $25 \cdot 10^{-6}$ с [34]. Расчеты для столба дуги в цилиндрическом канале [воздух, $p=10^5$ Па, $I=8-60$ А, диаметр канала $5 \cdot 10^{-3}$ м, температура на оси разряда $(7-15) \cdot 10^3$ К] показывают, что при мгновенном отключении тока распад плазмы осуществляется за $(7-15) \cdot 10^{-6}$ с [35]. Поскольку время распада плазмы в условиях привязки разряда на электроде не поддается надежным расчетным

оценкам, оно должно контролироваться в процессе измерения температуры.

Если принять время распада плазмы равным 10^{-5} с, а темп снижения температуры электрода 10^6 К/с, то измеренная температура может быть ниже истинной на 10 К, при времени распада 10^{-4} с — на 100 К. Однако, если темп изменения температуры электрода составляет 10^{-5} с, время распада плазмы 10^{-4} с, то занижение температуры составит 10 К, или менее $\sim 0,3\%$ на уровне 4000 К.

Поэтому при измерении температуры «прогретого» катода (рис. 3) использовался контактор (время отключения $\sim 6 \cdot 10^{-3}$ с), а спад светимости плазмы, контролируемый фотодиодным датчиком с остроугольной оптикой перпендикулярно оси разряда у катода. Поскольку темп охлаждения катода после отключения тока составляет не более 10^4 К/с (рис. 4), то конечное время распада плазмы $\sim 3 \cdot 10^{-3}$ с приводит к занижению измеряемой температуры не более чем на 30 К (менее 1%).

При отключении тока в Ag (рис. 4) измеряемая пирометром температура резко снижается со значения ~ 4500 К, а затем наблюдается плато $T=\text{const}$ (фазовый переход) на уровне температуры плавления вольфрама. Наличие оплавленной зоны наблюдается на микрошлифах катода. По измеренной T_n на плато $T=\text{const}$ принимая $T=T_{пл}=3660$ К (истинная температура), определялась ϵ_λ (способ пирометра [36]):

$$\ln \epsilon_\lambda = C_2 \lambda^{-1} (T^{-1} - T_n^{-1}).$$

Полученное значение ϵ_λ ($\lambda=0,65 \cdot 10^{-6}$ м) для температуры фазового перехода вольфрама составило $\sim 0,39$. Отсюда следует (рис. 2), что для вольфрама при фазовом переходе не происходит резкого изменения ϵ_λ .

До отключения тока в He температура торца катода находится на уровне ~ 3650 К, при отключении не отмечается скачкообразного изменения температуры, т. е. вкладом излучения плазмы можно пренебречь, что согласуется с фотографическим методом измерения температуры. Отсутствие плато $T=\text{const}$ свидетельствует о том, что поверхность катода не претерпевает фазового превращения, что подтверждается анализом микрошлифа катода.

При измерении температуры стержневых вольфрамовых катодов без теплового «пережатия», заделанных в медный охлаждаемый корпус, темп изменения температуры торца катода при отключении тока возрастает, что требует существенного уменьшения времени отключения тока. В этом случае для отключения тока использовался прерыватель, шунтирующий разрядный промежуток при помощи тиристора (тип ТЛ250), с временем коммутации $\sim 30 \cdot 10^{-6}$ с. Для коммутации токов до 1 кА при напряжении до 1 кВ при времени срабатывания $(20-150) \cdot 10^{-6}$ с могут быть использованы полупроводниковые устройства [37]. Дуговые размыкатели [38] позволяют коммутировать токи до 50 кА при напряжении до 20 кВ с быстродействием $(0,5-20) \cdot 10^{-6}$ с.

Период отключения тока разряда в He и изменение температуры торца катода (диаметр катода $d_k=4 \cdot 10^{-3}$ м, длина вылета из медного корпуса $l_k=4 \cdot 10^{-3}$ м) представлены на рис. 5. Спад тока до нуля осуществляется приблизительно за $20 \cdot 10^{-6}$ с, еще через $20 \cdot 10^{-6}$ с начинается снижение

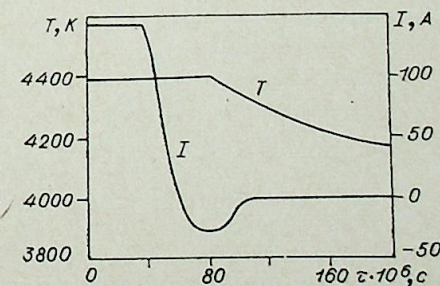


Рис. 5. Отключение тока I и изменение температуры катода T (He, $d_k=4 \cdot 10^{-3}$ м, $l_k=4 \cdot 10^{-3}$ м).

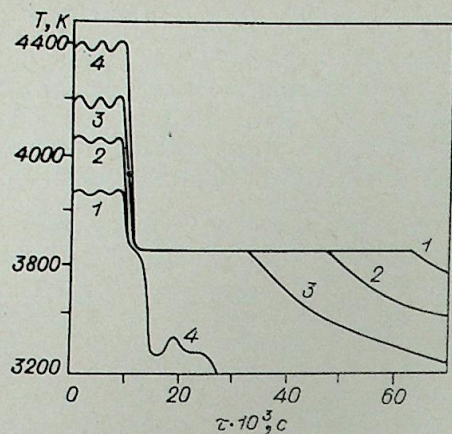


Рис. 6. Изменение температуры вольфрамового катода при отключении тока $I=150$ А в He.

1 — $d_K=4 \cdot 10^{-3}$ м, $l_K=15 \cdot 10^{-3}$ м; 2 — $d_K=4 \cdot 10^{-3}$ м, $l_K=10 \cdot 10^{-3}$ м; 3 — $d_K=4 \cdot 10^{-3}$ м, $l_K=8 \cdot 10^{-3}$ м; 4 — $d_K=4 \cdot 10^{-3}$ м, $l_K=4 \cdot 10^{-3}$ м.

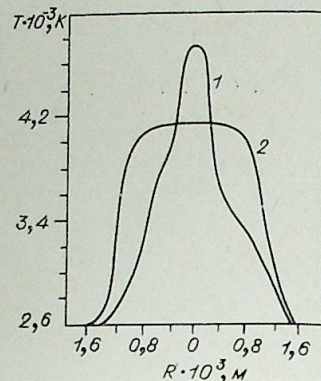


Рис. 7. Распределение температуры по торцу вольфрамового катода в He при $I=150$ А.

1 — $d_K=2 \cdot 10^{-3}$ м, $l_K=2 \cdot 10^{-3}$ м; 2 — $d_K=4 \cdot 10^{-3}$ м, $l_K=15 \cdot 10^{-3}$ м.

температуры катода. Темп изменения температуры катода при этом составляет $\sim 1,1 \cdot 10^6$ К/с. После прохождения тока через ноль наблюдается обратный ток величиной 25 А, что объясняется наличием емкости разрядного промежутка.

Отсутствие скачкообразного изменения температуры катода при отключении тока в He свидетельствует о прозрачности плазмы в выбранном спектральном диапазоне ($\lambda=0,65 \cdot 10^{-6}$ м). Запаздывание снижения температуры на $20 \cdot 10^{-6}$ с после прохождения тока через ноль, по-видимому, свидетельствует о времени распада плазмы, в течение которого осуществляется подвод энергии к катоду.

На графитовом электроде диаметром $d_K=2,5 \cdot 10^{-3}$ м после импульсного разряда зарегистрирован темп спада температуры $(1-2,5) \cdot 10^6$ К/с [14]. Значение ϵ_λ ($\lambda=0,65 \cdot 10^{-6}$ м) принималось равным 0,85. Поскольку после разряда не наблюдалось скачкообразного изменения показаний пирометра, сделан вывод о незначительном вкладе излучения плазмы N_2 .

Распределение температуры по торцу медного стержневого анода в N_2 снималось при отключении тока $I=300$ А с помощью быстродействующего инфракрасного микропирометра ($\lambda=1,5 \cdot 10^{-6}$ м) со сканирующей системой [13]. Показано, что в инфракрасной области вкладом излучения плазмы N_2 можно пренебречь, измеренная температура составляет ~ 1350 К.

При постоянном токе $I=150$ А с уменьшением длины катода l_K с $15 \cdot 10^{-3}$ м до $4 \cdot 10^{-3}$ м температура его поверхности T возрастает с 3870 до 4400 К, а длительность плато $T=\text{const}$ снижается с $50 \cdot 10^{-3}$ с практически до нуля (рис. 6). Значение ϵ_λ ($\lambda=0,65 \cdot 10^{-6}$ м) принимается равным 0,38. Амплитуда пульсаций температуры с частотой выпрямленного тока ($f=300$ Гц, амплитуда $\pm 8\%$) составляет не более 1%. Темп изменения температуры катода после фазового перехода возрастает с уменьшением l_K (улучшается охлаждение) с $1,3 \cdot 10^4$ ($l_K=15 \cdot 10^{-3}$ м) до $2 \cdot 10^4$ К/с ($l_K=8 \cdot 10^{-3}$ м). При $d_K=4 \cdot 10^{-3}$ м и $l_K=4 \cdot 10^{-3}$ м не наблюдается плато $T=\text{const}$ из-за переохлаждения расплава. В этом случае на уровне температуры плавления $T_{пл}$ замедляется скорость снижения температуры, переохлаждение расплава достигает ~ 300 К, затем отме-

чаются некоторый всплеск и дальнейший спад температуры. Этот процесс объясняется выделением энергии кристаллизации.

В случае вольфрамового анода плавильной дуговой печи (штабик весом $12 \cdot 10^{-3}$ кг) при отключении тока разряда $I=230-330$ А в атмосфере Ag и не He темп изменения температуры на несколько порядков ниже, чем для рассмотренных выше катодов плазмотрона в связи с большей массой расплава и менее интенсивным охлаждением. Переохлаждение расплава составляет 20–30 К. Измеренная на плато $T=\text{const}$ цветовая температура ($\lambda_1=0,47 \cdot 10^{-6}$ м, $\lambda_2=0,63 \cdot 10^{-6}$ м) равна 3658–3683 К [39].

В предположении прозрачности плазмы He было измерено распределение температуры по торцу катода (рис. 7) при использовании сканирующего зеркала на входе в оптическую систему пирометра ПФМ-315 (см. табл.). Скорость сканирования по торцу катода составляла ~ 2 м/с, т.е. профиль температуры снимался за время $2 \cdot 10^{-3}$ с. В случае короткой длины катода ($l_K=2 \cdot 10^{-3}$ м) температура на оси достигла 4800 К (при $\epsilon_\lambda=0,37$), при этом профиль был несколько несимметричным.

В предположении малого градиента температуры по поверхности электрода полученные значения температуры на границе привязки разряда переносят на зону привязки [40, 41], однако, как следует из рис. 3, даже в случае прогретого электрода и диффузной привязки температура в пятне может быть существенно выше, чем на его границе. При контрагированной привязке (рис. 7) это отличие становится еще более существенным.

Для измерения температуры электродов дуговых разрядов применяется метод калориметрирования в воде падающих с электрода капель материала [42], а также по скорости испарения материала в импульсном [43] и в стационарном [44] режимах. Однако используемые при этом предпосылки затрудняют оценку погрешности измерения температуры. Перспективны для электродов методы оптической пирометрии по определению истинной температуры, основанные на использовании стороннего источника излучения, поляризации излучения. В случае зеркально отражающей поверхности по измерению яркостной температуры нормально и под углом 45° к поверхности определяются нормальная монохроматическая излучательная способность ϵ_λ и истинная температура. Проведенные на вольфраме при температурах 1630 и 2190 К исследования дали результаты, хорошо согласующиеся с полученными другими методами [45]. Предлагается также способ измерения истинной температуры по отношению составляющих поляризованного, собственного и отраженного излучений от исследуемого тела и стороннего источника в двух или более участках спектра [46].

Кроме того, надо иметь в виду, что само понятие температуры предполагает наличие равновесного состояния (черное тело). На электродах могут реализовываться градиенты температуры у поверхности порядка 10^6-10^7 К/м [47], а излучение выходит из различных глубин, температура которых различна [24]. Влияние этого эффекта зависит от свойств материала, градиента температур и спектрального диапазона. По оценкам [48], в поверхностном слое катода может существовать отрыв температуры свободных электронов от температуры решетки (для медного катода $\sim (1-4) \cdot 10^3$ К). Все это требует исследования процессов излучения в специфических неравновесных условиях.

Распределение излучения на поверхности металла обычно не соответствует излучению черного тела. Совпадение в инфракрасной области эксперимента и теории Друда, базирующейся на свободных электронах в металлах, позволяет предположить, что излучение в этой области спектра близко к излучению черного тела [24]. Кроме того, с переходом в инфракрасную область снижается вклад излучения плазмы в показания пирометра. Все это указывает на перспективность измерения температуры электродов в инфракрасной области спектра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Я. Свет. Объективные методы высокотемпературной пирометрии при непрерывном спектре излучения. М., «Наука», 1968. 240 с.
2. В. В. Кандыба, В. Е. Финкельштейн. Развитие стандартизации измерения высоких температур.— Измерительная техника, 1975, № 9, с. 53—54.
3. А. В. Коган. Разработка и изготовление опытных образцов визуального микропирометра. Львов, 1966. 16 с.
4. М. И. Лилкович. Фотоэлектрический микропирометр ФЭМП-016. Техническое описание и инструкция по эксплуатации. Львов, 1967. 16 с.
5. Цветовые пирометрические преобразователи и пирометры «Веселка-2». Техническое описание и инструкция по эксплуатации. Львов, 1974. 30 с.
6. Пирометр фотоэлектрический многоканальный ПФМ-315. Техническое описание и инструкция по эксплуатации. Львов, 1976. 25 с.
7. Фотографический пирометр ИФ-87. Описание и инструкция по эксплуатации. Л., 1968. 9 с.
8. А. В. Коган. Микропирометр с электронно-оптическим преобразователем.— Измерительная техника, 1967, № 12, 19—21.
9. Н. И. Профатилова, Д. М. Щербина. Микропирометр для объектов размером порядка 20 мкм.— Измерительная техника, 1974, № 11, 57—59.
10. Фоули. Быстродействующий оптический пирометр.— Приборы для научных исследований, 1970, № 6, 29—37.
11. Ю. И. Данилов, А. Н. Колесниченко, А. В. Пустогаров. Быстродействующий фотоэлектрический микропирометр.— Приборы и техника эксперимента, 1970, № 3, 254—257.
12. K. R. Hearne, A. Nixon. Electrode temperatures of carbon and graphite arcs.— "Brit. J. Appl. Physics, 1969, ser. 2, 2, 413—419.
13. D. Klaps, R. Holmes. Anode spot temperatures in vacuum arcs.— Proc. XI Intern. Conf. on Phenomena in Ioniz Gases. Praha, 1973, p. 82—84.
14. D. C. Strachan, K. G. Evans. High-speed temperature measurements on arc heated electrodes following current interruption.— Intern. J. of Electronics, 1974, 36, N 5, 655—669.
15. Корнев. Оптический пирометр с микросекундным временем разрешения.— Приборы для научных исследований, 1971, № 11, 3—6.
16. Ю. П. Шрамко. Фотографическая пирометрия.— Теплофизика высоких температур, 1967, № 2, 367—372.
17. Экстон. Применение фотографического пирометра при исследовании абляции теплозащитных материалов.— Ракетная техника и космонавтика, 1969, № 12, 90—96.
18. Д. Соул. Электронно-оптическое фотографирование. М., Воениздат, 1972. 404 с.
19. В. И. Раховский. Эрозия электронов в контрагированном разряде.— Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1975, № 3, сер. техн. наук, вып. 1, 11—27.
20. А. Н. Колесниченко, Ю. А. Красношеков, Л. Б. Невеженко, А. В. Пустогаров. Излучательная способность карбида циркония при высоких температурах.— Теплофизика высоких температур, 1971, № 1, 202—204.
21. К. Д. Смиттелс. Вольфрам. Металлургия, 1958. 414 с.
22. А. В. Пустогаров, Г. Н. Мельников, А. Н. Колесниченко, В. Д. Дараган, Д. Д. Чепига. Теплофизические свойства пористого вольфрама при температуре 1200—3200 К.— Порошковая металлургия, 1974, № 11, 52—57.
23. L. K. Thomas. Thermal radiation from rough tungsten surfaces in normal and off-normal directions.— J. of Appl. Phys., 1968, 39, N 10, 4681—4686.
24. Р. Дж. Торн, Дж. Х. Уилсон. Излучение тепловой энергии реальными телами.— В кн.: Основные понятия и современные методы измерения температур.— Металлургия, 1967, т. III, ч. 1, 84—126.
25. Быховский Ю. А. Определение истинной температуры расплава с помощью оптического пирометра.— Цветные металлы, 1953, № 4, 27—31.
26. H. Magdeburg, U. Schley. Spektralphotometrische eigenschaften des niederstrom — kohlebogens.— Z. für Angewandte Phys. 1966, 20, N 5, 465—473.
27. Диагностика плазмы. Под ред. Р. Хаддлестоуна, С. Леонарда. М., «Мир», 1967. 516 с.
28. Г. Грим. Спектроскопия плазмы. М., Атомиздат, 1962. 452 с.
29. А. В. Пустогаров, А. Н. Колесниченко, Б. С. Гаврющенко, Р. Я. Захаркин, В. Д. Дараган. Измерение температуры поверхности вольфрамового катода плазмотрона.— Теплофизика высоких температур, 1973, № 1, 174—179.
30. М. А. Ероньян, Н. Г. Калинина, В. М. Ламонов, Ю. П. Малков, Ю. Е. Филиппов. Исследование пористых электродов в среде аргона.— Тр. III Всес. конф. по генераторам низкотемпературной плазмы. Минск, «Энергия», 1969, с. 128—139.
31. О. А. Малкин. Импульсный ток и релаксация в газе. М., Атомиздат, 1974. 280 с.
32. Г. Н. Герасимов, Б. В. Хряков. Исследование рекомбинации в послесвечении ксенона.— Оптика и спектроскопия, 1975, с. 453—457.
33. R. Simmons, A. B. Parker. The recovery of high current long gaps in hydrogen and argon.— Intern. J. of Electronics, 1974, 37, N 6, 825—832.
34. D. C. Strachan. The recovery of refractory arce electrode regions-effect of probing current reselime: Intern. J. of Electronics, 1974, 37, N 4, 521—531.
35. В. Е. Ионин, Е. В. Смирнов. О времени теплового распада электродуговой плазмы при мгновенном отключении энергии.— В кн.: Вопросы физики низкотемпературной плазмы. Минск, «Наука и техника», 1970, с. 311—313.
36. Излучательные свойства твердых материалов. Справочник под ред. А. Е. Шейдлина. М., «Энергия», 1974. 472 с.
37. Управляемые полупроводниковые вентили. М., «Мир», 1967, с. 398.
38. Н. И. Фальковский. Управляемый плазмоструйный разрядник для коммутации импульсных токов.— Приборы и техника эксперимента, 1973, № 3, 112—114.
39. В. И. Кашин, Д. Я. Свет, В. Г. Афонькин, Б. Л. Клибанов, В. Г. Семенов. Новый метод термографического исследования быстропротекающих процессов кристаллизации тугоплавких металлов.— Докл. АН СССР, 1972, 207, 81—82.
40. H. Hügel, G. Krülle. Phänomenologie und Energiebilanz von Lichtbogenkathoden bei niedrigen Drücken und hohen Stromstärken — Beiträge aus der Plasma Physik, 1969, 9, N 2, 87—116.
41. A. Bauer, P. Schulz. Electrodenfälle und Bogengradienten in Hochdrüchentladungen insbesondere bei Xenon.— "Z. für Physik, 1954, 139, 197—211.
42. А. А. Ерохин. Кинетика металлургических процессов дуговой сварки. М., «Машиностроение», 1964, с. 68—70.
43. В. И. Раховский. К вопросу об образовании дуги на контактах при отключении больших токов.— «Порошковая металлургия», 1962, № 1, 45—49.
44. Ф. И. Стрельцов, И. И. Потапов. Температура поверхности металлургического расплава в зоне воздействия плазменной дуги.— Физика и химия обработки материалов, 1974, № 6, 42—46.
45. К. П. Тингвальдт, Г. Магдебург. Новый оптический метод определения термодинамической температуры раскаленных металлов.— В кн.: Основные понятия и современные методы измерения температур. М., «Металлургия», 1967, т. III, ч. I, с. 166—171.
46. Д. Я. Свет. Способ измерения истинной температуры тела с неизвестной излучательной способностью.— Авт. свид. СССР, кл G01 5/58, № 435461, 1974.
47. J. Euler. Die axiale temperaturverteilung im inneren der anode des Kohlebogens und das wärmeleitvermögen von graphite bei hohen Temperaturen.— "Annalen der Physik, 1956, 18, 345—369.
48. А. П. Невский. Некоторые вопросы физики приэлектродных процессов электрической дуги. Автореф. дис. МГУ, 1974. 30 с.

УДК 621.314.5

А. Л. БАРАННИКОВ, П. Ю. ПЕКШЕВ

**ОСОБЕННОСТИ РАБОЧИХ ПРОЦЕССОВ
В СИЛЬНОТОЧНЫХ ГАЗОРАЗРЯДНЫХ ПРИБОРАХ
С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ**

Работы [1—11] показывают, что участок дифференциальной отрицательной проводимости на вольт-амперной характеристике дугового разряда может быть использован для экономичного управления проводимостью вентиля, генерации колебаний и т. д.

Современный этап в исследованиях газоразрядных приборов нового типа характеризуется переходом от работ на лабораторных слаботочных образцах к созданию мощных вентиляй. Конкретной областью наших исследований является задача создания сильноточного полностью управляемого трехэлектродного плазменного вентиля, заполненного парами цезия и бария [1, 4—6, 12, 13]. Поэтому нас интересовали те эффекты, которые при повышении уровня интегрального тока ($I_{p\Sigma}$) или плотности тока разряда (j_p) в Cs—Ba-трехэлектродном вентиле могут повлиять на вид его вольт-амперной характеристики (ВАХ), привести к неравномерности распределения тока по электродам, изменить важнейшие параметры прибора. К таким параметрам прежде всего относятся критические ток и напряжение горения разряда ($I_{крит}$ и $U_{крит}$), минимальный для гашения заданного тока разряда I_p , потенциал сетки ($U_{с.гаш}$), напряжение горения разряда (U_p) и пропускаемый ток (I_p).

Работы по газоразрядным приборам и термоэмиссионным преобразователям энергии показывают, что в сильноточных вентилях основное воздействие может оказывать собственное магнитное поле [5, 6, 13—17]. Необходимо, однако, подчеркнуть, что к началу наших исследований влияние магнитного поля на характеристики сильноточных плазменных вентиляй с отрицательной проводимостью практически не было изучено.

**ВЛИЯНИЕ ПОПЕРЕЧНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ
НА ВОЛЬТ-АМПЕРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ**

В диапазоне рабочих параметров цезий-бариевого трехэлектродного плазменного вентиля ($P_{Cs} \approx (6 \div 8) \cdot 10^{-4} \div (8 \div 9) \cdot 10^{-3}$ Торр; $P_{Ba} \approx 10^{-4} \div 10^{-3}$ Торр; $T_k \approx 1000 \div 1300^\circ\text{C}$) [4], когда сетка способна эффективно прерывать разрядные токи, существуют два вида вольт-амперных характеристик: с участком насыщения (рис. 1, б) и отрицательной проводимости (рис. 1, а)*.

Если вольт-амперная характеристика имеет участок насыщения (рис. 2, а, кривая 1), то поперечное магнитное поле не только увели-

* ВАХ с участком отрицательной проводимости часто наблюдается в виде «обрывных».

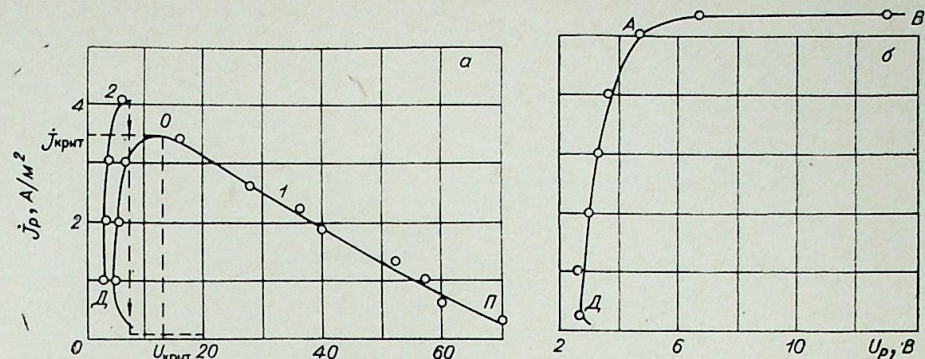


Рис. 1. Вольт-амперные характеристики цезий-бариевого трехэлектродного плазменного вентиля в диапазоне рабочих параметров.

а) ВАХ с отрицательной проводимостью. 1 — $T_k = 1000^\circ\text{C}$; $P_{Cs} = 4,9 \cdot 10^{-3}$ Торр; $P_{Ba} = 1,8 \cdot 10^{-4}$ Торр; 2 — $T_k = 1050^\circ\text{C}$, $P_{Cs} = 5,4 \cdot 10^{-3}$ Торр, $P_{Ba} = 3 \cdot 10^{-4}$ Торр; б) $P_{Cs} = 8,1 \cdot 10^{-3}$ Торр, $P_{Ba} = 1,9 \cdot 10^{-4}$ Торр; $T_k = 1050^\circ\text{C}$.

чивает напряжение горения разряда, но и изменяет сам вид ВАХ. Так, из рис. 2, а видно, что участок насыщения исчезает, а при определенной плотности тока происходит обрыв дуги: ВАХ с насыщением переходит в характеристику с отрицательной проводимостью. Экспериментально наблюдалось, что вначале увеличение B уменьшает критическую плотность тока разряда ($j_{крит}$), что сопровождается уменьшением $U_{крит}$. После полного исчезновения участка насыщения тенденция меняется — уменьшение $j_{крит}$ с ростом B сопровождается увеличением $U_{крит}$.

В случае вольт-амперной характеристики с участком дифференциальной отрицательной проводимости (рис. 2, б, кривая 1) действие магнитного поля также значительно увеличивало падение напряжения на разряде, уменьшало $j_{крит}$, что сопровождалось увеличением $U_{крит}$ (рис. 2, б, кривые 1—4).

В обоих рассматриваемых режимах усиливалось действие поперечного магнитного поля с ростом плотности тока разряда, особенно в об-

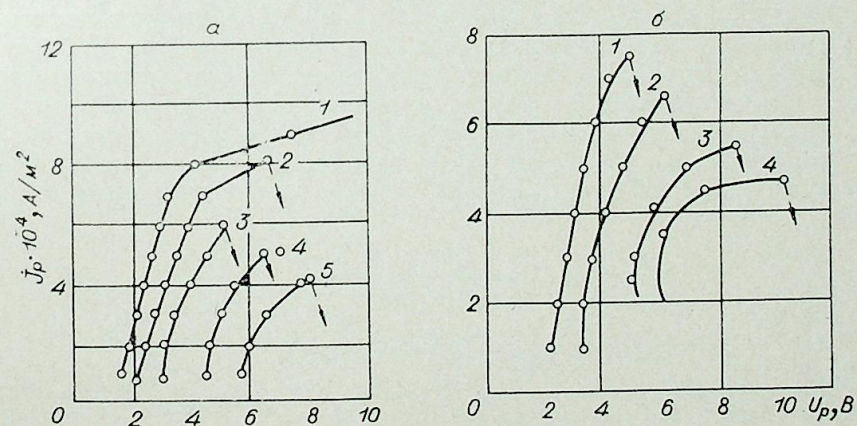


Рис. 2. Влияние поперечного магнитного поля на ВАХ в диапазоне рабочих параметров.

а) 1 — $B=0$; 2—5 — $B=80, 160, 210, 280$ Гс с соответственно при $T_k = 1320^\circ\text{C}$, $P_{Cs} = 8,3 \cdot 10^{-3}$ Торр, $P_{Ba} = 2,3 \cdot 10^{-4}$ Торр; б) 1—4 — $B=0, 160, 250, 280$ Гс соответственно при $T_k = 1175^\circ\text{C}$, $P_{Cs} = 5,5 \cdot 10^{-3}$ Торр, $P_{Ba} = 2,3 \cdot 10^{-4}$ Торр.

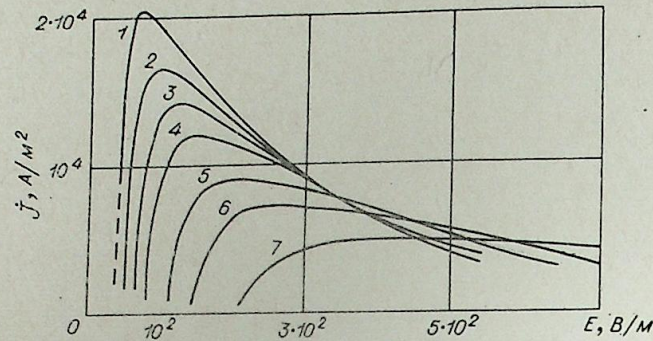


Рис. 3. Влияние поперечного магнитного поля на ВАХ с участком дифференциальной отрицательной проводимости (расчет).

$n = 10^{20} \text{ м}^{-3}$; $n_s = 1,965 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$. $B = 0$ (1); 50 Гс (2); 75 (3); 100 (4); 150 (5); 200 (6); 300 Гс (7).

ласти, близкой к $j_{\text{крит}}$. Вместе с этим наблюдалась тенденция усиления действия B и для малых плотностей тока j_p , что связано с существованием в нижней части ВАХ участка дифференциального отрицательного сопротивления [1], на рис. 2 не показанного.

Другая особенность состоит в качественном совпадении характера деформации ВАХ под действием B и при подаче отрицательного потенциала на сетку [4]. Столь заметное действие относительно небольших магнитных полей на сильноточный разряд объясняется, по-видимому, сочетанием в рассматриваемых режимах низкого давления плазмосообразующего вещества, значительных плотностей тока разряда и развитой поверхности (сетки), где могут протекать процессы поверхностной рекомбинации. Рассмотрение системы уравнений баланса числа заряженных частиц, давления компонентов плазмы, сохранения энергии и закона Ома так, как это делалось в исследованиях свойств сильноточного разряда в гетерогенной среде [18], но с учетом влияния магнитного поля, позволяет расчетным путем получить характер деформации вольт-амперной характеристики разряда с участком дифференциальной отрицательной проводимости. На рис. 3 приведено расчетное семейство ВАХ. Из сравнения результатов, показанных на рис. 2 и 3, видно, что такой подход позволяет качественно описать действие поперечного магнитного поля на ВАХ с участком отрицательной проводимости. Кроме того, применение полуэмпирических формул для $j_{\text{крит}}$ и $U_{\text{крит}}$, полученных в работах [2—5], позволяет в этом случае получить зависимости $j_{\text{крит}} = f(B)$ и $U_{\text{крит}} = f(B)$ также в виде полуэмпирических формул:

$$j_{\text{крит}} = \frac{a(\alpha P - \gamma n_s)}{(1 + \chi B^2)^{1/2}}, \quad (1)$$

$$U_{\text{крит}} = a_1 \left(1 - \frac{j_{\text{крит}}}{a_2 P} \right) (1 + \chi B^2)^{1/2}, \quad (2)$$

где

$$a = \left(\frac{n \lambda_{es} j_{is}}{n_0 \lambda_{es_0} j_{is_0}} \right)^{1/2};$$

$$a_1 = \left(\frac{j_{is} \lambda_{es} n_0}{n \lambda_{es} j_{is_0}} \right)^{1/2};$$

$$\chi = \frac{\pi^{1/2} q_e \lambda_{es}}{(8 m_e k \cdot T_e)^{1/2}}.$$

Рис. 4. Улучшение условий горения разряда при наложении малого магнитного поля.

$T_k = 1175^\circ \text{ С}$, $P_{\text{Cs}} = 5,5 \cdot 10^{-3} \text{ Торр}$, $P_{\text{Ва}} = 2,3 \times 10^{-4} \text{ Торр}$. $B = 40$ Гс (1); 80 (2); 0 (3); 110 Гс (4).

В ряде режимов наблюдался эффект аномального действия магнитного поля. В этих случаях наложение поперечного поля приводило к улучшению условий горения разряда (уменьшение падения напряжения на разряде U_p , увеличение критической плотности тока разряда) (рис. 4). Обычно аномальное воздействие оказывали поля, не превышающие 40—50 Гс. Однако для режима, показанного на рис. 4, увеличение $j_{\text{крит}}$ и уменьшение U_p наблюдалось вплоть до $B \approx 80 \div 90$ Гс. Этот эффект может быть объяснен развитием в сильноточном разряде интенсивных колебаний, увеличивающих эффективную проводимость плазмы разряда по сравнению со столкновительной. Такое объяснение подтверждается результатами зондовых исследований, которые рассмотрены ниже.

В заключение отметим, что изменение магнитным полем величин $j_{\text{крит}}$; $U_{\text{крит}}$ и $G^{(-)} = -\frac{dI_p}{dU_p}$ приводило к тому, что в ряде случаев нарушались условия устойчивости для точек пересечения линии нагрузки и ВАХ [1, 3] — в цепи возникали колебания.

ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА УСЛОВИЕ ГАШЕНИЯ РАЗРЯДА

Рассмотренный выше характер деформации вольт-амперных характеристик в области работоспособности сетки определяет влияние магнитного поля на характеристики гашения разряда. В первую очередь этим объясняется тот факт, что характеристики гашения магнитным полем и сеткой оказываются идентичными и носят экстремальный характер [4] (рис. 5). С точки зрения практики наибольший интерес представляет изучение воздействия магнитного поля на величину минимального разряда j_p , потенциала сетки, необходимого для гашения тока заданной плотности, а также на вид зависимости $U_{\text{с.гаш}} = f(j_p)$. Для

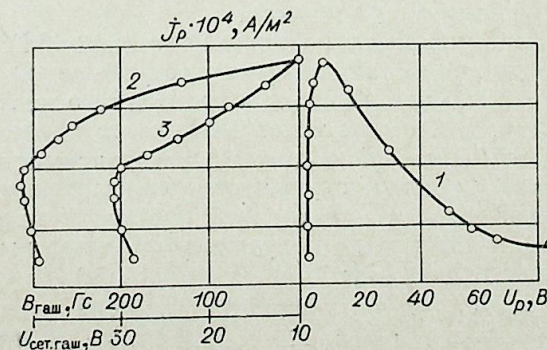


Рис. 5. Характеристики гашения разряда поперечным магнитным полем с помощью сетки.

а) 1 — статистическая ВАХ прибора при U_c плавающим. $B = 0$
 $T_k = 1270^\circ \text{ С}$, $P_{\text{Cs}} = 5,2 \cdot 10^{-3} \text{ Торр}$,
 $P_{\text{Ва}} = 2,1 \cdot 10^{-4} \text{ Торр}$; 2 — зависимость гасящего магнитного поля от плотности тока разряда при плавающем потенциале сетки;
3 — зависимость $U_{\text{с.гаш}} = f(j_p)$ при $B = 0$.

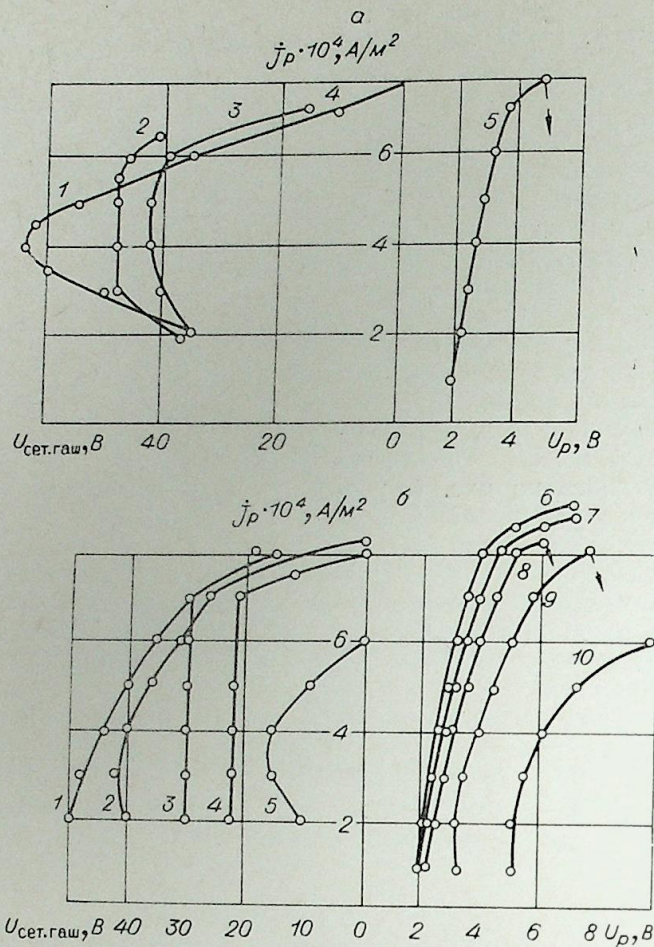


Рис. 6. Характеристики гашения разряда с помощью сетки при наложенном магнитном поле.
 а) 1 — зависимость $U_{\text{сет.гаш}} = f(j_p)$ при $B=0$; 2 — $B=40$ Гс; 3 — $B=75$ Гс; 4 — ВАХ вентиля при $T_h = 1150^\circ \text{C}$, $P_{\text{CS}} = 3,15 \cdot 10^{-3}$ Торр, $P_{\text{Ba}} = 1,8 \cdot 10^{-4}$ Торр; б) $T_h = 1250^\circ \text{C}$, $P_{\text{CS}} = 8,3 \cdot 10^{-3}$ Торр, $P_{\text{Ba}} = 2,3 \cdot 10^{-4}$ Торр. 1 — 5 — зависимости $U_{\text{сет.гаш}} = f(j_p)$ при $B = 0, 40, 75, 160, 250$ Гс соответственно; 6 — 10 — ВАХ вентиля при $B = 0, 40, 75, 160, 250$ Гс соответственно.

обоих типов вольт-амперных характеристик проведено исследование влияния магнитного поля на указанную зависимость.

Экспериментально установлено, что уже небольшие поля (20 ÷ 40 Гс) влияют на $U_{\text{сет.гаш}} = f(j_p)$. Для обоих видов характеристик с увеличением B сеточный потенциал, необходимый для гашения одного и того же I_p , уменьшался (рис. 6). Кроме того, для обоих типов ВАХ часто наблюдалась тенденция перехода ярко выраженной экстремальной зависимости $U_{\text{сет.гаш}} = f(j_p)$ (при $B=0$) в характеристики с участками «насыщения», на которых $U_{\text{сет.гаш}}$ практически не зависит от средней плотности тока разряда $j_p = I_p / S_h$. С учетом (1) и (2) можно получить уточненное выражение для $U_{\text{сет.гаш}}$, полученного в работе [1]:

$$U_{\text{сет.гаш}} = AD_1 (1 + \kappa B^2)^{-1/6} \left(\frac{I_p}{n_{p0}} \right)^{2/3} \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{I_p (1 + \kappa B^2)^{1/2}}{I_{\text{крит.0}} a}} \right)^{4/3}, \quad (3)$$

где

$$A = \left[\left(\frac{0,5}{\pi} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \cdot \sqrt{\frac{k}{q_e}} \right)^{1/2} \frac{m_i^{1/2}}{2,34 \cdot 10^{-4}} \right]^{4/3},$$

$$D_1 = \left(\frac{T_e}{\lambda_{es} a_1 E_0} \right).$$

ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОКА

Характер распределения тока оказывает решающее действие на пропускную способность мощных газоразрядных приборов [19—21]. В случае малых давлений рабочего вещества и герметичного разрядного объема в сильноточных вентилях основным механизмом, вызывающим неравномерность распределения тока, может стать действие пондеромоторных сил, обусловленных наличием собственного магнитного поля [13, 22, 23]. В этом случае собственное магнитное поле, взаимодействуя с током разряда, приводит к появлению градиента давления рабочего вещества, что в свою очередь ведет к перераспределению тока по сечению прибора. В рассматриваемом трехэлектродном вентиле с отрицательной проводимостью неравномерность токораспределения может усиливаться вследствие того, что критический ток разряда также зависит от давления плазмообразующего вещества. В этом случае совместное действие зависимостей $j_p = f(P)$ и $j_{\text{крит}} = f(P)$ [5] может приводить не только к неравномерности распределения тока, но и к тому, что при нарушении условия $j_p < j_{\text{крит}}$ устойчивое горение разряда в ряде отверстий станет невозможным. Считая, что абсолютные значения собственных полей невелики и в плазме отсутствуют колебания, расчет распределения параметров можно провести на основании решения следующей системы уравнений:

$$\vec{\text{grad}} P = \vec{j}_p \times \vec{B}, \quad (4)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B} = \vec{j}_p, \quad (5)$$

с учетом

$$j_p = f(P), \quad (6)$$

$$j_{\text{крит}} = \alpha P - \gamma n_s. \quad (7)$$

В системе (4) ÷ (6) уравнение (6) определяется на основе экспериментальных данных [5, 13, 14—16], получаемых на малоразмерных вентилях. Как показали наши эксперименты, зависимость $j_p = f(P_{\text{CS}})$ носит экстремальный характер (рис. 7). На рис. 8 приведены расчетные по (4) ÷ (6) для разных значений параметров распределения тока разряда $I = j_p / j_{pR}$ по радиусу электрода $\rho = r/R$, а также зависимость $I_{\text{крит}} = f(\rho)$ ($I_{\text{крит}} = j_{\text{крит}} / j_{pR}$).

На рис. 8, а, б, в видна зона отверстий, где для рассматриваемых

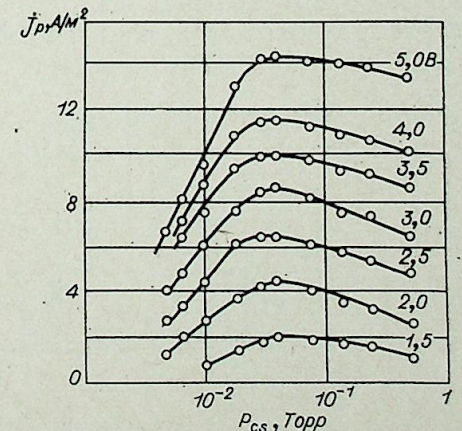


Рис. 7. Семейство экспериментальных кривых зависимости плотности разрядного тока от давления паров цезия.
 $T_h = 1250^\circ \text{C}$; $P_{\text{Ba}} = 1,6 \cdot 10^{-4}$ Торр.

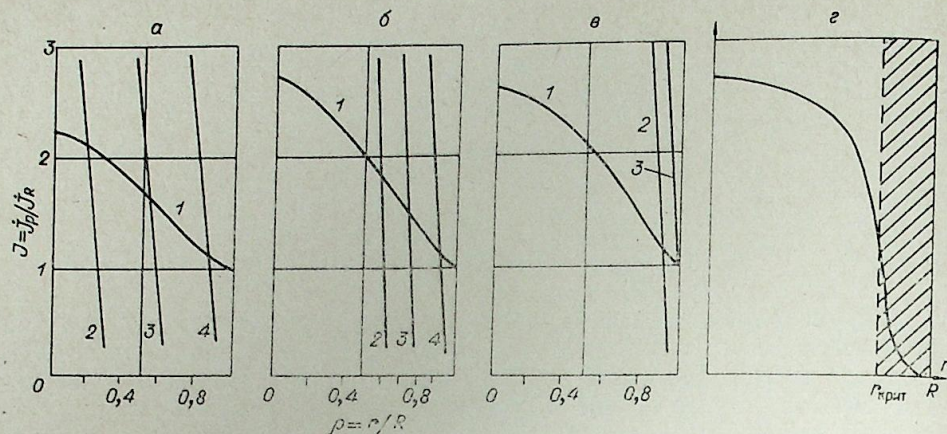


Рис. 8. Расчетные зависимости $j(\rho)$ и $j_{\text{крит}}(\rho)$ схема распределения тока.

- а) $U_p = 5$ В; $P_{\text{Cs}} = 2,1 \cdot 10^{-3}$ Торр; б) $U_p = 5$ В; $P_{\text{Cs}} = 4,3 \cdot 10^{-3}$ Торр;
 в) $U_p = 5$ В; $P_{\text{Cs}} = 1 \cdot 10^{-2}$ Торр. а, б, в) 2 — $n_s = 70$, 3 — $n_s = 55$, 4 — $n_s = 30$ м $^{-1}$;
 г) схема распределения тока в рассмотренных случаях.

случаев нарушается условие устойчивого существования разряда. Так, для кривой $j = j(\rho)$ при $n_s = 30$ см $^{-1}$ условие $j_p < j_{\text{крит}}$ нарушается при $\rho \geq 0,86$. На рис. 8, г показана схема распределения тока в рассмотренных случаях. Как видим, для всех приведенных случаев решение системы (4) ÷ (7) дает превалирующую загрузку сеточных отверстий центральной части электрода, тогда как в периферийной зоне в ряде случаев условие устойчивого существования разряда оказывается нарушенным.

Экспериментальные исследования на модели с рабочей площадью электродов 12 см 2 показали, что характер распределения тока в Cs—Ва-трехэлектродном плазменном вентиле зависит от разрядного тока, а также от уровня давления паров цезия. При давлениях паров цезия $P_{\text{Cs}} \geq 8 \cdot 10^{-3} \div 2 \cdot 10^{-2}$ Торр максимум тока приходился на центральную часть электрода, а неравномерность распределения росла с увеличением уровня интегрального тока $I_{p\Sigma}$, пропускаемого через прибор (рис. 9). Полученные в этом диапазоне параметров экспериментальные результаты находятся, следовательно, в хорошем соответствии с рассмотренной выше моделью процессов. В области более низких давлений картина токораспределения усложнялась и имела иные тенденции. Наиболее типичные результаты исследования токораспределения в этом диапазоне параметров приведены на рис. 10. На рис. 10, б показана ВАХ Cs—Ва-трехэлектродного вентиля в указанном режиме. Для приведенной характеристики тока обрыва дуги $I_{\text{крит}}$ составлял ~ 150 А. На рис. 10, а приведена схема распределения

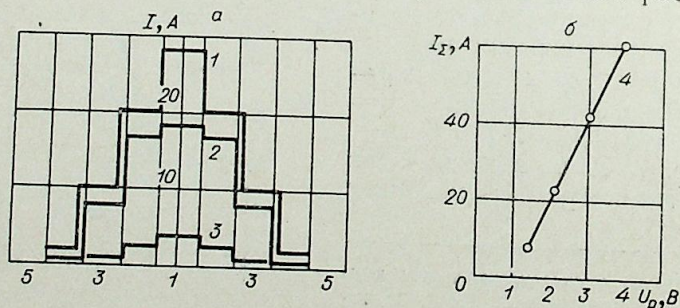


Рис. 9. Экспериментальное распределение тока в вентиле.

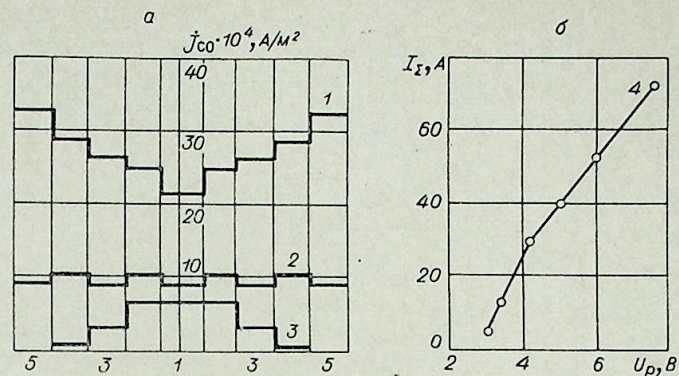


Рис. 10. Экспериментальное распределение тока в вентиле.

тока в различных режимах работы Cs—Ва-триода. Эксперименты показывают, что при относительно малых плотностях разрядного тока, как и в случае повышенных давлений паров цезия, максимум тока приходится на центральную часть электрода. При достижении определенного уровня тока $I_{\text{гран}}$ распределение становится практически квазиравномерным. Дальнейшее увеличение тока изменяет вид распределения — максимум тока выносится на край электрода. Неравномерность распределения возрастает с ростом $I_{p\Sigma}$, пропускаемого через прибор.

Оба наблюдавшихся вида распределения тока хорошо описываются эмпирической формулой вида (см. рис. 11):

$$j_p = b_1 e^{b_2 r^2}. \quad (8)$$

В случае выноса тока на край электрода $b_2 > 0$, при максимуме тока в центре $b_2 < 0$. Величина b_2 определяется уровнем давления плазмообразующего вещества, величиной $I_{p\Sigma}$ и магнитного поля. Величина b_1 определяется плотностью тока в центре электрода: $b_1 = j|_{r=0}$. Аппроксимируем зависимость $j_p = f(P)$ линейной функцией, что согласуется с экспериментом в случае, если в сечении электрода давление плазмообразующего вещества не превышает P_{max} :

$$j_p = \alpha_1 P + \gamma_1. \quad (9)$$

Тогда, используя (8), можно в аналитическом виде получить критические размеры электрода, на которых нарушается условие устойчивого горения разряда:

$$r_{\text{крит}} = \sqrt{\frac{1}{b_2} \ln \left[\frac{1}{b_2} \left(\alpha_1 \frac{\gamma_1 - \gamma_{ns}}{\alpha - \alpha_1} + \gamma_1 \right) \right]}. \quad (10)$$

Использование (9) позволяет для цилиндрической конструкции из (4) ÷ (7) определить критические размеры электрода:

Здесь

$$L_{\text{крит}} = L - Z_{\text{крит}},$$

$$Z_{\text{крит}} = \frac{2}{\left[- \left(P_0 + \frac{\mu_0 I_{p\Sigma}^2}{8(\pi R)^2} - \frac{\gamma_1}{\alpha_1} \right) \right]^{1/2}} \arctg \left[\frac{c - \frac{\gamma_{ns} - \gamma_1}{\alpha - \alpha_1}}{- \left(P_0 + \frac{\mu_0 I_{p\Sigma}^2}{8(\pi R)^2} - \frac{\gamma_1}{\alpha_1} \right)} \right], \quad (11)$$

где $c = P_0 + \frac{\mu_0 I_{p\Sigma}^2}{8(\pi R)^2}$ в случае коммутации электродов и подвода паров

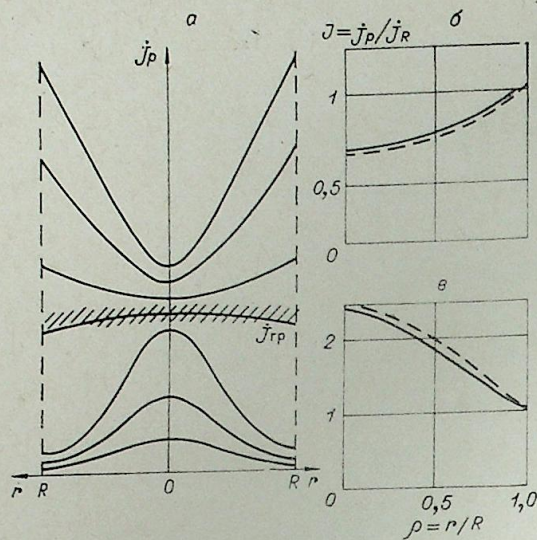


Рис. 11. Экспериментальное и расчетное распределение тока. Сплошная кривая — экспериментальное распределение; штриховая кривая — аппроксимация по формуле (8). б) $P_{Cs} = 2,5 \cdot 10^{-2}$ Торр, $U_p = 4$ В; в) $P_{Cs} = 2,1 \cdot 10^{-3}$ Торр, $U_p = 5$ В.

Cs и Ва с одного торца и $C=P_0$ при коммутации и подводе с разных сторон.

Как видно из приведенных выше результатов, система уравнений (4) ÷ (7) (действие пондеромоторных сил) не описывает всех явлений токораспределения в сильноточных трехэлектродных плазменных вентилях

с отрицательной проводимостью. Так, для исследовавшейся модели плоской геометрии (I_{pz} до 200 А) удается описать лишь распределение с максимумом загрузки в центральной части электрода и невозможно объяснить вынос тока на края.

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В ПЛАЗМЕ СИЛЬНОТОЧНОГО РАЗРЯДА И ЕЕ ВЛИЯНИЕ НА РАБОЧИЙ ПРОЦЕСС

Анализ допущений при использовании системы (4) ÷ (7) показывает, что для области расхождения эксперимента с расчетом наиболее вероятно нарушение условия отсутствия колебаний в плазме разряда ($E_z=0$). Действительно, еще в работах по термоэмиссионным преобразователям (ТЭП) с малым межэлектродным зазором, когда положительный столб практически отсутствует, было показано, что при пониженных давлениях паров цезия в плазме термоэмиссионного дугового разряда могут развиваться неустойчивости различного типа [22, 23]. При этом даже при прочих идентичных условиях по электродам при

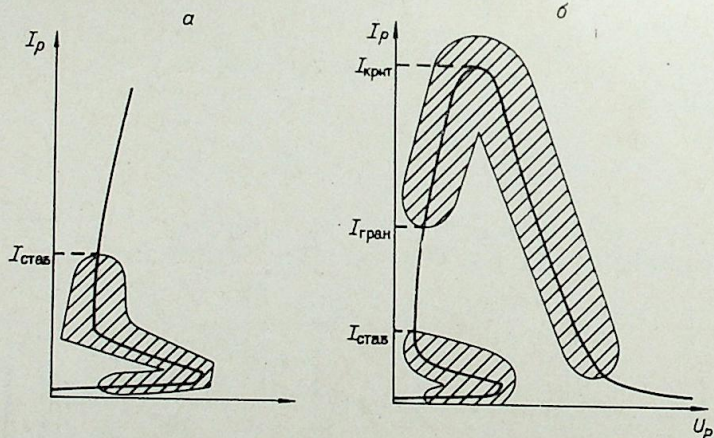


Рис. 12. Колебания в плазме разряда в термоэмиссионном плазменном вентиле. а) положение колебаний на ВАХ вентиле с отрицательным сопротивлением; б) положение колебаний на ВАХ цезий-бариевого трехэлектродного плазменного вентиле с отрицательной проводимостью.

развитии ионизационной неустойчивости распределение тока было сильно неравномерным [12]. Однако следует иметь в виду, что в указанных работах по ТЭП рассматривались колебания в начальной части ВАХ (при относительно малых плотностях тока разряда). Местоположение этих колебаний на вольт-амперной характеристике схематично показано на рис. 12, а.

Результаты наших экспериментов показывают, что в трехэлектродных термоэмиссионных Cs—Ва-элементах, имеющих повышенные межэлектродные зазоры ($d_{a-c} \sim 4 \div 5$ мм) и пониженные давления рабочих веществ ($P_{Cs} \sim 10^{-3} \div 10^{-2}$ Торр; $P_{Ba} \sim 10^{-5} \div 10^{-3}$ Торр) колебания в плазме возникают и в сильноточной области ВАХ низковольтного дугового разряда (близкой к $I_{крит}$, рис. 12, б). Развитие этих колебаний при достижении некоторого $I_{гран}$ и делает неприменимой систему (4) ÷ (7), а также может вызывать вынос тока на края электрода.

Для выявления влияния колебаний на эффективную проводимость плазмы были поставлены специальные зондовые исследования. В анодно-сеточную и катодно-сеточные области прибора вводились зонды, находившиеся под плавающим потенциалом, параллельные друг другу и расположенные таким образом, чтобы измерять составляющую напряженности электрического поля в плазме E_z (ось OZ направлена от анода к катоду и нормально к их поверхности). Зонды были изготовлены из вольфрамовой проволоки, имели диаметр 0,06 мм и помещались в двухканальную соломку из окиси бериллия диаметром 0,6 ÷ 0,8 мм. Расстояние между зондами по оси OZ составляло 0,4 мм. Исследование колебаний проводилось с помощью осциллографа С1-31 и панорамного анализатора спектра С4-8.

Эксперименты показали, что колебания возникают в режимах с отрицательной проводимостью в сильноточной области ВАХ, их картина зависит от величины тока и напряжения горения разряда. На основе полученных результатов на ВАХ

Эксперименты показали, что колебания возникают в режимах с отрицательной проводимостью в сильноточной области ВАХ, их картина зависит от величины тока и напряжения горения разряда. На основе полученных результатов на ВАХ

Рис. 14. Спектры колебаний в различных точках ВАХ. $P_{Cs} = 7,5 \cdot 10^{-3}$ Торр, $P_{Ba} = 44,4 \cdot 10^{-4}$ Торр, $T_k = 1300^\circ\text{C}$. а, б, в) — спектры колебаний в точках, обозначенных буквами А, В, С; г) ВАХ.

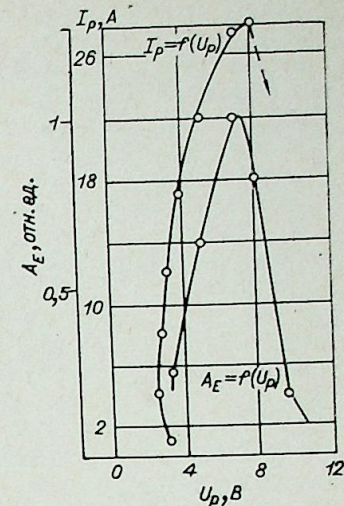
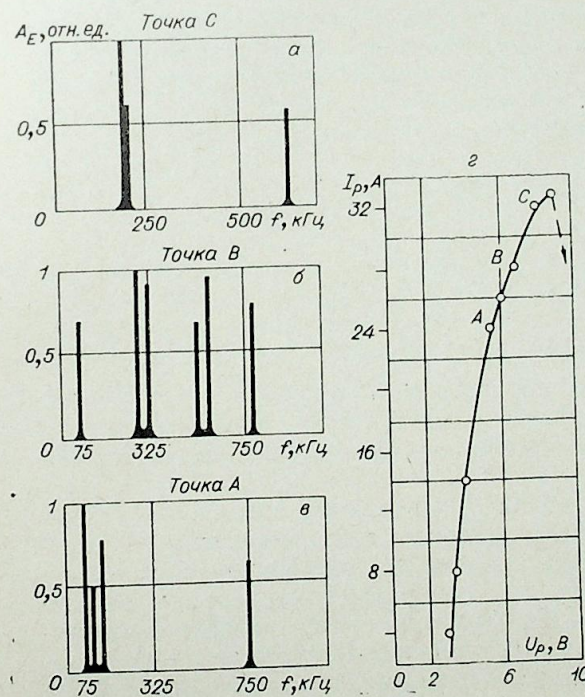


Рис. 13. Влияния напряжения горения разряда на амплитуду колебаний в плазме разряда (A_E) и ВАХ вентиле.

$T_k = 1280^\circ\text{C}$, $P_{Cs} = 7,5 \cdot 10^{-3}$ Торр, $P_{Ba} = 2,6 \cdot 10^{-4}$ Торр.



с участком дифференциальной отрицательной проводимости можно выделить четыре характерные области (рис. 12, б). Область I — зона существования колебаний в плазме разряда, соответствующих режимам без объемной ионизации, а также развитию дугового разряда. При повышении плотности тока разряда колебания пропадают и следует стабильная зона II. Однако, если ВАХ имела участок отрицательной проводимости, то за областью II при превышении граничного разрядного тока $I_{\text{гран}}$ (граничной плотности тока $j_{\text{гран}}$) вновь наблюдались интенсивные колебания потенциала плазмы — между зонами появлялась переменная составляющая напряженности электрического поля E_z . Разряд вновь становится стабильным лишь в области IV (после участка отрицательной проводимости G^{-1}). Как показали измерения, амплитуда колебаний E_z резко возрастала на участке от $I_{\text{гран}}$ до $I_{\text{крит}}$, а по достижении $I_{\text{крит}}$ имели место два случая. Если ВАХ носила «обрывной» характер, то амплитуда колебаний E_z при непосредственном приближении напряжения горения разряда к $U_{\text{крит}}$ резко спадала. В случае устойчивого снятия участка отрицательной проводимости амплитуда колебаний уменьшалась менее резко по мере увеличения напряжения на этом участке.

На рис. 13 приведены типичные результаты. По оси ординат отложены ток разряда (I_p) и амплитуда колебаний (A_E в относительных единицах), а по оси абсцисс — напряжение горения разряда. Из рисунка видно, что зависимость амплитуды колебаний от напряжения горения разряда и вид ВАХ носят идентичный характер. Этот факт говорит о связи колебаний с эффективной проводимостью плазмы. Осциллографические исследования показали, что амплитуда колебаний достигала $E_z \sim 5 \div 20$ В/мм, а в отдельных случаях 40 В/мм. Кроме того, исследования с помощью панорамного анализатора спектра показали, что для спектра колебаний характерно наличие узких линий с ярко выраженным максимумом амплитуды в диапазоне $100 \div 300$ кГц. На рис. 14, а, б, в показаны спектры колебаний, на рис. 14, г — ВАХ разряда. Экспериментально в ряде режимов наблюдалось, что наложение небольших по величине ($20 \div 40$ Гс) магнитных полей приводило к росту амплитуды колебаний и увеличению критического тока разряда. Полученные данные показывают принципиальную возможность увеличения эффективной проводимости плазмы разрядного промежутка вентилей за счет колебаний. Для количественной проверки этого факта использовалась методика, применявшаяся в работах по ускорителям плазмы [24, 25]. Расчеты, проводившиеся по формуле

$$I_{cz} = \sqrt{\langle \tilde{j}_{iz}^2 \rangle} \sqrt{\langle E_z \rangle} \sqrt{\frac{2q_e}{m_e} d \frac{R(0)}{V_{iz}}} S_k, \quad (12)$$

показывают, что расчетный ток с учетом колебательной добавки отличался от экспериментального не более чем на $30 \pm 5\%$ по всей совокупности рассмотренных случаев. Такая точность сравнима с ошибками измерений и может считаться удовлетворительной. В (12) $R(0)$ — коэффициент корреляции сигналов \tilde{j}_{iz} и E_z ; $\sqrt{\langle \tilde{j}_{iz}^2 \rangle}$, $\sqrt{\langle E_z \rangle}$ — среднеквадратичные значения флуктуаций ионного тока и электрического поля; S_k — площадь сечения прибора; d — величина межэлектродного зазора.

Таким образом, при достижении определенной граничной плотности тока в сильноточном дуговом разряде термоэмиссионного трехэлектродного элемента развиваются интенсивные колебания, приводящие к увеличению проводимости плазмы разрядного промежутка по отношению к столкновительной. Стабилизация этих колебаний сопровождается падением проводимости разрядного промежутка — образованием участка дифференциальной отрицательной проводимости на

ВАХ. Вместе с тем, если картина колебаний неоднородна по сечению прибора, то это приведет к неравномерности распределения тока.

Теоретический анализ колебаний проводился на основе решения системы уравнений неразрывности для ионов и электронов, уравнения Пуассона, заменявшегося требованием квазинейтральности, уравнения энергетического баланса (для электронов). Эти уравнения затем линейризовались введением малого возмущения переменных от равновесного состояния [26]. Поскольку при рассмотрении возмущений в сильноточном разряде основной интерес представляют продольные возмущения параметров плазмы, так как именно они могут привести к изменению проводимости столба плазмы при увеличении их амплитуды [24—26], то выражение для возмущения выбиралось в виде плоской волны $\sim \exp\{i(K_z Z - \omega t)\}$. Вводя это возмущение, из уравнений неразрывности получили дисперсионное соотношение для колебаний в плазме сильноточного дугового разряда в Cs—Ва-трехэлектродном вентиле, а из него выражение для инкремента колебаний в виде

$$\gamma = I_m \cdot \omega = (v_i - \delta) - \frac{\frac{q_e \tau_e}{m} \left\{ b\beta \left(Q + \frac{1}{r} \right) \left[\beta \left(Q + \frac{1}{r} \right) T_e - \nabla \varphi_0 - \beta T_e Q \right] \right\}}{\left[\frac{b^2 \beta^2 \left(Q + \frac{1}{r} \right)^2}{k^2} + (b^2 + \beta^2)^2 \right]} - \frac{(b + \beta^2) \left[\frac{\beta \nabla \varphi_0 - T_e Q}{r} + T_e k^2 - \nabla \varphi_0 \beta \left(Q + \frac{1}{r} \right) \right]}{\left[\frac{b^2 \beta^2 \left(Q + \frac{1}{r} \right)^2}{k^2} + (b^2 + \beta^2)^2 \right]}, \quad (13)$$

где $b = b_e = \frac{q_e \tau_e}{m}$, $\beta = \omega_e \tau_e$; $Q = n \frac{dn}{dr}$; $v_i \delta$ — частота ионизации и рекомбинации соответственно; n — концентрация заряженных частиц; $\Delta \varphi_0$ — градиент потенциала.

Поскольку возрастание амплитуды колебаний соответствует эффективной проводимости в разрядном промежутке по оси OZ , анализ зависимости γ от радиуса позволяет определить качественную картину распределения тока по сечению прибора при наличии колебаний. Были исследованы оба возможных случая распределения концентрации заряженных частиц (тока) по сечению прибора. Показано, что для возникающей неустойчивости при плоской геометрии электрода характерна конфигурация со стабилизацией колебаний в центре (падение проводимости) и раскачкой их на краях (увеличение эффективной проводимости). Таким образом, в случае раскачки колебаний, даже в приборах с относительно небольшим рабочим сечением, возможен вынос тока на края электрода. Такая картина наблюдалась экспериментально, как уже отмечалось на вентилеях с $S_{\text{раб}} = 12 \text{ см}^2$, а также на вентиле с $S_{\text{раб}} = 1 \text{ см}^2$.

Итак, можно сделать вывод, что специфика рабочего процесса в сильноточном трехэлектродном Cs—Ва-вентиле связана с наличием неустойчивости в плазме разряда, что позволяет качественно описать характер распределения тока и влияние магнитного поля на параметры разряда в сильноточных приборах такого типа.

ВЛИЯНИЕ НЕРАВНОМЕРНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЕНТИЛЯ

Экспериментальное исследование влияния потенциала сетки на распределение тока показывает, что сила воздействия сетки на ту или иную область разряда определяется зависимостью $U_{c, \text{рам}} = f(j_p)$. Так, из

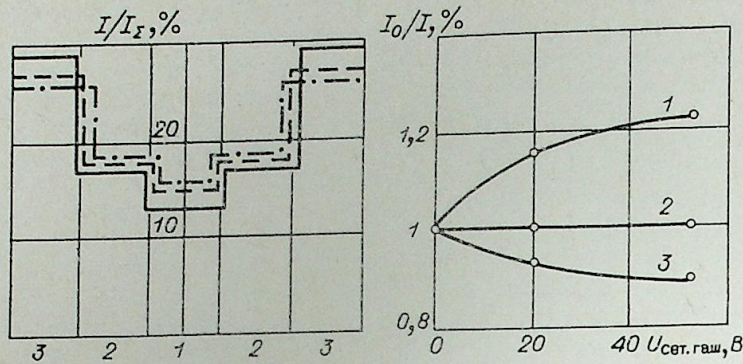


Рис. 15. Влияние потенциала сетки на распределение тока.
 а) распределение тока по секциям; б) относительные изменения доли тока, приходящейся на секции: 1 — на центральную; 2 — на среднюю; 3 — на крайнюю. $T_h = 1250^\circ \text{C}$, $P_{\text{CS}} = 5,8 \cdot 10^{-3}$ Торр, $P_{\text{Ba}} = 3,4 \cdot 10^{-4}$ Торр.

рис. 15 видно, что сетка оказывает наибольшее действие на периферийную и центральную области разряда, где плотность тока максимальна и минимальна. При этом наблюдается тенденция к выравниванию плотности тока по электродам. Очевидно, наименьшему воздействию подвергается та зона, где плотность тока соответствует максимуму зависимости $U_{\text{с.гаш}} = f(j_p)$, $-j_{p\text{max}}$. Тогда при увеличении отрицательного смещения сетки $j_p(r)$ по всему электроду стремится к этому уровню. Однако потенциал сетки, необходимый для гашения разряда, будет определяться средней плотностью тока по электроду ($j_{p\text{ср}} = \frac{I_{p\Sigma}}{S_{10} \cdot n_{p0}}$). В том

случае, когда $j_{p\text{ср}} > j_{p\text{max}}$, гасящий потенциал будет определяться величиной $j_{p\text{ср}}$. При $j_{p\text{ср}} < j_{p\text{max}}$ гашение наступит еще до выравнивания тока по электроду при снижении плотности тока по всему сечению $j_p(r) \ll j_{p\text{max}}$. Предложенная модель позволяет рассчитать влияние неравномерности распределения тока на величину $U_{\text{с.гаш}}$ и показать, что в этом случае для высокоточных приборов характеристика $U_{\text{с.гаш}} = f(j_p)$ для определенной области токов (когда гашение определяется уровнем $j_{p\text{max}}$) будет иметь участок насыщения. На этом участке $U_{\text{с.гаш}} \approx \text{const}$ и практически не зависит от интегрального тока, пропускаемого через прибор. Действительно, характеристики такого вида наблюдались нами в экспериментах при наложении магнитного поля, когда неравномерность распределения может быть связана с колебаниями в разряде.

Наиболее выгодны режимы с $j_{p\text{ср}} > j_{p\text{max}}$, поскольку, во-первых, они соответствуют большим уровням средних плотностей тока, а во-вторых, $U_{\text{с.гаш}}$ для этих случаев убывает с ростом $I_{p\Sigma}$.

При неравномерности распределения ($j_p = f(r)$) интегральный ток через ventиль определяется по формуле

$$I_{p\Sigma} = 2\pi \int_0^R j(r) r dr, \quad (14)$$

а средняя плотность тока

$$j_{p\text{ср}} = \frac{2\pi}{S_{10} \cdot n_{p0}} \int_0^R j(r) r dr. \quad (15)$$

Тогда для $j_{p\text{max}} < j_{p\text{ср}}$ $U_{\text{с.гаш}}$ необходимо вычислить из выражения

$$U_{\text{с.гаш}} = A \cdot B \cdot \left(\frac{2\pi \int_0^R j(r) r dr}{n_{p0}} \right)^{2/3} \cdot \left(1 - \sqrt[4]{\frac{2\pi \int_0^R j(r) r dr}{I_{\text{крит}}}} \right)^{4/3}. \quad (16)$$

Формула (16) верна для обоих видов распределения тока, однако для $j_p < j_{\text{гран}}$ ($E_z = 0$) условия устойчивого горения разряда могут оказаться нарушенными еще при плавающем потенциале сетки ($j_p \geq j_{\text{крит}}$). В этом случае приложение отрицательного потенциала к сетке лишь усилит «запрет» горения разряда. Поэтому в (16) следует внести поправку в количество работающих отверстий n_{p0} . В этом случае

$$n_{p0} = \frac{D\pi r_{\text{крит}}^2}{S_{10}}, \quad (17)$$

где $D = \frac{S_{\text{отв}}}{S_{\text{сетки}}}$ — прозрачность сетки; $r_{\text{крит}}$ — критический радиус, на котором для данных условий происходит нарушение условий устойчивого горения разряда — j_p становится больше $j_{\text{крит}}$.

Тогда полная формула для $U_{\text{с.гаш}}$, учитывающая влияние неравномерности распределения тока ($j_{p\text{max}} < j_{p\text{ср}}$) и нарушение условия устойчивости ($j_p < j_{\text{крит}}$) в периферийных отверстиях ($r > r_{\text{крит}}$) примет вид

$$U_{\text{с.гаш}} = AB \left[\frac{2\pi}{D} \left(\frac{r_{10}}{r_{\text{крит}}} \right)^2 \int_0^R j(r) r dr \right]^{2/3} \left(1 - \sqrt[4]{\frac{2\pi \int_0^R j(r) r dr}{I_{\text{крит}}}} \right)^{4/3}. \quad (18)$$

Результаты экспериментов, рассмотренные выше, показывают, что в случае превышения собственным магнитным полем B уровня в 30—40 Гс в (16) и (18) необходимо дополнительно учитывать его влияние на величину $U_{\text{с.гаш}}$ по формуле (3)

$$U_{\text{с.гаш}} = AD_1 (1 + \kappa B^2)^{-1/6} \cdot \left[\frac{2\pi}{D} \left(\frac{r_{10}}{r_{\text{крит}}} \right)^2 \int_0^R j(r) r dr \right]^{2/3} \times \left[1 - \sqrt[4]{\frac{\left(2\pi \int_0^R j(r) r dr \right) (1 + \kappa B^2)^{1/2}}{\frac{D_1 r_{\text{крит}}^2 \cdot a}{r_{10}^2} (\alpha P - \gamma n_S)}}} \right]^{4/3}. \quad (19)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучение закономерностей процессов в высокоточном плазменном вентиле позволяет вскрыть ряд ограничений по параметрам таких приборов.

Во-первых, наращивание мощности за счет простого увеличения площадей электродов возможно лишь до известных пределов, определяемых либо критическими размерами электродов формулы (10) и (11) при $E_z = 0$; $j_p < j_{\text{гран}}$, либо коэффициентами:

а) использования рабочей площади электродов

$$\theta_a = \frac{S_{\text{раб}}}{S_{\Sigma}}, \quad (20)$$

б) пропускной способности вентилей

$$\Delta = \frac{I_{p\Sigma}}{j_p S_{\text{раб}}} = 2\pi \frac{\int_0^R j(r) r dr}{j_p S_{\text{раб}}}, \quad (21)$$

где j_p — плотность тока, определяемая для заданного напряжения U_p — по зависимости $j_p f(P_{\text{cs}})$.

Во-вторых, уровень собственных магнитных полей может достигать величин, достаточных для заметного увеличения U_p при заданном I_{p2} , изменения, $U_{c-гаш}$ и даже гашения разряда или возникновения колебаний в цепи вентиля.

В третьих, возникновение градиента заряженных частиц с ростом I_{p2} в области параметров ($E_z=0$; $j_p < j_{гран}$) может приводить к потере управляемости вентилем вследствие пробоя анодно-сеточного промежутка и ряда других причин.

В-четвертых, поперечные магнитные поля могут изменять диапазон эффективной работоспособности сетки по частотам.

Московское высшее техническое училище
им. Н. Э. Баумана

Поступила в редакцию
6/XII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Л. Баранников, П. Ю. Пекшев. Газоразрядные приборы с отрицательной проводимостью.— Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1977, № 8, сер. техн. наук, вып. 2, с. 140.
2. А. Л. Баранников, П. Ю. Пекшев, Б. К. Феоктистов, В. В. Яминский. Исследование явлений обрыва тока в цезий-бариевом полностью управляемом вентиле.— Электронная техника. Сер. 4. Электровакуумные и газоразрядные приборы, 1976, вып. 3, 20.
3. А. Л. Баранников, П. Ю. Пекшев, Б. К. Феоктистов, В. В. Яминский. Возможность использования трехэлектродного термоэмиссионного преобразователя для генерирования колебаний низкой частоты.— ЖТФ, 1976, 16, вып. 11, 2462.
4. А. Л. Баранников, В. Г. Голубев, П. Ю. Пекшев. Влияние магнитного поля на характеристики цезий-бариевого полностью управляемого сеточного прибора с термоэмиссионным катодом.— Электронная техника. Сер. 4. Электровакуумные и газоразрядные приборы, 1977, вып. 1, 78.
5. П. Ю. Пекшев, А. Л. Баранников, Б. К. Феоктистов, В. К. Чернышев, В. В. Яминский. О механизме загрузки сеточных отверстий в трехэлектродном термоэмиссионном элементе.— ЖТФ, 1977, 47, вып. 6, 1255.
6. П. Ю. Пекшев, А. Л. Баранников, В. Г. Голубев. Возможность расширения зоны работоспособности управляющего электрода в трехэлектродном Cs—Ва-термоэмиссионном преобразователе.— ЖТФ, 1977, 47, вып. 6, 1341.
7. А. В. Чернетский, Д. С. Лычников. Самогенерирующие разрезы.— В кн.: Теория электрической дуги в условиях вынужденного теплообмена. Новосибирск, «Наука», 1977.
8. А. Л. Баранников, Б. К. Феоктистов, Б. А. Сироткин, В. В. Яминский. Некоторые результаты экспериментального исследования цезий-бариевого полностью управляемого вентиля.— ЖТФ, 1976, вып. 6, 1358.
9. А. Л. Баранников, Б. К. Феоктистов, В. В. Яминский. К вопросу об управлении разрядным током с помощью сетки в цезий-бариевом полностью управляемом вентиле.— Электронная техника, 1976, сер. 4, вып. 1.
10. А. Л. Баранников, В. З. Кайбышев, Г. А. Кузин и др. Доклад на 4-й международной конф. по термоэмиссионному преобразованию энергии, Эйндховен, Голландия, 1975.
11. А. Л. Баранников, П. Ю. Пекшев, Б. К. Феоктистов, В. К. Чернышов. Электрическая схема для регистрации участка отрицательной проводимости на вольт-амперных характеристиках сильноточных плазменных вентилях.— ПТЭ, 1977, вып. 5, с. 123.
12. А. Л. Баранников, В. Г. Голубев, П. Ю. Пекшев, Н. И. Суслов. Исследование колебаний в плазме сильноточной низковольтной дуги.— Физика плазмы, 1978, вып. 5.
13. А. Л. Баранников, П. Ю. Пекшев. Влияние собственного магнитного поля на распределение тока в сильноточном полностью управляемом термоэмиссионном триоде.— Электронная техника. Сер. 4. Электровакуумные и газоразрядные приборы, 1977, вып. 9.
14. Р. Я. Кучеров, В. К. Неволин, В. И. Ярыгин. Влияние магнитного давления на ВАХ Cs—Ва ТЭП.— ЖТФ, 1971, 41, вып. 3.
15. В. К. Неволин, Р. П. Циберов, В. К. Цхакая, Б. И. Ярыгин. Экспериментальное исследование влияния магнитного давления в сильноточном ТЭП.— ЖТФ, 1973, 43, вып. 6, 1298.
16. В. К. Неволин. Магнитное давление в сильноточном ТЭП.— ЖТФ, 1973, 43, вып. 10, 2205.

17. Г. Г. Тимофеева. Пинч эффект и обрыв тока в сужении.— ЖТФ, 1957, вып. 11, 2669.
18. О. Р. Коненко, А. К. Мусин, С. Ф. Утенкова. Разряд низкого давления в гетерогенной среде.— ЖТФ, 1973, 43, вып. 8, 1685.
19. Б. Н. Клорфельд, Л. М. Грачев, И. П. Степанов. Распределение тока в поперечном сечении мощного газоразрядного прибора, вып. 5. М., «Электричество», 1964, с. 28.
20. Л. И. Бреусова. О распределении тока по отверстиям сеток водородного газотрона в импульсном режиме.— Тр. I Всес. конф. по ГРН. М., «Электроника», 1965.
21. Н. М. Анитов, И. А. Зайцев, А. А. Николаев, Ю. Д. Хромой, Н. И. Шадрин. Исследование токовой загрузки диафрагмы в разряде низкого давления.— Электронная техника. Сер. 4. Электровакуумные и газоразрядные приборы, 1976, вып. 3, 13.
22. Физические основы термоэмиссионного преобразования энергии. Под ред. И. П. Саханова. М., Атомиздат, 1973.
23. Термоэмиссионные преобразователи и низкотемпературная плазма. Под ред. Б. Я. Мойсеса и Г. Б. Пикуса. М., «Наука», 1971.
24. Ю. В. Есипчук, А. И. Морозов, Г. Н. Тилинин, А. В. Трофимов. Основные свойства плазменных колебаний в ускорителе с замкнутым дрейфом и протяженной зоной ускорения (УЗДП).— ЖТФ, 1973, 43, вып. 7, 1466.
25. А. И. Морозов, Ю. В. Есипчук, А. М. Капулкин, В. А. Невровский, В. А. Смирнов. Азимутально-несимметричные колебания и аномальная проводимость в ускорителях с замкнутым дрейфом электронов (УЗДП).— ЖТФ, 1973, 43, вып. 5, 972.
26. А. Б. Михайловский. Теория плазменных неустойчивостей. М., Атомиздат, 1970.

УДК 621.365

Г. А. АЛЕКСЕЕВ, В. Д. ДАРАГАН, В. И. ЗАВИДЕЙ,
Г. Н. МЕЛЬНИКОВ, А. В. ПУСТОГАРОВ

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ МЕТОД
КОМПЛЕКСНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ
ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ
ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ МАТЕРИАЛОВ

В технике широко применяются импульсные системы (источники света, плазмотроны), конструкционные элементы которых работают при предельных условиях, когда теплофизические свойства материалов могут существенно изменяться за счет испарения низкокипящих примесей, спекания материала и т. д. При использовании импульсного или модуляционного методов [1] для получения зависимости теплофизических свойств от температуры в широком ее интервале необходимо осуществить ряд нагревов при различных уровнях средней температуры, т. е. необходима длительная выдержка материалов при высоких температурах. В связи с этим необходима разработка методики определения комплекса теплофизических свойств за единичный импульсный нагрев образца в широком диапазоне температур. Одновременное определение ряда теплофизических параметров повышает достоверность получаемых результатов [2].

В настоящей работе рассматривается методика определения монокроматической ϵ_λ и интегральной ϵ излучательной способности, электропроводности ρ , теплопроводности λ , теплоемкости c за один импульсный нагрев. Верхний предел по температуре ограничивается плавлением материала, а нижний — возможностью оптических пирометров. Схема эксперимента представлена на рис. 1. На изотермической по длине части цилиндрического образца, нагреваемого прямым пропусканием тока, измеряются яркостная температура T_n , падение потенциала u , яркости исследуемой поверхности B_λ и модели черного тела B_λ^0 . На неизотермической части образца у контактов температура измеряется в трех смежных точках: T_1, T_2, T_3 . Совместно с измерением тока I это позволяет определить все перечисленные выше свойства материала.

Методика определения ϵ_λ ($\epsilon_\lambda = B_\lambda/B_\lambda^0$) (1) и ρ ($\rho = Su/I$) (2), где

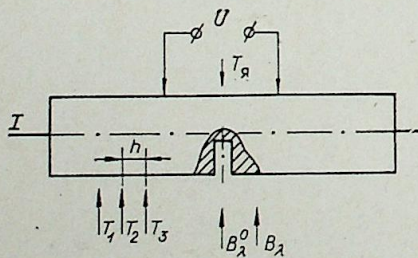


Рис. 1. Схема эксперимента.

S — площадь поперечного сечения образца, u — падение потенциала на единицу длины, I — ток, аналогична стационарному методу [3]. Теплоемкость c находилась из баланса энергии на изотермической зоне образца при нагреве и охлаждении [4]:

$$c = q_v / S\gamma [dT/dt]_{\text{нагр}} + (dT/dt)_{\text{охл}}. \quad (3)$$

Здесь $q_v = UI$ — внутреннее тепловыделение; $(dT/dt)_{\text{нагр}}$ и $(dT/dt)_{\text{охл}}$ — темпы

изменения температуры при нагревании и охлаждении образца. В предположении, что $\epsilon/c = \text{const}$ значение ϵ определялось из выражения [5]

$$T_{i+1}^{-3} - T_i^{-3} = 3F\sigma(t_{i+1} - t_i)\epsilon/S\gamma c \quad (4)$$

по кривой T^3 спада температуры. Здесь F — площадь излучающей поверхности; σ — постоянная Стефана — Больцмана; $t_{i+1} - t_i = T_{i+1} - T_i$ — интервал времени и соответствующий ему интервал изменения температур, в котором принимается условие $\epsilon/c = \text{const}$.

В настоящей работе одновременно с $\epsilon, \epsilon_\lambda, \rho, c$ определялась величина теплопроводности методом нестационарного осевого теплового потока. Уравнение нестационарной теплопроводности для неизотермической части образца при нагреве в вакууме и пренебрежении перепадом температуры по сечению имеет вид

$$c\gamma dT/dt = d(\lambda dT/dx)/dx + q_v - 4\sigma\epsilon T^4/\gamma. \quad (5)$$

При аппроксимации температурной кривой конечно-разностным выражением можно получить формулы для определения теплопроводности

$$\lambda = (c\gamma dT_2/dt - q_v + 4\sigma\epsilon T_2^4/\gamma) [(T_1 - 2T_2 + T_3)/h^2]^{-1}, \quad (6)$$

где T_1, T_2, T_3 — температура в трех точках неизотермической части образца; h — расстояние между точками замера температур; dT_2/dt — темп изменения температуры в средней точке.

Монокроматическая излучательная способность ϵ_λ ($\lambda = 0,65 \cdot 10^{-6}$ м) определялась с помощью дифференциального варианта универсального фотоэлектрического микропирометра, который позволяет проводить сравнение яркостей в двух смежных точках образца с быстродействием $\sim 10^{-3}$ с. Кроме того, посредством сравнения с внутренним эталонным источником постоянного накала определялись одновременно яркостная температура поверхности T_n и истинная температура модели черного тела.

Модель черного тела выполнялась на изотермической части образца (рис. 1) в виде полости диаметром $\sim 0,2 \cdot 10^{-3}$ м и глубиной $\sim 1,5 \times 10^{-3}$ м. Оценки для образцов из вольфрама и графита диаметром $\sim 2 \cdot 10^{-3}$ м показали, что нормальная излучательная способность полости черного тела $\epsilon_\lambda^0 \geq 0,985$.

Для измерения температуры в трех смежных точках на изотермической части образца использовалась модификация дифференциального пирометра. При площадке визирования $\sim 0,5 \cdot 10^{-3}$ м расстояние между ними составляло $\sim 1,5 \cdot 10^{-3}$ м. Визирование пирометра осуществлялось на область образца с максимальным изменением температуры по оси $T(x)$, что вытекает из требования минимальной погрешности определения теплопроводности. Указанная область предварительно выявлялась путем измерения распределения температуры образца по длине в стационарных состояниях с помощью визуального пирометра ВИМП-015. Расстояние между потенциальными выводами (проводами из ВР-20 диаметром $\sim 0,1 \cdot 10^{-3}$ м) измерялось микрокатетометром КМ-6.

После вакуумирования камеры с образцом до давления $\sim 10^{-4}$ Па образец прогревался до температуры 1300—1400 К на изотермической части, проводились настройка пирометров, проверка всей измерительной аппаратуры. Наброс электрической мощности, подводимой к образцу, осуществлялся при помощи шунтирования части балластного сопротивления ($R = 0,1 - 0,2$ Ом) в цепи постоянного тока, после чего мощность сбрасывалась до нуля. Это позволило обеспечивать различные темпы нагрева образца вплоть до температуры плавления.

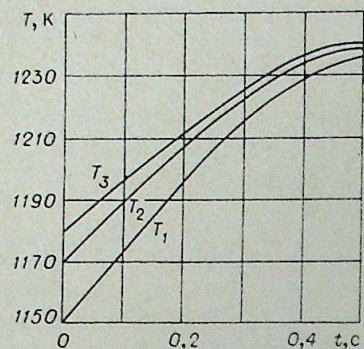


Рис. 2. Изменение температур образца по времени после наброса мощности.

Поскольку балластное сопротивление остается больше сопротивления образца $R_{обр}$, существенное увеличение $R_{обр}$ с повышением его температуры мало влияет на величину тока, т. е. после наброса мощности $I = \text{const}$.

Показания пирометров, тока с шунта и напряжения с потенциальных выводов регистрировались на шлейфовом осциллографе GSO-1F2. Отладка методики проведена на образце из графита марки ГСП, свойства которого были предварительно определены стационарным методом. Диаметр образца $d = 1,95 \cdot 10^{-3}$ м, длина $50 \cdot 10^{-3}$ м, расстояние $h = 1,5 \times 10^{-3}$ м.

На рис. 2 представлено изменение при нагреве температур T_1 , T_2 , T_3 на неизотермическом участке.

Результаты определения теплопроводности λ и электросопротивления ρ приведены на рис. 3 и показывают удовлетворительное согласие данных, полученных стационарным и нестационарным методами. Максимальное расхождение значений по теплопроводности не превышает 20%. На рис. 4 представлены значения теплоемкости и данные об интегральной излучательной способности. На рис. 5 приведены данные по монохроматической излучательной способности графита. Показано, что в процессе отжига ϵ_λ существенно возрастает.

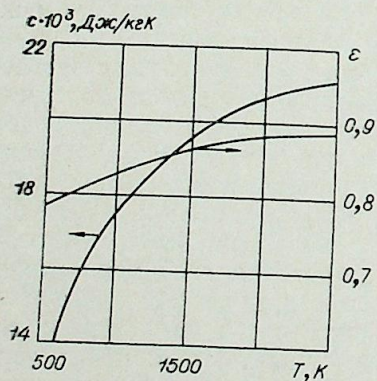


Рис. 4. Зависимость интегральной излучательной способности ϵ и теплоемкости c от температуры графита марки ГСП.

○ — образец при первоначальном однократном нагружении током, Δ — образец, выдержанный длительно при температуре 1300°C при многократных нагружениях током.

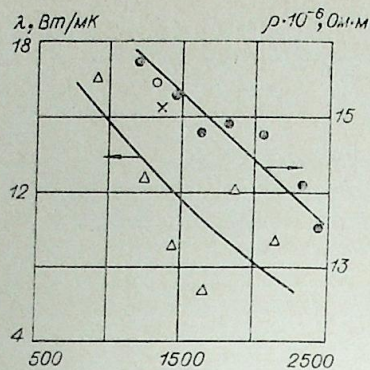


Рис. 3. Зависимость теплопроводности λ и электросопротивления ρ графита марки ГСП от температуры.

Δ и \circ — соответственно стационарный [5] и нестационарный методы определения λ ; \bullet и \times — те же методы определения ρ .

Проведенная оценка показала, что среднеквадратичные погрешности определения свойств графита марки ГСП по нестационарной методике составляют $\epsilon_\lambda \pm 3\%$, $\epsilon \pm 6\%$, $\rho \pm 4\%$, $c \pm 5\%$ и $\lambda \pm 20\%$.

Поступила в редакцию
20/VII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. А. Крафтмахер. Теплоемкость при высоких температурах и образование вакансий в тугоплавких металлах. — В кн.: Исследования при высоких температурах. Новосибирск, СО АН СССР, 1966, с. 5—54.
2. А. Ф. Бессонов. Установки для высокотемпературных комплексных исследований. М., «Машиностроение», 1974, 192 с.
3. А. В. Пустогаров, Г. Н. Мельников, А. Н. Колесниченко, В. Д. Дараган, Д. Д. Чепига. Теплофизические свойства пористого вольфрама при температуре $1200\text{--}3200^\circ\text{K}$. — Порошковая металлургия, 1974, № 11, 52—57.
4. Р. Л. Рудкин, У. Дж. Паркер, Р. Дж. Дженкинс. Измерение термических характеристик металлов при высоких температурах. — В кн.: Измерение температуры в объектах новой техники, М., «Мир», 1965.
5. А. В. Пустогаров, А. Н. Колесниченко, В. И. Завидей, А. В. Хромов, А. И. Самсонов. Универсальный микропирометр. — «Приборы и техника эксперимента», 1976, № 3, 239—242.

О. Н. ЛЕБЕДЕВ, В. Н. МАРЧЕНКО

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
ИСПАРЕНИЯ КАПЕЛЬ УГЛЕВОДОРОДНЫХ ТОПЛИВ
ПРИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ И ДАВЛЕНИЯХ
ГАЗОВОЙ СРЕДЫ

Явления, связанные с испарением капли жидкости, и методы прогноза скорости испарения важны для анализа процессов смесеобразования в камерах сгорания энергетических установок, работающих на жидком топливе. Качество смесеобразования в значительной степени определяет интенсивность и полноту сгорания топлива, а значит, экономичность, надежность и моторесурс двигателей. Несмотря на важность явлений, связанных с испарением капель жидкости при высоких температурах и давлениях газовой среды, изучены они крайне недостаточно. Результаты работы [1] опровергают существующие взгляды на механизм испарения жидкости при «закритических» давлениях.

В предлагаемой статье изложены некоторые результаты экспериментальных исследований испарения капель углеводородных топлив в широком интервале температур и давлений газовой среды.

Экспериментальное изучение процесса испарения капель обычно проводят с помощью закрепления их на вертикальных нитях [2], миниатюрных термопарах [1], металлических сетках [3] и т. д. При этом, часто оказывается, что через нить в каплю поступает значительное количество тепла, искажающее действительную схему теплоподвода. Так, расчеты показывают, что даже в случае использования стеклянных волокон дополнительный приток тепла q_n может составить 20—30% от основного теплового потока. Применение миниатюрных термопар или сеток еще более увеличивает долю q_n в общем теплообмене капли.

Авторы работы [4] предложили изучать процесс испарения на свободно падающих каплях. Возможность такого подхода оправдана тем, что при небольших числах Рейнольдса влиянием обдува на интенсивность теплоотдачи можно пренебречь. Практически же этот метод очень сложно осуществить при давлениях газовой среды, отличных от атмосферного. Кроме того, использование указанного принципа падающих капель связано со значительными погрешностями эксперимента, возникающими при фотосъемке нескольких интервалов повторяющегося процесса.

Авторами данной статьи предложен способ закрепления капель жидкости на тонких горизонтальных волосках (рис. 1). Этот метод позволяет свести к минимуму дополнительный тепловой поток. Вольфрамовая нить 2 диаметром 12 мк натягивается между двумя вертикальными державками 1. Для удержания капли жидкости 4 на волосок наплавляется стеклянный шар 3. Надежное удержание частицы жидкости достигается при соотношении диаметров капли и шара 4:1.

Схема экспериментальной установки, позволяющей реализовать предложенный способ закрепления капель, представлена на рис. 2. Державки с каплей 10 установлены на якоре длинноходового электро-

магнита 11, который крепится в корпусе камеры 2 с помощью фиксирующей вставки 13. Цилиндрический электроподогреватель 5 с внутренним диаметром 8 мм покрыт асбесто-керамической теплоизоляцией 4 и металлическим экраном.

Предварительно введенная в камеру капля 10 находится в зоне водяного холодильника 6, где температура измеряется термопарой T1 и регулируется расходом воды через ротаметр 9. Значительный ход якоря электромагнита (40 мм) позволил надежно отделить высокотемпературную область от зоны действия холодильника. Подача капли осуществляется через узкую (3,2 мм) вертикальную прорезь. В рабочем положении вертикальные державки, удерживающие волосок с каплей, находятся в переменном поле температур. Конструктивные размеры, материал державок и нити подобраны таким образом, чтобы темп прогрева удерживающей системы (учитывалось тепло, отводящееся в холодильник через державки) совпадал с темпом прогрева испаряющейся капли.

Для съемки процесса использована скоростная кинокамера 1 (тип СКС-1М). Капля освещается мощной фотолампой 8 с конденсорной линзой 7 через полированные кварцевые «окна» 3. Температура в электроподогревателе контролируется термопарой T2. Экспериментальная камера заполняется азотом из баллона 15. Для очистки азота от примесей и влаги служит фильтрующая набивка 12. Давление в камере измеряется манометром 14.

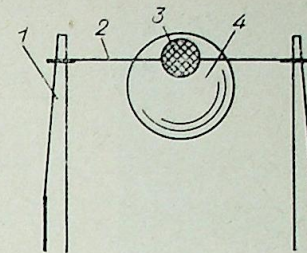


Рис. 1. Схема крепления капли.

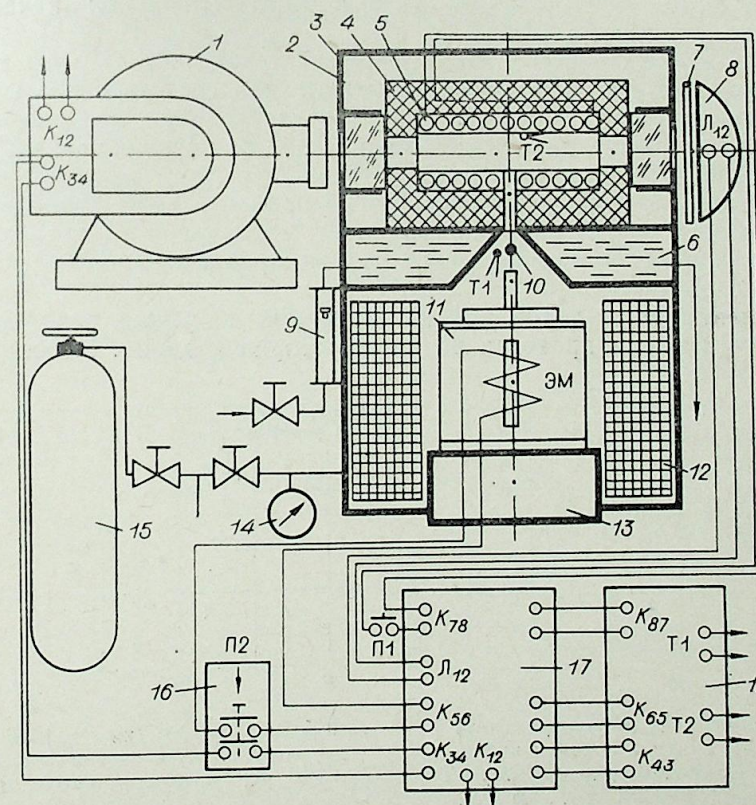


Рис. 2. Принципиальная схема экспериментальной установки.

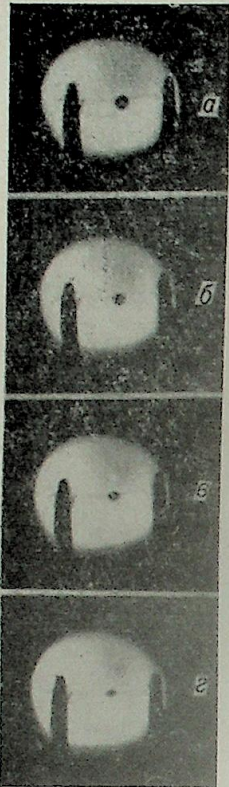


Рис. 3. Кинограмма процесса испарения капли углеводородного топлива ($\bar{M}=6,2$).
 $\tau=0,103$ с (а); 0,542 (б); 0,763 (в); 0,820 с (г).

Питание электродвигателя (K_{34}), отметчика времени (K_{12}), электромагнита 11, лампы 8 и спирали электроподогревателя 5 осуществляется блоком питания 17. Необходимые измерительные приборы собраны в блок 18. Пусковой агрегат 16 обеспечивает необходимую выдержку при срабатывании электромагнита для разгона фотокамеры. Специально разработанный блок питания позволил довести время подачи капли в высокотемпературную зону камеры до 1—2 мс с сохранением «мягкого» конца подачи. Регистрация размера капли осуществлялась с помощью масштабной марки при проектировании полученной пленки на экран. Начальный размер капли устанавливался под микроскопом.

Экспериментальные исследования проводились с каплями моторных топлив диаметром 320—1080 мк при давлениях 1—100 кгс/см² и температурах 300—700°C газовой среды (азота). Начальная температура капли изменялась в разных сериях опытов в пределах 32—95°C.

На рис. 3 в качестве примера представлены кинокадры, фиксирующие процесс испарения капли при следующих условиях: начальный размер частиц $a_0=560$ мк; давление газа в бомбе $p_1=40$ кгс/см²; температура газа в бомбе $t_1=500$ °C; начальная

температура топлива $t_{20}=32$ °C.

Исследование показало, что повышение температуры среды сокращает период прогрева и продолжительность непосредственного испарения капель топлива (рис. 4). Вопреки обычному представлению [5 и др.], увеличение давления газа в бомбе при прочих равных условиях значительно снижает продолжительность существования частиц топлива. При этом период прогрева капли практически не уменьшается (рис. 5). Как и следовало ожидать, рост молекулярного веса значительно увеличивает время испарения частиц жидкости, что хорошо видно на рис. 6.

Обобщение результатов эксперимента по испарению капель углеводородного топлива проведено на основе теории подобия. Используя

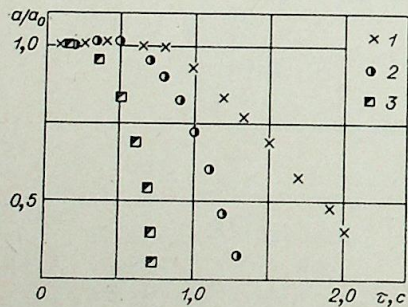


Рис. 4. Влияние температуры газовой среды на динамику испарения капли.
 $a_0=700$ мк; $p_1=40$ кгс/см²; $t_{20}=32$ °C; $M_T=180$ кг/кмоль. $t_1=380$ °C (1); 500 (2); 670°С (3).

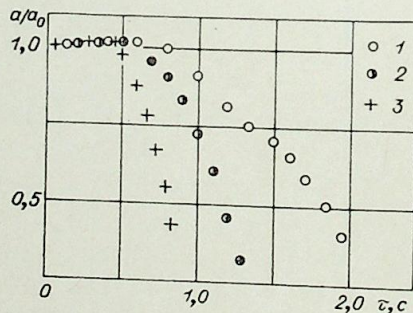


Рис. 5. Влияние давления газовой среды на динамику испарения капли.
 $a_0=700$ мк; $t_{20}=32$ °C; $t_1=500$ °C; $M_T=180$ кг/кмоль. $p_1=1,1$ кгс/см² (1); 40 (2); 80 кгс/см² (3).

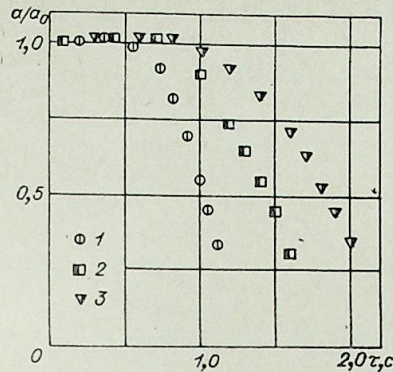


Рис. 6. Влияние молекулярного веса топлива на динамику испарения капли.

$a_0=700$ мк; $p_1=40$ кгс/см²; $t_{20}=32$ °C; $t_1=500$ °C. $M_T=156$ кг/кмоль (1); 242 (2); 287 кг/кмоль (3).

работу [5], нетрудно было установить следующий вид критериального уравнения, справедливого для условий проведения эксперимента:

$$\frac{D_{n0}\tau_{II}}{a_0^2} = f\left(\frac{p_1}{p_{10}}, \frac{T_1}{T_{10}}, \bar{M}\right), \quad (1)$$

где D_{n0} — коэффициент молекулярной диффузии; τ_{II} — время испарения капли; a_0 — начальный диаметр капли; p_1, T_1 — давление и температура газовой среды ($p_{10}=1$ кгс/см², $T_{10}=873$ °K); $\bar{M} = \frac{M_T}{M_B}$; M_T, M_B — соответственно молекулярные веса топлива и газовой среды.

Обработка опытного материала позволила привести выражение (1) к конкретному виду:

$$\frac{D_{n0}\tau_{II}}{a_0^2} = 5,65\bar{M}^{0,55} \left(\frac{1}{0,7 + 0,01p_1/p_{10}} \right) \left(\frac{T_1}{873} \right)^{0,9} \left(\frac{T_1}{873} - 3,3 \right). \quad (2)$$

На рис. 7 приведено сопоставление зависимости (2) с опытным материалом. Здесь обозначено

$$F^* = \frac{D_{n0}\tau_{II}}{a_0^2} (0,7 + 0,01p_1/p_{10}) \left(\frac{873}{T_1} \right)^{0,9} \left(\frac{T_1}{873} - 3,3 \right).$$

Средняя квадратичная погрешность равна 5,82%.

Новосибирский институт инженеров водного транспорта

Поступила в редакцию 12/II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. R. L. Matlosz, S. Leipziger, T. P. Torda. Investigation of liquid drop evaporation in a high temperature and high pressure environment.—Int. J. Heat and Mass Transfer, 1972, 15, N 4, 831—851.
2. Ф. А. Вильямс. Теории горения. М., «Наука», 1971, с. 77—89.
3. E. G. Masdin, M. W. Thring. Combustion of Single droplets of Liquid fuel. J. of the Institute of fuel. 1962, June, 247—261.
4. М. Д. Апашев, Р. В. Малов. Испарение единичных свободных мелких капель различных жидкостей при малых значениях критерия Рейнольдса обтекания капель потоком.—Изв. АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, 1960, № 2, с. 185—191.
5. О. Н. Лебедев. Численное исследование испарения неподвижной капли топлива, взвешенной в газовом потоке.—Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1976, № 13, вып. 3, с. 92—99.

М. Х. ПРАВДИНА

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ДЛИНЫ ПУТИ СМЕШЕНИЯ ДЛЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛЕ

Изучение устойчивости турбулентных течений дает возможность из данных об эволюции внешнего сигнала получить информацию о самой турбулентности. В 1968 г. М. А. Гольдштик выдвинул вариационный принцип [1], согласно которому осредненный турбулентный профиль скорости обладает свойством максимальной устойчивости по отношению к наиболее опасному возмущению, т. е. такому, которое затухает медленнее других. На основе этого принципа без привлечения эмпирических данных был рассчитан ряд характеристик турбулентного течения в канале [2—4]. При этом свойства локальности решений уравнения Орра—Зоммерфельда, обнаруженные в [5, 6], позволили решать задачу об устойчивости в квазиламинарном приближении. Применимость этого приближения анализировалась в работах [7—9]. Теоретический анализ в согласии с экспериментальными данными [10, 11] показал, что в ряде случаев квазиламинарное описание устойчивости не оправдано. В частности, это относится к описанию затухания возмущений глобального характера [6].

В ряде задач гидродинамики и теплообмена необходимо описание профиля скорости в канале непрерывной функцией, что достигается введением непрерывной зависимости от поперечной координаты турбулентной вязкости или длины пути смешения. В последнем случае успешно применяется зависимость [12]:

$$l = l_0 - (1-y)^2 \{2(l_0 - \kappa/4) + [l_0 - 2(l_0 - \kappa/4)] \times \\ \times (1-y)^2\} \{1 - \exp[-y(2-y)/A]\}^n. \quad (1)$$

Здесь y — поперечная координата; на оси канала $y=1$; l_0 , κ , A , n — константы. Осредненный профиль скорости U находится из уравнения динамики

$$\frac{dU}{dy} + \text{Re } l^2 \left| \frac{dU}{dy} \right| \frac{dU}{dy} = U'_0 (1-y), \quad (2)$$

где Re — число Рейнольдса потока; $U'_0 = \frac{dU}{dy} \Big|_{y=0}$. Для полного определения U следует задать какое-либо нормировочное условие. Здесь принимается

$$v_* = \sqrt{U'_0/R} = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} = 1. \quad (3)$$

Это условие фиксирует трение в канале, которое является физической характеристикой турбулентного потока и в дальнейшем, при вариации профиля скорости, не будет меняться.

Все константы из (1) были определены эмпирически. В работах [1—3] κ , A , n определены на основе принципа максимальной устойчи-

вости с привлечением свойств локальности и квазиламинарного описания устойчивости. Найти таким же путем константу l_0 не удастся, так как она не связана с каким-либо ограниченным участком профиля, за устойчивость которого отвечали бы локализованные на этом участке возмущения. Действительно, по данным [6], локализация происходит либо в пристенной, либо в приосевой зоне. Но в пристенной зоне ослабевает влияние l_0 на форму профиля скорости. Что касается приосевой зоны, то применимость (2) с аппроксимацией (1) становится в ней сомнительной [4]. Тем более нельзя гарантировать правильность применения вариационного принципа только к этой зоне.

Изложенные соображения показывают, что для нахождения константы l_0 не следует привлекать свойства устойчивости локальных возмущений. В данной работе l_0 определяется так, чтобы профиль скорости был максимально устойчив по отношению к наиболее опасным возмущениям глобального характера. При решении задачи об устойчивости вариация напряжений Рейнольдса моделируется.

Уравнения для возмущений с учетом нелинейных членов имеют вид

$$\frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial (U_i \langle v_j \rangle + U_j \langle v_i \rangle)}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \langle v_i \rangle}{\partial x_j \partial x_j} - \\ - \frac{\partial}{\partial x_j} \langle (v_i v_j^m + v_i^m v_j) \rangle; \quad \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_i} = 0; \quad (4)$$

Здесь x_i , t обозначают координаты x , y и время; v_i , p — возмущения скорости и давления; v_i^m — пульсационная скорость в невозмущенном течении; угловые скобки выделяют неслучайную часть; U_i — осредненная скорость, полученная интегрированием (2) с учетом (1); Re — число Рейнольдса.

Последний член в (4), представляющий собой вариацию напряжений Рейнольдса, моделируется в [9] с привлечением первых и вторых моментов выражением

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (v_i \omega_j + v_j \omega_i), \quad (5)$$

где v_i — неслучайная часть возмущения,

$$\omega_i = \sqrt{3} \frac{\langle v_i^m v_j^m \rangle}{\sqrt{\langle v_h^m v_h^m \rangle}} \frac{U_j}{|U|} \quad (6)$$

интерпретируется как некоторая добавочная скорость, которая в уравнениях для возмущений просто добавлена к U_i . Действительно, с учетом (5) уравнение (4) принимает вид

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial [(U_i + \omega_i) v_j + (U_j + \omega_j) v_i]}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (7)$$

Порядок величины вектора ω_i совпадает с порядком среднеквадратичных пульсаций скорости. Модель (5), (6) имеет инвариантную форму, сохраняет наиболее важные свойства моделируемого объекта, не содержит эмпирических констант и согласуется с опытными данными [11]. Но применение ее к данной задаче невозможно из-за того, что функции, входящие в (6), пришлось бы варьировать вместе с l_0 . Возникает необходимость найти разумное для течения в канале приближение ω_i , которое сохранило бы основные результаты, даваемые моделью, но сохранило бы только один варьированный параметр l_0 .

Наиболее значительные изменения по сравнению с квазиламинарным приближением для канала связаны с поперечной компонентой добавочной скорости ω_y , поскольку исследуемое течение не содержит по-

перечной скорости ($U_y=0$) и наличие w_y приведет к появлению существенно новых членов в уравнениях устойчивости. Продольная же компонента w_x , как видно из (7), действует на фоне средней скорости $U_x=U$ и мала по сравнению с ней. Поэтому в аппроксимации оставим только поперечную скорость и, следуя Прандтлю, положим

$$w_y = l \frac{dU}{dy}, \quad (8)$$

где l будем рассчитывать по формуле (1). Это выражение может быть получено из соображений размерности, если заменить все неизвестные моменты одной величиной l с единственным неопределенным параметром l_0 . По свойствам симметрии в канале (6) и (8) совпадают. Модель (8), как и (6), позволяет привести задачу об устойчивости к решению уравнения типа уравнения Орра — Зоммерфельда с помощью преобразования

$$v_i = u_i(y) e^{i\alpha(x-ct)}$$

где α — волновое число, $c = X + iY$ разыскивается как собственное значение. При этом из системы уравнений (7) получается уравнение относительно поперечной компоненты возмущения скорости u_y

$$\alpha(U-c)(u_y'' - \alpha^2 u_y) - \alpha U'' u_y = -\frac{i}{R}(u_y^{IV} - 2\alpha^2 u_y'' + \alpha^4 u_y + i[(U'u')'' - \alpha^2(U'u_y)' - \alpha^2(U')' u_y]). \quad (9)$$

Рассчитывать следует как симметричные, так и антисимметричные по u_y возмущения, выбирая наиболее опасные. Граничные условия на стенке: $u_y = u_y' = 0$, на оси $u_y = u_y'' = 0$ для симметричных и $u_y = u_y' = 0$ для антисимметричных возмущений. Конкретные расчеты проводились при $Re=485$ ($\nu_* = 1$), что соответствует числу Рейнольдса 10 000, рассчитанному по среднерасходной скорости и полуширине канала. Задача на собственные значения для уравнения (9) решалась методом дифференциальной прогонки [13].

Глобальные возмущения подразделяются на два класса — пристенные и приосевые. По данным [6], пристенные моды глобальны на интервале $0 < \alpha \leq 1,5$, а приосевые — на интервале $0 < \alpha \leq 0,2$. Расчеты показывают, что при всех α из $0 < \alpha \leq 0,2$ первые приосевые моды опаснее пристенных. Поэтому указанный интервал принимается как характерный интервал влияния глобальных приосевых возмущений на устойчивость профиля. Характерным интервалом влияния пристенных глобальных мод на устойчивость профиля считается $0,2 < \alpha < 1,5$. В качестве меры устойчивости для каждого класса вводится интегральный функ-

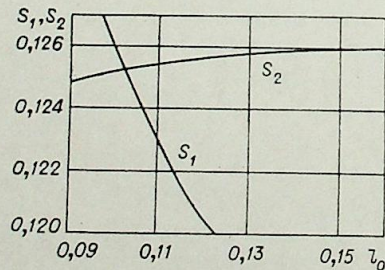


Рис. 1.

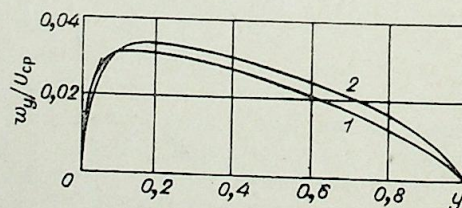


Рис. 2.

ционал, аналогичный действию [2]: для приосевых возмущений

$$S_1 = - \int_0^{0,2} \frac{d\alpha}{\alpha Y},$$

для пристенных.

$$S_2 = - \int_{0,2}^{1,5} \frac{d\alpha}{\alpha Y}$$

Интегрирование ведется по наиболее опасной моде соответствующего класса. Устойчивость профиля определяется функционалом

$$S = \max(S_1 S_2),$$

т. е. по наиболее опасному классу возмущений. Максимальная устойчивость реализуется при значении l'_0 , доставляющем наименьшее значение функционалу S :

$$S(l'_0) = \inf_{l_0} S(l_0).$$

Результаты численных расчетов представлены на рис. 1—3. Из рис. 1 видно, что функционалы S_1 и S_2 имеют одинаковый порядок величин. С ростом l_0 пристенные возмущения дестабилизируются, а приосевые стабилизируются. Максимальная устойчивость достигается при $l_0=0,1$. Эмпирическое значение константы $l_0=0,14$.

На рис. 2 линии 1, 2 изображают зависимости $w_y(y)$, рассчитанные по (6) и (8) соответственно. Во втором случае $l_0=0,1$. На рис. 3 линией 2 нанесена зависимость $\text{Im } \alpha$ от частоты, рассчитанная по (8). Кривая 1 рассчитана по (6). Точками показаны обработанные в [9] опытные данные Рейнольдса и Хуссейна в приосевой зоне.

Таким образом, зависимость (8) может аппроксимировать (6) для описания устойчивости. В то же время рассчитанное на основе принципа максимальной устойчивости значение l_0 удовлетворительно согласуется с эмпирическим. Расчет константы l_0 завершает теоретическое определение констант, характеризующих профиль скорости турбулентного течения в канале.

Автор благодарит М. А. Гольдштика за руководство работой, В. Н. Штерна за интерес к работе и обсуждение результатов.

Институт теплофизики СО АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
20/VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Гольдштик. Принцип максимальной устойчивости осредненных турбулентных течений. — Докл. АН СССР, 1968, 182, вып. 5.
2. М. А. Гольдштик, С. С. Кутателадзе. Вычисление константы пристенной турбулентности. — Докл. АН СССР, 1969, 185, № 3.
3. М. А. Гольдштик, В. А. Сапожников, В. Н. Штерн. Определение профиля скорости в вязком подслое на основе принципа максимальной устойчивости. — Докл. АН СССР, 1970, 193, № 4.
4. М. А. Гольдштик, В. Н. Штерн. Определение закона турбулентного трения в ядре потока на основе принципа максимальной устойчивости. — Докл. АН СССР, 1969, 188, № 4.
5. М. А. Гольдштик, В. А. Сапожников, В. Н. Штерн. Локальные свойства задачи гидродинамической устойчивости. Ж. прикл. мех. и техн. физ., жидкост. — В кн.: Пристенная турбулентность. Новосибирск, «Наука», 1973.

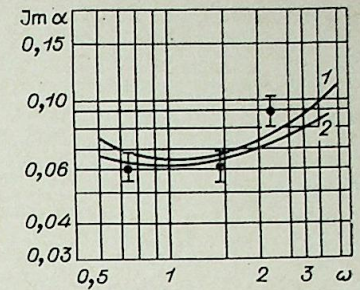


Рис. 3.

6. В. Н. Штерн. Глобальная и локальная устойчивость течения вязкой жидкости.— В кн.: Пристенная турбулентность. Новосибирск, «Наука», 1973.
7. С. С. Кутателадзе. Консервативные свойства пристенной турбулентности.— Теор. основы хим. технологии, 1971, 5, № 1.
8. М. А. Гольдштик, О. А. Лихачев, В. Н. Штерн. Принцип максимальной устойчивости в пристенной турбулентности.— В кн.: Пристенное турбулентное течение. Тр. XVIII Сиб. теплофизического семинара, ч. 1. Новосибирск, 1975.
9. М. А. Гольдштик, М. Х. Правдина. О взаимодействии внешнего возмущения с турбулентным потоком.— Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1976, № 1.
10. A. K. M. F. Hussain, W. C. Reynolds. The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow.— J. Fluid Mech., 1970, 41, pt. 2, 241—258.
11. A. K. M. F. Hussain, W. C. Reynolds. The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow. Pt. 2. Experimental results.— J. Fluid Mech., 1971, 54, pt. 2, 241—261.
12. М. А. Гольдштик, В. А. Сапожников, В. Н. Штерн. Проверка гипотезы Малкуса об устойчивости турбулентных потоков.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1970, № 5.
13. В. А. Сапожников, В. Н. Штерн. Численный анализ устойчивости ламинарных течений между параллельными пластинами.— Тр. Всесоюз. семинара по численным методам механики вязкой жидкости. Новосибирск, 1969, с. 220—235.

Е. П. СУХОВИЧ

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
ЛОКАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК
ЗАКРУЧЕННОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ
В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ**

Для закрученных течений, встречающихся в технических и технологических устройствах, характерно сильное искривление линий тока, что приводит к изменению давления в поперечном направлении. При больших закрутках потока в центре канала может образоваться возвратное течение, которое способствует интенсивному турбулентному перемешиванию и используется в камерах сгорания для стабилизации пламени.

Другое, но менее изученное следствие искривления линий тока в закрученных потоках связано с их гидродинамической устойчивостью. Из рассмотрения баланса между градиентом давления и центробежными силами, действующими на газовый моль, следует, что в течении с положительным градиентом плотности и момента количества движения ($\partial \rho / \partial r > 0$ и $\partial(\rho v r / \partial r > 0)$) любое радиальное перемещение газового моля; вызванное пульсациями скорости, связано с совершением работы против результирующей центробежной силы [1]. В этих условиях неравномерное по радиусу поле центробежных сил приводит к подавлению пульсационного движения и процессов переноса импульса, тепла и массы внутри потока. Противоположная картина наблюдается при отрицательных значениях градиента плотности и момента количества движения.

Наиболее подробно центробежные эффекты были изучены на примере течения в пограничном слое на искривленной поверхности. Результаты показывают [2], что стабилизирующее воздействие центробежных сил на течение вблизи выпуклой поверхности значительно уменьшает интенсивность пульсаций поперечной составляющей скорости, уменьшает касательные напряжения в пограничном слое и коэффициент трения на поверхности. При этом небольшое (1%) изменение кривизны поверхности приводит к значительным (10%) изменениям интегральных характеристик потока. Аналогичные результаты были получены при изучении гидродинамики и теплообмена в канале, вращающемся вдоль продольной оси [3, 4]. Непосредственные измерения турбулентных характеристик течения [4] показали, что центробежные силы сильно подавляют пульсации скорости. При этом в первую очередь они воздействуют на крупномасштабные пульсации, вследствие чего максимум частотного спектра передвигается в область высоких частот. С практической точки зрения наибольший интерес представляют исследования процессов переноса в закрученных течениях, распространяющихся в неподвижных каналах. Некоторые данные по теплообмену и турбулентному смешению коаксиальных струй в неподвижном канале приведены в работе [5].

Цель настоящей работы заключается в определении локальных значений напряжений трения, тепловых потоков и коэффициентов тур-

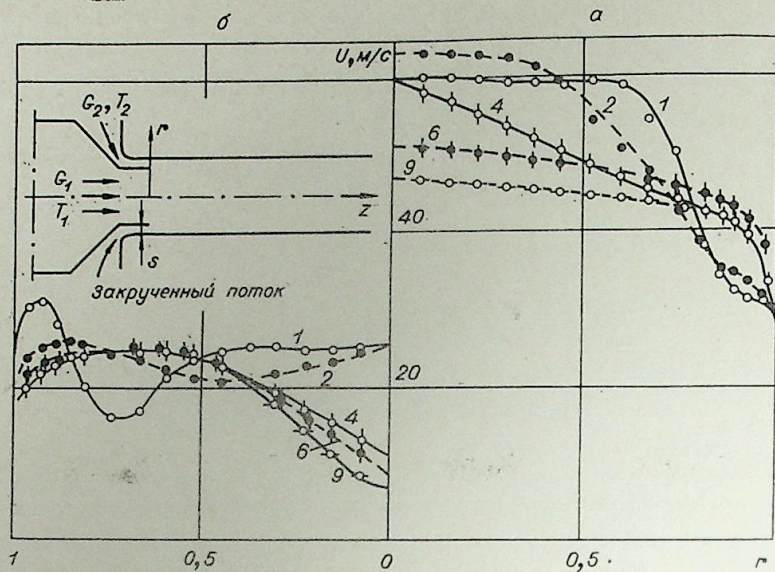


Рис. 1. Распределение по радиусу осевой составляющей импульса.
а) 3-й режим, $T_1=835$ К; б) 1-й режим, $T_1=290$ К.
Номера кривых на рисунках соответствуют номерам сечений, в которых проводились измерения.

булентного переноса тепла и импульса в закрученном ограниченном течении.

Экспериментальные исследования проводились на установке, рабочий участок которой представлял собой цилиндрическую теплоизолированную трубу диаметром 27 мм и длиной 1100 мм. В рабочий участок через сопло диаметром 23 мм поступала воздушная струя. Вторичный закрученный поток направлялся в канал через кольцевую щель, ($s=1$ мм), образованную внешней поверхностью сопла и внутренней поверхностью рабочего участка трубы (рис. 1). Потoki на входе были организованы таким образом, чтобы радиальные градиенты плотности и момента количества движения были положительны и достаточно велики. Более подробное описание экспериментальной установки приведено в работе [5].

Опыты проводились при постоянных расходах центрального и периферийного потоков ($G_1=0,0093$ кг/с, $G_2=0,0052$ кг/с). Выполнено три серии измерений, которые различались температурой воздуха T_1 на срезе центрального сопла: 1-й режим — 290 К, 2-й режим — 510 К, 3-й режим — 835 К. Тангенциальная составляющая скорости и температура периферийного кольцевого потока поддерживались неизменными ($V_2=160$ м/с, $T_2=290$ К). В рабочем участке трубы просверлено 9 рядов отверстий для измерения статического давления на стенке и ввода датчиков для измерения температуры и скоростей. Измерения проводились в сечениях с z/R_0 : 1—2,52; 2—12,15; 3—21,75; 4—31,75; 5—41,7; 6—51,7; 7—61,7; 8—71,7; 9—81,2.

Температура газа измерялась платино-платинородиевой термопарой с диаметром спая 0,3 мм в 17 точках по радиусу каждого сечения. Статическое давление, осевая и тангенциальная составляющие скорости определялись по показаниям предварительно протарированного цилиндрического зонда по методике, описанной в работе [6]. Измерения показали, что введение зонда в закрученный поток вызывает возмущения статического давления, которые распространяются вверх по потоку. При уменьшении диаметра зонда величина возмущений значительно уменьшается. На основании предварительных измерений уста-

новлено, что с точки зрения точности измерений приемлем зонд диаметром 1,2 мм, с размером приемного отверстия 0,2 мм. Статическое давление и две составляющие скорости определялись по специальной вычислительной программе на ЭВМ БЭСМ-4 с использованием тарировочных зависимостей и трех показаний зонда, полученных при различных углах между вектором скорости и направлением приемного отверстия.

Численное интегрирование профилей скорости дало значение расхода, близкое к измеренному с помощью диафрагмы. Разброс интегральных расходов в разных сечениях канала при различных температурах воздуха не превышал 2,5%.

Турбулентные напряжения трения и тепловые потоки определялись из уравнений движения Рейнольдса по методике, апробированной в работах [7, 8] при изучении свободных закрученных струй и закрученных течений в коаксиальном канале. Следуя [8], проинтегрируем осредненные уравнения движения и энергии, записанные в цилиндрической системе координат r, φ и z от 0 до r . Учитывая, что пульсации плотности малы, если абсолютная температура газа в поперечном направлении изменяется менее, чем в 5 раз [9], получаем

$$\tau_{rz}(r, z) = -\frac{2u}{r} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^r \rho u r dr + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \int_0^r \rho u^2 r dr + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \int_0^r p r dr - \frac{2}{\text{Re} r} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^r u r dr + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \int_0^r \rho \overline{u'^2} r dr; \quad (1)$$

$$\tau_{r\varphi}(r, z) = -\frac{2v}{r} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^r \rho u r dr + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \int_0^r \rho u v r^2 dr - \frac{2}{\text{Re} r^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^r v r^2 dr + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^r \rho \overline{u'v'} r^2 dr; \quad (2)$$

$$q_r(r, z) = \frac{T}{r} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^r \rho u r dr - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^r \rho u r T dr + \frac{1}{\text{Re} Pr r} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^r r T dr - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \int_0^r \rho c_p \overline{u'T'} r dr; \quad (3)$$

$$\tau_{rz} = \frac{\tau_{rz}^*}{0,5\rho_0 u_0^2} = \frac{1}{0,5\rho_0 U_0^2} \left(\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} - \rho^* \overline{u'w'^*} \right); \quad (4)$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{\tau_{r\varphi}^*}{0,5\rho_0 U_0^2} = \frac{1}{0,5\rho_0 U_0^2} \left[\mu^* r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{v^*}{r^*} \right) - \rho^* \overline{v'w'^*} \right]; \quad (5)$$

$$q_r = \frac{q_r^*}{\rho_0 c_{p0} U_0 T_0} = \frac{1}{\rho_0 c_{p0} U_0 T_0} \left(-\lambda^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} + \rho^* c_p^* \overline{u'T'^*} \right); \quad (6)$$

$$q_z = \frac{q_z^*}{\rho_0 c_{p0} U_0 T_0} = \frac{1}{\rho_0 c_{p0} U_0 T_0} \left(-\lambda^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} + \rho^* c_p^* \overline{u'T'^*} \right); \quad (7)$$

$$\rho = \rho^*/0,5\rho_0 U_0^2; \quad u = u^*/U_0; \quad v = v^*/U_0;$$

$$r = r^*/R_0;$$

$$\overline{u'^2} = \overline{u'^{2*}}/U_0^2; \quad T = T^*/T_0; \quad \rho = \rho^*/\rho_0;$$

$$Re = \rho_0 U_0 R_0 / \mu_0;$$

$$Pr = \mu_0 c_{p0} / \lambda_0.$$

Здесь u, v, w — соответственно осевая, тангенциальная и радиальная составляющие вектора скорости; u', v', w' — соответствующие составляющие турбулентных пульсаций компонент скорости. Звездочкой обозначены размерные величины; R_0 — радиус канала; $\rho_0, U_0, T_0, c_{p0}, \mu_0, \lambda_0$ — средние по сечению значения плотности, скорости, температуры, теплоемкости, вязкости и теплопроводности газа.

Система уравнений для осредненных параметров может быть замкнута в результате соответствующего выбора модели турбулентности. Обычно при введении коэффициентов турбулентной вязкости полагается, что коэффициенты изотропны для течений с закруткой. Однако результаты экспериментальных исследований [7] показали, что предположение об изотропности для закрученных течений не выполняется. Обзоры моделей турбулентности, основанных на теории пути перемешивания, и моделей, основанных на уравнениях для кинетической энергии турбулентности, приведены в работах [10, 11].

В общем случае для неизотропной турбулентности модель, основанная на теории пути перемешивания, описывается следующими выражениями:

$$\tau_{rz} = \frac{2\mu_{rz}}{Re} \cdot \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \tau_{r\varphi} = \frac{2\mu_{r\varphi}}{Re} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right); \quad (8)$$

$$q_r = - \frac{\lambda T}{Pr Re} \frac{\partial T}{\partial r}; \quad (9)$$

$$\mu_{rz} = \frac{\mu_{rz}^*}{\mu_0} = \rho l_{rz}^2 Re \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) \right]^2 \right\}^{1/2}; \quad (10)$$

$$\mu_{r\varphi} = \rho l_{r\varphi}^2 Re \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) \right]^2 \right\}^{1/2}; \quad (11)$$

$$\sigma = \mu_{r\varphi} / \mu_{rz}; \quad Pr_T = \mu_{rz} c_p / \lambda_T. \quad (12)$$

Для определения поля напряжений трения и тепловых потоков использовались уравнения (1) — (3). Последние члены в правых частях уравнений считались пренебрежимо малыми. Это допущение принимается во всех расчетах, использующих уравнения пограничного слоя. Однако непосредственные измерения неучтенных членов с помощью термоанемометра представляют большой интерес. Характеристики турбулентного переноса рассчитывались по выражениям (8) — (12). Расчеты производных выполнялись после сглаживания обрабатываемого параметра с помощью аппроксимации его значений в 7 точках полиномом 3-й или 4-й степени. Все расчеты проводились на ЭВМ БЭСМ-4.

Осевая и тангенциальная составляющие вектора скорости. Распределения по радиусу осевой составляющей скорости для 1-го и 3-го режимов представлены на рис. 1. Соответствующие профили тангенциальной составляющей скорости приведены на рис. 2. При небольших значениях кинетической энергии центральной струи (1-й режим) в приосевой области появляется зона с положительным градиентом давления, вследствие чего осевая составляющая скорости на оси уменьшается вдоль продольной координаты. В работах по закрученным струям было показано, что при больших значениях параметра закрутки $\left(s = \int_0^{R_0} \rho u v r^2 dr / R_0 \int_0^{R_0} (\rho u^2 + p - p_{атм}) r dr \geq 0,6 \right)$ в приосевой области возникает возвратное течение. В наших опытах $s=0,7$ в 1-м режиме, $s=0,47$ во 2-м и $s=0,34$ в 3-м режиме. Таким образом,

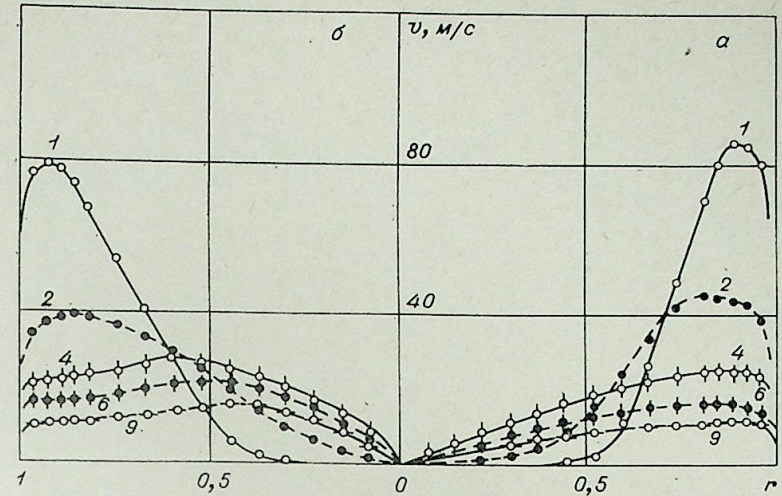


Рис. 2. Распределение тангенциальной составляющей скорости.

в ограниченном закрученном течении при $s=0,7$ обратное течение не возникает, однако наблюдается деформация профилей осевой составляющей скорости. Анализ профилей скорости и температуры показывает, что длина потенциального ядра приосевой струи составляет 230, 330 и 430 мм соответственно для 1-го, 2-го и 3-го режимов. При этом граница ядра струи не прямолинейна.

Напряжения трения. Распределения осевой и тангенциальной компонент напряжения трения, рассчитанные по формулам (4) и (5), представлены на рис. 3 и 4. Осевая составляющая напряжения трения при $T_1=290$ К (рис. 3, б) характеризуется сложным профилем и дважды меняет знак на радиусе канала. Такой характер зависимости τ_{rz} от r объясняется взаимодействием центральной и периферийной струй, а также сильным влиянием вращения на продольные распределения давления при разных r .

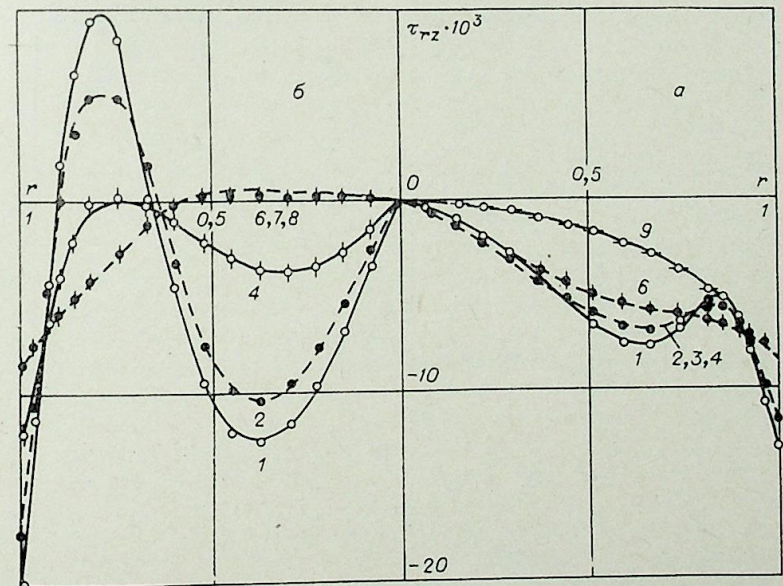


Рис. 3. Осевая составляющая напряжения трения.

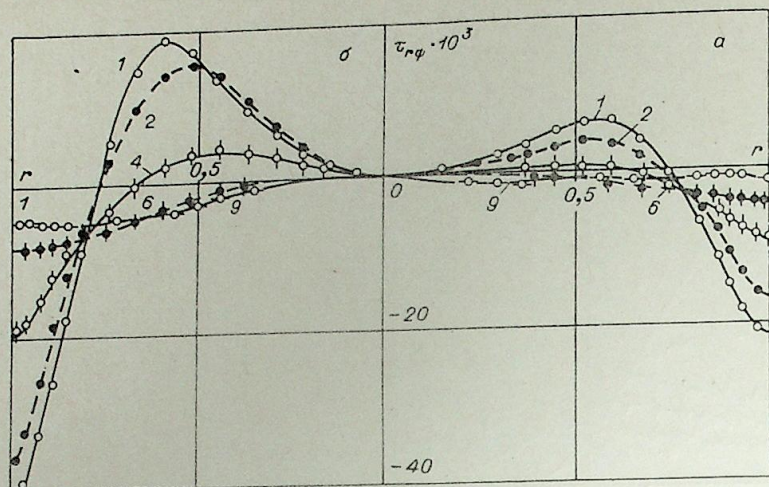


Рис. 4. Тангенциальная составляющая напряжения трения.

В начальных сечениях закрученный поток теряет часть момента количества движения на трение о стенку и на закрутку приносего потока. Вследствие этого в периферийной области канала $\tau_{r\phi} < 0$, а в приосевой $\tau_{r\phi} > 0$. На больших расстояниях от среза сопла момент количества движения передается от оси к стенке на всех радиальных расстояниях.

Коэффициенты турбулентного переноса. Значения коэффициентов турбулентного переноса тепла и импульса определялись по соотношениям (8) и (9). Радиальные распределения коэффициента турбулентного переноса осевой компоненты импульса представлены на рис. 5. При $T_1 = 835$ К (рис. 5, а) коэффициент турбулентной вязкости значительно превышает коэффициент молекулярной вязкости и зависит от радиальной и продольной координат. Распределения μ_{rz} имеют систематический характер. Разброс появляется только в областях, где обращаются в ноль градиент скорости du/dr или напряжение трения

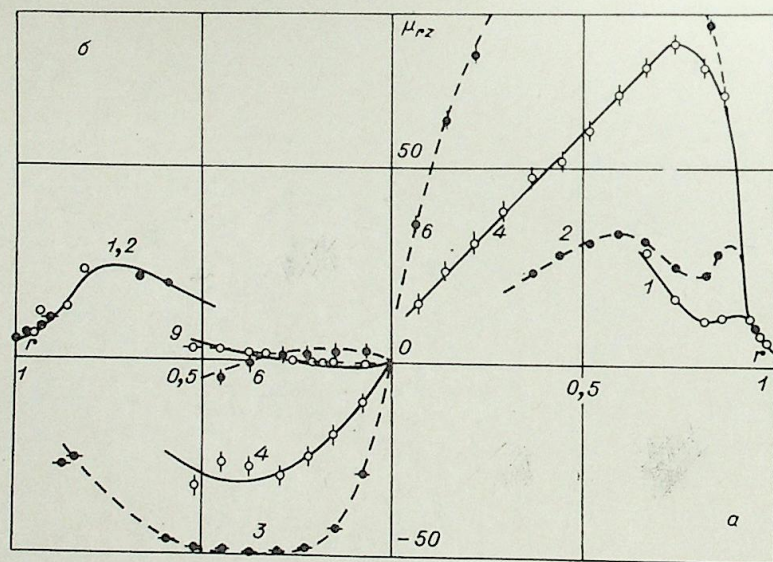


Рис. 5. Коэффициент турбулентного переноса осевой составляющей импульса.

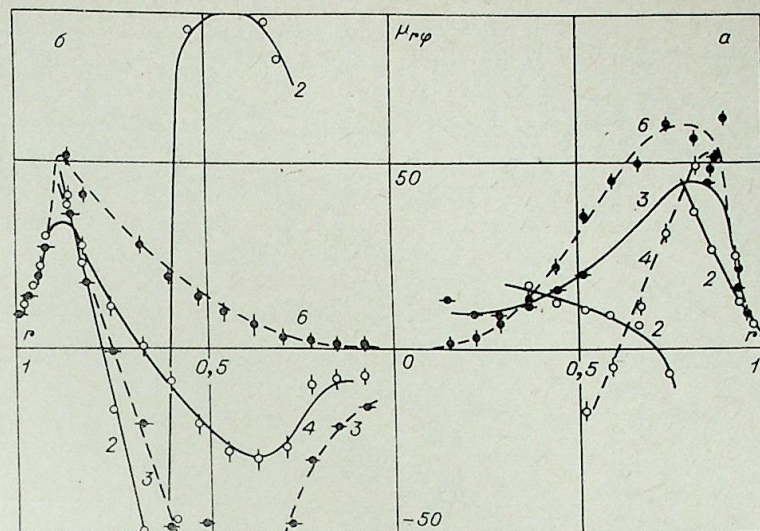


Рис. 6. Коэффициент турбулентного переноса тангенциальной составляющей импульса.

τ_{rz} . На графике не представлены значения μ_{rz} в точках, где $du/dr < 0$, так как в этом случае возможны большие ошибки в определении коэффициентов турбулентного переноса.

Распределения коэффициента турбулентного переноса тангенциальной компоненты импульса представлены на рис. 6. Значения $\mu_{r\phi}$ при $T_1 = 835$ К значительно меньше μ_{rz} и также зависят от радиальной и продольной координат. Таким образом, допущения об изотропности коэффициентов переноса и о независимости их от радиальной координаты, часто применяемые в теоретических работах, необоснованы для описания сильно закрученных течений.

В изотермическом случае (рис. 5, б и 6, б) наблюдаются сравнительно большие области «отрицательной» вязкости. Такие области отмечались и ранее в атмосферных течениях [12] и в течениях с несимметричным профилем скорости [9]. По данным работы [9] это явление связано с образованием области отрицательного порождения энергии турбулентности. В этой области турбулентные вихри отдают часть своей энергии среднему течению, обычно же происходит обратное. Энергия подводится за счет диффузии из других областей течения. В сечениях 3 и 4 коэффициенты турбулентного переноса импульса меньше нуля в зоне струйного смешения и периферийного потоков и положительны в пограничном слое на поверхности канала при $1 > r > 0,85 - 0,9$. В остальных сечениях, начиная с 5-го и кончая 9-м, μ_{rz} и $\mu_{r\phi}$ сравнимы по величине с коэффициентом молекулярной вязкости. Отметим, что определение коэффициентов переноса по принятой в работе методике связано с расчетами, включающими дифференцирование и интегрирование параметров, входящих в уравнения (1)–(3). Для исключения ошибок, вызванных разбросом экспериментальных данных, были проведены специальные расчеты, в которых использовались различные способы аппроксимации дифференцируемых параметров. Полученные результаты показали, что во всех случаях в 1-м режиме характер распределения μ_{rz} и $\mu_{r\phi}$ в объеме канала сохраняется неизменным.

Для объяснения полученных результатов можно сделать следующие предположения. Во-первых, появление области с отрицательной вязкостью является следствием пренебрежения в расчетах последними членами в правых частях уравнений (1)–(3). Во-вторых, область с

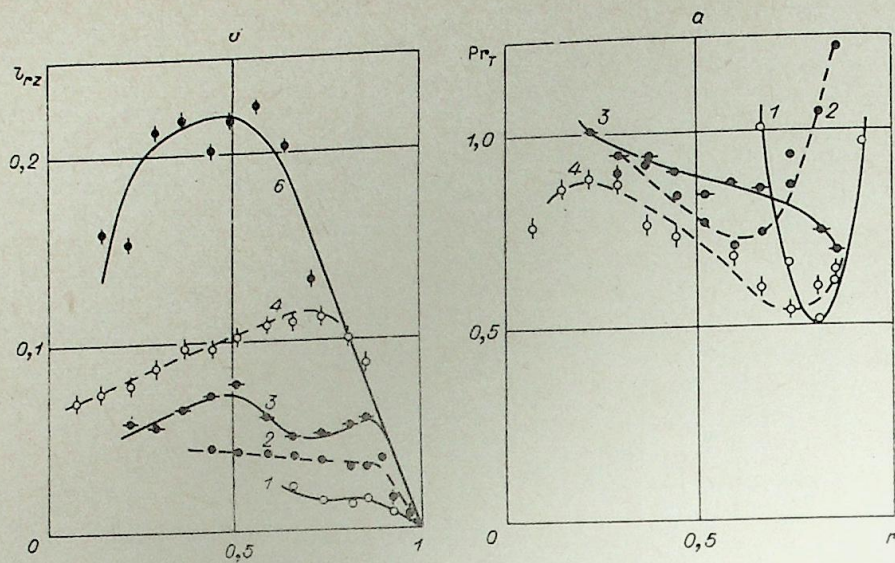


Рис. 7. Распределение по радиусу турбулентного числа Прандтля (а) и длины пути перемешивания (б).

«отрицательной» вязкостью является следствием подавления пульсаций радиальной составляющей скорости в поле центробежных сил. Последнее предположение косвенно подтверждается низким уровнем значений τ_{rz} в сечениях 5—9 при $s=0,7$. Уменьшение коэффициентов турбулентного переноса тепла при больших параметрах закрутки следует также из экспериментальных данных по теплообмену в канале подобной конфигурации. По данным работы [5] увеличение закрутки периферийного потока способствует подавлению процесса переноса тепла от горячего потока к холодному. Вследствие этого $s=0,6$ наблюдается устойчивое расслоение по температуре, которое сохраняется на длине, превышающей 30 диаметров канала.

На основании приведенных данных окончательный вывод о справедливости того или иного объяснения, по-видимому, сделать нельзя. Решение этого вопроса требует более подробных измерений как осредненных, так и пульсационных характеристик потока.

Распределения по радиусу турбулентного числа Прандтля и длины пути перемешивания для режима $T_1=835$ К представлены на рис. 7. В пограничном слое у поверхности канала l_{rz} пропорциональна расстоянию от стенки. Коэффициент пропорциональности равен 0,4—0,5. При увеличении параметра закрутки значения l_{rz} уменьшаются.

Для характеристики процессов переноса тепла и тангенциальной составляющей импульса обычно используется Pr_T и коэффициент σ , определяемые уравнениями (12). Вопрос о влиянии кривизны линий тока на σ в предположении, что порождение энергии турбулентности равно диссипации, рассматривался в работах [11, 13]. Полученные результаты показали, что существует аналогия между стратифицированными и искривленными течениями. Вследствие этого при небольших значениях числа Ричардсона ($-0,2 < Ri < 0,2$) для искривленных течений может быть использовано соотношение Монина — Обухова [11]:

$$\sigma = \mu_{r\varphi} / \mu_{rz} = (1 - \beta Ri), \quad (13)$$

где

$$Ri = \frac{2v}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (vr) \left/ \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(r \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{v}{r} \right)^2 \right] \right. \quad (14)$$

$$\beta = K (\bar{v}^{12} / \bar{w}^{12} - 1).$$

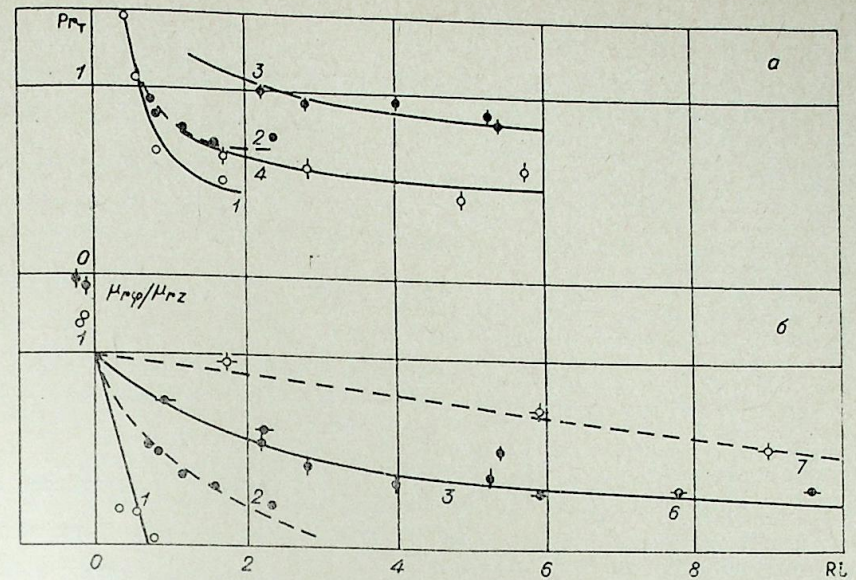


Рис. 8. Зависимость турбулентного числа Прандтля (а) и отношения коэффициентов турбулентной вязкости (б) от числа Ричардсона.

Результаты обработки экспериментальных данных в виде зависимости σ от числа Ричардсона показаны на рис. 8. Из представленных данных следует, что коэффициент β не является постоянной величиной и зависит от координаты z . Поскольку $\bar{v}^{12} \sim \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) \right]^2$, в работе была проведена обработка представленных данных в виде зависимости β от $\left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) \right]^2$. Экспериментальные точки удовлетворительно описываются соотношением

$$\sigma = 1 - 0,4 \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) \right]^2 Ri.$$

Центробежные силы оказывают заметное влияние на коэффициенты турбулентного переноса в ограниченных закрученных течениях. Описание этого влияния с помощью соотношений (13) и (14) носит эмпирический характер. Более подробный анализ влияния центробежных сил на перенос тепла и импульса может быть проведен на основе изучения дифференциальных уравнений для касательных напряжений трения и теплового потока.

З а к л ю ч е н и е. Распределения коэффициентов турбулентного переноса тепла и импульса в ограниченном закрученном течении могут быть определены по измеренным значениям осредненных величин скорости, статического давления и температуры. Расчеты показывают, что осевая и тангенциальная составляющие напряжения трения неізотропны. Коэффициенты турбулентного переноса μ_{rz} , $\mu_{r\varphi}$ и λ_T зависят от координат и параметра, характеризующего интенсивность закрутки потока. Увеличение числа Ричардсона приводит к уменьшению турбулентного числа Прандтля и параметра, равному отношению $\mu_{r\varphi}$ и μ_{rz} . При больших градиентах угловой скорости и числа Ричардсона коэффициент переноса тангенциальной компоненты импульса оказывается на порядок меньше коэффициента переноса осевой компоненты импульса.

1. C. S. Yih. Dual role of viscosity in the instability of revolving fluids of variable density. *The Physics of Fluids*, 1966, 4, N 7.
2. Мерони, Брэдшоу. Развитие турбулентного пограничного слоя на искривленной поверхности.— *Ракетная техника и космонавтика*, 1975, № 11.
3. В. К. Шукин. Теплообмен и гидродинамика внутренних потоков в полях массовых сил. М., «Машиностроение», 1970.
4. А. И. Борисенко, О. Н. Костиков, В. И. Чумаченко. Экспериментальное исследование турбулентных характеристик потока во вращающемся канале.— *Инж.-физ. ж.*, 1973, 24, № 6.
5. Е. П. Сухович. Конвективный теплообмен ограниченного струйного течения в поле центробежных сил. *Тепломассообмен-У*, т. 1, ч. 2. Минск, 1976.
6. Шукина. О тарировке цилиндрического зонда.— *Изв. вузов. Энергетика*, 1971, № 3.
7. D. G. Lilley, N. A. Chigier. Nonisotropic turbulent stress distribution in swirling flows from mean value distributions.— *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 1971, N 4.
8. Скотт, Раск. Турбулентная вязкость в закрученном потоке жидкости в кольцевом канале.— *Теоретические основы инженерных расчетов*, 1973, № 4.
9. Б. Брэдшоу. Введение в турбулентность и ее измерение. М., «Мир», 1974.
10. Меллор, Херинг. Обзор моделей для замыкания уравнений осредненного турбулентного течения.— *Ракетная техника и космонавтика*, 1973, 11, № 5.
11. Лилли. Расчет инертных закрученных турбулентных потоков.— *Ракетная техника и космонавтика*, 1973, 11, № 7.
12. В. Старр. Физика явлений с отрицательной вязкостью. М., «Мир», 1971.
13. M. C. So Ronald. Масштаб турбулентности в искривленных течениях со сдвигом.— *J. Fluid Mech.*, 1975, 70, N 1.

В. М. КОРНЕВ

ПЛОТНОСТЬ ДВИЖЕНИЙ
ПРИ ФЛАТТЕРЕ БЕСКОНЕЧНЫХ ПЛАСТИН

Исследуется поведение растянутых пластин на упругом основании в потоке газа при заданном законе изменения внешнего воздействия. Выбранный простой объект исследования, вероятно, имеет те же особенности поведения, что и цилиндрическая оболочка в потоке газа. Приведенный ниже анализ объясняет возникновение биений при флаттере. Эксперимент и теоретические исследования по цилиндрическим оболочкам плохо согласуются [1, 2], что можно частично объяснить повышенной чувствительностью системы к возмущениям.

1. Рассматривается поведение бесконечной растянутой пластины, покоящейся на линейном упругом основании, в потоке газа [3] при отсутствии возмущений

$$\begin{aligned}
 D\Delta\Delta w - (\sigma_1 h w_{x_1 x_1} + \sigma_2 h w_{y_1 y_1}) + k w + \rho_0 h w_{tt} + \\
 + \rho_0 h \varepsilon_1 w_t + \kappa p_\infty c_\infty^{-1} (w_t + U w_x) = 0; \quad (1.1) \\
 -\infty \leq x_1 \leq \infty, \quad 0 \leq y_1 \leq b, \quad -\infty \leq t \leq \infty, \quad \Delta = (\)_{x_1 x_1} + (\)_{y_1 y_1}, \\
 D = E h^3 / 12 (1 - \nu^2).
 \end{aligned}$$

Здесь w — нормальный прогиб; Δ — оператор Лапласа; $-\sigma_1 h$ и $-\sigma_2 h$ — нормальные усилия в плоскости пластины, h — ее толщина, k — коэффициент постели, ρ_0 — плотность материала пластины, ε_1 — коэффициент демпфирования, U — скорость потока, κ — показатель полнотропы, p_∞ и c_∞ — давление и скорость звука в невозмущенном потоке, b — ширина пластины, E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Выше принято упрощенное определение аэродинамических сил (см., например [4]).

Вводятся безразмерные переменные и величины:

$$\begin{aligned}
 x = x_1 / b, \quad y = y_1 / b, \quad \tau = t (\sigma_1 / b^2 \rho_0)^{1/2}; \\
 \delta^2 = \frac{1}{12 (1 - \nu^2)} \frac{E}{\sigma_1} \left(\frac{h}{b} \right)^2, \quad \mu^2 = \frac{b^2 k}{h \sigma_1}, \quad \varepsilon = b \varepsilon_1 \left(\frac{\rho_0}{\sigma_1} \right)^{1/2}; \\
 \beta = \frac{b \kappa p_\infty}{h c_\infty (\sigma_1 \rho_0)^{1/2}}, \quad \lambda = \frac{b U \kappa p_\infty}{h \sigma_1 c_\infty}, \quad \alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} > 0.
 \end{aligned}$$

Здесь безразмерные величины δ и μ характеризуют жесткость пластины на изгиб, ε и β — конструктивное и аэродинамическое демпфирование, α — соотношение растягивающих усилий, λ — параметр потока, причем $\lambda > 0$. Если прогиб пластины w отнести к ее толщине, то уравнение (1.1) приобретает вид (безразмерный и размерный прогибы обозначены одинаково)

$$\begin{aligned}
 \delta^2 \Delta \Delta w - (w_{xx} + \alpha w_{yy}) + \mu^2 w + w_{\tau\tau} + (\varepsilon + \beta) w_\tau + \lambda w_x = 0; \\
 -\infty \leq x \leq \infty; \quad 0 \leq y \leq 1; \quad -\infty \leq \tau \leq \infty. \quad (1.2)
 \end{aligned}$$

По продольным сторонам $y=0, 1$ заданы некоторые условия закрепления пластины

$$L_{0i}\omega(0)=0, L_{1i}\omega(1)=0 \quad (i=1, 2). \quad (1.3)$$

Решение задач флаттера разыскивается в виде бегущих волн:

$$\omega = Y_n(y) \sin(\omega_n \tau - \pi x/l_n), \quad (1.4)$$

если считать, что параметр потока λ в уравнении (1.2) совпадает с критическим параметром. Соотношение (1.4) подставляется в уравнение (1.2), при этом получается

$$\{\delta^2[(\)'' - (\pi/l_n)^2]^2 Y - [\alpha(\)'' - (\pi/l_n)^2] Y + (\mu^2 - \omega_n^2) Y\} \times \\ \times \sin(\omega_n \tau - \pi x/l_n) + [(\varepsilon + \beta)\omega_n - (\pi/l_n)\lambda] Y \cos(\omega_n \tau - \pi x/l_n) = 0,$$

откуда

$$\pi/l_n = \vartheta \omega_n; \quad \vartheta = \lambda^{-1}(\varepsilon + \beta); \quad (1.5)$$

$$\delta^2 Y^{(4)} - a_1 Y'' - a_2 Y = 0 \quad (0 \leq y \leq 1); \quad (1.6)$$

$$a_1 = 2\delta^2 \vartheta^2 \omega_n^2 + \alpha, \quad a_2 = \omega_n^2(1 - \vartheta^2 - \delta^2 \vartheta^4 \omega_n^2) - \mu^2.$$

К обыкновенному дифференциальному уравнению (1.6) добавляются краевые условия, полученные из условий (1.3),

$$L_{0i}^* Y(0) = 0, \quad L_{1i}^* Y(1) = 0 \quad (i=1, 2). \quad (1.7)$$

Характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (1.6), имеет два чисто мнимых корня $\pm ir_{n1}$ и два действительных корня $\pm r_{n2}$, если $a_2 > 0$; вторая пара корней порождает динамический краевой эффект, а первая пара — основную часть решения:

$$Y(y) = C_1 \sin(r_{n1}y + C_2) + C_3 \exp(-r_{n2}y) + C_4 \exp[r_{n2}(y-1)]. \quad (1.8)$$

Ниже показано, что коэффициент a_2 всегда положителен, т. е.

$$(1 - \vartheta^2)\omega_n^2 - \delta^2 \vartheta^4 \omega_n^4 - \mu^2 > 0. \quad (1.9)$$

Простой вид общего решения (1.8) существенно облегчает построение решения краевой задачи (1.6), (1.7) [3, 4]. Когда краевой эффект ярко выражен, можно положить $\exp(-r_{n2}) \approx 0$ (краевые эффекты затухают на ширине пластины); после несложных выкладок получаются оценки для произвольных краевых условий (1.7)

$$r_{n1} = n\pi + 0(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, решение задачи о флаттере шарнирно опертых пластин

$$Y_n(y) = \sin n\pi y \quad (1.10)$$

можно рассматривать как асимптотическое при произвольных краевых условиях (1.7).

Параметры бегущих волн ω_n и l_n , когда по поперечной координате решение имеет вид (1.10), определяются из соотношений (1.5) и

$$\delta^2(\pi/l_n)^4 + (1 + 2\delta^2 n^2 \pi^2)(\pi/l_n)^2 + \mu^2 + n^2 \pi^2 \alpha + \delta^2 n^4 \pi^4 - \omega_n^2 = 0.$$

Для определения частот ω_n получается уравнение четвертого порядка

$$b_4 \omega_n^4 + b_2 \omega_n^2 + b_0 = 0, \quad (1.11) \\ b_4 = \delta^2 \vartheta^4, \quad b_2 = (1 + 2\delta^2 n^2 \pi^2) \vartheta^2 - 1, \\ b_0 = \mu^2 + n^2 \pi^2 \alpha + \delta^2 n^4 \pi^4 \quad (b_4 > 0, \quad b_0 > 0),$$

после решения которого из (1.5) вычисляются длины бегущих волн l_n . Неравенство (1.9) всегда имеет место; в самом деле, принимая во внимание (1.11), получаем

$$2\delta^2 n^2 \pi^2 \vartheta^2 \omega_n^2 + n^2 \pi^2 \alpha + \delta^2 n^4 \pi^4 > 0.$$

Итак, динамический краевой эффект всегда существует.

2. Переходим к анализу уравнения (1.11). Уравнение (1.11) не имеет действительных решений, если $b_2^2 < 4b_0 b_4$; имеет пару действительных и пару чисто мнимых решений, если $b_2 > 0$ и $b_2^2 > 4b_0 b_4$; эти случаи далее не рассматриваются, так как решение уравнения (1.2) не может быть построено в виде бегущих волн (см. п. 3, где $\lambda < \lambda_1$).

Уравнение (1.11) имеет четыре действительных решения, если $b_2 < 0$ и $b_2^2 > 4b_0 b_4$, и два действительных решения, если $b_2 < 0$ и $b_2^2 = 4b_0 b_4$:

$$\omega_n^2 = [-b_2 \pm (b_2^2 - 4b_0 b_4)^{1/2}] / 2b_4, \quad (2.1)$$

причем $b_2 < 0$, $b_2^2 - 4b_0 b_4 \geq 0$ для $n=1, 2, \dots, n_0$. Наибольший интерес представляют те параметры потока, при которых впервые выполняются эти ограничения:

$$\lambda_{n1} = (\varepsilon + \beta) [1 + 2\delta^2 n^2 \pi^2 - 2\delta(\mu^2 + n^2 \pi^2 \alpha + \delta^2 n^4 \pi^4)^{1/2}]^{1/2} \quad (2.2)$$

$$\lambda_{n2} = (\varepsilon + \beta) [1 + 2\delta^2 n^2 \pi^2 + 2\delta(\mu^2 + n^2 \pi^2 \alpha + \delta^2 n^4 \pi^4)^{1/2}]^{1/2}.$$

Отметим, что оба критических параметра λ_{n1} и λ_{n2} положительны (см. исходное уравнение (1.2)). Перенумеруем эти параметры:

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_i \leq \dots \quad (2.3)$$

Пока $\lambda < \lambda_1$, отсутствуют движения в виде бегущих волн; при $\lambda = \lambda_1 < \lambda_2$ существует одна бегущая волна; при $\lambda = \lambda_2 < \lambda_3$ появляется другая; при $\lambda = \lambda_3 < \lambda_4$ — третья и т. д.

Сначала определяются критические параметры λ_{ni} из соотношения (2.2), затем для заданного параметра потока λ_{ni} рассчитывается по (2.1) все собственные частоты ω_{ni} и, наконец, по формуле (1.5) вычисляются соответствующие длины бегущих волн l_{ni} . Чувствительность системы к внешним воздействиям характеризуется плотностью расположения критических параметров λ_{ni} .

Переходим к анализу плотности движений. При $n \rightarrow \infty$ и фиксированных значениях параметров δ, μ, α

$$\lambda_{n1} \rightarrow \varepsilon + \beta, \quad \lambda_{n2} \rightarrow (\varepsilon + \beta)(1 + 4\delta^2 n^2 \pi^2)^{1/2} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Критические параметры λ_{n1} при $n \rightarrow \infty$ имеют точку сгущения, однако эта точка не совпадает с минимальным критическим параметром λ_1 и не расположена в малой окрестности λ_1 . При некотором подборе параметров несколько первых λ_i могут почти совпадать:

$$\delta^2 \mu^2 = 0(1), \quad \delta^2 n^2 = 0(1), \quad \alpha = 0(1). \quad (2.4)$$

Приближенно эти параметры равны

$$\lambda_* = (\varepsilon + \beta)(1 - 2\delta\mu)^{1/2} \quad (\lambda_i > \lambda_*, \quad i=1, 2, \dots) \quad (2.5)$$

Соотношению (2.5) соответствует первая строка из (2.2), причем $\lambda_i \approx \lambda_*$, $i=1, 2, \dots, i_0$; для второй строки также получается точка сгущения

$$\lambda_{**} = (\varepsilon + \beta)(1 + 2\delta\mu)^{1/2},$$

но эта точка сгущения $\lambda_{**} > \lambda_*$.

Для систем при выполнении оценки (2.4) имеет смысл говорить о сгущении движений. Поэтому исследуется функция $n = n(\lambda_n)$, причем

наибольший интерес с практической точки зрения представляет малая окрестность первого критического параметра λ_1 , т. е. $\lambda \approx \lambda_1$. Производная этой функции $\partial n / \partial \lambda_n$ характеризует плотность собственных движений. Функция $\partial n / \partial \lambda_n \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow \lambda_*$ (см. (2.5)), когда выполнены оценки (2.4), т. е. есть предвестник точки сгущения ($\lambda_i > \lambda_*$), далее будем говорить о точке сгущения движений. В этом случае, даже при незначительном превышении первого критического параметра λ_1 ($\lambda > \lambda_1$), имеется много движений в виде бегущих волн (1.4). Только учет двумерности позволил обнаружить точку сгущения собственных движений. Исследуемая система (пластина в потоке газа) при параметрах потока, почти совпадающих с минимальным критическим параметром $\lambda \approx \lambda_*$, оказывается очень чувствительной к широкому спектру внешних возмущений, если имеют место оценки (2.4). Когда не выполняются оценки (2.4), точки сгущения в окрестности первого критического параметра λ_1 нет.

Плотность движений существенно меняется при изменении растягивающих усилий по поперечной координате $-\delta^2 h$, а именно: при $\delta^2 \mu^2 = 0(1)$, $\delta^2 n^2 = 0(1)$ и $\alpha = 0(\mu^2)$ плотность собственных движений не имеет точки сгущения, поскольку в этом случае первый критический параметр λ_{11} существенно отличается от λ_* :

$$\lambda_{11} = (\varepsilon + \beta) [1 - 2\delta(\mu^2 + \pi^2 \alpha)^{1/2}]^{1/2}.$$

Таким образом, плотностью собственных движений можно управлять; подбирая растягивающие усилия $-\sigma_2 h$, можно добиться качественного изменения поведения системы при внешних возмущениях.

3. Рассматривается поведение пластины в потоке газа при заданном законе изменения внешнего воздействия:

$$\delta^2 \Delta \Delta w - (w_{xx} + \alpha w_{yy}) + \mu^2 w + w_{\tau\tau} + (\varepsilon + \beta) w_{\tau} + \lambda w_x = f(x, y, \tau),$$

$$-\infty \leq x \leq \infty, 0 \leq y \leq 1, -\infty \leq \tau \leq \infty; \quad (3.1)$$

$$w(x, 0, \tau) = w_{yy}(x, 0, \tau) = 0, w(x, 1, \tau) = w_{yy}(x, 1, \tau) = 0.$$

Здесь $f(x, y, \tau)$ — функция, определяемая внешним воздействием, например турбулизацией потока. Ради простоты рассматриваются шарнирно опертые пластины. Вопросы аппроксимации исследуемой системы с распределенными параметрами при наличии внешних воздействий системой с конечным числом степеней свободы непосредственно связаны с плотностью собственных движений [7, 8]. Иногда плотность движений имеет в пределе точку сгущения при минимальных критических параметрах потока λ_* .

Пусть параметры потока таковы, что параметр λ в уравнении (3.1) мало отличается от первого критического λ_1 ($\lambda < \lambda_1$) и, может быть, от нескольких последующих параметров $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{i_0}$, точнее

$$\lambda = \lambda_1 - \eta \lambda_i^{(1)}, \quad \eta \ll 1, \quad \lambda_i^{(1)} = 0(1), \quad i = 1, 2, \dots, i_0. \quad (3.2)$$

Для выбранного параметра потока i_0 первых собственных движений почти тождественны. При дальнейшем анализе кроме критических параметров потока надо предварительно рассчитать частоты и длины бегущих волн, по (2.3), (2.1), (1.5). Среди внешних воздействий $f(x, y, \tau)$ выделяются основные воздействия $f_0(x, y, \tau)$, соответствующие первым частотам $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{j_0}$,

$$f_0(x, y, \tau) = \sum_{i=1}^{j_0} \left[a_i \sin\left(\omega_i \tau - \frac{\pi x}{l_i}\right) + b_i \cos\left(\omega_i \tau - \frac{\pi x}{l_i}\right) \right] \sin i \pi y. \quad (3.3)$$

Предположим, что заданы такие возмущения, что все a_i и b_i имеют одинаковый порядок. Решение задачи (3.1) для неоднородного уравнения, в котором правая часть заменена функцией $f_0(x, y, \tau)$ из (3.3), разыскивается в виде бегущих волн с неизвестными амплитудами:

$$w = \sum_{i=1}^{j_0} \left[A_i \sin\left(\omega_i \tau - \frac{\pi x}{l_i}\right) + B_i \cos\left(\omega_i \tau - \frac{\pi x}{l_i}\right) \right] \sin i \pi y. \quad (3.4)$$

После преобразования, если принять во внимание (3.2), получают следующие соотношения для амплитуд:

$$A_i = \frac{1}{\eta} \frac{b_i l_i}{\pi \lambda_i^{(1)}}, \quad B_i = \frac{1}{\eta} \frac{a_i l_i}{\pi \lambda_i^{(1)}}. \quad (3.5)$$

Очевидно, что $A_i \rightarrow \infty, B_i \rightarrow \infty$ при $\eta \rightarrow 0$ ($i = 1, 2, \dots, j_0$), т. е. все первые j_0 движений равноправны и ни одно из них нельзя не принимать во внимание.

Итак, выделены основные движения, которые качественно определяют поведение системы. Исследование системы с распределенными параметрами может быть подменено исследованием системы с конечным числом степеней свободы; такой анализ очень полезен при выборе числа координатных функций в методе Бубнова — Галеркина, причем этих степеней свободы j_0 . Отметим, что 1) $j_0 = 1$, когда нет точки сгущения движений, 2) $j_0 \gg 1$, когда имеется точка сгущения движений, а параметр λ не очень близок к первому критическому параметру λ_1 [7, 8]. При почти совпадающих ω_i ($i = 1, 2, \dots, j_0, j_0 > 1$) построенное решение (3.4) имеет характер биений для некоторой фиксированной точки x, y ; подобные биения были обнаружены при экспериментах см. обзор [1]. Заключение об опасности для конструкции колебаний (3.4) с определенными амплитудами (3.5) можно сделать только после решения нелинейной задачи, в которой учтены как геометрическая, так и аэродинамическая нелинейность [3].

Экспериментальные результаты разных авторов могут существенно различаться для систем, имеющих точку сгущения движений при $\lambda = \lambda_*$. Это связано с тем, что много почти равноправных собственных форм, которые проявляются при наличии соответствующих возмущений (см. коэффициенты a_i и b_i в (3.3) и (3.5)). Одна и та же пластина на упругом основании при одних и тех же параметрах потока в разных аэродинамических трубах может иметь колебания с амплитудами, различающимися на порядок, когда $j_0 \gg 1$ в (3.4) и (3.5). Иными словами, возможен большой разброс при определении наименьших экспериментальных критических параметров λ_1 . Воспроизводимость экспериментов зависит от турбулизации потока в трубе.

Институт гидродинамики
СО АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
12/1 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Y. C. Fung. Some recent contributions to panel flutter research.— AIAA J., 1963, 1, No 4 (русс. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1963, 1, № 4, 116—175).
2. E. H. Dowell. Panel flutter: a review of the aeroelastic stability of plates and shells.— AIAA J., 1970, 8, No. 3. (русс. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1970, 8, № 3, 3—24).
3. В. В. Болотин. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости.— Физматгиз, М., 1961, с. 340.
4. А. А. Ильющин. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей.— ПММ, 1956, 20, № 6, 733—755.
5. В. В. Болотин. Краевой эффект при колебаниях упругих оболочек.— ПММ, 1960, 24, № 5, 831—841.
6. Ю. М. Вахромеев, В. М. Корнев. Динамический краевой эффект в стержнях, формулировка укороченных задач.— Изв. АН СССР, МТТ, 1972, № 4, 95—103.
7. В. М. Корнев. Об аппроксимации в задачах устойчивости и колебаний упругих оболочек при сгущении собственных значений.— Изв. АН СССР, МТТ, 1972, № 2, 119—129.
8. В. М. Корнев. Особенности задач выпучивания тонкостенных оболочек.— В сб.: Динамика твердого тела (динамика сплошной среды, вып. 25). Новосибирск, 1976, 61—74.

УДК 536.3.001.24+535.34.001.24

Ю. А. СУРИНОВ

ОБ ИТЕРАЦИОННО-ЗОНАЛЬНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И РАСЧЕТА ЛУЧИСТОГО ТЕПЛООБМЕНА
В ПОГЛОЩАЮЩЕЙ И РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЕ

Данная работа представляет собой обобщение и развитие ранее предложенного автором итерационно-зонального метода определения локальных и осредненных по граничным зонам характеристик лучистого теплообмена в излучающих системах, заполненных диатермической средой.

Рассмотрим излучающую систему, заполненную поглощающей и изотропно-рассеивающей средой, объем V которой ограничен кусочно-гладкой поверхностью F , состоящей из конечного числа n граничных и конечного числа m объемных зон $(F = \sum_{h=1}^n F_h; V = \sum_{j=1}^m V_j)$, которые предполагаются оптически и энергетически однородными.

Сущность излагаемого ниже нового аналитического метода решения интегральных уравнений излучения заключается в том, что системы интегральных уравнений для различных разрешающих и энергетических характеристик излучения приводятся к соответствующим системам интегральных уравнений для остатков функциональных рядов, определяющих эти характеристики. Вследствие этого метод позволяет при любых фиксированных значениях числа n граничных и числа m объемных зон производить расчеты локальных и осредненных характеристик лучистого теплообмена со сколь угодно высокой заданной степенью точности. Указанный метод построен применительно к случаю обобщенной постановки задачи, охватывающей по классификации автора девять конкретных постановок задачи, отличающихся друг от друга различными способами задания граничных условий и внутренних характеристик излучения, из которых восемь имеют единственное решение.

СИСТЕМА ОБОБЩЕННЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ИЗЛУЧЕНИЯ

Математическим описанием обобщенной постановки задачи о лучистом теплообмене в излучающей системе указанного типа служит следующая система интегральных уравнений:

$$E_{\text{пад}}(M_i) - \sum_{h=1}^n \tilde{R}_h \int_{F_h} E_{\text{пад}}(N_h) K(M_i, N_h) dF_{N_h} - \sum_{j=1}^m \kappa_j \int_{V_j} \eta_{\text{пад}}(P_j) L(M_i, P_j) dV_{P_j} = E_{\text{пад}}^{(1)}(M_i) \quad (M_i \in F_i; i = 1, 2, \dots, n); \quad (1)$$

$$\eta_{\text{пад}}(M_i) - \sum_{j=1}^m \kappa_j \int_{V_j} \eta_{\text{пад}}(P_j) L^{(1)}(M_i, P_j) dV_{P_j} -$$

$$- \sum_{h=1}^n \tilde{R}_h \int_{F_h} E_{\text{пад}}(N_h) K^{(1)}(M_i, N_h) dF_{N_h} = \eta_{\text{пад}}^{(1)}(M_i) \quad (M_i \in V_i; i = 1, 2, \dots, m), \quad (2)$$

где

$$E_{\text{пад}}^{(1)}(M_i) = \sum_{h=1}^n E_{\alpha, h} \psi(M_i, h) + \sum_{j=1}^m \eta_{\alpha, j} \rho(M_i, V_j) \quad (M_i \in F_i; i = 1, 2, \dots, n); \quad (3)$$

$$\eta_{\text{пад}}^{(1)}(M_i) = \sum_{h=1}^n E_{\alpha, h} \psi^{(1)}(M_i, F_h) + \sum_{j=1}^m \eta_{\alpha, j} \rho^{(1)}(M_i, V_j) \quad (M_i \in V_i; i = 1, 2, \dots, m); \quad (4)$$

$$K(M_i, N_h) = e^{-h(M_i, N_h)} \frac{\cos \theta_{M_i} \cos \theta_{N_h}}{\pi r_{M_i N_h}^2}; \quad L(M_i, P_j) = e^{-h(M_i, P_j)} \frac{\cos \theta_{M_i}}{4\pi r_{M_i P_j}^2}; \quad (5)$$

$$K^{(1)}(M_i, N_h) = e^{-h(M_i, N_h)} \frac{\cos \theta_{N_h}}{\pi r_{M_i N_h}^2}; \quad L^{(1)}(M_i, P_j) = e^{-h(M_i, P_j)} \frac{1}{4\pi r_{M_i P_j}^2}; \quad (6)$$

$$h(M_i, N_h) = \int_0^{r(M_i, N_h)} k(P) ds; \quad k = \alpha + \beta.$$

$$\psi(M_i, F_h) = \int_{F_h} K(M_i, N_h) dF_{N_h}; \quad (7)$$

$$\rho(M_i, V_j) = \int_{V_j} L(M_i, P_j) dV_{P_j}; \quad (8)$$

$$\psi^{(1)}(M_i, F_h) = \int_{F_h} K^{(1)}(M_i, N_h) dF_{N_h}; \quad (9)$$

$$\rho^{(1)}(M_i, V_j) = \int_{V_j} L^{(1)}(M_i, P_j) dV_{P_j}. \quad (10)$$

Решая систему уравнений (1) — (2) методом итерации [1, 2], получаем [3—10]

$$E_{\text{пад}}(M_i) = \frac{E_{\text{эф}}(M_i) - E_{\alpha, i}}{\tilde{R}_i} = \sum_{h=1}^n E_{\alpha, h} \Pi(M_i, F_h) + \sum_{j=1}^m \eta_{\alpha, j} \xi(M_i, V_j); \quad (M_i \in F_i; i = 1, 2, \dots, n); \quad (11)$$

$$\eta_{\text{пад}}(M_i) = \frac{\eta_{\text{эф}}(M_i) - \eta_{\alpha, i}}{\kappa_i} = \sum_{h=1}^n E_{\alpha, h} \Pi^{(1)}(M_i, F_h) + \sum_{j=1}^m \eta_{\alpha, j} \xi^{(1)}(M_i, V_j) \quad (M_i \in V_i; i = 1, 2, \dots, m), \quad (12)$$

где

$$\Pi(M_i, h) = \int_{F_h} \Omega(M_i, N_h) dF_{N_h}; \quad (13)$$

$$\xi(M_i, V_j) = \int_{V_j} \chi(M_i, P_j) dV_{P_j} = \frac{1}{4\alpha_j} \tilde{\chi}(M_i, V_j); \quad (14)$$

$$\Pi^{(1)}(M_i, F_h) = \int_{F_h} \Omega^{(1)}(M_i, N_h) dF_{N_h}; \quad (15)$$

$$\xi^{(1)}(M_i, V_j) = \int_{V_j} \chi^{(1)}(M_i, P_j) dV_{P_j} = \frac{1}{4\alpha_j} \tilde{\chi}^{(1)}(M_i, V_j). \quad (16)$$

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ИТЕРАЦИОННО-ЗОНАЛЬНОГО МЕТОДА**

Введем функции $\tilde{\Omega}_{-t}(M_i, N_k)$, $\tilde{\Omega}_{-t}^{(1)}(M_i, N_k)$, $\tilde{\chi}_{-t}(M_i, P_j)$ и $\tilde{\chi}_{-t}^{(1)}(M_i, P_j)$, представляющие остатки функциональных рядов, определяющих соответственно резольвенты $\Omega(M_i, N_k)$, $\Omega^{(1)}(M_i, N_k)$, $\chi(M_i, P_j)$ и $\chi^{(1)}(M_i, P_j)$.

$$\tilde{\Omega}_{-t}(M_i, N_k) = \Omega(M_i, N_k) - \sum_{s=0}^{t-1} \tilde{K}_s(M_i, N_k) = \sum_{s=t}^{\infty} \tilde{K}_s(M_i, N_k); \quad (17)$$

$$\tilde{\chi}_{-t}(M_i, P_j) = \chi(M_i, P_j) - \sum_{s=0}^{t-1} \tilde{L}_s(M_i, P_j) = \sum_{s=t}^{\infty} \tilde{L}_s(M_i, P_j); \quad (18)$$

$$\tilde{\Omega}_{-t}^{(1)}(M_i, N_k) = \Omega^{(1)}(M_i, N_k) - \sum_{s=0}^{t-1} \tilde{K}_s^{(1)}(M_i, N_k) = \sum_{s=t}^{\infty} \tilde{K}_s^{(1)}(M_i, N_k); \quad (19)$$

$$\tilde{\chi}_{-t}^{(1)}(M_i, P_j) = \chi^{(1)}(M_i, P_j) - \sum_{s=0}^{t-1} \tilde{L}_s^{(1)}(M_i, P_j) = \sum_{s=t}^{\infty} \tilde{L}_s^{(1)}(M_i, P_j), \quad (20)$$

где

$$\tilde{K}_0(M_i, N_k) = K(M_i, N_k); \quad \tilde{L}_0(M_i, P_j) = L(M_i, P_j); \quad \tilde{K}_0^{(1)}(M_i, N_k) = K^{(1)}(M_i, N_k); \quad \tilde{L}_0^{(1)}(M_i, P_j) = L^{(1)}(M_i, P_j);$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_s(M_i, N_k) &= \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \int_{F_j} \tilde{K}_{s-1}(M_i, P_j) K(P_j, N_k) dF_{P_j} + \\ &+ \sum_{t=1}^m \alpha_t \int_{V_t} \tilde{L}_{s-1}(M_i, P_t) K^{(1)}(P_t, N_k) dV_{P_t}; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_s(M_i, P_j) &= \sum_{h=1}^n \tilde{R}_h \int_{F_h} \tilde{K}_{s-1}(M_i, N_h) L(N_h, P_j) dF_{N_h} + \\ &+ \sum_{t=1}^m \alpha_t \int_{V_t} \tilde{L}_{s-1}(M_i, P_t) L^{(1)}(P_t, P_j) dV_{P_t}; \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_s^{(1)}(M_i, N_k) &= \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \int_{F_j} \tilde{K}_{s-1}^{(1)}(M_i, P_j) K(P_j, N_k) dF_{P_j} + \\ &+ \sum_{t=1}^m \alpha_t \int_{V_t} \tilde{L}_{s-1}^{(1)}(M_i, P_t) K^{(1)}(P_t, N_k) dV_{P_t}; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_s^{(1)}(M_i, P_j) &= \sum_{h=1}^n \tilde{R}_h \int_{F_h} \tilde{K}_{s-1}^{(1)}(M_i, N_h) L(N_h, P_j) dF_{N_h} + \\ &+ \sum_{t=1}^m \alpha_t \int_{V_t} \tilde{L}_{s-1}^{(1)}(M_i, P_t) L^{(1)}(P_t, P_j) dV_{P_t}. \end{aligned} \quad (24)$$

Для разрешающих функций, определяемых с помощью рядов (17) — (20), получаем следующие системы интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_{-t}(M_i, N_k) &= \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \int_j \tilde{\Omega}_{-t}(M_i, P_j) K(P_j, N_k) dF_{P_j} - \\ &- \sum_{s=1}^m \alpha_s \int_{V_s} \tilde{\chi}_{-t}(M_i, P_s) K^{(1)}(P_s, N_k) dV_{P_s} = \tilde{K}_t(M_i, N_k); \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_{-t}(M_i, P_j) &= \sum_{s=1}^m \alpha_s \int_{V_s} \tilde{\chi}_{-t}(M_i, N_s) L^{(1)}(N_s, P_j) dV_{N_s} - \\ &- \sum_{h=1}^n \tilde{R}_h \int_{F_h} \tilde{\Omega}_{-t}(M_i, N_h) L(N_h, P_j) dF_{N_h} = \tilde{L}_t(M_i, P_j); \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_{-t}^{(1)}(M_i, N_k) &= \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \int_{V_j} \tilde{\Omega}_{-t}^{(1)}(M_i, P_j) K(P_j, N_k) dF_{P_j} - \\ &- \sum_{s=1}^m \alpha_s \int_{V_s} \tilde{\chi}_{-t}^{(1)}(M_i, P_s) K^{(1)}(P_s, N_k) dV_{P_s} = \tilde{K}_t^{(1)}(M_i, N_k); \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_{-t}^{(1)}(M_i, P_j) &= \sum_{s=1}^m \alpha_s \int_{V_s} \tilde{\chi}_{-t}^{(1)}(M_i, N_s) L^{(1)}(N_s, P_j) dV_{N_s} - \\ &- \sum_{h=1}^n \tilde{R}_h \int_{F_h} \tilde{\Omega}_{-t}^{(1)}(M_i, N_h) L(N_h, P_j) dF_{N_h} = \tilde{L}_t^{(1)}(M_i, P_j), \end{aligned} \quad (28)$$

где правые части (25) — (26) и (27) — (28) определяются на основании (21) — (24).

Пользуясь соотношениями

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{-t}(M_i, F_h) &= \int_{F_h} \tilde{\Omega}_{-t}(M_i, N_h) dF_{N_h} = \Pi(M_i, N_h) - \\ &- \sum_{s=0}^{t-1} \tilde{\Psi}_s(M_i, F_h) = \sum_{s=t}^{\infty} \tilde{\Psi}_s(M_i, F_h); \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_{-t}(M_i, V_j) &= \int_{V_j} \tilde{\chi}_{-t}(M_i, P_j) dV_{P_j} = \zeta(M_i, V_j) - \\ &- \sum_{s=0}^{t-1} \tilde{\rho}_s(M_i, V_j) = \sum_{s=t}^{\infty} \tilde{\rho}_s(M_i, V_j), \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{-t}^{(1)}(M_i, F_h) &= \int_{F_h} \tilde{\Omega}_{-t}^{(1)}(M_i, N_h) dF_{N_h} = \Pi^{(1)}(M_i, F_h) - \\ &- \sum_{s=0}^{t-1} \tilde{\Psi}_s^{(1)}(M_i, F_h) = \sum_{s=t}^{\infty} \tilde{\Psi}_s^{(1)}(M_i, F_h), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_{-t}^{(1)}(M_i, V_j) &= \int_{V_j} \tilde{\chi}_{-t}^{(1)}(M_i, P_j) dV_{P_j} = \zeta^{(1)}(M_i, V_j) - \\ &- \sum_{s=1}^{t-1} \tilde{\rho}_s^{(1)}(M_i, V_j) = \sum_{s=t}^{\infty} \tilde{\rho}_s^{(1)}(M_i, V_j), \end{aligned} \quad (32)$$

получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{-t}(M_i, F_h) &= \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \int_{F_j} \tilde{\Omega}_{-t}(M_i, P_j) \psi(P_j, F_h) dF_{P_j} - \\ &- \sum_{s=1}^m \alpha_s \int_{V_s} \tilde{\chi}_{-t}(M_i, P_s) \psi^{(1)}(P_s, F_h) dV_{P_s} = \tilde{\Psi}_t(M_i, F_h); \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_{-t}(M_i, V_j) &= \sum_{s=1}^m \alpha_s \int_{V_s} \tilde{\chi}_{-t}(M_i, P_s) \rho^{(1)}(P_s, V_j) dV_{P_s} - \\ &- \sum_{h=1}^n \tilde{R}_h \int_{F_h} \tilde{\Omega}_{-t}(M_i, N_h) \rho(N_h, V_j) dV_{N_h} = \tilde{\rho}_t(M_i, V_j); \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{-t}^{(1)}(M_i, F_h) - \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \int_{F_j} \tilde{\Omega}_{-t}^{(1)}(M_i, P_j) \psi(P_j, F_h) dF_{P_j} - \\ - \sum_{s=1}^m \kappa_s \int_{V_s} \tilde{\chi}_{-t}^{(1)}(M_i, P_s) \psi^{(1)}(P_s, F_h) dV_{P_s} = \tilde{\Psi}_t^{(1)}(M_i, F_h); \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_{-t}^{(1)}(M_i, V_j) - \sum_{s=1}^m \kappa_s \int_{V_s} \tilde{\chi}_{-t}^{(1)}(M_i, P_s) \rho^{(1)}(P_s, V_j) dV_{P_s} - \\ - \sum_{h=1}^n \tilde{R}_h \int_{F_h} \tilde{\Omega}_{-t}^{(1)}(M_i, N_h) \rho(N_h, V_j) dF_{N_h} = \tilde{\rho}_t^{(1)}(M_i, V_j), \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$\tilde{\Psi}_t(M_i, F_h) = \int_{F_h} \tilde{K}_t(M_i, N_h) dF_{N_h} \quad (t = 0, 1, 2, \dots); \quad (37)$$

$$\tilde{\rho}_t(M_i, V_j) = \int_{V_j} \tilde{L}_t(M_i, P_j) dV_{P_j} \quad (t = 0, 1, 2, \dots); \quad (38)$$

$$\tilde{\Psi}_t^{(1)}(M_i, F_h) = \int_{F_h} \tilde{K}_t^{(1)}(M_i, N_h) dF_{N_h} \quad (t = 0, 1, 2, \dots); \quad (39)$$

$$\tilde{\rho}_t^{(1)}(M_i, V_j) = \int_{V_j} \tilde{L}_t^{(1)}(M_i, P_j) dV_{P_j} \quad (t = 0, 1, 2, \dots), \quad (40)$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_t(M_i, F_h) = \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \int_{F_j} \tilde{K}_{t-1}(M_i, P_j) \psi(P_j, F_h) dF_{P_j} + \\ + \sum_{s=1}^m \kappa_s \int_{V_s} \tilde{L}_{t-1}(M_i, P_s) \psi^{(1)}(P_s, F_h) dV_{P_s}; \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_t(M_i, V_j) = \sum_{h=1}^n \tilde{R}_h \int_{F_h} \tilde{K}_{t-1}(M_i, N_h) \rho(N_h, V_j) dF_{N_h} + \\ + \sum_{s=1}^m \kappa_s \int_{V_s} \tilde{L}_{t-1}(M_i, N_s) \rho^{(1)}(N_s, V_j) dV_{N_s}; \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_t^{(1)}(M_i, F_h) = \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \int_{F_j} \tilde{K}_{t-1}^{(1)}(M_i, P_j) \psi(P_j, F_h) dF_{P_j} + \\ + \sum_{s=1}^m \kappa_s \int_{V_s} \tilde{L}_{t-1}^{(1)}(M_i, P_s) \psi^{(1)}(P_s, F_h) dV_{P_s}; \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_t^{(1)}(M_i, V_j) = \sum_{h=1}^n \tilde{R}_h \int_{F_h} \tilde{K}_{t-1}^{(1)}(M_i, N_h) \rho(N_h, V_j) dF_{N_h} + \\ + \sum_{s=1}^m \kappa_s \int_{V_s} \tilde{L}_{t-1}^{(1)}(M_i, N_s) \rho^{(1)}(N_s, V_j) dV_{N_s}; \end{aligned} \quad (44)$$

При $t=0$ из выражений (37) — (40) находим

$$\tilde{\Psi}_0(M_i, F_h) = \psi(M_i, F_h) = \int_{F_h} K(M_i, N_h) dV_{N_h}; \quad (45)$$

$$\tilde{\rho}_0(M_i, V_j) = \rho(M_i, V_j) = \int_{V_j} L(M_i, P_j) dV_{P_j}; \quad (46)$$

$$\tilde{\Psi}_0^{(1)}(M_i, F_h) = \psi^{(1)}(M_i, F_h) = \int_{F_h} K^{(1)}(M_i, N_h) dF_{N_h}; \quad (47)$$

$$\tilde{\rho}_0^{(1)}(M_i, V_j) = \rho^{(1)}(M_i, V_j) = \int_{V_j} L^{(1)}(M_i, P_j) dV_{P_j}. \quad (48)$$

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Основная теорема теории лучистого теплообмена, позволяющая построить итерационно-зональный (в частности, обобщенный зональный) метод решения интегральных уравнений излучения, может быть сформулирована следующим образом. Если излучающая система, заполненная поглощающей и изотропно рассеивающей средой, ограниченной кусочно-гладкой диффузно излучающей граничной поверхностью, состоит из n граничных и m объемных оптически и энергетически однородных зон, удовлетворяющих системам равенств

$$\psi(M_i, F_h) = \psi_{ik} \quad (M_i \in F_i; i, k = 1, 2, \dots, n); \quad (49)$$

$$\rho(M_i, V_j) = \rho_{ij} \quad (M_i \in F_i; i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m); \quad (50)$$

$$\psi^{(1)}(M_i, F_h) = \psi_{ik}^{(1)} \quad (M_i \in V_i; i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n); \quad (51)$$

$$\rho^{(1)}(M_i, V_j) = \rho_{ij}^{(1)} \quad (M_i \in V_i; i = 1, 2, \dots, m), \quad (52)$$

где

$$\Psi_{ik} = \frac{1}{F_i} \int_{F_i} \psi(M_i, F_h) dF_{M_i} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n); \quad (49a)$$

$$\rho_{ij} = \frac{1}{F_i} \rho(M_i, V_j) dF_{M_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m); \quad (50a)$$

$$\Psi_{ik}^{(1)} = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \psi^{(1)}(M_i, F_h) dV_{M_i} \quad (i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n); \quad (51a)$$

$$\rho_{ij}^{(1)} = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \rho^{(1)}(M_i, V_j) dV_{M_i} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m), \quad (52a)$$

то для такой излучающей системы имеют место системы равенств вида

$$\tilde{\Pi}_{-t}(M_i, F_h) = \tilde{\Pi}_{-t}(F_i, F_h) \quad (M_i \in F_i; i, k = 1, 2, \dots, n); \quad (53)$$

$$\tilde{\xi}_{-t}(M_i, V_j) = \xi_{-t}(F_i, V_j) \quad (M_i \in F_i; i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m); \quad (54)$$

$$\tilde{\Pi}_{-t}^{(1)}(M_i, F_h) = \tilde{\Pi}_{-t}^{(1)}(V_i, F_h) \quad (M_i \in V_i; i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n); \quad (55)$$

$$\tilde{\xi}_{-t}^{(1)}(M_i, V_j) = \xi_{-t}^{(1)}(V_i, V_j) \quad (M_i \in V_i; i, j = 1, 2, \dots, m), \quad (56)$$

где

$$\tilde{\Pi}_{-t}(F_i, F_h) = \frac{1}{F_i} \int_{F_i} \tilde{\Pi}_{-t}(M_i, F_h) dF_{M_i} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n); \quad (53a)$$

$$\tilde{\xi}_{-t}(F_i, V_j) = \frac{1}{F_i} \int_{F_i} \tilde{\xi}_{-t}(M_i, V_j) dF_{M_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m); \quad (54a)$$

$$\tilde{\Pi}_{-t}^{(1)}(V_i, F_h) = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \tilde{\Pi}_{-t}^{(1)}(M_i, F_h) dV_{M_i} \quad (i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n); \quad (55a)$$

$$\tilde{\zeta}_{-t}(V_i, V_j) = \frac{1}{V_i V_j} \int \tilde{\zeta}_{-t}^{(1)}(M_i, V_j) dV_{M_i} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m). \quad (56a)$$

В частности, при $t=0$ из (53)–(56) получаем

$$\tilde{\Pi}_0(M_i, F_k) = \Pi(M_i, F_k) = \Pi_{ik} \quad (M_i \in F_i; i, k = 1, 2, \dots, n); \quad (57)$$

$$\tilde{\zeta}_0(M_i, V_j) = \zeta(M_i, V_j) = \zeta_{ij}; \quad (M_i \in F_i; i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m); \quad (58)$$

$$\tilde{\Pi}_0^{(1)}(M_i, F_k) = \Pi^{(1)}(M_i, F_k) = \Pi_{ik}^{(1)} \quad (M_i \in V_i; i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n); \quad (59)$$

$$\tilde{\zeta}_0^{(1)}(M_i, V_j) = \zeta^{(1)}(M_i, V_j) = \zeta_{ij}^{(1)} \quad (M_i \in V_i; i, j = 1, 2, \dots, m), \quad (60)$$

откуда в силу (11) и (12) следует постоянство функций $E_{\text{пад}}$ и $\eta_{\text{пад}}$ в пределах соответствующих граничных и объемных зон:

$$E_{\text{пад}}(M_i) = E_{\text{пад},i} = \frac{1}{F_i} \int E_{\text{пад}}(M_i) dF_{M_i} \quad (M_i \in F_i; i = 1, 2, \dots, n); \quad (61)$$

$$\eta_{\text{пад}}(M_i) = \eta_{\text{пад},i} = \frac{1}{V_i} \int \eta_{\text{пад}}(M_i) dV_{M_i} \quad (M_i \in V_i; i = 1, 2, \dots, m). \quad (62)$$

Доказательство. Заменяя на основании (49)–(52) под знаками интегралов в (33), (34) и (35), (36) локальные характеристики $\psi(P_j, F_k)$, $\psi^{(1)}(P_s, F_k)$, $\rho(N_h, V_j)$, $\rho^{(1)}(N_s, V_j)$ соответствующими осредненными характеристиками $\tilde{\psi}_{jk}$, $\tilde{\psi}_{sk}^{(1)}$, ρ_{hj} , $\rho_{sj}^{(1)}$, получаем следующие аппроксимирующие конечные системы алгебраических уравнений, лежащие в основе предлагаемого итерационно-зонального метода:

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{-t}(M_i, F_k) - \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \tilde{\psi}_{jk} \tilde{\Pi}_{-t}(M_i, F_j) - \sum_{s=1}^m \alpha_s \psi_{sk}^{(1)} \tilde{\zeta}_{-t}(M_i, V_s) = \\ = \tilde{\psi}_t(M_i, F_k) \quad (M_i \in F_i; i, k = 1, 2, \dots, n; t = 0, 1, 2 \dots); \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_{-t}(M_i, V_j) - \sum_{s=1}^m \alpha_s \rho_{sj}^{(1)} \tilde{\zeta}_{-t}(M_i, V_s) - \sum_{k=1}^n \tilde{R}_k \rho_{ki} \tilde{\Pi}_{-t}(M_i, F_k) = \\ = \tilde{\rho}_t(M_i, V_j) \quad (M_i \in F_i; i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m; t = 0, 1, 2 \dots); \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{-t}^{(1)}(M_i, F_k) - \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \tilde{\psi}_{jk}^{(1)} \tilde{\Pi}_{-t}^{(1)}(M_i, F_j) - \sum_{s=1}^m \alpha_s \psi_{sk}^{(1)} \tilde{\zeta}_{-t}^{(1)}(M_i, V_s) = \\ = \tilde{\psi}_t^{(1)}(M_i, F_k) \quad (M_i \in V_i; i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n; t = 0, 1, 2 \dots); \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_{-t}^{(1)}(M_i, V_j) - \sum_{s=1}^m \alpha_s \rho_{sj}^{(1)} \tilde{\zeta}_{-t}^{(1)}(M_i, V_s) - \sum_{k=1}^n \tilde{R}_k \rho_{ki} \tilde{\Pi}_{-t}^{(1)}(M_i, F_k) = \\ = \tilde{\rho}_t^{(1)}(M_i, V_j) \quad (M_i \in V_i; i, j = 1, 2, \dots, m; t = 0, 1, 2 \dots). \end{aligned} \quad (66)$$

Пользуясь далее соотношениями

$$\tilde{\psi}_t(F_i, F_k) = \tilde{\psi}_{ik}(t) = \frac{1}{F_i} \int \tilde{\psi}_t(M_i, F_k) dF_{M_i} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n); \quad (67)$$

$$\tilde{\psi}_t^{(1)}(V_i, F_k) = \tilde{\psi}_{ik}^{(1)}(t) = \frac{1}{V_i} \int \tilde{\psi}_t^{(1)}(M_i, F_k) dV_{M_i} \quad (i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n); \quad (68)$$

$$\tilde{\rho}_t(F_i, V_j) = \tilde{\rho}_{ij}(t) = \frac{1}{F_i} \int \tilde{\rho}_t(M_i, V_j) dF_{M_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m); \quad (69)$$

$$\tilde{\rho}_t^{(1)}(V_i, V_j) = \tilde{\rho}_{ij}^{(1)}(t) = \frac{1}{V_i V_j} \int \tilde{\rho}_t^{(1)}(M_i, V_j) dV_{M_i} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m), \quad (70)$$

а также (53)–(56), производим осреднение систем уравнений (63), (64) и (65), (66).

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{-t}(F_i, F_k) - \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \tilde{\psi}_{jk} \tilde{\Pi}_{-t}(F_i, F_j) - \sum_{s=1}^m \alpha_s \psi_{sk}^{(1)} \tilde{\zeta}_{-t}(F_i, V_s) = \\ = \tilde{\psi}_t(F_i, F_k) \quad (i, k = 1, 2, \dots, n; t = 0, 1, 2, \dots); \end{aligned} \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_{-t}(F_i, V_j) - \sum_{s=1}^m \alpha_s \rho_{sj}^{(1)} \tilde{\zeta}_{-t}(F_i, V_s) - \sum_{k=1}^n \tilde{R}_k \rho_{ki} \tilde{\Pi}_{-t}(F_i, F_k) = \\ = \tilde{\rho}_t(F_i, V_j) \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m; t = 0, 1, 2, \dots); \end{aligned} \quad (72)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{-t}^{(1)}(V_i, F_k) - \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \tilde{\psi}_{jk}^{(1)} \tilde{\Pi}_{-t}^{(1)}(V_i, F_j) - \sum_{s=1}^m \alpha_s \psi_{sk}^{(1)} \tilde{\zeta}_{-t}^{(1)}(V_i, V_s) = \\ = \tilde{\psi}_t^{(1)}(V_i, F_k) \quad (i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n; t = 0, 1, 2 \dots); \end{aligned} \quad (73)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_{-t}^{(1)}(V_i, V_j) - \sum_{s=1}^m \alpha_s \rho_{sj}^{(1)} \tilde{\zeta}_{-t}^{(1)}(V_i, V_s) - \sum_{k=1}^n \tilde{R}_k \rho_{ki} \tilde{\Pi}_{-t}^{(1)}(V_i, F_k) = \\ = \tilde{\rho}_t^{(1)}(V_i, V_j) \quad (i, j = 1, 2, \dots, m; t = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (74)$$

Системы алгебраических уравнений с матрицами и правыми частями систем уравнений (71), (72) и (73), (74) можно также получить, применяя условия (49), (50) к правым частям систем уравнений (63), (64) и (65), (66), что в силу (57)–(60) и доказывает нашу теорему.

В самом деле, представляя соотношения (67)–(70) в развернутом виде

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_t(F_i, F_k) = \frac{1}{F_i} \left[\sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \int_{F_i F_j} \tilde{K}_{t-1}(M_i, P_j) \psi(P_j, F_k) dF_{M_i} + \right. \\ \left. + \sum_{s=1}^m \alpha_s \int_{F_i V_s} \tilde{L}_{t-1}(M_i, P_s) \psi^{(1)}(P_s, F_k) dV_{P_s} dF_{M_i} \right]; \end{aligned} \quad (75)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_t(F_i, V_j) = \frac{1}{F_i} \left[\sum_{k=1}^n \tilde{R}_k \int_{F_i F_k} \tilde{K}_{t-1}(M_i, N_k) \rho(N_k, V_j) dF_{N_k} dF_{M_i} + \right. \\ \left. + \sum_{s=1}^m \alpha_s \int_{F_i V_s} \tilde{L}_{t-1}(M_i, P_s) \rho^{(1)}(P_s, V_j) dV_{P_s} dF_{M_i} \right]; \end{aligned} \quad (76)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_t^{(1)}(V_i, F_k) = \frac{1}{V_i} \left[\sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \int_{V_i F_j} \tilde{K}_{t-1}^{(1)}(M_i, P_j) \psi(P_j, F_k) dF_{P_j} dV_{M_i} + \right. \\ \left. + \sum_{s=1}^m \alpha_s \int_{V_i V_s} \tilde{L}_{t-1}^{(1)}(M_i, P_s) \psi^{(1)}(P_s, F_k) dV_{P_s} dV_{M_i} \right]; \end{aligned} \quad (77)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_t^{(1)}(V_i, V_j) = \frac{1}{V_i} \left[\sum_{k=1}^n \tilde{R}_k \int_{V_i F_k} \tilde{K}_{t-1}^{(1)}(M_i, N_k) \rho(N_k, V_j) dF_{N_k} dV_{M_i} + \right. \\ \left. + \sum_{s=1}^m \alpha_s \int_{V_i V_s} \tilde{L}_{t-1}^{(1)}(M_i, P_s) \rho^{(1)}(P_s, V_j) dV_{P_s} dV_{M_i} \right]; \end{aligned} \quad (78)$$

на основании (49)–(52) находим системы равенств вида

$$\tilde{\psi}_s(M_i, F_k) = \tilde{\psi}_s(F_i, F_k) \quad (M_i \in F_i; i, k=1, 2, \dots, n); \quad (79)$$

$$\tilde{\psi}_s^{(1)}(M_i, F_k) = \tilde{\psi}_s^{(1)}(V_i, F_k) \quad (M_i \in V_i; i=1, 2, \dots, m; k=1, 2, \dots, n); \quad (80)$$

$$\tilde{\rho}_s(M_i, V_j) = \tilde{\rho}_s(F_i, V_j) \quad (M_i \in F_i; i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, m); \quad (81)$$

$$\tilde{\rho}_s^{(1)}(M_i, V_j) = \tilde{\rho}_s^{(1)}(V_i, V_j) \quad (M_i \in V_i; i, j=1, 2, \dots, m) \quad (82)$$

и, следовательно, системы равенств (для $t=0, 1, 2, \dots$)

$$\tilde{\Pi}_{-t}(M_i, F_k) = \tilde{\Pi}_{-t}(F_i, F_k) \quad (M_i \in F_i; i, k=1, 2, \dots, n); \quad (83)$$

$$\tilde{\Pi}_{-t}^{(1)}(M_i, F_k) = \tilde{\Pi}_{-t}^{(1)}(V_i, F_k) \quad (M_i \in V_i; i=1, 2, \dots, m; k=1, 2, \dots, n); \quad (84)$$

$$\tilde{\zeta}_{-t}(M_i, V_j) = \tilde{\zeta}_{-t}(F_i, V_j) \quad (M_i \in F_i; i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, m); \quad (85)$$

$$\tilde{\zeta}_{-t}^{(1)}(M_i, V_j) = \tilde{\zeta}_{-t}^{(1)}(V_i, V_j) \quad (M_i \in V_i; i, j=1, 2, \dots, m). \quad (86)$$

Из (83)–(86) при $t=0$ получаем системы равенств (57)–(60) и на основании (11), (12) приходим к (61) и (62).

В этом случае выражения (11) и (12) приобретают вид

$$E_{\text{пад } i} = \frac{E_{\text{эф } i} - E_{\alpha, i}}{R_i} = \sum_{k=1}^n E_{\alpha, k} \Pi_{ik} + \sum_{j=1}^m \eta_{\alpha, j} \zeta_{ij} \quad (i=1, 2, \dots, n); \quad (87)$$

$$\eta_{\text{пад } i} = \frac{\eta_{\text{эф } i} - \eta_{\alpha, i}}{\alpha_i} = \sum_{k=1}^n E_{\alpha, k} \Pi_{ik}^{(1)} + \sum_{j=1}^m \eta_{\alpha, j} \zeta_{ij}^{(1)} \quad (i=1, 2, \dots, m). \quad (88)$$

Выражения (87) и (88) можно получить в результате осреднения (11) и (12). Однако, если условия (49)–(52) не выполняются, системы равенств (61), (62) также не будут выполняться. Итак, выражения (87) и (88) справедливы в общем случае излучающей системы, не удовлетворяющей условиям (49)–(52).

Из изложенного выше следует, что системы алгебраических уравнений (63), (64) и (65), (66), лежащие в основе итерационно-зонального метода, получаются из систем (33), (34) и (35), (36) в результате частного применения рассмотренной фундаментальной теоремы, связанного с заменой локальных разрешающих характеристик соответствующими осредненными характеристиками только под знаками интегралов в (33), (34) и (35), (36). Если в (63), (64) и (65), (66) положить $t=0$, получим системы алгебраических уравнений, являющиеся основой обобщенного зонального метода.

Построенный выше алгоритм итерационно-зонального метода характеризует одну из основных форм его представления. Эта форма тесно связана с рассматриваемой ниже другой формой, опирающейся на систему алгебраических уравнений, для функций, представляющих остатки бесконечных рядов, определяющих энергетические характеристики излучения. Для получения этой системы уравнений воспользуемся следующими соотношениями, характеризующими процессы многократных отражений на границе F системы и многократных рассеяний по объему V заполняющей ее поглощающей и рассеивающей среды:

$$E_{\text{пад}}(M_i) = \sum_{s=1}^{\infty} E_{\text{пад}}^{(s)}(M_i); \quad (89)$$

$$\eta_{\text{пад}}(M_i) = \sum_{s=1}^{\infty} \eta_{\text{пад}}^{(s)}(M_i); \quad (90)$$

$$E_{\text{отр}}(M_i) = R_i E_{\text{пад}}(M_i) = \sum_{s=1}^{\infty} E_{\text{отр}}^{(s)}(M_i); \quad (91)$$

$$\eta_{\text{расс}}(M_i) = \beta_i \eta_{\text{пад}}(M_i) = \sum_{s=1}^{\infty} \eta_{\text{расс}}^{(s)}(M_i); \quad (92)$$

$$E_{\text{пад}}^{(-t)}(M_i) = E_{\text{пад}}(M_i) - \sum_{s=1}^t E_{\text{пад}}^{(s)}(M_i) = \sum_{s=t+1}^{\infty} E_{\text{пад}}^{(s)}(M_i) \quad (M_i \in F_i; i=1, 2, \dots, n; t=0, 1, 2, \dots); \quad (93)$$

$$\eta_{\text{пад}}^{(-t)}(M_i) = \eta_{\text{пад}}(M_i) - \sum_{s=1}^t \eta_{\text{пад}}^{(s)}(M_i) = \sum_{s=t+1}^{\infty} \eta_{\text{пад}}^{(s)}(M_i) \quad (M_i \in V_i; i=1, 2, \dots, m; t=0, 1, 2, \dots). \quad (94)$$

Пользуясь системой интегральных уравнений (1), (2), получаем для $t=0, 1, 2, \dots$

$$E_{\text{пад}}^{(-t)}(M_i) - \sum_{k=1}^n \tilde{R}_k \int_{F_k} E_{\text{пад}}^{(-t)}(N_k) K(M_i, N_k) dF_{N_k} - \sum_{j=1}^m \alpha_j \int_{V_j} \eta_{\text{пад}}^{(-t)}(P_j) L(M_i, P_j) dV_{P_j} = E_{\text{пад}}^{(t+1)}(M_i) \quad (t=0, 1, 2, \dots); \quad (95)$$

$$\eta_{\text{пад}}^{(-t)}(M_i) - \sum_{j=1}^m \alpha_j \int_{V_j} \eta_{\text{пад}}^{(-t)}(P_j) L^{(1)}(M_i, P_j) dV_{P_j} - \sum_{k=1}^n \tilde{R}_k \int_{F_k} E_{\text{пад}}^{(-t)}(N_k) K^{(1)}(M_i, N_k) dF_{N_k} = \eta_{\text{пад}}^{(t+1)}(M_i) \quad (t=0, 1, 2, \dots), \quad (96)$$

где

$$E_{\text{пад}}^{(0)}(M_i) = E_{\text{пад}}(M_i) \quad (M_i \in V_i; i=1, 2, \dots, n);$$

$$\eta_{\text{пад}}^{(0)}(M_i) = \eta_{\text{пад}}(M_i) \quad (M_i \in V_i; i=1, 2, \dots, m);$$

$$E_{\text{пад}}^{(t+1)}(M_i) = \sum_{k=1}^n \tilde{R}_k \int_{F_k} E_{\text{пад}}^{(t)}(N_k) K(M_i, N_k) dF_{N_k} + \sum_{j=1}^m \alpha_j \int_{V_j} \eta_{\text{пад}}^{(t)}(P_j) L(M_i, P_j) dV_{P_j} \quad (t=1, 2, \dots); \quad (97)$$

$$\eta_{\text{пад}}^{(t+1)}(M_i) = \sum_{k=1}^n \tilde{R}_k \int_{F_k} E_{\text{пад}}^{(t)}(N_k) K^{(1)}(M_i, N_k) dF_{N_k} + \sum_{j=1}^m \alpha_j \int_{V_j} \eta_{\text{пад}}^{(t)}(P_j) L^{(1)}(M_i, P_j) dV_{P_j} \quad (t=1, 2, \dots) \quad (98)$$

или

$$E_{\text{пад}}^{(t+1)}(M_i) = \sum_{k=1}^n E_{\alpha, k} \tilde{\psi}_t(M_i, F_k) + \sum_{j=1}^m \eta_{\alpha, j} \tilde{\rho}_t(M_i, V_j) \quad (t=0, 1, 2, \dots); \quad (99)$$

$$\eta_{\text{пад}}^{(t+1)}(M_i) = \sum_{k=1}^n E_{\alpha, k} \tilde{\psi}_t^{(1)}(M_i, F_k) + \sum_{j=1}^m \eta_{\alpha, j} \tilde{\rho}_t^{(1)}(M_i, V_j) \quad (t=0, 1, 2, \dots). \quad (100)$$

На основании (49)–(52) и (79)–(82) находим

$$E_{\text{пад}}^{(t)}(M_i) = E_{\text{пад}, i}^{(t)} = \frac{1}{F_i} \int_{F_i} E_{\text{пад}}^{(t)}(M_i) dF_{M_i} \quad (M_i \in F_i; i=1, 2, \dots, n); \quad (101)$$

$$\eta_{\text{пад}}^{(t)}(M_i) = \eta_{\text{пад},i}^{(t)} = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \eta_{\text{пад}}^{(t)}(M_i) dV_{M_i} \quad (M_i \in V_i; i = 1, 2, \dots, m), \quad (102)$$

откуда в силу (93)–(94), а также соотношений, выведенных в результате определения (93), (94) вида

$$\begin{aligned} E_{\text{пад},i}^{(-t)} &= \frac{1}{F_i} \int_{F_i} E_{\text{пад}}^{(-t)}(M_i) dF_{M_i} = E_{\text{пад},i} - \sum_{s=1}^t E_{\text{пад},i}^{(s)} = \\ &= \sum_{s=t+1}^{\infty} E_{\text{пад},i}^{(s)} \quad (i = 1, 2, \dots, n); \end{aligned} \quad (103)$$

$$\begin{aligned} \eta_{\text{пад},i}^{(-t)} &= \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \eta_{\text{пад}}^{(-t)}(M_i) dV_{M_i} = \eta_{\text{пад},i} - \sum_{s=1}^t \eta_{\text{пад},i}^{(s)} = \\ &= \sum_{s=t+1}^{\infty} \eta_{\text{пад},i}^{(s)} \quad (i = 1, 2, \dots, m), \end{aligned} \quad (104)$$

приходим к следующим системам равенств:

$$E_{\text{пад}}^{(-t)}(M_i) = E_{\text{пад},i}^{(-t)} = \frac{1}{F_i} \int_{F_i} E_{\text{пад}}^{(-t)}(M_i) dF_{M_i}; \quad (105)$$

$$\eta_{\text{пад}}^{(-t)}(M_i) = \eta_{\text{пад},i}^{(-t)} = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \eta_{\text{пад}}^{(-t)}(M_i) dV_{M_i}, \quad (106)$$

а также к системам равенств (61) и (62).

Заменяя на основании (61) и (62) под знаками интегралов в (95) и (96) локальные энергетические характеристики соответствующими осредненными, имеем следующие системы алгебраических выражений:

$$\begin{aligned} E_{\text{пад}}^{(-t)}(M_i) &= E_{\text{пад}}^{(t+1)}(M_i) + \sum_{k=1}^n \tilde{R}_k E_{\text{пад},k}^{(-t)} \psi(M_i, F_k) + \\ &+ \sum_{j=1}^m \kappa_j \eta_{\text{пад},j}^{(-t)} \rho(M_i, V_j) \quad (M_i \in F_i; i = 1, 2, \dots, n); \end{aligned} \quad (107)$$

$$\begin{aligned} \eta_{\text{пад}}^{(-t)}(M_i) &= \eta_{\text{пад}}^{(t+1)}(M_i) + \sum_{k=1}^n \tilde{R}_k E_{\text{пад},k}^{(-t)} \psi^{(1)}(M_i, F_k) + \\ &+ \sum_{j=1}^m \kappa_j \eta_{\text{пад},j}^{(-t)} \rho^{(1)}(M_i, V_j) \quad (M_i \in V_i; i = 1, 2, \dots, m), \end{aligned} \quad (108)$$

где $E_{\text{пад},k}^{(-t)}$ и $\eta_{\text{пад},k}^{(-t)}$ определяются с помощью конечных систем алгебраических уравнений, которые можно получить, производя преобразование системы уравнений (95), (96) на основании рассмотренной выше общей теоремы:

$$\begin{aligned} E_{\text{пад},i}^{(-t)} - \sum_{k=1}^n \tilde{R}_k \psi_{ik} E_{\text{пад},k}^{(-t)} - \sum_{j=1}^m \kappa_j \rho_{ij} \eta_{\text{пад},j}^{(-t)} = \\ = E_{\text{пад},i}^{(t+1)} \quad (i = 1, 2, \dots, n; t = 0, 1, 2, \dots); \end{aligned} \quad (109)$$

$$\eta_{\text{пад},i}^{(-t)} - \sum_{j=1}^m \kappa_j \rho_{ij}^{(1)} \eta_{\text{пад},j}^{(-t)} - \sum_{k=1}^n \tilde{R}_k \psi_{ik}^{(1)} E_{\text{пад},k}^{(-t)} = \eta_{\text{пад},i}^{(t+1)} \quad (i = 1, 2, \dots, m; t = 0, 1, 2, \dots), \quad (110)$$

где

$$E_{\text{пад},i}^{(t+1)} = \sum_{k=1}^n \tilde{R}_k \int_{F_k} E_{\text{пад}}^{(t)}(N_k) \psi(N_k, F_i) dF_{N_k} +$$

$$+ \frac{1}{F_i} \sum_{j=1}^m \kappa_j \int_{F_i} \int_{V_j} \eta_{\text{пад}}^{(t)}(P_j) L(M_i, P_j) dV_{P_j} dF_{M_i} \quad (t = 1, 2, \dots); \quad (111)$$

$$\begin{aligned} \eta_{\text{пад},i}^{(t+1)} &= \frac{1}{V_i} \sum_{k=1}^n \tilde{R}_k \int_{F_k} \int_{V_i} E_{\text{пад}}^{(t)}(N_k) K^{(1)}(M_i, N_k) dF_{N_k} dV_{M_i} + \\ &+ \sum_{j=1}^m \kappa_j \int_{V_j} \eta_{\text{пад}}^{(t)}(P_j) \rho^{(1)}(P_j, V_i) dV_{P_j} \quad (t = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (112)$$

так как

$$\begin{aligned} K(M_i, N_k) &= K(N_k, M_i); \\ L^{(1)}(M_i, P_j) &= L^{(1)}(P_j, M_i) \end{aligned}$$

или

$$E_{\text{пад},i}^{(t+1)} = \sum_{k=1}^n E_{\alpha,k} \tilde{\Psi}_{ik}(t) + \sum_{j=1}^m \eta_{\alpha,j} \tilde{\rho}_{ij}(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n; t = 0, 1, 2, \dots); \quad (113)$$

$$\eta_{\text{пад},i}^{(t+1)} = \sum_{k=1}^n E_{\alpha,k} \tilde{\Psi}_{ik}^{(1)}(t) + \sum_{j=1}^m \eta_{\alpha,j} \tilde{\rho}_{ij}^{(1)}(t) \quad (i = 1, 2, \dots, m; t = 0, 1, 2, \dots). \quad (114)$$

Разрешающие характеристики, содержащиеся в (113) и (114), определяются на основании (75)–(78).

Наряду с системами алгебраических уравнений (109)–(119) и выражений (107), (108), (111)–(114) основой итерационно-зонального метода являются также следующие выражения:

$$\begin{aligned} E_{\text{пад}}^{(-t)}(M_i) &= \sum_{k=1}^n E_{\alpha,k} \tilde{\Pi}_{-t}(M_i, F_k) + \sum_{j=1}^m \eta_{\alpha,j} \tilde{\xi}_{-t}(M_i, V_j) \\ &\quad (M_i \in F_i; i = 1, 2, \dots, n; t = 0, 1, 2, \dots); \end{aligned} \quad (115)$$

$$\begin{aligned} \eta_{\text{пад}}^{(-t)}(M_i) &= \sum_{k=1}^n E_{\alpha,k} \tilde{\Pi}_{-t}^{(1)}(M_i, F_k) + \sum_{j=1}^m \eta_{\alpha,j} \tilde{\xi}_{-t}^{(1)}(M_i, V_j) \\ &\quad (M_i \in V_i; i = 1, 2, \dots, m; t = 0, 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (116)$$

где разрешающие характеристики определяются на основании (71), (72) и (73), (74).

Таким образом, рассмотрены две основные формы представления итерационно-зонального метода и установлена внутренняя связь между ними и их эквивалентность. Заметим, что при $t=0$ выражения (115), (116) сводятся к (11), (12), а из (107)–(114) получаем системы алгебраических уравнений и выражений, являющиеся основой обобщенного зонального метода:

$$\begin{aligned} E_{\text{пад},i} - \sum_{k=1}^n \tilde{R}_k \psi_{ik} E_{\text{пад},k} - \sum_{j=1}^m \kappa_j \rho_{ij} \eta_{\text{пад},j} = \\ = \sum_{k=1}^n E_{\alpha,k} \psi_{ik} + \sum_{j=1}^m \eta_{\alpha,j} \rho_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n); \end{aligned} \quad (117)$$

$$\begin{aligned} \eta_{\text{пад},i} - \sum_{j=1}^m \kappa_j \rho_{ij}^{(1)} \eta_{\text{пад},j} - \sum_{k=1}^n \tilde{R}_k \psi_{ik}^{(1)} E_{\text{пад},k} = \\ = \sum_{k=1}^n E_{\alpha,k} \psi_{ik}^{(1)} + \sum_{j=1}^m \eta_{\alpha,j} \rho_{ij}^{(1)} \quad (i = 1, 2, \dots, m); \end{aligned} \quad (118)$$

$$E_{\text{пад}}(M_i) = E_{\text{пад}}^{(1)}(M_i) + \sum_{h=1}^n \tilde{R}_h E_{\text{пад},h} \Psi(M_i, F_h) + \sum_{j=1}^m \kappa_j \eta_{\text{пад},j} \rho(M_i, V_j) (M_i \in F_i; i = 1, 2, \dots, n), \quad (119)$$

$$\eta_{\text{пад}}(M_i) = \eta_{\text{пад}}^{(1)}(M_i) + \sum_{k=1}^n \tilde{R}_k E_{\text{пад},k} \Psi^{(1)}(M_i, F_k) + \sum_{j=1}^m \kappa_j \eta_{\text{пад},j} \rho^{(1)}(M_i, V_j) (M_i \in V_i; i = 1, 2, \dots, m), \quad (120)$$

где $E_{\text{пад}}^{(1)}(M_i)$ и $\eta_{\text{пад}}^{(1)}(M_i)$ определяются на основании (3) и (4).
В данном случае ($t=0$) системы (117), (118) и (119), (120) на основании классификации видов излучения [3–9] легко преобразуются к виду

$$E_{\text{пад}}(M_i) = \frac{E_{\text{эф}}(M_i) - E_{\alpha,i}}{R_i} = \sum_{h=1}^n E_{\text{эф},h} \Psi(M_i, F_h) + \sum_{j=1}^m \eta_{\text{эф},j} \rho(M_i, V_j) (M_i \in F_i; i = 1, 2, \dots, n), \quad (121)$$

$$\eta_{\text{пад}}(M_i) = \frac{\eta_{\text{эф}}(M_i) - \eta_{\alpha,i}}{\kappa_i} = \sum_{h=1}^n E_{\text{эф},h} \Psi^{(1)}(M_i, F_h) + \sum_{j=1}^m \eta_{\text{эф},j} \rho^{(1)}(M_i, V_j) (M_i \in V_i; i = 1, 2, \dots, m), \quad (122)$$

где $E_{\text{эф},h}$ и $\eta_{\text{эф},j}$ определяются на основании системы алгебраических уравнений:

$$E_{\text{эф},i} - \tilde{R}_i \sum_{h=1}^n E_{\text{эф},h} \Psi_{ih} - \tilde{R}_i \sum_{j=1}^m \eta_{\text{эф},j} \rho_{ij} = E_{\alpha,i} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (123)$$

$$\eta_{\text{эф},i} - \kappa_i \sum_{j=1}^m \eta_{\text{эф},j} \rho_{ij}^{(1)} - \kappa_i \sum_{h=1}^n E_{\text{эф},h} \Psi_{ih}^{(1)} = \eta_{\alpha,i} \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (124)$$

Однако в общем случае при использовании итерационно-зонального метода ($t > 0$) построение систем алгебраических уравнений и выражений, аналогичных (107)–(114), для $E_{\text{пад}}^{(-t)}(M_i)$ и $\eta_{\text{пад}}^{(-t)}(M_i)$, но для других энергетических характеристик излучения и, в частности, для плотностей эффективного полусферического ($E_{\text{эф}}$) и объемного ($\eta_{\text{эф}}$) излучения оказывается значительно более формальным и громоздким и поэтому нецелесообразным. Чтобы показать это, рассмотрим наиболее простой случай излучающей системы, состоящей из граничных диффузно излучающих серых тел, разделенных диатермической средой. В этом случае система (109), (110) из $n+m$ уравнений с $n+m$ неизвестными приводится к системе из n уравнений с n неизвестными вида

$$E_{\text{пад},i}^{(-t)} - \sum_{h=1}^n \tilde{R}_h \Phi_{ih} E_{\text{пад},h}^{(-t)} = \sum_{h=1}^n E_{\alpha,h} \tilde{\Psi}_{jh}(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (125)$$

При этом локальные характеристики излучения определяются с помощью выражений

$$E_{\text{пад}}^{(-t)}(M_i) = E_{\text{пад}}^{(t+1)}(M_i) + \sum_{h=1}^n \tilde{R}_h E_{\text{пад},h}^{(-t)} \Phi(M_i, F_h), \quad (126)$$

где

$$E_{\text{пад}}^{(t+1)}(M_i) = \sum_{h=1}^n \tilde{R}_h \int_{F_h} E_{\text{пад}}^{(t)}(N_k) K(M_i, N_k) dF_{N_k} = \sum_{h=1}^n E_{\alpha,h} \Phi_t(M_i, F_h) (M_i \in F_i; i = 1, 2, \dots, n; t = 1, 2, \dots), \quad (127)$$

$$\Phi(M_i, F_h) = \int_{F_h} \tilde{K}(M_i, N_k) dF_{N_k} = \int_{F_h} \frac{\cos \theta_{M_i} \cos \theta_{N_k}}{\pi r_{M_i N_k}^2} dF_{N_k}, \quad (128)$$

$$\Phi_t(M_i, F_h) = \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \int_{F_j} \tilde{K}(M_i, P_j) \Phi_{t-1}(P_j, F_h) dF_{P_j} = \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \int_{F_j} \tilde{K}_{t-1}(M_i, P_j) \Phi(P_j, F_h) dF_{P_j}, \quad (129)$$

где

$$\tilde{K}(M_i, P_j) = \frac{\cos \theta_{M_i} \cos \theta_{P_j}}{\pi r_{M_i P_j}^2}.$$

Другой более формальный и искусственный прием построения итерационно-зонального метода в данном простейшем случае излучающей системы, заполненной диатермической средой, связан с преобразованием системы интегральных уравнений для $E_{\text{пад}}^{(-t)}$, которая для непрерывного случая сводится к интегральному уравнению вида

$$E_{\text{пад}}^{(-t)}(M) - \int_F \tilde{R}(N) E_{\text{пад}}^{(-t)}(N) \tilde{K}(M, N) dF_N = E_{\text{пад}}^{(t+1)}(M) (M \in F), \quad (130)$$

где

$$E_{\text{пад}}^{(t+1)}(M) = \int_F E_{\alpha}(N) \tilde{K}_t(M, N) dF_N (M \in F), \quad (131)$$

$$\tilde{K}_t(M, N) = \int_F \tilde{R}(P) \tilde{K}(M, P) \tilde{K}_{t-1}(P, N) dF_P = \int_F \tilde{R}(P) \tilde{K}_{t-1}(M, P) \tilde{K}(P, N) dF_P. \quad (132)$$

Введем формально функции $E_{\text{эф}}^{(-t)}(M)$ и $E_{\alpha}^{(t)}(M)$, пользуясь соотношениями

$$E_{\text{эф}}^{(-t)}(M) = E_{\alpha}^{(t)}(M) + \tilde{R}(M) E_{\text{пад}}^{(-t)}(M), \quad (133)$$

$$E_{\text{пад}}^{(t+1)}(M) = \int_F E_{\alpha}(N) \tilde{K}_t(M, N) dF_N = \int_F E_{\alpha}^{(t)}(N) \tilde{K}(M, N) dF_N, \quad (134)$$

где

$$E_{\alpha}^{(t)}(N) = \tilde{R}(N) E_{\text{пад}}^{(t)}(N) = \tilde{R}(N) \int_F E_{\alpha}(P) \tilde{K}_{t-1}(N, P) dF_P = \tilde{R}(N) \int_F E_{\alpha}^{(t-1)}(P) \tilde{K}(N, P) dF_P. \quad (135)$$

Тогда интегральное уравнение (130) преобразуется к виду

$$E_{\text{пад}}^{(-t)}(M) = \int_F E_{\text{эф}}^{(-t)}(N) \tilde{K}(M, N) dF_N, \quad (136)$$

и на основании (133) мы приходим к интегральному уравнению

$$E_{\alpha\Phi}^{(t)}(M) - \tilde{R}(M) \int_F E_{\alpha\Phi}^{(-t)}(N) \tilde{K}(M, N) dF_N = E_{\alpha}^{(t)}(M) \quad (M \in F). \quad (137)$$

В дискретном случае, когда граничная поверхность F состоит из конечного числа n однородных зон, приходим к следующей системе интегральных уравнений:

$$E_{\alpha\Phi}^{(-t)}(M_i) - \tilde{R}_i \sum_{k=1}^n \int_{F_k} E_{\alpha\Phi}^{(-t)}(N_k) K(M_i, N_k) dF_{N_k} = E_{\alpha}^{(t)}(M_i) \quad (M_i \in F_i; i = 1, 2, \dots, n). \quad (138)$$

Производя осреднение системы (138) на основании соотношений

$$E_{\alpha\Phi, i}^{(-t)} = \frac{1}{F_i} \int_{F_i} E_{\alpha\Phi}^{(-t)}(M_i) dF_{M_i}, \quad (139)$$

$$E_{\alpha, i}^{(t)} = \frac{1}{F_i} \int_{F_i} E_{\alpha}^{(t)}(M_i) dE_{M_i}, \quad (140)$$

получаем

$$E_{\alpha\Phi, i}^{(-t)} - \frac{\tilde{R}_i}{F_i} \sum_{k=1}^n \int_{F_k} E_{\alpha\Phi}^{(-t)}(N_k) \varphi(N_k, F_i) dF_{N_k} = E_{\alpha, i}^{(t)} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (141)$$

Полагая, что излучающая система приближенно удовлетворяет условию

$$\varphi(N_k, F_i) = \varphi_{ki} = \frac{1}{F_k} \int_{F_k} \varphi(N_k, F_i) dF_{N_k} \quad (N_k \in F_k; k, i = 1, 2, \dots, n), \quad (142)$$

приходим к следующей приближенной системе алгебраических уравнений

$$E_{\alpha\Phi, i}^{(-t)} - \tilde{R}_i \sum_{k=1}^n E_{\alpha\Phi, k}^{(-t)} \varphi_{ki} = E_{\alpha, i}^{(t)} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (143)$$

Мы не останавливаемся здесь более подробно на рассмотрении данного подхода и его развитии применительно к случаю излучающей системы, заполненной поглощающей и рассеивающей средой, так как этот подход более формален и громоздок и физически значительно менее нагляден по сравнению с изложенным выше подходом, опирающимся на систему уравнений для $E_{\text{пад}}^{(-t)}$.

Уравнения замкнутости. Большое значение при использовании итерационно-зонального (в частности, обобщенного зонального) метода имеют уравнения замкнутости:

а) для локальных характеристик

$$\sum_{k=1}^n \psi(M_i, F_k) + \sum_{j=1}^m A(M_i, V_j) = 1 \quad (M_i \in F_i; i = 1, 2, \dots, n), \quad (144)$$

$$\sum_{k=1}^n \psi^{(1)}(M_i, F_k) + \sum_{j=1}^m A^{(1)}(M_i, V_j) = 4 \quad (M_i \in V_i; i = 1, 2, \dots, m), \quad (145)$$

$$\sum_{k=1}^n \tilde{A}_k \Pi(M_i, F_k) + \sum_{j=1}^m \tilde{\mathfrak{A}}(M_i, V_j) = 1 \quad (M_i \in F_i; i = 1, 2, \dots, n), \quad (146)$$

$$\sum_{k=1}^n \tilde{A}_k \Pi^{(1)}(M_i, F_k) + \sum_{j=1}^{m_1} \tilde{\mathfrak{A}}^{(1)}(M_i, V_j) = 4 \quad (M_i \in V_i; i = 1, 2, \dots, m), \quad (147)$$

где m_1 — число объемных зон, для которых задаются температуры,

$$A(M_i, V_j) = 4k_v \rho(M_i, V_j); \quad A^{(1)}(M_i, V_j) = 4k_v \rho^{(1)}(M_i, V_j); \\ \tilde{\mathfrak{A}}(M_i, V_j) = 4k_v \zeta(M_i, V_j); \quad \tilde{\mathfrak{A}}^{(1)}(M_i, V_j) = 4k_v \zeta^{(1)}(M_i, V_j);$$

б) для осредненных характеристик

$$\sum_{k=1}^n \psi_{ik} + \sum_{j=1}^m A_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (148)$$

$$\sum_{k=1}^n \psi_{ik}^{(1)} + \sum_{j=1}^m A_{ij}^{(1)} = 4 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (149)$$

$$\sum_{k=1}^n \tilde{A}_k \Pi_{ik} + \sum_{j=1}^{m_1} \tilde{\mathfrak{A}}_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (150)$$

$$\sum_{k=1}^n \tilde{A}_k \Pi_{ik}^{(1)} + \sum_{j=1}^{m_1} \mathfrak{A}_{ij}^{(1)} = 4 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (151)$$

где

$$A_{ij} = 4k_v \rho_{ij}; \quad A_{ij}^{(1)} = 4k_v \rho_{ij}^{(1)}; \quad \tilde{\mathfrak{A}}_{ij} = 4k_v \zeta_{ij}; \quad \mathfrak{A}_{ij}^{(1)} = 4k_v \zeta_{ij}^{(1)}.$$

Определение $\psi(M_i, F_k)$, ψ_{ik} и $\psi^{(1)}(M_i, F_k)$. Применение итерационно-зонального метода к определению локальных и осредненных энергетических характеристик излучения связано с предварительным определением таких исходных величин, как локальные и средние обобщенные угловые коэффициенты излучения и обобщенные телесные углы. На основании (45) и (47) имеем [3—10]

$$\psi(M_i, F_k) = \int_{F_k} e^{-h(M_i, N_k)} \tilde{K}(M_i, N_k) dF_{N_k} = \int_{F_k} e^{-h(M_i, N_k)} \frac{\cos \theta_{M_i} \cos \theta_{N_k}}{\pi r_{M_i N_k}^2} dF_{N_k}, \quad (152)$$

$$\tilde{\psi}^{(1)}(M_i, F_k) = \int_{F_k} e^{-h(M_i, N_k)} d\omega(M_i, N_k) = \int_{F_k} e^{-h(M_i, N_k)} \frac{\cos \theta_{N_k}}{r_{M_i N_k}^2} dF_{N_k}. \quad (153)$$

Вынося на основании теоремы о среднем за знаки интегралов в (152) и (153) средние значения функции $e^{-h(M_i, N_k)}$, получаем

$$\psi(M_i, F_k) = e^{-hr_{\alpha\Phi}} \int_{F_k} \tilde{K}(M_i, N_k) dF_{N_k} = e^{-hr_{\alpha\Phi}} \varphi(M_i, F_k), \quad (154)$$

$$\tilde{\psi}^{(1)}(M_i, F_k) = e^{-h\tilde{r}} \int_{F_k} d\omega(M_i, N_k) = e^{-h\tilde{r}} \omega(M_i, F_k), \quad (155)$$

где в первом приближении можно принять

$$e^{-hr_{\alpha\Phi}} = \frac{e^{-hr_{\max}} + e^{-hr_{\min}}}{2}. \quad (156)$$

Более точные представления для $\psi(M_i, F_k)$ и $\tilde{\psi}^{(1)}(M_i, F_k)$ будем иметь, разлагая экспоненциальную функцию под знаками интегралов в (152) и (153) в ряд Маклорена [11, 12]:

$$e^{-h(M_i, N_k)} = e^{-kr(M_i, N_k)} = 1 - kr(M_i, N_k) + \frac{k^2}{2!} r^2(M_i, N_k) - \frac{k^3}{3!} r^3(M_i, N_k) + \dots \quad (157)$$

Подставляя (157) в (152), находим

$$\psi(M_i, F_k) = \varphi(M_i, F_k) \left\{ 1 - \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{k^s}{s!} v_s[r(M_i, N_k)] \right\}, \quad (158)$$

где $\nu_s[r(M_i, N_k)]$ — начальный момент s -го порядка случайной функции $r(M_i, N_k)$:

$$\begin{aligned} \nu_s[r(M_i, N_k)] &= \frac{1}{\varphi(M_i, F_h)} \int_{F_h} r^s(M_i, N_k) \tilde{K}(M_i, N_k) dF_{N_k} = \\ &= (-1)^s \left. \frac{d^s \psi(M_i, F_h)}{dk^s} \right|_{k=0}. \end{aligned}$$

При этом отношение локального обобщенного углового коэффициента излучения $\psi(M_i, F_h)$ к локальному геометрическому угловому коэффициенту $\varphi(M_i, F_h)$ можно рассматривать как математическое ожидание экспоненциальной функции $e^{-hr(M_i, N_k)}$ и, следовательно, как производящую функцию случайной функции $r(M_i, N_k)$:

$$\begin{aligned} m(M_i, F_h, k) &= M[e^{-hr(M_i, N_k)}] = \frac{\psi(M_i, F_h)}{\varphi(M_i, F_h)} = \frac{1}{\varphi(M_i, F_h)} \times \\ &\times \int_{F_h} e^{-hr(M_i, N_k)} \tilde{K}(M_i, N_k) dF_{N_k}. \end{aligned} \quad (159)$$

Соответственно для среднего обобщенного углового коэффициента излучения получаем представление

$$\psi_{ih} = \varphi_{ih} - \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{k^s}{s!} R_{ih}(s) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{k^s}{s!} R_{ih}(s), \quad (160)$$

где

$$\begin{aligned} R_{ih}(s) &= \frac{1}{F_i} \int_{F_i} \nu_s[r(M_i, N_k)] \varphi(M_i, F_h) dF_{N_k} = \\ &= \frac{1}{F_i} \int_{F_i} \int_{F_h} r^s(M_i, N_k) \tilde{K}(M_i, N_k) dF_{N_k} dF_{M_i}. \end{aligned} \quad (161)$$

Из выражения (156) следует, что

$$r_{\text{эф}} = -\frac{1}{k} \ln \frac{e^{-hr_{\text{max}}} + e^{-hr_{\text{min}}}}{2}. \quad (162)$$

Разлагаем в ряд функцию $e^{-h(r-r_{\text{эф}})}$:

$$e^{-h(r-r_{\text{эф}})} = 1 - k(r-r_{\text{эф}}) + \frac{k^2}{2!}(r-r_{\text{эф}})^2 - \frac{k^3}{3!}(r-r_{\text{эф}})^3 + \dots \quad (163)$$

или

$$e^{-hr(M_i, N_k)} = e^{-hr_{\text{эф}}} \left[1 - k(r-r_{\text{эф}}) + \frac{k^2}{2}(r-r_{\text{эф}})^2 - \frac{k^3}{3!}(r-r_{\text{эф}})^3 + \dots \right]. \quad (164)$$

На основании (152) получаем

$$\begin{aligned} \psi(M_i, F_h) &= e^{-hr_{\text{эф}}} \varphi(M_i, F_h) \left[1 - k\mu_1(r_{\text{эф}}) + \frac{k^2}{2!}\mu_2(r_{\text{эф}}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{k^3}{3!}\mu_3(r_{\text{эф}}) + \dots \right], \end{aligned} \quad (165)$$

где $\mu_s(r_{\text{эф}})$ — момент s -го порядка случайной функции $r(M_i, N_k)$, являющейся функцией точки $M_i \in F_i$ и постоянной $r_{\text{эф}}$:

$$\mu_s(r_{\text{эф}}) = \mu_s(M_i, F_h, r_{\text{эф}}) = \frac{1}{\varphi(M_i, F_h)} \int_{F_h} (r-r_{\text{эф}})^s \tilde{K}(M_i, N_k) dF_{N_k}. \quad (166)$$

Выражение (165) можно переписать в виде

$$\psi(M_i, F_h) = c(k, r_{\text{эф}}) e^{-\alpha r_{\text{эф}}} \varphi(M_i, F_h), \quad (167)$$

где

$$c(k, r_{\text{эф}}) = 1 - k\mu_1(r_{\text{эф}}) + \frac{k^2}{2!}\mu_2(r_{\text{эф}}) - \frac{k^3}{3!}\mu_3(r_{\text{эф}}) + \dots \quad (168)$$

Соответственно для ψ_{ih} при этом имеем

$$\psi_{ih} = e^{-hr_{\text{эф}}} \left[\varphi_{ih} - \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{k^s}{s!} \tilde{R}_{ih}(s) \right] e^{-hr_{\text{эф}}} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{k^s}{s!} \tilde{R}_{ih}(s), \quad (169)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{ih}(s) &= \frac{1}{F_i} \int_{F_i} \mu_s(r_{\text{эф}}) \varphi(M_i, F_h) dF_{M_i} = \\ &= \frac{1}{F_i} \int_{F_i} \int_{F_h} (r-r_{\text{эф}})^s \tilde{K}(M_i, N_k) dF_{N_k} dF_{M_i}. \end{aligned} \quad (170)$$

Аналогично для приведенного обобщенного телесного угла $\psi^{(1)}(M_i, F_h)$, определяемого выражением

$$\psi^{(1)}(M_i, F_h) = \frac{1}{\pi} \tilde{\psi}^{(1)}(M_i, F_h) = \int_{F_h} e^{-hr(M_i, N_k)} \tilde{K}^{(1)}(M_i, N_k) dF_{N_k}, \quad (171)$$

где

$$\tilde{K}^{(1)}(M_i, N_k) = \frac{\cos \theta_{N_k}}{\pi r_{M_i N_k}^2},$$

получаем следующие представления:

$$\begin{aligned} \psi^{(1)}(M_i, F_h) &= \frac{1}{\pi} \omega(M_i, F_h) + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{k^s}{s!} R_s^{(1)}(M_i, F_h) \\ &\quad (M_i \in V_i; i = 1, 2, \dots, m), \end{aligned} \quad (172)$$

где

$$R_s^{(1)}(M_i, F_h) = \int_{F_h} r^s(M_i, N_k) \tilde{K}^{(1)}(M_i, N_k) dF_{N_k}, \quad (173)$$

или на основании (155)

$$\psi^{(1)}(M_i, F_h) = e^{-\tilde{h}\tilde{r}} \left[\frac{1}{\pi} \omega(M_i, F_h) + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{k^s}{s!} \tilde{R}_s^{(1)}(M_i, F_h) \right], \quad (174)$$

где

$$\tilde{R}_s^{(1)}(M_i, F_h) = \int_{F_h} (r-\tilde{r})^s \tilde{K}^{(1)}(M_i, N_k) dF_{N_k}. \quad (175)$$

При этом для \tilde{r} можно принять значение, определяемое аналогично $r_{\text{эф}}$ по формуле (162).

В заключение заметим, что предложенный итерационно-зональный метод решения систем интегральных уравнений излучения является наиболее общим и точным аналитическим методом теории лучистого теплообмена, позволяющим проводить численные определения и исследование локальных и осредненных (зональных) характеристик лучистого теплообмена в излучающих системах, заполненных поглощающей и изотропно рассеивающей средой. Данный метод позволяет получить решение задачи с любой заданной степенью точности при любом фиксированном числе зон, на которые подразделяется излучающая система.

ВЫВОДЫ

1. Даны теоретические основы нового итерационно-зонального метода решения интегральных уравнений излучения, позволяющего определять локальные и осредненные в пределах соответствующих граничных и объемных зон характеристики лучистого теплообмена в излучающих системах, заполненных поглощающей и изотропно рассеивающей средой.

2. Приведено доказательство фундаментальной теоремы, состоящей в том, что если излучающая система, ограниченная диффузно излучающей и отражающей поверхностью и заполненная поглощающей и изотропно рассеивающей средой, состоит из n граничных и m объемных оптически и энергетически однородных зон и удовлетворяет системам равенств (49)—(52), то для такой излучающей системы выполняются также системы равенств (53)—(56), откуда следует постоянство $F_{\text{пад}}(M_i)$, $\eta_{\text{пад}}(M_i)$ и других энергетических характеристик излучения в пределах соответствующих граничных и объемных зон.

На основании этой теоремы построены две основные формы представления нового итерационно-зонального метода и установлена внутренняя связь между ними. Каждая из этих форм позволяет провести решение всех основных восьми постановок задачи по классификации автора [7], имеющих единственное решение, с любой заданной степенью точности при любых фиксированных значениях чисел n граничных и m объемных зон, на которые подразделяется излучающая система.

Необходимо, однако, отметить, что если первая форма позволяет дать самое полное и исчерпывающее исследование и решение указанных постановок задачи, состоящее в определении всех локальных и осредненных разрешающих и энергетических характеристик излучения, то вторая форма, не связанная с определением разрешающих характеристик излучения, позволяет проводить исследование и решение задачи в более ограниченном объеме по сравнению с первой формой.

3. Проведено построение двух форм нового метода определения локальных и средних обобщенных угловых коэффициентов излучения и обобщенных телесных углов, основанных на разложении показательных функций в ряд Маклорена.

Введено понятие производящей функции случайной функции $r(M_i, N_k)$, определяемое как отношение локального обобщенного углового коэффициента излучения к локальному геометрическому угловому коэффициенту излучения.

Московский экономико-статистический институт

Поступила в редакцию
15/1 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. Физматгиз, 1968.
2. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. 4. Гостехиздат, М., 1953.
3. Ю. А. Суринов. Об итерационно-зональном методе исследования и расчета локальных характеристик лучистого теплообмена.— Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1971, № 13, сер. техн. наук, вып. 3.
4. Ю. А. Суринов. Об итерационно-зональном методе исследования и расчета локальных характеристик лучистого теплообмена.— Теплофизика высоких температур, 1972, X, № 4.
5. Ю. А. Суринов. К решению интегральных уравнений излучения для обобщенной постановки задачи.— Изв. вузов, физика, 1964, № 3.
6. Ю. А. Суринов. Методы определения и численного расчета локальных характеристик поля излучения.— Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1965, № 5.

7. Ю. А. Суринов. К теории переноса излучения и лучистого теплообмена в поглощающей и рассеивающей среде.— Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1966, № 6.
8. Ю. А. Суринов. К решению обобщенной пространственной задачи о переносе излучения в поглощающей и рассеивающей среде.— Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1968, № 2.
9. Ю. А. Суринов. О зональном методе решения интегральных уравнений теории лучистого теплообмена в системах тел, разделенных поглощающей средой с учетом исследования в экономике и производстве, 1971.
10. Ю. А. Суринов. Определение разрешающей ослабляющей способности поглощающей и рассеивающей среды.— Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1972, № 3.
11. И. В. Дунин-Барковский, Н. В. Смирнов. Теория вероятностей и математическая статистика в технике. М., Гостехиздат, 1955.
12. Ю. А. Суринов. О применении теории вероятностей к некоторым вопросам математической физики.— Тр. МЭСИ. Методы вычислительной математики и их применение. Изд. МЭСИ, 1974.

Н. Д. ДЕМИДЕНКО, Б. Н. ДЕВЯТОВ, М. В. ЕЛИН

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ
С РЕЦИРКУЛЯЦИЕЙ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПОТОКОВ

При проектировании автоматизированных систем управления ректификационными установками важны постановка и решение задач оптимизации стационарных и нестационарных режимов установки в целом и отдельных ее аппаратов. Эти установки включают десятки ректификационных колонн и другие химико-технологические объекты. Все они работают в напряженных условиях: предельные давление и температура, высокие механические напряжения и т. д. Вместе с тем процесс ректификации — энергоемкий процесс, осуществляемый в металлоемких аппаратах. В связи с этим возникают задачи оптимизации как на стадии проектирования ректификационных установок, так и в процессе их эксплуатации. В настоящее время наиболее полно решены задачи статической оптимизации [1]. Однако ректификационные установки работают в основном в нестационарном режиме. Таким образом, возникает необходимость постановок и решения задач динамической оптимизации.

Основные управляющие воздействия в ректификационных колоннах создаются потоками паровой и жидкой фаз, осуществляемыми отбором продуктов разделения в кубе и дефлегматоре, подачей орошения и сырья, а также изменением количества тепла внизу колонны, что также приводит к изменению парового потока.

По этим каналам инерционность управляющих воздействий наименьшая [2]. Кроме того, известно [3], что наиболее эффективным гидродинамическим режимом с технологической точки зрения является пульсационный режим подачи сырья и орошения в колонну, так как при этом значительно повышаются технико-экономические показатели процесса. Далее, в силу того, что в промышленных объектах процесс ректификации осуществляется с рециркуляцией потоков внизу и вверху колонн, а также в промежуточных точках колонны, распределенных по ее длине, граничные условия соответствующей краевой задачи задаются в виде обыкновенных дифференциальных уравнений на границе области. Это усложняет анализ нестационарных режимов объекта и синтез оптимальных систем управления. Особенности оптимального управления в данном случае связаны с тем, что управления одновременно являются «объемными» и граничными.

В данной работе рассматривается задача оптимального управления для некоторой модификации модели, приведенной в [4] для случая бинарной смеси. Мы рассматриваем процесс, описываемый уравнениями

$$H_x \frac{\partial x}{\partial t} - (L + L^*) \frac{\partial x}{\partial l} = k(y - y^*) + \frac{\partial L^*}{\partial l} x + F(t) \Phi(l) x_F, \quad (1)$$

$$H_y \frac{\partial y}{\partial t} + V \frac{\partial y}{\partial l} = k(y^* - y), \quad 0 < t < T, \quad 0 < l < 1,$$

при краевых условиях

$$H_{x_k} \frac{dx_k}{dt} = (L + F)x - V_y + W x_k, \\ y = a[y_h^*(x_k) - x_k] + x_k, \quad 0 < t < T, \quad l = 0; \quad (2)$$

$$H_{x_d} \frac{dx_d}{dt} = V_d y_d - (L_d + D)x_d, \\ V_d y_d - V_y = L_d x_d - L_x, \\ y_d = y + E_d[y_d^*(x_d) - y], \quad 0 < t < T, \quad l = 1 \quad (3)$$

и начальных условиях

$$x(l, 0) = \varphi_1(l), \quad y(l, 0) = \varphi_2(l), \quad 0 < l < 1, \\ x_k(0) = \alpha, \quad x_d(0) = \beta. \quad (4)$$

Здесь использованы те же обозначения, что и в [4]; x, y — концентрации легколетучего компонента в жидкой и паровой фазах соответственно.

Будем предполагать, что: а) учитывается только вводимый в колонну поток в жидкой фазе; б) этот поток величины F распределен по длине колонны; $\Phi = \Phi(l)$ — плотность его распределения, x_F — концентрация легколетучего компонента в нем; в) поток в жидкой фазе имеет две составляющие, одна из которых определяется управляемым потоком наверху колонны и не зависит от l , другая определяется вводимым в колонну потоком и равна

$$L^*(l, t) = F(t) \int_0^1 \Phi(l) dl;$$

г) паровой поток не зависит от l : $V = V(l)$; д) удерживающие способности H_x, H_y и коэффициент массопередачи k предполагаются постоянными; е) кроме того, учитываются связи между параметрами, характеризующими потоки жидкости и пара в колонне, кубе и дефлегматоре:

$$W + D = F, \quad D + L_d = V, \quad W + V = L + F, \quad V_d = V. \quad (5)$$

Из условий (5) вытекает, что $L_d = L$ и только два потока являются независимыми управлениями. Выбор той или иной пары управлений зависит от конкретной схемы управления и определяет различные задачи управления. Здесь рассмотрен случай L и W .

Для процесса, описываемого уравнениями (1)–(5), ставится задача минимизации функционала

$$F = \int_{\Omega} [y(l, t) - \theta^*(l, t)]^2 dt dl$$

в классе кусочно-непрерывных управлений L, W со значениями в промежутках

$$0 < L_{\min} \leq L \leq L_{\max}, \\ 0 < W_{\min} \leq W \leq W_{\max}. \quad (6)$$

Здесь Ω — прямоугольник.

Сформулированная задача есть задача оптимального управления системой дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа. Подобные задачи рассматривались в ряде работ (см., например, [5]–[7]). Однако исследуемые в них общие модели не включают модель процесса ректификации. Отличия ее связаны с особенностями краевой задачи (характером граничных условий) и тем, что здесь одни и те же управления являются и граничными, и

«объемными». Нам неизвестны работы, где бы рассматривались задачи с такими управлениями.

В работе применяется метод множителей Лагранжа. Условия (6) записываются в виде равенств с помощью вспомогательных переменных u, z :

$$\begin{aligned} (L_{\max} - L)(L - L_{\min}) - u^2 &= 0, \\ (W_{\max} - W)(W - W_{\min}) - z^2 &= 0. \end{aligned} \quad (6a)$$

Стандартная процедура варьирования приводит к следующим необходимым условиям (условия стационарности): если L, W — оптимальные управления, x, y, x_h, y_d, x_d — соответствующее им решение задачи (1) — (5), то существуют функции ξ, η , определенные в $\bar{\Omega}$, и функции $\lambda_h^{(1)}, \lambda_h^{(2)}, \lambda_d^{(1)}, \lambda_d^{(2)}, \lambda_d^{(3)}, \gamma, \varepsilon$, определенные при $0 < t < T$, кусочно-непрерывные в соответствующих областях определения и удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{L + L^*}{H_x} \frac{\partial \xi}{\partial l} = k(y^*)' \left(\frac{\xi}{H_x} - \frac{\eta}{H_y} \right), \quad (7)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{V}{H_y} \frac{\partial \eta}{\partial l} = -k \left(\frac{\xi}{H_x} - \frac{\eta}{H_y} \right) + 2(y - \theta^*), \quad 0 < t < T, \quad 0 < l < 1$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} \frac{\xi}{H_x} - \frac{\lambda_h^{(1)}}{H_{x_h}} &= 0, \\ \left(\frac{\eta}{H_y} - \frac{\lambda_h^{(1)}}{H_{x_h}} \right) V - \lambda_h^{(2)} &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_h^{(1)}}{dt} &= \lambda_h^{(1)} \frac{W}{H_{x_h}} - \lambda_h^{(2)} (a(y_h^*)' - a + 1), \\ \lambda_h^{(1)}(T) &= 0, \quad 0 < t < T, \quad l = 0; \\ \xi &= 0, \\ \eta &= 0, \quad t = T, \quad 0 < l < 1; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\xi}{H_x} + \lambda_d^{(2)} \right) L - \lambda_d^{(3)} E_d (y_d^*)' &= 0, \\ \left(\frac{\eta}{H_y} + \lambda_d^{(2)} \right) V + \lambda_d^{(3)} (1 - E_d) &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{d\lambda_d^{(1)}}{dt} = \lambda_d^{(2)} \frac{V}{H_{x_d}} - \lambda_d^{(3)} L, \quad \lambda_d^{(1)}(T) = 0,$$

$$\left(\frac{\lambda_d^{(1)}}{H_{x_d}} - \lambda_d^{(2)} \right) V - \lambda_d^{(3)} = 0, \quad 0 < t < T, \quad l = 1$$

и условиям

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(-\frac{\xi}{H_x} x_l' - \frac{\eta}{H_y} y_l' \right) dl - \frac{\lambda_h^{(1)}}{H_{x_h}} x(0, t) - y(0, t) + \frac{\lambda_d^{(1)}}{H_{x_d}} (y_d - x_d) + \\ + \lambda_d^{(2)} (y(1, t) - y_d + x_d - x(1, t)) - \gamma (L_{\min} + L_{\max} - 2L) &= 0, \\ \int_0^1 \left(-\frac{\eta}{H_y} \right) y_l' dl + \frac{\lambda_h^{(1)}}{H_{x_h}} (x_h - y(0, t)) - \frac{\lambda_d^{(1)}}{H_{x_d}} (y_d - x_d) - \\ - \lambda_d^{(2)} (y(1, t) - y_d) + \varepsilon (W_{\min} + W_{\max} - 2W) &= 0, \\ \lambda u &= 0, \\ \varepsilon z &= 0, \quad 0 < t < T. \end{aligned} \quad (11)$$

Первые два из условий (11) отличают полученные условия от условий стационарности [7]. Это отличие связано с тем, что управления L, W — граничные и «объемные» одновременно, так что их вариации в Ω и на $\partial\Omega$ не являются независимыми.

Так как уравнения (7) — (9) полностью определяют функции $\xi, \eta, \lambda_h^{(i)}, \lambda_d^{(i)}$, то, как видно из (11), случаи, когда функции γ или ε равны нулю, связаны с дополнительными жесткими условиями в задачах об оптимальных параметрах; основной случай тот, при котором $\gamma \neq 0$, но постоянно и принимает на промежутках постоянства лишь минимальное или максимальное из допустимых значений. Таким образом, обоснован пульсационный режим, применяемый на практике.

Полученные результаты (условия стационарности) показывают, что оптимальные управления кусочно-постоянны и принимают граничные значения из области допустимых значений, но не дают условий, определяющих, когда управление минимально и максимально. Дальнейшее исследование задачи должно проводиться с целью получения условий типа условий Вейерштрасса.

Используя функции $\xi, \eta, \lambda_h^{(i)}, \lambda_d^{(i)}$, определяемые уравнениями (7) — (10), приращение функционала F можно представить в виде

$$\Delta F = \int_0^T [h(x, y, x_h, x_d, y_d, \hat{L}, \hat{W}) - h(x, y, x_h, x_d, y_d, L, W)] dt + \mu_1 + \mu_2,$$

где

$$\begin{aligned} h(x, y, x_h, x_d, y_d, L, W) &= L \left[\frac{1}{H_y} \int_0^1 \eta y_l' dl - \frac{1}{H_x} \int_0^1 \xi x_l' dl + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{H_{x_h}} \lambda_h^{(1)} (y - x) - \frac{1}{H_{x_d}} \lambda_d^{(1)} (x_d - y_d) - \lambda_d^{(2)} (y_d - y - x_d + x) \right] + \\ &+ W \left[-\frac{1}{H_y} \int_0^1 \eta y_l' dl + \frac{1}{H_{x_h}} \lambda_h^{(1)} (x_h - y) - \frac{1}{H_{x_d}} \lambda_d^{(1)} (y_d - x_d) - \lambda_d^{(2)} (y - y_d) \right], \\ \mu_1 &= \int_{\Omega} \left[\Delta y^2 - \frac{1}{H_x} \xi (\hat{L} - L) \Delta x_l + \frac{1}{H_y} \eta (\hat{V} - V) \Delta y_l + 0(\Delta x) \right] dt dl, \\ \mu_2 &= \int_0^T \left\{ \frac{1}{H_{x_h}} \lambda_h^{(1)} [(\hat{W} - W) \Delta x_h - (\hat{L} - L) \Delta x + (\hat{V} - V) \Delta y] + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{H_{x_d}} \lambda_d^{(1)} (\hat{V} - V) (\Delta y_d - \Delta x_d) - \lambda_d^{(2)} [(\hat{V} - V) (\Delta y_d - \Delta y) - \right. \\ &\left. - (\hat{L} - L) (\Delta x_d - \Delta x)] + 0(\Delta x) \right\} dt, \end{aligned}$$

L, W — оптимальные управления; x, y, x_h, x_d, y_d — соответствующее решение системы (1) — (5); \hat{L}, \hat{W} — произвольные допустимые управления; $\Delta x, \Delta x_h, \Delta x_d$ — приращения решений системы (1) — (5), соответствующие приращениям управлений $\Delta L = \hat{L} - L, \Delta W = \hat{W} - W$.

ВЫВОДЫ

1. Сформулирована задача оптимального управления процессом ректификации, описываемым уравнениями в частных производных со специальными граничными условиями.

2. Получены условия оптимальности управлений процессом с рециркуляцией взаимодействующих потоков.

3. Полученные результаты (условия стационарности) показывают, что оптимальные управления кусочно-постоянны и принимают граничные значения из области допустимых управлений.

Вычислительный центр СО АН СССР,
Красноярск

Поступила в редакцию
2/1 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. И. В. Анисимов. Комплексное исследование и решение проблемы статической оптимизации управления процессом ректификации. Докт. дис. М., 1969.
2. Б. Н. Девятов, Н. Д. Демиденко, В. А. Охорзин. Динамика распределенных процессов в технологических аппаратах, распределенный контроль и управление. Красноярск, Красноярское кн. изд-во, 1976.
3. M. Matsubura, Y. Nishimura, N. Watanabe, K. Shimizu. Управление в периодическом режиме процессом непрерывной ректификации. Экспресс-информация «Кибернетика в химии и химической технологии», № 2. М., ВИНТИ, 1976.
4. Н. Д. Демиденко, С. В. Ушанов. Моделирование, распределенный контроль и распределенное управление процессом ректификации.— Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1975, № 8, сер. техн. наук, вып. 2.
5. А. И. Егоров. Оптимальные процессы в системах с распределенными параметрами и некоторые задачи теории инвариантности.— Изв. АН СССР, 1965, т. 29, № 6.
6. А. Г. Бутковский. Теория оптимального управления объектами с распределенными параметрами. М., «Наука», 1965.
7. К. А. Лурье. Оптимальное управление в задачах математической физики. М., «Наука», 1975.

А. Г. ГРОССМАН

УДК 536.2

ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА В ДИСПЕРСИЯХ ПРИ УМЕРЕННЫХ КОНЦЕНТРАЦИЯХ

1. Постановка задачи. Строгий подход к выводу уравнений переноса тепла, массы и других величин в дисперсных системах приводится в [1], однако в этой работе намечен только приближенный метод их замыкания. Ниже предлагается строгий метод замыкания таких уравнений. Для иллюстрации его рассматривается простейшая модель дисперсной системы: она занимает конечный объем V пространства с границей S , не содержит источников тепла и состоит из непрерывной фазы с постоянным коэффициентом теплопроводности λ , занимающей объем V_c , и дисперсной фазы из $N \gg 1$ рассеянных по V одинаковых сферических частиц с радиусом R и одинаковыми коэффициентами теплопроводности Λ . Объемы частиц не перекрываются, их положения задаются радиус-векторами \vec{r}_σ их геометрических центров (σ — номер частицы), известна плотность вероятности для конфигураций частиц $P(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$. Граничные условия на S не зависят от того, какая из конфигураций реализуется.

Температура t , «напряженность» температурного поля \vec{h} , плотность потока тепла \vec{q} в непрерывной фазе и аналогичные поля $T_\sigma, \vec{H}_\sigma, \vec{Q}_\sigma$ в объемах частиц определяются из системы уравнений и граничных условий

$$\begin{cases} \nabla \vec{q} = 0; \vec{h} = -\nabla t; \vec{q} = \lambda \vec{h} & \text{внутри } V_c; \\ a\vec{t} + b\vec{n} \cdot \vec{h} = f & \text{на } S; \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} \nabla \vec{Q}_\sigma = 0, \vec{H}_\sigma = -\nabla T_\sigma, \vec{Q}_\sigma = \Lambda \vec{H}_\sigma & \text{при } |\vec{r} - \vec{r}_\sigma| < R; \\ t = T_\sigma, \vec{n} \cdot \vec{q} = \vec{n} \cdot \vec{Q}_\sigma & \text{при } |\vec{r} - \vec{r}_\sigma| = R \quad (\sigma = 1, \dots, N). \end{cases} \quad (1.2)$$

Здесь \vec{r} — радиус-вектор точки пространства, \vec{n} — внешняя единичная нормаль к S или к поверхности частицы; a, b, f — известные функции \vec{r} , определяющие линейные граничные условия общего вида. Обозначив $\Theta_\sigma(\vec{r}) = \Theta(R - |\vec{r} - \vec{r}_\sigma|)$, $\Theta_c = 1 - \sum_\sigma \Theta_\sigma$, где Θ — единичная функция Фейсайдера, введем поля

$$T = \Theta_c t + \sum_\sigma \Theta_\sigma T_\sigma; \vec{H} = \Theta_c \vec{h} + \sum_\sigma \Theta_\sigma \vec{H}_\sigma; \vec{Q} = \Theta_c \vec{q} + \sum_\sigma \Theta_\sigma \vec{Q}_\sigma. \quad (1.3)$$

Осреднив их по ансамблю, получим макроскопические величины типа

$$\langle \vec{H} \rangle = \iint \dots \int \vec{H}(\vec{r} | \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) P(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2 \dots d^3\vec{r}_N$$

и методом [1, 2] из (1.1), (1.2) получим для них систему

$$\nabla \langle \vec{Q} \rangle = 0; \langle \vec{H} \rangle = -\nabla \langle T \rangle; \langle \vec{Q} \rangle = \lambda \langle \vec{H} \rangle + (\Lambda - \lambda) \left\langle \sum_{\sigma} \Theta_{\sigma} \vec{H}_{\sigma} \right\rangle; \quad (1.4)$$

$$a \langle T \rangle + b \vec{n} \cdot \langle \vec{H} \rangle = f \text{ на } S.$$

Проблема заключается в том, что эта система для макроскопических полей не замкнута, так как содержит неопределенную величину $\left\langle \sum_{\sigma} \Theta_{\sigma} \vec{H}_{\sigma} \right\rangle$.

2. Замыкание макроскопических уравнений. Для замыкания системы (1.4) применим метод [3], предложенный для механики суспензий. Представим

$$t = t_0 + \sum_{\sigma} t_{\sigma} + t_s, \quad \vec{h} = \vec{h}_0 + \sum_{\sigma} \vec{h}_{\sigma} + \vec{h}_s, \quad \vec{q} = \vec{q}_0 + \sum_{\sigma} \vec{q}_{\sigma} + \vec{q}_s, \quad (2.1)$$

где введены поля $t_0, \vec{h}_0, \vec{q}_0$, не возмущенные присутствием частиц, поля возмущений от каждой из частиц $t_{\sigma}, \vec{h}_{\sigma}, \vec{q}_{\sigma}$ и поля $t_s, \vec{h}_s, \vec{q}_s$, представляющие собой «отражение» полей возмущения от частиц границей S . Они определяются решением следующих задач:

$$\begin{cases} \nabla \vec{q}_0 = 0, \quad \vec{h}_0 = -\nabla t_0; \quad \vec{q}_0 = \lambda \vec{h}_0 & \text{внутри } V, \\ at_0 + b \vec{n} \cdot \vec{h}_0 = f & \text{на } S, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} \nabla \vec{q}_{\sigma} = 0, \quad \vec{h}_{\sigma} = -\nabla t_{\sigma}; \quad \vec{q}_{\sigma} \lambda \vec{h}_{\sigma} & \text{при } |\vec{r} - \vec{r}_{\sigma}| < R, \\ t_{\sigma} = T_{\sigma} - [t_{\sigma}], \quad \vec{n} \vec{q}_{\sigma} = \vec{n} \cdot \{Q_{\sigma} - [q]_{\sigma}\} & \text{при } |\vec{r} - \vec{r}_{\sigma}| = R, \\ t_{\sigma} \rightarrow 0 & \text{при } |\vec{r} - \vec{r}_{\sigma}| \rightarrow \infty \quad (\sigma = 1, 2, \dots, N), \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\begin{cases} \nabla \vec{q}_s = 0; \quad \vec{h}_s = -\nabla t_s; \quad \vec{q}_s = \lambda \vec{h}_s & \text{внутри } V, \\ at_s + b \vec{n} \vec{h}_s = -\sum_{\sigma} (at_{\sigma} + b \vec{n} \vec{h}_{\sigma}) & \text{на } S. \end{cases} \quad (2.4)$$

Здесь введены поля, внешние к частице, типа

$$[\vec{h}]_{\sigma} = \vec{h}_0 + \sum_{\tau \neq \sigma} \vec{h}_{\tau} + \vec{h}_s. \quad (2.5)$$

Из свойств сферических гармоник при этом следует

$$t = \frac{(4\pi R^3/3) \vec{D}_{\sigma}(\vec{r}_{\sigma}) (\vec{r} - \vec{r}_{\sigma})}{4\pi \lambda |\vec{r} - \vec{r}_{\sigma}|^3} + \dots, \quad \vec{D}_{\sigma}(\vec{r}_{\sigma}) = (\Lambda - \lambda) \vec{H}_{\sigma}(\vec{r}_{\sigma}) = \frac{3\lambda(\Lambda - \lambda)}{\Lambda + 2\lambda} [\vec{h}(\vec{r}_{\sigma})]_{\sigma}, \quad (2.6)$$

где $(4\pi R^3/3) \vec{D}_{\sigma}(\vec{r}_{\sigma})$ имеет смысл теплового дипольного момента частицы с центром в \vec{r}_{σ} . Представим каждое из полей (1.3) суммой типа

$$\vec{H} = \vec{h}_0 + \sum_{\sigma} (1 - \Theta_{\sigma}) \vec{h}_{\sigma} + \vec{h}_s - \sum_{\sigma} \Theta_{\sigma} [\vec{h}]_{\sigma} + \sum_{\sigma} \Theta_{\sigma} \vec{H}_{\sigma}. \quad (2.7)$$

Следуя, например [1, 2], введем условные плотности вероятности $P(\vec{r}_{\sigma+1}, \dots, \vec{r}_{\tau} | \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{\tau})$ для распределения частиц $\tau - \sigma$ при фиксированном положении первых частиц σ и σ -частичные микроскопические величины типа

$$\langle \vec{H}(\vec{r}) | \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_{\sigma} \rangle = \int \dots \int \vec{H}(\vec{r} | \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) P(\vec{r}_{\sigma+1}, \vec{r}_{\sigma+2}, \dots, \vec{r}_N | \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{\sigma}) d^3 \vec{r}_{\sigma+1} \dots d^3 \vec{r}_N.$$

Тогда макроскопические поля типа (2.7) представим как

$$\langle \vec{H} \rangle = \vec{h}_0(\vec{r}) + c \int \Theta_1(\vec{r}) F(\vec{r}_1) \langle \vec{h}_1(\vec{r}) | \vec{r}_1 \rangle \frac{d^3 \vec{r}_1}{4\pi R^3/3} - \left\langle \sum_{\sigma} \Theta_{\sigma} [\vec{h}(\vec{r})]_{\sigma} \right\rangle + \left\langle \sum_{\sigma} \Theta_{\sigma} \vec{H}_{\sigma} \right\rangle + \langle \vec{h}_s(\vec{r}) \rangle, \quad (2.8)$$

где $c = 4\pi R^3/3$ — средняя объемная концентрация дисперсной фазы, $F(\vec{r}) = VP(\vec{r})$ и $P(\vec{r})$ — одночастичная плотность вероятности.

В дальнейшем предполагается, что характерный масштаб изменения всех макро- и одночастичных микроскопических величин $L \gg R$. В этом случае, используя (2.6) и учитывая порядок убывания членов мультипольного разложения, а также результаты работ [1, 2], можно показать, что для точек \vec{r} , расположенных на расстоянии $\gg R$ от S , в соответствии с (2.8)

$$\langle \vec{H} \rangle \simeq \vec{h}_0(\vec{r}) + \frac{c}{4\pi \lambda} \left\{ \int \Theta_1(\vec{r}) F_1(\vec{r}_1) \nabla \nabla \cdot \frac{\langle \vec{D}_1(\vec{r}_1) | \vec{r}_1 \rangle}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} d^3 \vec{r}_1 + \frac{4\pi}{3} \langle \vec{D}_1(\vec{r}) | \vec{r} \rangle + \langle \vec{h}_s(\vec{r}) \rangle, \right.$$

$$\left. (\Lambda - \lambda) \left\langle \sum_{\sigma} \Theta_{\sigma} \vec{H}_{\sigma} \right\rangle \simeq c F(\vec{r}) \langle \vec{D}_1(\vec{r}) | \vec{r} \rangle; \quad (2.9)$$

$$\langle \vec{D}_1(\vec{r}_1) | \vec{r}_1 \rangle = \frac{3\lambda(\Lambda - \lambda)}{\Lambda + 2\lambda} [\langle \vec{h}(\vec{r}_1) | \vec{r}_1 \rangle]_1.$$

Учитывая, что для точек \vec{r}_1 , расположенных на расстоянии $\gg R$ от S , $\langle \vec{h}_s | \vec{r}_1 \rangle \simeq \langle \vec{h}_s \rangle$, аналогично (2.8) получаем

$$[\langle \vec{h}(\vec{r}_1) | \vec{r}_1 \rangle]_1 \simeq \vec{h}_0(\vec{r}_1) + c \int \Theta(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| - 2R) F(\vec{r}_2) k(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \times \times \langle \vec{h}_2(\vec{r}_1) | \vec{r}_1 \vec{r}_2 \rangle \frac{d^3 \vec{r}_2}{4\pi R^3/3} + \langle \vec{h}_s(\vec{r}) \rangle, \quad (2.10)$$

где k — радикальная функция распределения, $k = P(\vec{r}_2 | \vec{r}_1) / P(\vec{r}_2)$.

Аналогично [3] можно убедиться, что при попытке точного расчета σ -частичных величин мы всегда столкнемся с необходимостью предварительного вычисления $\sigma+1$ -частичных микроскопических величин (ср. с (2.8), (2.10)). Можно также показать, что все интересующие нас величины разлагаются в асимптотические степенные ряды по c при $c \rightarrow 0$. Поэтому, как и в [3], не пытаюсь получить точного соотношения между первыми двумя величинами из (2.9), постараемся найти асимптотическое соотношение между ними, верное с точностью до членов порядка c^2 включительно (это позволяет строго учесть эффект парных тепловых взаимодействий частиц). Сравнивая (2.9), (2.10), можно заметить, что вычисления макроскопических величин с точностью до членов порядка c^2 включительно поле $\langle \vec{h}_2 | \vec{r}_1, \vec{r}_2 \rangle$ в (2.10) достаточно вычислить в нулевом приближении по c , т. е. из решения двухчастичной задачи (2.2) — (2.4), (1.2) при $N=2$ (причем в соотношениях типа (2.5) можно пренебречь h_s , так как по предположению \vec{r}_1, \vec{r}_2 расположены на расстоянии $\gg R$ от S). Пусть $\vec{h}_2(\vec{r} | \vec{r}_1, \vec{r}_2)$ — «напряженность» поля возмущения от второй частицы в такой двухчастичной задаче. Заметим, что из соображений линейности задачи и условия $L \gg R$ следует, что

$$\vec{h}_2(\vec{r}_1 | \vec{r}_1, \vec{r}_2) \rightarrow \vec{h}(\vec{r}_1 | \vec{r}_2) = \frac{4\pi R^3}{3} \vec{G}_0(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot \vec{h}_0(\vec{r}_2) \text{ при } |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \rightarrow \infty$$

$$\vec{G}_0(\vec{r}) = \frac{3(\Lambda - \lambda)}{4\pi(\Lambda + 2\lambda)r^3} \left(3 \frac{\vec{r}\vec{r}}{r^2} - \vec{I} \right),$$

$$\vec{h}(\vec{r}_1|\vec{r}_1, \vec{r}_2) \simeq \frac{4\pi R^3}{3} \vec{G}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \vec{h}_0(\vec{r}_1)$$

$$\text{при } |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \ll L, \quad (2.11)$$

где $\vec{h}(\vec{r}|\vec{r}')$ — поле возмущения «напряженности» от одиночной частицы с центром в точке \vec{r}' (решение этой задачи см. в [4]); I — единичный тензор; \vec{G}_0, \vec{G} — симметричные тензоры второго ранга (здесь и ниже используются диодные обозначения). Учитывая, что $\vec{G} - \vec{G}_0 = 0$ ($|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^{-3}$), что замена в (2.10) \vec{h}_0 на \vec{H} влечет за собой ошибку для макроскопических величин порядка c^3 , что $L \gg R$, и предполагая, что корреляционная длина $l \ll L$ (т. е. $k \simeq 1$ при $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \gg l$), из (2.9) — (2.11) после простых, но громоздких преобразований можно получить соотношение, замыкающее систему (1.4) с точностью до членов порядка c^2 включительно:

$$(\Lambda - \lambda) \left\langle \sum_{\sigma} \Theta_{\sigma} \vec{H}_{\sigma} \right\rangle \simeq c \frac{3\lambda(\Lambda - \lambda)}{\Lambda + 2\lambda} F(\vec{r}) \left\{ \left(1 + \frac{\Lambda - \lambda}{\Lambda + 2\lambda} c \right) \vec{I} + c F(\vec{r}) \int \Theta(|\vec{r} - \vec{r}'| - 2R) [k(\vec{r}, \vec{r}') G(\vec{r} - \vec{r}') - \vec{G}_0(\vec{r} - \vec{r}')] d^3 r' \right\} \cdot \langle \vec{H}(\vec{r}) \rangle. \quad (2.12)$$

3. Осредненный локальный коэффициент теплопроводности. Соотношение (2.12) позволяет представить третье уравнение (1.4) в виде $\langle \vec{Q} \rangle = \bar{\lambda} \langle \vec{H} \rangle$, где $\bar{\lambda}$ — осредненный локальный тензорный коэффициент теплопроводности дисперсной системы (вообще говоря, неанзотропны при анизотропной зависимости k от $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$). Если же в (2.12) пренебречь членами порядка c^2 , то $\bar{\lambda}$ окажется шаровым тензором. При этом для скалярного коэффициента теплопроводности получится результат, совпадающий с соответствующим результатом для электростатики [4].

4. Заключение. Предложенный подход позволяет строго замкнуть макроскопические уравнения для стационарной теплопроводности (а также для диффузии, плотности тока, проводимости, электро- и магнитостатических полей) в умеренно концентрированных дисперсных системах.

Алтайский политехнический институт
им. И. И. Ползунова,
Барнаул

Поступила в редакцию
12/XII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Бувевич, Ю. А. Корнеев, И. Н. Шелчкова. О переносе тепла и массы в дисперсном потоке. — «Инженерно-физический журнал», 1976, 30, вып. 6, с. 979—985.
2. Ю. А. Бувевич, В. Г. Марков. Континуальная механика монодисперсных суспензий. Реологические уравнения состояния для суспензии умеренной концентрации. — Прикладная математика и механика, 1973, 37, вып. 6, с. 1059—1077.
3. А. Г. Гроссман. О статистическом описании течения суспензии в приближении Стокса. — Изв. АН СССР, 1975, № 13, сер. техн. наук, вып. 50—59.
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. — М., Физматгиз, 1959. 532 с.

УДК 621.373.431.2

С. Н. РЫЧКОВ

РЕЛАКСАЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМАХ НА ТУННЕЛЬНЫХ ПЕРЕХОДАХ ДЖОЗЕФСОНА

Известно, что элементы на основе эффекта Джозефсона (например, туннельные переходы Джозефсона — ТПД) имеют время переключения, на порядок меньшее, чем у самых быстрых полупроводниковых элементов. Известна также отрицательная роль, которую играет большое тепловыделение в полупроводниках. Элементы с эффектом Джозефсона значительно превосходят полупроводниковые по параметру $\rho\tau$, где ρ — рассеиваемая мощность и τ — время переключения. Быстродействие джозефсоновских элементов 10^{-11} с. Параметр $\rho\tau = 10^{-18}$ Дж, что на шесть порядков меньше, чем у полупроводников.

Джозефсоновские элементы используются для создания различных сверхвысокочувствительных (СВЧ) устройств, эталонов напряжения, сверхчувствительных магнетометров и т. д., а также ЭВМ с производительностью 10^{10} операций в секунду [1, 2].

Известно, что вольт-амперная характеристика, (ВАХ) ТПД неоднозначна. Это свойство позволяет конструировать на ТПД простые и надежные релаксационные автогенераторы, которые играют важную роль в ЭВМ, а также применяются в измерительных устройствах.

Гистерезис ВАХ туннельного перехода следует учитывать при разработке элементной базы ЭВМ, ибо он может стать причиной нежелательных колебательных процессов при переключении элементов. В этой связи представляется интересным исследовать автоколебательные релаксационные процессы в некоторых системах, построенных на ТПД.

В данной работе рассмотрены автоколебательные процессы в системе с произвольным количеством ТПД, идеальных постоянных источников тока и напряжения, индуктивностей и взаимоиндуктивностей, а также в хорошо известной и широко применяемой системе из двух параллельно включенных ТПД [1].

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТПД

Согласно экспериментальным данным [1] ТПД достаточно хорошо описывается моделью

$$u = \begin{cases} u_n + RI & \text{при } I \geq I_k \text{ и при} \\ I_k > I \geq I_0, & \text{если перед этим было } I \geq I_k, \\ 0 & \text{при } I < I_0 \text{ и при} \\ I_0 < I < I_k, & \text{если перед этим было } I < I_k, \end{cases} \quad (1)$$

где u — напряжение на ТПД; $u_n = (\Delta_1 + \Delta_2)/e$ (Δ_1, Δ_2 — энергетические щели двух сверхпроводников, разделенных изолирующим слоем, e — заряд электрона); I — ток через ТПД; R — дифференциальное сопротивление

тивление контакта при $u=u_n$; I_k — критический ток контакта; I_0 — ток возврата в состояние $u=0$.

При анализе будем пользоваться, если специально не оговорено, моделью (1), в которой $R=0$. Такое упрощение в ряде случаев оправдано, поскольку

$$RI/u_n \sim 10^{-3} (I \approx 10^{-2} \text{ А}, u_n \approx 10^{-3} \text{ В}, R \sim 10^{-4} \text{ ом}).$$

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛАХ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ n -ГО ПОРЯДКА ($n=2, 3, \dots$)

Рассматривается автогенератор, схема которого содержит только ТПД, индуктивности, взаимные индуктивности, идеальные постоянные источники тока и напряжения и описывается автономной системой дифференциальных уравнений n -го порядка ($n=2, 3, \dots$) с разрывными правыми частями:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{h=1}^m a_{ih} u_h + b_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где x_i — независимые переменные; a_{ih}, b_i — постоянные коэффициенты; u_h — напряжения на туннельных контактах; m — общее число ТПД в схеме. Предполагается, что все ТПД описываются моделью (1), причем в общем случае параметры I_k, I_0, u_n у них различны.

Согласно модели (1) фазовое пространство системы (2) плоскостями переключения

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{pi} x_i = \beta_p, \quad p = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где α_{pi}, β_p — постоянные коэффициенты, разбивается на некоторое количество областей D_j , в каждой из которых правые части системы (2) обращаются в постоянные величины A_i^j , т. е. $dx_i^j/dt = A_i^j$, и, следовательно,

$$x_i^j = A_i^j t + C_i^j, \quad (4)$$

где C_i^j — постоянные интегрирования.

Поскольку система (2) имеет неоднозначные разрывные правые части, условия единственности фазовых траекторий не будут выполнены не только на поверхностях разрыва (3), но и в целых областях — областях неоднозначности правых частей (2). Отметим также, что выбор области, в которой находится в данный момент система, не произволен, а определяется состоянием системы или предысторией движения.

Допустим, что фазовая точка начала двигаться из области однозначности D_{j_1} , затем прошла через области D_{j_2}, \dots, D_{j_r} и опять вошла в область D_{j_1} .

Будем пока считать, что фазовая траектория, проходящая через области D_{j_1}, \dots, D_{j_r} не пересекает граничных точек поверхностей (3) и не касается этих поверхностей. Тогда имеет место непрерывная зависимость фазовой кривой от начальной точки.

Пусть: 1) s_{p_1}, \dots, s_{p_r} — поверхности, разграничивающие области D_{j_r} и D_{j_1} , D_{j_1} и $D_{j_2}, \dots, D_{j_{r-1}}$ и D_{j_r} , которые проходит наша фазовая траектория; 2) $x_i^{j_1}$ — начальная точка на поверхности s_{p_1} . Тогда из (4) получаем

$$x_i^{j_2} = A_i^{j_1} t_1 + x_i^{j_1}, \quad (5)$$

где t_1 — время пробега фазовой точки по области D_{j_1} . Подставляя (5) в (3), находим

$$t_1 = \frac{\beta_{p_2} - \sum_{i=1}^n \alpha_{p_2 i} x_i^{j_1}}{\sum_{i=1}^n \alpha_{p_2 i} A_i^{j_1}}, \quad (6)$$

т. е.

$$x_i^{j_2} = \frac{-A_i^{j_1} \sum_{i=1}^n \alpha_{p_2 i} x_i^{j_1}}{\sum_{i=1}^n \alpha_{p_2 i} A_i^{j_1}} + x_i^{j_1} + \frac{A_i^{j_1} \beta_{p_2}}{\sum_{i=1}^n \alpha_{p_2 i} A_i^{j_1}}. \quad (7)$$

В матричной форме соотношение (7) будет иметь вид

$$X_2 = A_1 X_1 + B_1, \quad (8)$$

где X_1, X_2 — вектор-столбцы переменных $x_i^{j_1}, x_i^{j_2}$; B_1 — вектор-столбец свободных членов; A_1 — квадратная матрица коэффициентов.

Аналогичное рассмотрение в областях D_{j_2}, \dots, D_{j_r} дает

$$X_3 = A_2 X_2 + B_2, \dots, X_{r+1} = A_r X_r + B_r. \quad (9)$$

Обозначая $X_1 = X, X_{r+1} = \bar{X}$,

$$A = \prod_{i=r}^1 A_i, \quad B = B_r + \sum_{h=1}^{r-1} \prod_{i=r}^h A_i B_h, \quad (10)$$

будем иметь из соотношений (8), (9), (10)

$$\bar{X} = AX + B. \quad (11)$$

Выражение (11) определяет в некоторой окрестности точки X однозначное и непрерывное точечное отображение на секущей поверхности s_{p_1} . Для нахождения неподвижных точек точечного отображения (11) будем иметь следующую систему уравнений:

$$(E - A)X = B, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_{p_1 i} x_i = \beta_{p_1}. \quad (12)$$

При решении системы (12) могут встретиться три случая.

1. Система не имеет решений, расположенных внутри областей D_{j_1}, \dots, D_{j_r} , т. е. отсутствуют периодические решения.

2. Система имеет континуум неподвижных точек, расположенных внутри областей D_{j_1}, \dots, D_{j_r} . Все они полуустойчивы, поскольку по крайней мере два корня характеристического полинома $\det/\lambda E - A/ = 0$ равны по модулю единице.

3. Система имеет единственное решение, которое лежит внутри областей D_{j_1}, \dots, D_{j_r} . Устойчивость неподвижной точки будет определяться величинами корней характеристического полинома.

Если фазовая точка в некоторой области D_{j_k} ($k = \overline{1, r}$) достигла граничной точки одной из поверхностей S_{p_1} , то она либо уйдет в другую область, либо останется на границе.

Фазовая точка, пришедшая на устойчивую границу размерности $n-2$ области скользящих движений размерности $n-1$, движется по ней до тех пор, пока не дойдет до своей границы размерности $n-3$, и так далее, вплоть до границы нулевой размерности [3].

Если в результате фазовая точка не покинет областей D_{j_1}, \dots, D_{j_r} , можно построить точечное отображение края скользящих движений наименьшей размерности q ($0 \leq q < n$): Это точечное отображение запи-

шется в форме (11) и будет иметь размерность q , поэтому характеристическое уравнение будет иметь степень q . Относительно неподвижных точек точечного отображения сохраняются в силе три случая, описанные выше.

Отметим, что если схема автогенератора построена на туннельных криотронах [2], она будет также описываться системой (2) с поверхностями разрыва (3) и также будет иметь в заданных областях не более одного устойчивого предельного цикла.

РЕЛАКСАЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМЕ ДВУХ ТПД, ВКЛЮЧЕННЫХ ПАРАЛЛЕЛЬНО

Система, изображенная на рис. 1, находит широкое применение в приборах для измерения напряжений менее 10^{-14} В и малых изменений магнитного поля с разрешением 10^{-8} Гс [1]. Так как статические свойства подобной системы хорошо изучены (см., например, [1, 4]), уделим основное внимание рассмотрению процессов переключения.

Схема рис. 1 описывается уравнением

$$L \frac{di_1}{dt} = u_2(I - i_1) - u_1(i_1), \quad (13)$$

где L — индуктивность контура. Напряжения u_1, u_2 на туннельных переходах определяются в соответствии с (1) и показаны на рис. 2.

Начнем рассмотрение из области $i_1 > I - I_{02}$ (рис. 2), где правая часть (13) однозначна и $u_2 - u_1 = -u_{1n}$. Пусть $i_1(0) = I$, тогда $L di_1 = -u_{1n} dt + LI$. Если $I - I_{k2} < I_{01}$, фазовая точка придет в безразличное состояние равновесия $i_1 = I_{01}$. Положим $I - I_{k2} \geq I_{01}$, тогда, уменьшаясь,

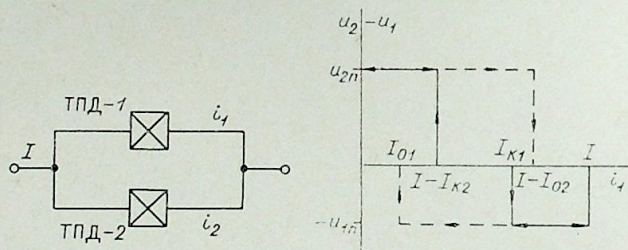


Рис. 1.

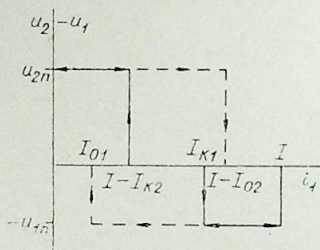


Рис. 2.

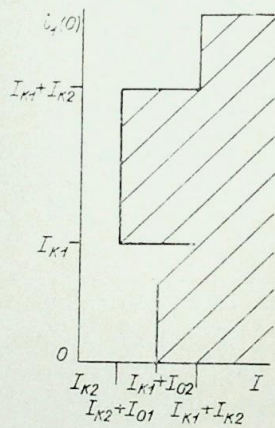


Рис. 3.

ток i_1 достигнет величины $I - I_{k2}$ и переключит ТПД 2 в состояние $u_2 = u_{2n}$, т. е. $Li_1 = (u_{2n} - u_{1n})t + L(I - I_{k2})$. Если $u_{2n} > u_{1n}$, ток увеличится до $I - I_{02}$, после чего будем иметь $u_2 = 0, u_1 = +u_{1n}$, далее процесс повторится. Итак, при

$$u_{2n} > u_{1n}, \quad I - I_{k2} > I_{01}$$

может возникнуть режим устойчивых релаксационных колебаний. Область начальных значений тока i_1 , приводящая к предельному циклу, дается системой неравенств

$$\begin{aligned} i_1 &\geq I_{k1}, & \text{если} & & I < I_{02} + I_{k1}; \\ I - I_{k2} &\geq i_1 \geq I_{k1}, & \text{если} & & I_{k2} + I_{k1} > I > I_{02} + I_{k1}; \\ i_1 &\geq 0, & \text{если} & & I > I_{k2} + I_{k1} \end{aligned}$$

и воспроизведена на рис. 3 (заштрихована).

Для частоты и амплитуды колебаний имеем формулы

$$f = \frac{u_{1n}(u_{2n} - u_{1n})}{Lu_{2n}(I_{k2} - I_{02})}, \quad A = \frac{I_{k2} - I_{02}}{2}.$$

Отметим, что частота не зависит от тока питания и, кроме того, принимает наибольшее значение при $u_{1n} = u_{2n}/2$. Полагая $u_{2n} = 2 \cdot 10^{-3}$ В, $L = 10^{-10}$ Гн, $I_{k2} - I_{02} = 10^{-2}$ А, получим $f = 5,0 \cdot 10^8$ Гц.

Если в модели (1) взять $R_1 \neq 0, R_2 \neq 0$, получим поправку к частоте

$$\frac{\delta f}{f} = \frac{-u_{2n}}{u_{1n}(u_{2n} - u_{1n})} \left[\frac{R_2 I (R_1 + R_2) (I - I_{k2})}{u_{2n}^2 u_{1n}^2} - \frac{R_1 (I - I_{02})}{u_{2n}^2 (u_{2n} - u_{1n})^2} \right].$$

Считая $R_1 \sim 10^{-4}$ Ом, $R_2 \sim 10^{-4}$ Ом, находим, что $\delta f/f \sim -10^{-3}$ и $df/dI \sim -10^2$ Гц/мкА. Оценка относительной нестабильности частоты $\Delta f/f$ приняла $\Delta I/I \sim 10^{-3}$.

Таким образом, ток питания незначительно влияет на частоту колебаний.

Энергия, диссипируемая системой за период:

$$E_{\text{дис}} = \frac{I(I_{k2} - I_{02})Lu_{2n}}{u_{2n} - u_{1n}} = Iu_{1n}/f.$$

Принимая $I = 3 \cdot 10^{-2}$ А, $u_{1n} = 10^{-3}$ В, $f = 5 \cdot 10^8$ Гц, получаем $E_{\text{дис}} = 6 \cdot 10^{-14}$, т. е. исключительно малое значение.

В заключение отметим, что мы в анализе пренебрегли временем τ_n переключения ТПД, так как $\tau_n f \ll 1$. Действительно, время τ_n соответствует равномерной зарядке емкости контакта C током I_k от состояния $u = 0$ до $u = u_n$:

$$u_n = \frac{1}{C} \int_0^{\tau_n} I_k dt = \frac{I_k \tau_n}{C}$$

Подставляя $C = 10^{-9}$ Ф, $u_n = 2 \cdot 10^{-3}$ В, $I_k = 2 \cdot 10^{-2}$ А, получаем $\tau_n = 10^{-10}$ с, т. е. $\tau_n f = 5 \cdot 10^{-2} \ll 1$.

ВЫВОДЫ

Система из ТПД, идеальных постоянных источников тока и напряжения, индуктивностей и взаимных индуктивностей может иметь в заданных областях только один устойчивый автоколебательный релаксационный процесс.

Установлено, что при определенных значениях параметров в известной системе из двух параллельно соединенных ТПД возникают релаксационные колебания, частота которых $f \approx 10^9$ Гц.

Вычислительный центр АН СССР,
Красноярск

Поступила в редакцию
28/VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

- Л. Солимар. Туннельный эффект в сверхпроводниках и его применение. М., «Мир», 1974.
- И. Д. Войтович, Р. А. Ченцов. Эффект Джозефсона в вычислительной технике. — УСИМ, 1975, № 2, 71—78.
- Ю. И. Неймарк. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М., «Наука», 1972.
- И. О. Кулик, И. К. Янсон. Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах. М., «Наука», 1970.

Б. З. ГАММ, Н. Н. ЕФИМЕНКО

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТОВ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Математическая модель сложной электрической системы, на основе которой проводится анализ электромеханических переходных процессов, включает в себя уравнения, описывающие состояние всех элементов системы.

Уравнения синхронной машины (СМ) записываются в системе координат, жестко связанной с ее ротором, а уравнения сети — в синхронно-вращающейся системе координат. Уравнения синхронных машин и электрической сети дополняются уравнениями связи между переменными в осях каждой машины и в синхронно-вращающихся осях. Полученная таким образом система уравнений позволяет рассчитывать переходные процессы и удобна для моделирования и на ЦВМ, и на АВМ.

Расчет электромеханических переходных процессов электрических систем с помощью ЦВМ базируется на численных методах решения систем нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих состояние элементов энергетических систем. На каждом шаге численного интегрирования решаются уравнения СМ. По уравнениям связи переменные (в зависимости от постановки задачи это могут быть либо токи, либо напряжения генераторов, полученные из уравнений СМ) пересчитываются к системе синхронно-вращающихся координат. После этого проводится расчет внешней сети, в результате чего определяются недостающие переменные на следующий шаг численного интегрирования. Далее осуществляется обратный координатный переход к осям, жестко связанным с ротором СМ. На этом заканчивается расчет на первом шаге численного интегрирования, после чего начинается расчет на втором шаге и т. д. На каждом этапе расчета переходного процесса запись уравнений, описывающих электрическую систему, имеет свои особенности, которые позволяют модернизировать эти уравнения для достижения наибольшей эффективности при моделировании на ЦВМ или АВМ.

При расчете переходных процессов часто возникает задача определения токов по потокосцеплениям, полученным из уравнений Парка — Горева [1]. Она сводится к обращению матрицы собственных и взаимных сопротивлений (СВС) СМ.

Для примера рассмотрим уравнения связи токов и потокосцеплений по оси d при учете одного демпферного контура:

$$\begin{pmatrix} I_D \\ I_d \\ I_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_D & X_{aD} & X_{fD} \\ X_{aD} & X_d & X_{cd} \\ X_{fD} & X_{ad} & X_f \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} \Psi_D \\ \Psi_d \\ \Psi_f \end{pmatrix}. \quad (1)$$

При учете насыщения СМ необходимо на каждом шаге численного интегрирования обращать матрицу СВС СМ, что занимает значительную часть общего объема расчетов переходного процесса.

Если предположить равенство всех взаимноиндуктивностей СМ, то уравнения (1) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} I_D \\ I_d \\ I_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{\sigma D} & 0 & 0 \\ 0 & X_{\sigma d} & 0 \\ 0 & 0 & X_{\sigma f} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X_{ad} \begin{pmatrix} \Psi_D \\ \Psi_d \\ \Psi_f \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} \Psi_D \\ \Psi_d \\ \Psi_f \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $X_{\sigma i}$ — сопротивление рассеяния СМ; $i=D, d, f$; X_{ad} — сопротивление взаимной индукции СМ между ротором и статором.

Приведенная форма записи матрицы СВС дает возможность учесть насыщение основного магнитного потока изменением величины X_{ad} ; изменение сопротивлений рассеяния при насыщении или изменении скольжения.

Таким образом, задача определения токов по потокосцеплениям сводится к обращению суммы двух матриц. Способов обращения суммы матриц нет. Обращение же матриц в выражении (1) приводит к тому, что полученная форма записи матрицы в выражении (2) с выделением матрицы сопротивлений рассеяния и сопротивлений взаимноиндуктивностей становится невозможной и при учете насыщения основного магнитного потока и изменения сопротивлений рассеяния необходимо на каждом шаге расчета обращать полную матрицу СВС СМ, что связано с большими затратами машинного времени.

Чтобы преодолеть эти трудности, составим электрическую схему замещения (см. рисунок), моделирующую уравнение (2). Определив токи в ветвях схемы и записав выражение в матричном виде, получим

$$\begin{pmatrix} I_D \\ I_d \\ I_f \end{pmatrix} = \frac{1}{\sum Y} \begin{pmatrix} Y_{\sigma D} \sum Y & -Y_{\sigma d} Y_{\delta D} & -Y_{\sigma D} Y_{\sigma f} \\ -Y_{\sigma d} Y_{\delta D} & Y_{\sigma d} \sum Y & -Y_{\sigma d} Y_{\delta f} \\ -Y_{\sigma f} Y_{\sigma D} & -Y_{\sigma f} Y_{\sigma d} & Y_{\sigma f} \sum Y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Psi_D \\ \Psi_d \\ \Psi_f \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} Y_{\sigma i} &= \frac{1}{X_{\sigma i}}; \\ Y_{ad} &= \frac{1}{X_{ad}}; \\ \sum Y &= Y_{\sigma D} + Y_{\sigma d} + Y_{\sigma f} + Y_{ad}; \\ \sum_i^i Y &= \sum Y - Y_{\sigma i}; \quad i = D, d, f. \end{aligned} \quad (4)$$

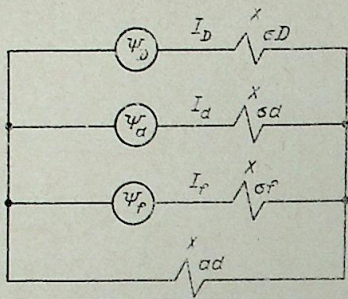
Используя выражения (4), перепишем диагональные элементы матрицы проводимостей в выражении (3):

$$Y_{\sigma i} \sum Y = Y_{\sigma i} \sum Y - Y_{\sigma i}^2. \quad (5)$$

С учетом формулы (5) после дальнейших преобразований выражение (3) примет вид

$$\begin{pmatrix} I_D \\ I_d \\ I_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & & \\ & \frac{1}{Y_{ad} + \sum Y} & \\ & & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{\sigma D} & Y_{\sigma d} & Y_{\sigma D} \\ Y_{\sigma d} & Y_{\sigma d} & Y_{\sigma d} \\ Y_{\sigma f} & Y_{\sigma f} & Y_{\sigma f} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Y_{\sigma D} & 0 & 0 \\ 0 & Y_{\sigma d} & 0 \\ 0 & 0 & Y_{\sigma f} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Psi_D \\ \Psi_d \\ \Psi_f \end{pmatrix} \quad (6)$$

Полученная форма записи уравнения связи токов и потокосцеплений (6) позволяет, не обращая матрицу СВС СМ на каждом шаге численного интегрирования, учитывать насыщение и изменение сопротивлений рассеяния СМ. Расчеты, проведенные на ЦВМ БЭСМ-4 по программе, реализующей данную форму записи уравнений связи токов



Электрическая схема, моделирующая уравнения связи токов и потокосцеплений.

и потокосцеплений, подтвердили, что она более эффективна по сравнению с обращением матрицы методом Гаусса — Жордано (см. таблицу).

Поскольку обращение матрицы СВС СМ занимает значительную часть общего времени расчетов электромеханических переходных процессов, предлагаемая

форма записи уравнений связи токов и потокосцеплений существенно сокращает время расчетов переходных процессов.

При расчете переходного процесса электрической системы на каждом шаге численного интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений, моделирующих некоторые элементы системы, требуется рассчитывать режим электрической сети. Это приводит к необходимости решения уравнения состояния электрической системы, которое может быть описано уравнением узловых напряжений в виде

$$I = YU, \quad (7)$$

где Y — матрица узловых проводимостей сети; I — матрица-столбец узловых токов; U — матрица-столбец узловых напряжений.

Получается, что на каждом шаге численного интегрирования решается система линейных алгебраических уравнений. Решение систем линейных алгебраических уравнений высокого порядка связано со значительными вычислительными трудностями, поэтому желательно предельно снизить порядок системы.

Все узлы системы разделим на три группы: активные, контролируемые, исключаемые. В соответствии с таким разделением уравнение (7) представим в виде

$$\begin{vmatrix} Y_{aa} & Y_{ah} & Y_{au} \\ Y_{ha} & Y_{hh} & Y_{hu} \\ Y_{ua} & Y_{uh} & Y_{uu} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} U_a \\ U_h \\ U_u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_a \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (8)$$

Сделав ряд преобразований выражения (8), в результате которых будут учитываться только активные и контролируемые узлы, запишем [2]

$$\begin{vmatrix} Y_{aa_1} & Y_{ak_1} \\ Y_{ka_1} & Y_{kk_1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} U_a \\ U_h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_a \\ 0 \end{vmatrix} \quad (9)$$

Таким образом, получим уравнение узловых напряжений электрической системы при учете только активных и контролируемых узлов. где

$$\begin{aligned} Y_{aa_1} &= Y_{aa} - Y_{au} \cdot Y_{uu}^{-1} \cdot Y_{ua}; \\ Y_{ak_1} &= Y_{ka_1}^T = Y_{ah} - Y_{au} \cdot Y_{uu}^{-1} \cdot Y_{uh}; \\ Y_{ka_1} &= Y_{ak_1}^T = Y_{ha} - Y_{hu} \cdot Y_{uu}^{-1} \cdot Y_{ua}; \\ Y_{kk_1} &= Y_{hh} - Y_{hu} \cdot Y_{uu}^{-1} \cdot Y_{uh}. \end{aligned} \quad (10)$$

Когда нет надобности следить за изменением режимных параметров контролируемых узлов, можно, произведя дальнейшие преобразования уравнения (9), исключить контроли-

Сопоставление времени обращения матрицы собственных и взаимных сопротивлений синхронной машины предлагаемым способом и методом Гаусса — Жордано

Порядок матрицы	Время обращения 10 ⁻⁴ с		Выигрыш во времени
	предложенный способ	метод Гаусса — Жордано	
3	4	50	12,5
4	7	100	14,5
5	10	160	16,0
7	15	370	24,0
10	27	950	35,7

руемые узлы и тем самым еще понизить порядок системы. Уравнение (9) примет вид

$$Y_a \cdot U_a = I_a; \quad (11)$$

$$Y_a = Y_{aa_1} - Y_{ak_1} \cdot Y_{kk_1}^{-1} \cdot Y_{ka_1}.$$

При изолированных задающих напряжениях имеем нулевые матрицы Y_{au} и Y_{ua} . Выражения (10) в этом случае запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} Y_{aa_1} &= Y_{aa}; \\ Y_{ak_1} &= Y_{ka_1}^T = Y_{ah} = Y_{ha}^T; \\ Y_{ka_1} &= Y_{ak_1}^T = Y_{ha} = Y_{ah}^T; \\ Y_{kk_1} &= Y_{hh} - Y_{hu} \cdot Y_{uu}^{-1} \cdot Y_{uh}. \end{aligned}$$

В результате приведенных преобразований снижается порядок системы, что упрощает вычисления и сокращает затраты машинного времени.

В ходе расчета переходного процесса, когда уравнения СМ и уравнения внешней сети записываются в различных системах координат, возникает задача перехода от одной системы координат к другой по уравнениям связи.

Запишем уравнение (7), разделив переменные на действительные и мнимые части:

$$I = \text{Re}I + j\text{Im}I = (Y' - jY'')(\text{Re}U + j\text{Im}U). \quad (12)$$

Сделав ряд преобразований, уравнение (12) представим в матричной форме:

$$\begin{vmatrix} I_{qs} \\ I_{ds} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y' & Y'' \\ -Y'' & Y' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} U_{qs} \\ U_{ds} \end{vmatrix}, \quad (13)$$

где

$$I_{qs} = \text{Re}I; \quad I_{ds} = -j\text{Im}I; \quad U_{qs} = \text{Re}U; \quad U_{ds} = -j\text{Im}U.$$

Уравнения связи синхронно-вращающейся системы координат с системой координат, жестко связанной с ротором машины, записываются в следующем виде [1]:

$$\begin{vmatrix} U_{qs} \\ U_{ds} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \delta & \sin \delta \\ \sin \delta & \cos \delta \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} u_q \\ u_d \end{vmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{vmatrix} I_{qs} \\ I_{ds} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \delta & \sin \delta \\ -\sin \delta & \cos \delta \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} i_q \\ i_d \end{vmatrix}$$

где

$$U_{qs} = \begin{vmatrix} U_{qs_1} \\ \vdots \\ U_{qs_n} \end{vmatrix}; \quad U_{ds} = \begin{vmatrix} U_{ds_1} \\ \vdots \\ U_{ds_n} \end{vmatrix}; \quad u_q = \begin{vmatrix} u_{q_1} \\ \vdots \\ u_{q_n} \end{vmatrix}; \quad u_d = \begin{vmatrix} u_{d_1} \\ \vdots \\ u_{d_n} \end{vmatrix}$$

$$I_{qs} = \begin{vmatrix} I_{qs_1} \\ \vdots \\ I_{qs_n} \end{vmatrix}; \quad I_{ds} = \begin{vmatrix} I_{ds_1} \\ \vdots \\ I_{ds_n} \end{vmatrix}; \quad i_q = \begin{vmatrix} i_{q_1} \\ \vdots \\ i_{q_n} \end{vmatrix}; \quad i_d = \begin{vmatrix} i_{d_1} \\ \vdots \\ i_{d_n} \end{vmatrix}$$

$$\cos \delta = \begin{vmatrix} \cos \delta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \cos \delta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \cos \delta_n \end{vmatrix}; \quad \sin \delta = \begin{vmatrix} \sin \delta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sin \delta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sin \delta_n \end{vmatrix}$$

С учетом уравнений связи (14) уравнение связи переписывается в виде

$$\begin{vmatrix} i_q \\ i_d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \delta & -\sin \delta \\ \sin \delta & \cos \delta \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} Y' & -Y'' \\ Y'' & Y' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \cos \delta & \sin \delta \\ -\sin \delta & \cos \delta \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} u_q \\ u_d \end{vmatrix}$$

Произведя ряд преобразований, получаем окончательно

$$\begin{vmatrix} i_q \\ i_d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} u_q \\ u_d \end{vmatrix}, \quad (15)$$

где

$$A = \widehat{R}Y' + \widehat{L}Y'';$$

$$B = -\widehat{R}Y'' + \widehat{L}Y';$$

$\widehat{R}Y'$, $\widehat{L}Y''$, $\widehat{R}Y''$, $\widehat{L}Y'$ — почленное перемножение матриц;

$$R = \begin{vmatrix} \cos \delta_{11} & \cos \delta_{12} & \dots & \cos \delta_{1n} \\ \cos \delta_{21} & \cos \delta_{22} & \dots & \cos \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos \delta_{n1} & \cos \delta_{n2} & \dots & \cos \delta_{nn} \end{vmatrix}$$

$$L = \begin{vmatrix} \sin \delta_{11} & \sin \delta_{12} & \dots & \sin \delta_{1n} \\ \sin \delta_{21} & \sin \delta_{22} & \dots & \sin \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin \delta_{n1} & \sin \delta_{n2} & \dots & \sin \delta_{nn} \end{vmatrix}$$

$$Y' = \operatorname{Re} Y = \begin{vmatrix} y'_{11} & y'_{12} & \dots & y'_{1n} \\ y'_{21} & y'_{22} & \dots & y'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y'_{n1} & y'_{n2} & \dots & y'_{nn} \end{vmatrix}$$

$$Y'' = \operatorname{Im} Y = \begin{vmatrix} y''_{11} & y''_{12} & \dots & y''_{1n} \\ y''_{21} & y''_{22} & \dots & y''_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y''_{n1} & y''_{n2} & \dots & y''_{nn} \end{vmatrix}$$

Относительные углы определяются следующим образом:

$$\cos \delta_{ik} = \cos \delta_{ki} = \cos (\delta_i - \delta_k),$$

$$\sin \delta_{ik} = -\sin \delta_{ki} = \sin (\delta_i - \delta_k),$$

где $k, i = 1, \dots, n$.

Выражение (15) позволяет представить уравнения узловых напряжений связи различных систем в форме, удобной для моделирования на АВМ, поскольку в этом случае оно дает возможность иметь всего один периодизатор в отличие от случая, когда уравнения связи записываются в обычно употребляемой форме, требующей наличия периодизаторов, количество которых определяется числом моделируемых СМ.

Использование описанных выше алгоритмов совместно со способом обращения суммы двух матриц, предложенным в [3], значительно ускоряет расчеты электромеханических переходных процессов.

ВЫВОДЫ

1. Предложенный способ обращения матрицы собственных и взаимных сопротивлений синхронной машины позволяет учитывать насыщение и изменение сопротивлений рассеяния СМ и значительно сокращает время расчетов переходных процессов.

2. Выведено выражение, соединяющее в себе уравнение узловых напряжений и уравнения связи различных систем координат. Выражение записано в форме, удобной для моделирования переходных процессов на АВМ.

Сибирский научно-исследовательский
институт энергетики,
Новосибирск

Поступила в редакцию
21/IV 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. С. Лукашов. Уравнения малых колебаний дальних электропередач и исследование их на устойчивость. Новосибирск, «Наука», 1966. 220 с.
2. Электрические системы. Режимы работы электрических систем и сетей. Под ред. В. А. Веникова. М., «Высшая школа», 1975. 344 с.
3. Б. З. Гамм, В. М. Макаров, Н. Н. Ефименко. Об определении обобщенных параметров сложных электрических систем при моделировании некоторых ее элементов динамическими характеристиками. — Тр. СибНИИЭ, «Режимы и устойчивость электроэнергетических систем». 1977, вып. 34, с. 24—32.

В. З. МАНУСОВ, М. И. ВЕЧЕРСКИЙ

ИНФОРМАЦИОННОЕ И АЛГОРИТМИЧЕСКОЕ
ОБЕСПЕЧЕНИЕ ПАКЕТА
ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ МАШИННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЕЙ ЭНЕРГОСИСТЕМ

Известным программам проектирования режимов электрических сетей энергосистем присуща несогласованность информационного и алгоритмического обеспечения, единой методической основы для них нет. Необходимость комплексирования программ обусловлена тем, что суммарный среднесуточный объем входной и выходной информации сетевых программ, например АСДУ энергосистем, для сетей на 200 узлов и 300 ветвей достигает, по оценке авторов, 8 мегабайт, или около 100 тыс. перфокарт. Прогнозируемая экономическая эффективность пакетирования сетевых программ — не менее 50—80 тыс. руб. в год.

Ниже изложены принципы и состав пакета прикладных программ, в работе над которым сделана попытка устранить указанные недостатки.

ПРИНЦИПЫ МАШИННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ
И АРХИТЕКТУРА ПАКЕТА

Результирующая эффективность систем машинного проектирования определяется их эргатичностью, в которой авторы выделили три компонента: гипертекст, вероятностный подход и принцип макропроцессора. В принцип гипертекста авторы вкладывают унификацию данных, их разделение на элементарные блоки (строки, предложения, абзацы) и модульную гамму алгоритмов различной строгости и точности для сборки оптимальных алгоритмов. Вероятностный подход наилучшим образом соответствует объекту проектирования и эвристическим методам проектировщиков. Естественной формой реализации вероятностного гипертекста авторы считают макропроцессор.

Изложенные принципы положены в основу системы ПРОТОН — совокупности теоретико-методических и практических взглядов на машинное проектирование электрических сетей энергосистем.

Идеи системы ПРОТОН реализуются в форме пакета прикладных программ АРГО-1 (Автоматизированная обработка гипертекста), многоуровневая архитектура которого включает [1]: операционную программу СНАРК (синтез надежного режима) с транслятором входного языка, монитором пакетной обработки данных и загрузчиком; систему управления базой данных ИРИС (интерактивная информационная система); модуль управления проектированием сетей с учетом надежности диспетчера РИСК; модули вероятностного анализа и оптимизации потокораспределения, расчета сверхтоков — ПОТОК, ОПТИМ, СВЕРХТОК; модули прогноза вероятностных характеристик электрических нагрузок и эквивалентирования сети АЛЬФА, ЭКВИВ; модули общего пользования.

В управляющих алгоритмах использованы эвристические принципы интерактивного проектирования. В основе глобальной целевой функции проектирования лежит критерий эргатической надежности человека-машинной системы.

Надежность сети определяют на базе функции безопасности Паттона [2]:

$$S(t) = S_{ст}(t) + S_{длн}(t), \quad (1)$$

где $S_{ст}(t)$ — средняя суммарная относительная продолжительность отказов в стационарных режимах сети; $S_{длн}(t)$ — средняя суммарная относительная продолжительность отказов в переходных режимах.

Данные для оценки надежности сети получают при помощи алгоритмов ядра пакета — алгоритмов расчета и оптимизации потокораспределения, расчета сверхтоков.

Вероятностный анализ потокораспределения проведен методом Ньютона — Рафсона с использованием статистической линеаризации [3] путем решения системы уравнений

$$M[W(X, Y)] + C_X X^0 + C_Y Y^0 = 0, \quad (2)$$

$$K = C_X K_X C_{Xt},$$

где $W(X, Y)$ — случайная вектор-функция баланса мощностей в узлах; X, Y, X^0, Y^0 — случайные и центрированные векторы зависимых и независимых переменных; K_X, K_Y — матрицы корреляционных моментов X и Y ; C_X, C_Y — матрицы статистических коэффициентов усиления.

Оптимизацию вероятностного потокораспределения ведут методами Ньютона второго порядка и матрицы Гессе со статистической линеаризацией целевой функции [4]. Целевая функция (потери активной мощности) записывается в виде

$$F(\dot{U}) = C(\dot{U}) + \sum_{i=1}^N (r_{pi} f_{pi}^2 + r_{qi} f_{qi}^2 + r_{ui} f_{ui}^2) + \sum_{j=1}^M r_{hj} f_{hj}^2, \quad (3)$$

где потери активной мощности $C(\dot{U})$ могут быть определены суммированием активной мощности, входящей во все узлы сети.

$$C(\dot{U}) = \Delta P_{\Sigma} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \{ \text{Re} \hat{U}_i Y_{ij} \dot{U}_j \}, \quad (4)$$

где \dot{U} — комплекс напряжения узла; N — число независимых узлов; Y_{ij} — элемент матрицы узловых проводимостей; N, M — число узлов и ветвей соответственно.

Технические ограничения учтены коэффициентами штрафа из соотношений

$$\begin{aligned} f_{pi} &= P_i(\dot{U}) - P_i = 0, \quad i \in (\Gamma + H), \\ f_{qi} &= Q_i(\dot{U}) - Q_i = 0, \quad i \in (H), \\ f_{qi} &= Q_i(\dot{U}) - Q_{i \min} \geq 0, \quad i \in (\Gamma), \\ f_{ui} &= \dot{U}_i - \dot{U}_{i \min} \geq 0, \quad i \in (\Gamma + H), \\ f_{hj} &= K_{Tj} - K_{Tj} \geq 0, \quad i \in (T), \end{aligned}$$

где Γ — узлы генерации реактивной мощности; H — узлы нагрузки; T — регулируемые трансформаторы.

Для оценки сверхтоков применен алгоритм построчного получения матрицы сопротивлений методом двойной факторизации с наложением на режим расчетного потокораспределения, предложенный В. З. Манусовым:

$$Y_0 = C_N \dots C_2 C_1 Y C_1 C_2 \dots C_N, \quad (6)$$

$$Z_1 = C_1 C_2 \dots C_N Y_0^{-1} C_N \dots C_2 C_1 E_1,$$

где C_i — матрица коэффициентов обращения; Y_0 — промежуточная форма хранения матрицы проводимостей; E_1 — вектор-столбец специального вида.

Информационным обеспечением алгоритмов ядра пакета заняты алгоритмы прогноза нагрузок и эквивалентирования сети. Краткосрочный прогноз электрических нагрузок проводится на основе метода авторегрессии и скользящего среднего [5]. Исходными данными служат временные ряды нагрузок по активным и реактивным прогнозируемым величинам. Реализуется возможность получения полной матрицы корреляционных моментов нагрузок узлов.

Эквивалентирование сети (алгоритм предложен Ю. Н. Кучеровым) основано на преобразовании схемы по методу Гаусса. Для пересчета мощностей используется рекуррентное соотношение

$$S_{i0} = S_i + y_{ij} S_j \dot{U}_{j0}, \quad (7)$$

где $y_{ij} = \dot{Y}_{ij} / \dot{Y}_{ii}$ — относительная проводимость; U_{j0} — относительное напряжение.

Рассматривая это выражение как сумму случайных величин, находим дисперсию эквивалентной мощности узла приведения

$$\sigma^2(S_{i0}) = \sigma^2(S_i) + |y_{ij} \dot{U}_{j0}|^2 \sigma^2(S_j) + 2y_{ij} \dot{U}_{j0} \text{cov}(S_i, S_j), \quad (8)$$

где $\text{cov}(S_i, S_j)$ — ковариационный момент между комплексными случайными величинами мощностей узла приведения и исключения соответственно.

Оценка надежности диспетчера базируется на исследовании личности по миннесотскому многофазному личностному тесту (ММР1) и прогнозировании вероятности выхода интегральных характеристик работоспособности человека из зоны допуска.

Все алгоритмы пакета взаимно согласованы по точности и характеру данных и объединены в модульную систему с управляемой точностью расчетов и их стоимостью. Модифицируемость и расширяемость системы обеспечены отделением структур хранения данных от алгоритмов их обработки и специальными приемами программирования.

ВХОДНОЙ ЯЗЫК И УПРАВЛЕНИЕ БАЗОЙ ДАННЫХ

Входной язык определяет эффективность интерфейса проектировщика и ЭВМ, поэтому он максимально приближен к естественному русскому языку: сохранена многоуровневость задания; использован пополняемый словарь ключевых слов; на печать выводятся только требуемые результаты.

Исходное задание для комплекса (метапрограмму) излагают в форме ориентированного графа, элементами которого являются смысловые блоки расчетов (варианты и пр.). Управление вызовом и настройкой программ пакета единое, в то же время варианты (метакоманды) вводятся на предельно наглядных и компактных специальных диалектах. При этом для использования данных, записанных в новом для пакета виде, достаточно внести корректировки в таблицу диалектов транслятора входного языка.

Итак, принципы входного языка пакета АРГО-1 развивают положения [6] и рассчитаны на диалог проектировщиков-электриков с пакетом через терминальные устройства типа Видеотон 340 (дисплей) или Т 67 (телетайп).

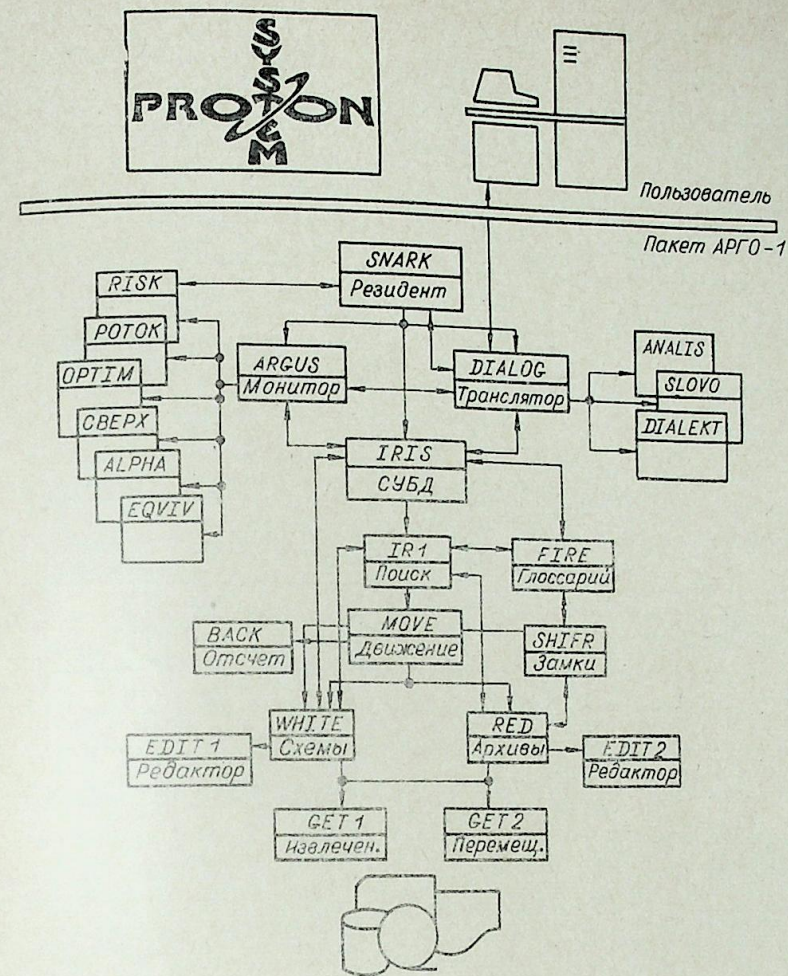


Рис. 1. Блок-схема пакета АРГО-1.

Система управления базой данных ИРИС замкнутого типа, аналогична обобщенной информационной системе IIS фирмы IBM [7] и рассчитана на обслуживание пользователей непрограммистов и работу с прикладными программами. Пользователю предоставлена возможность записать схему на базу данных, стереть схему, обновить параметры ее элементов, скопировать файл и т. д. Предусмотрены замки доступа для каждой схемы или архива нагрузок наравне с паролями администратора данных пакета.

Основная особенность пакета в целом — использование алгоритмического языка ФОРТРАН IV, что обеспечивает его прохождение на ЕС ЭВМ и БЭСМ-6 с емкостью оперативной памяти 128К и 30К соответственно. Для повышения эффективности разрабатываются модули доступа к данным на языке PL-1.

В настоящее время отлажена мониторная часть пакета и стартовые варианты всех перечисленных проблемных программ и отработывается их стыковка. Интерактивный вариант реализуется на БЭСМ-6 на базе комплекса терминальных подпрограмм Ю. А. Дмитриева (Сибирский научно-исследовательский институт энергетики).

Затраты труда на разработку и отладку пакета составили около 18 человеко-лет, пять из которых пришлось на управляющие алгоритмы пакета.

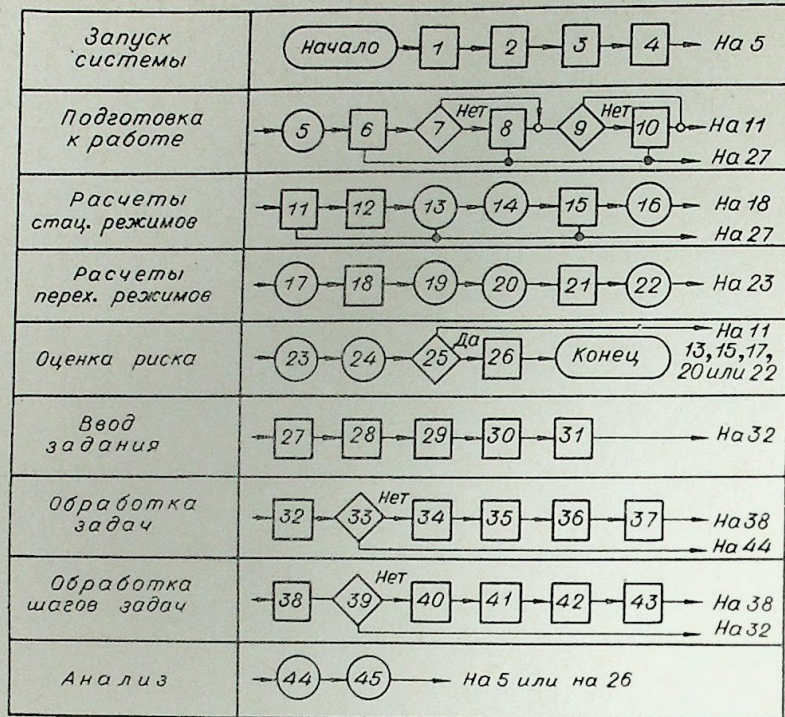


Рис. 2. Алгоритм человеко-машинного проектирования электрических сетей энергосистем в пакете АРГО-1.

Кружками обозначены действия человека, квадратами — действия пакета. Шаги алгоритма: 1 — вызов личной библиотеки; 2 — инициализация ядра; 3 — разметка памяти; 4 — отчет; 5 — составление плана работы; 6 — расчет стационарных режимов; 7 — «нагрузки рассчитаны?»; 8 — прогноз нагрузок; 9 — «достаточно ли памяти для схемы?»; 10 — эквивалентирование; 11 — приближенные расчеты режимов; 12 — оценка риска; 13 — расчет дополнительных стационарных режимов; 14 — выбор основных режимов; 15 — точные расчеты режимов; 16 — оценка риска статических отказов; 17 — определение тяжелых переходных режимов; 18 — приближенные расчеты переходных режимов; 19 — оценка риска переходных режимов; 20 — расчет дополнительных переходных режимов; 21 — точные расчеты некоторых переходных режимов; 22 — оценка риска динамических отказов; 23 — оценка безопасности сети; 24 — оптимизация затрат; 25 — «режим оптимален?»; 26 — запись результатов на базу данных; 27 — запуск мониторинга системы; 28 — ввод задания; 29 — трансляция задания; 30 — запись задания на диск; 31 — составление очереди задач; 32 — выборка задач из очереди; 33 — «конец задания?»; 34 — формирование таблицы управления задачей; 35 — формирование таблиц управления файлами; 36 — составление очереди шагов задачи; 37 — загрузка и настройка программы; 38 — выборка шага задачи; 39 — «конец задачи?»; 40 — извлечение схемы и архива с базы данных; 41 — ввод корректировок шага задачи; 42 — расчет по загруженной программе; 43 — вывод результатов; 44 — анализ решения; 45 — корректировка задания.

Блок-схема пакета приведена на рис. 1, принцип работы пояснен на рис. 2.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность Ю. А. Дмитриеву за обсуждение полученных результатов и ценные замечания.

ВЫВОДЫ

1. Сформулированы общие принципы машинного проектирования электрических сетей энергосистем.
2. Разработаны алгоритмы интерактивного проектирования электрических сетей энергосистем.
3. Разработан язык высокого уровня логического программирования комплексных сетевых задач.
4. Разработана архитектура пакета прикладных программ машинного проектирования электрических сетей энергосистем.

Сибирский научно-исследовательский институт энергетики, Новосибирск

Поступила в редакцию 12/X 1977

1. В. З. Манусов, М. И. Вечерский. Структура математического обеспечения автоматизированной системы вероятностного проектирования электрических сетей энергосистем. V Респ. научно-техн. конф. энергетиков. Тезисы докл. Ташкент, 1976, с. 121—122.
2. A. D. Patton. Assessment of the security of operating Electric Power systems using probability methods.— IEEE Trans. on PAS 1974, 62, No 7, July, 892—901.
3. В. З. Манусов, А. В. Лыкин. Анализ режимов электрических систем методом статистической линеаризации.— Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1974, № 8, сер. техн. наук, вып. 2, 137—145.
4. Ю. М. Сидоркин. Оптимизация установившихся режимов электрических систем при вероятностном характере исходной информации. Автореф. канд. дис. Новосибирск, 1975. 25 с.
5. В. З. Манусов, В. П. Костромин. Стохастическая модель краткосрочного прогнозирования электрических нагрузок энергосистем.— V Респ. научно-техн. конф. энергетиков. Тезисы докладов. Ташкент, 1976, с. 122.
6. M. Kochen, C. Abraham, E. Wong. Adaptive man-machine concept-processing. IBM Corp., Thomas J. Watson Res. Center, Yorktown Heights, N. Y.
7. Информационные системы общего назначения. Аналитический обзор систем управления базами данных. Под ред. Е. Л. Ющенко. М., «Статистика», 1975.

УДК 621.315.1.015.38

И. А. ЕФРЕМОВ, М. Л. ЛЕВИНШТЕЙН, Е. А. СМИРНОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРЕКРЫТИЯ СИСТЕМЫ
ВОЗДУШНЫХ ПРОМЕЖУТКОВ
ПРИ РАЗЛИЧНЫХ АППРОКСИМАЦИЯХ ЗАКОНОВ
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗРЯДНОГО НАПРЯЖЕНИЯ
И ВОЗДЕЙСТВУЮЩИХ ПЕРЕНАПРЯЖЕНИЙ

Координация внешней изоляции линий электропередачи и подстанций с характеристиками защитных устройств от перенапряжений требует определения вероятности перекрытия системы большого числа промежутков при воздействии на них коммутационных перенапряжений. Обычно эта задача решается в упрощенной постановке, предполагается, что разрядное напряжение системы промежутков и максимумы воздействующих на нее напряжений подчинены нормальному закону распределения вероятностей [1]. В действительности экспериментально подтверждена лишь нормальность распределения разрядного напряжения единичного промежутка [1] и воздействующих перенапряжений при отсутствии специальных мер для принудительного их ограничения [2]. Разрядное напряжение системы промежутков не может поэтому подчиняться нормальному закону распределения, его закон распределения характеризуется некоторой асимметрией и эксцессом. Исследования показывают, что закон распределения воздействующих перенапряжений в общем случае не является нормальным.

Поэтому при определении вероятности перекрытия системы промежутков представляет интерес вопрос о приемлемости указанных выше предположений о нормальности законов распределения перенапряжений и разрядного напряжения системы.

Для решения этого вопроса положим, что разрядное напряжение каждого промежутка системы подчинено нормальному закону распределения с параметрами m_1 и σ_1 , следовательно, функция распределения разрядного напряжения промежутка имеет вид

$$F_1(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right),$$

где $\Phi_0(x)$ — функция Лапласа.

Тогда функция распределения $F_n(x)$ разрядного напряжения системы из n промежутков может быть представлена в виде

$$F_n(x) = 1 - [1 - F_1(x)]^n = 1 - \left[\frac{1}{2} - \Phi_0\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)\right]^n. \quad (1)$$

Приближенная аппроксимация функции распределения $F_n(x)$ нормальной функцией распределения $F_n^*(x)$ может быть осуществлена следующим образом [1]:

$$F_n^*(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{x-m_n^*}{\sigma_n^*}\right),$$

где m_n^* и σ_n^* — математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение разрядного напряжения системы из n промежутков в рассматриваемой аппроксимации. Тогда при совпадении значений $F_n(x)$ и $F_n^*(x)$ при $x = m_n^*$ получаем

$$m_n^* = m_1 - \sigma_1 \operatorname{arcs} \Phi_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right), \quad (2)$$

где $\operatorname{arcs} \Phi_0(x)$ — функция, обратная функции Лапласа.

Далее при совпадении крутизны функций $F_n(x)$ и $F_n^*(x)$ в точке $x = m_n^*$, т. е. при совпадении в этой точке соответствующих плотностей распределения вероятностей, находим

$$\sigma_n^* = \sigma_1 \frac{2^{\frac{n-1}{n}}}{n} e^{\alpha^2/2};$$

$$\alpha = \operatorname{arcs} \Phi_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right). \quad (3)$$

Если исходить из истинной функции распределения разрядного напряжения (1), то его математическое ожидание m_n и центральные моменты $\mu_{k,n}$ могут быть определены из выражений

$$m_n = \frac{n}{\sigma_1} \int_{-\infty}^{\infty} x \left[\frac{1}{2} - \Phi_0\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)\right]^{n-1} \varphi\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right) dx,$$

$$\mu_{k,n} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m_n)^k f_n(x) dx = \frac{n}{\sigma_1} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m_n)^k \times$$

$$\times \left[\frac{1}{2} - \Phi_0\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)\right]^{n-1} \varphi\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right) dx, \quad (4)$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ — плотность нормированного нормального распределения.

Подставляя в последнее выражение переменную интегрирования $y = \frac{x-m_1}{\sigma_1}$, и вводя обозначения

$$a_{s,n} = n \int_{-\infty}^{\infty} y^s \left[\frac{1}{2} - \Phi_0(y)\right]^{n-1} \varphi(y) dy, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

перепишем выражения (4) и (5) в виде

$$\frac{m_n - m_1}{\sigma_1} = a_{1,n};$$

$$\frac{\mu_{k,n}}{\sigma_1^k} = n \int_{-\infty}^{\infty} (y - a_{1,n})^k \left[\frac{1}{2} - \Phi_0(y)\right]^{n-1} \varphi(y) dy =$$

$$= \sum_{s=0}^k (-1)^s C_k^s a_{1,n}^s a_{k-s,n}.$$

Поскольку при $n > 2$ интегралы $a_{s,n}$ не удается вычислить аналитически, их численное определение осуществлялось с помощью специально составленной программы для ЭВМ БЭСМ-4. Результаты расчетов приведены на рис. 1, 2 и в табл. 1 в виде зависимостей от n отношений

Таблица 1

Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение разрядного напряжения при точном и приближенном способах их определения, коэффициент асимметрии и эксцесс в зависимости от числа промежутков

n	$\frac{m_1 - m_n^*}{\sigma_1}$	$\frac{m_1 - m_n}{\sigma_1}$	$\frac{\sigma_n^*}{\sigma_1}$	$\frac{\sigma_n}{\sigma_1}$	$-S_n$	E_n
2	0,548	0,564	0,822	0,826	0,137	0,061
3	0,820	0,846	0,742	0,747	0,213	0,115
4	1,003	1,029	0,697	0,701	0,264	0,161
5	1,136	1,163	0,666	0,668	0,302	0,199
6	1,237	1,267	0,638	0,645	0,332	0,231
7	1,317	1,352	0,616	0,626	0,356	0,260
8	1,392	1,423	0,604	0,611	0,376	0,285
9	1,461	1,485	0,598	0,598	0,394	0,308
10	1,506	1,539	0,582	0,587	0,409	0,328
20	1,825	1,909	0,510	0,517	0,510	0,479
40	2,115	2,180	0,460	0,476	0,577	0,600
60	2,273	2,331	0,435	0,453	0,610	0,668
80	2,380	2,436	0,421	0,440	0,631	0,719
100	2,460	2,516	0,406	0,428	0,645	0,759
200	2,700	2,749	0,383	0,401	0,700	0,910
400	2,920	2,969	0,357	0,378	0,740	1,050
600	3,050	3,092	0,345	0,366	0,760	1,120
800	3,130	3,176	0,338	0,359	0,780	1,160
1000	3,200	3,242	0,335	0,351	0,786	1,164

$(m_1 - m_n)/\sigma_1$ и σ_n/σ_1 , а также коэффициента асимметрии $S_n = \frac{\mu_{3,n}}{\sigma_n^3}$ и экс-

цесса $E_n = \frac{\mu_{4,n}}{\sigma_n^4} - 3$.

Из табл. 1, в которой приведены также значения $(m_1 - m_n^*)/\sigma_1$ и σ_n^*/σ_1 , полученные приближенным способом по формулам (2) и (3), следует, что различия в математических ожиданиях и средних квадратических отклонениях разрядного напряжения, полученных точным и приближенным способом, сравнительно малы во всем рассмотренном диапазоне числа промежутков n . Поэтому нужно выяснить роль асимметрии и эксцесса кривой распределения разрядных напряжений системы промежутков на вероятности ее перекрытия.

Предположим, что максимумы перенапряжений U_{\max} , которые будем считать одинаковыми на каждом из n промежутков, распределены по нормальному закону с математическим ожиданием m_U и средним квадратическим отклонением σ_U .

Рассмотрим ряд вариантов определения вероятности перекрытия системы промежутков при различных аппроксимациях закона распределения разрядного напряжения.

1. При аппроксимации закона распределения разрядного напряжения нормальным законом вероятность перекрытия системы промежутков $P_n = P[U_{\max} - U_{pn} > 0]$, где U_{pn} — разрядное напряжение системы определится как вероятность неравенства $P[X > 0]$, в котором X — случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами $m_X = m_U - m_n$ и $\sigma_X^2 = \sigma_U^2 + \sigma_n^2$.

Поэтому в рассматриваемом случае

$$P_n = \frac{1}{2} \Phi_0 \left(\frac{m_U - m_n}{\sqrt{\sigma_U^2 + \sigma_n^2}} \right). \quad (6)$$

Если для аппроксимации закона распределения разрядного напряжения системы используется описанный выше приближенный способ,

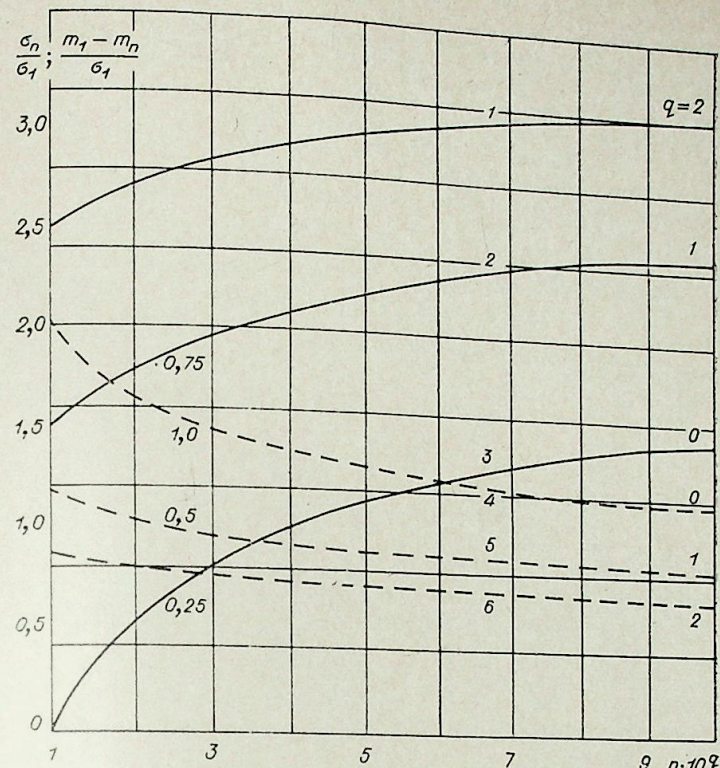


Рис. 1. Зависимости параметров $(m_1 - m_n)/\sigma_1$ (кривые 1, 2, 3) и σ_n/σ_1 (кривые 4, 5, 6) от числа промежутков n .

то в выражении (6) параметры m_n и σ_n должны быть заменены на m_n^* и σ_n^* .

2. Для аппроксимации закона распределения разрядного напряжения законом Грама — Шарлье используются параметры m_n , σ_n , S_n и E_n , с которыми будем иметь [3]

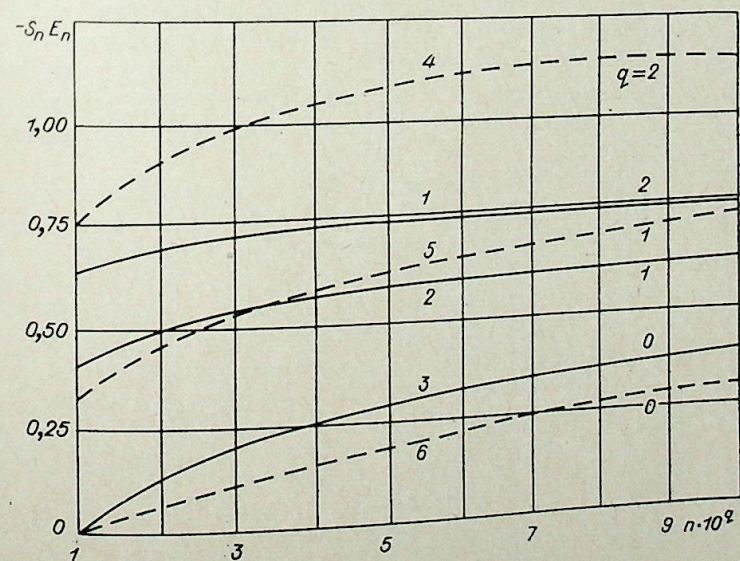


Рис. 2. Зависимости коэффициента асимметрии S_n (кривые 1, 2, 3) и эксцесса E_n (кривые 4, 5, 6) разрядного напряжения системы промежутков от числа промежутков n .

$$f_n(x) = \frac{1}{\sigma_n} \left[\varphi(z) - \frac{S_n}{3!} \frac{d^3\varphi(z)}{dz^3} + \frac{E_n}{4!} \frac{d^4\varphi(z)}{dz^4} \right];$$

$$z = \frac{x - m_n}{\sigma_n}.$$

Вероятность перекрытия системы определится в виде

$$P_n = P[(U_{\max} - U_{p,n}) > 0] = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \left[\frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{x - m_U}{\sigma_U}\right) \right] dx.$$

Вычисление последнего интеграла дает

$$P_n = \frac{1}{2} + \Phi_0(\eta_n) + \xi_n^3 \left[\frac{S_n}{3!} (\eta_n^2 - 1) + \frac{E_n}{4!} \xi_n \eta_n (\eta_n^2 - 3) \right] \varphi(\eta_n),$$

где

$$\eta_n = \frac{m_U - m_n}{\sqrt{\sigma_U^2 + \sigma_n^2}}; \quad \xi_n = \frac{\sigma_n}{\sqrt{\sigma_U^2 + \sigma_n^2}}.$$

3. При законе распределения разрядного напряжения, определяемого формулой (1), вероятность перекрытия системы может быть определена как

$$P_n = 1 - (1 - P_1)^n, \quad (8)$$

где P_1 — вероятность перекрытия единичного промежутка, равная

$$P_1 = P[(U_{\max} - U_{p,1}) > 0] = \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{m_U - m_1}{\sqrt{\sigma_U^2 + \sigma_1^2}}\right).$$

Поэтому

$$P_n = 1 - \left[\frac{1}{2} - \Phi_0\left(\frac{m_U - m_1}{\sqrt{\sigma_U^2 + \sigma_1^2}}\right) \right]^n.$$

Обработка результатов расчетов перенапряжений при различных коммутациях линий электропередачи показывает, что закон распределения перенапряжений достаточно хорошо аппроксимируется нормальным законом лишь при отсутствии специальных устройств для ограничения перенапряжений. При наличии на ВЛ магнитно-вентильных разрядников или при оснащении выключателей малоомными шунтирующими сопротивлениями распределение максимумов перенапряжений характеризуется некоторой асимметрией и эксцессом и должно описываться законом Грама-Шарлье.

Рассмотрим варианты определения вероятности перекрытия системы при различных аппроксимациях закона распределения разрядного напряжения системы, принимая в качестве закона распределения максимумов перенапряжений закон Грама-Шарлье.

Аппроксимация закона распределения разрядного напряжения нормальным законом. Вероятность перекрытия в этом случае может быть представлена в виде

$$P_n = P[(U_{\max} - U_{p,n}) > 0] = \int_{-\infty}^{\infty} f_U(x) \left[\frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{x - m_n}{\sigma_n}\right) \right] dx,$$

где

$$f_U(x) = \frac{1}{\sigma_U} \left[\varphi(U) - \frac{S_U}{3!} \frac{d^3\varphi(U)}{dU^3} + \frac{E_U}{4!} \frac{d^4\varphi(U)}{dU^4} \right],$$

$$U = \frac{x - m_U}{\sigma_U}.$$

Соответствующие выкладки дают

$$P_n = \frac{1}{2} + \Phi_0(\eta_n) + \xi_n^3 \left[\frac{S_U}{3!} (\eta_n^2 - 1) - \frac{E_U}{4!} \xi_n \eta_n (\eta_n^2 - 3) \right] \varphi(\eta_n), \quad (9)$$

где

$$\eta_n = \frac{m_U - m_n}{\sqrt{\sigma_U^2 + \sigma_n^2}}; \quad \xi_n = \frac{\sigma_U}{\sqrt{\sigma_U^2 + \sigma_n^2}}.$$

Закон распределения разрядного напряжения, определяемый формулой (1). Воспользовавшись для определения вероятности перекрытия формулой (8), получим

$$P_n = 1 - \left\{ \frac{1}{2} - \Phi_0(\eta_1) - \xi_1^3 \left[\frac{S_U}{3!} (\eta_1^2 - 1) - \frac{E_U}{4!} \xi_1 \eta_1 (\eta_1^2 - 3) \right] \varphi(\eta_1) \right\}^n,$$

$$\eta_1 = \frac{m_U - m_1}{\sqrt{\sigma_U^2 + \sigma_1^2}}; \quad \xi_1 = \frac{\sigma_U}{\sqrt{\sigma_U^2 + \sigma_1^2}}.$$

Из выражения (7) следует, что аппроксимация закона распределения разрядного напряжения системы нормальным законом должна приводить к занижению вероятности перекрытия, поскольку истинный закон распределения (рис. 2) обладает отрицательным коэффициентом асимметрии S_n и положительным эксцессом E_n (в реальных условиях $\eta < 0$). Подобным же образом из формулы (9) следует, что аппроксимация закона распределения максимумов перенапряжения нормальным законом также должна приводить к занижению вероятности перекрытия, поскольку, как показывают расчеты, действительный закон распределения перенапряжений обладает положительными коэффициентами асимметрии S_U и эксцессом E_U .

Для оценки количественного влияния этих факторов были проведены расчеты вероятности перекрытия изоляции ВЛ при коммутации включения ее во время цикла ТАПВ. Схема электропередачи и ее параметры приведены на рис. 3, а. При определении максимумов перенапряжений в различных точках ВЛ принималось, что моменты включения э. д. с. распределены по закону равномерной плотности в интервалах 0, л. Остаточное напряжение U_0 на аварийной фазе ВЛ принималось

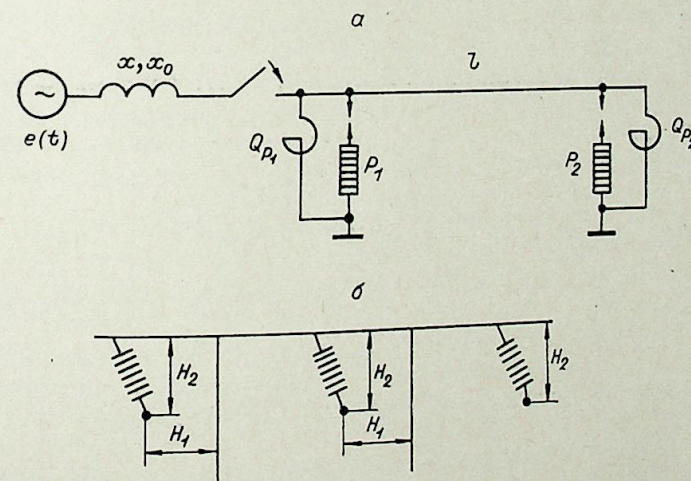


Рис. 3. Принципиальная схема электропередачи (а) и основные промежутки на опорах ВЛ (б).
 $l = 450$ км; $x/z = 0,146$, $x_0/z = 0,115$; $x_p/z = 6,4$; $z_0 = 242$ Ом; $z_0 = 506$ Ом; $U_{\text{вып}}/U_{\Phi} = 1,1$.

Таблица 2

Вероятности перекрытия изоляции ВЛ, отвечающие различным аппроксимациям законов распределения перенапряжений и разрядного напряжения

Закон распределения перенапряжений	Закон распределения разрядного напряжения	Вероятности перекрытия изоляции ВЛ при различных высотах $H_1=H_2=H, M$			Номер кривой на рис. 4
		7	8	9	
Нормальный с параметрами $m_U = 1,53 U_{ф \max}$; $\sigma_U = 0,14 U_{ф \max}$	Нормальный с параметрами m_n^* и σ_n^*	$6,40 \cdot 10^{-3}$	$2,09 \cdot 10^{-4}$	$5,34 \cdot 10^{-6}$	1
	Нормальный с параметрами m_n и σ_n	$7,70 \cdot 10^{-3}$	$2,95 \cdot 10^{-4}$	$1,057 \cdot 10^{-5}$	2
	Грама — Шарлье	$1,20 \cdot 10^{-2}$	$5,734 \cdot 10^{-4}$	$2,63 \cdot 10^{-5}$	3
	По формуле (1)	$1,41 \cdot 10^{-2}$	$6,83 \cdot 10^{-4}$	$3,03 \cdot 10^{-5}$	4
Грама — Шарлье с параметрами $m_U = 1,53 U_{ф \max}$; $\sigma_U = 0,14 U_{ф \max}$; $S_U = 0,75$; $E_U = 0,95$.	Нормальный с параметрами m_n^* и σ_n^*	$2,72 \cdot 10^{-2}$	$1,91 \cdot 10^{-3}$	$9,64 \cdot 10^{-5}$	5
	Нормальный с параметрами m_n и σ_n	$3,31 \cdot 10^{-2}$	$2,09 \cdot 10^{-3}$	$1,20 \cdot 10^{-4}$	6
	По формуле (1)	$5,76 \cdot 10^{-2}$	$3,98 \cdot 10^{-3}$	$2,74 \cdot 10^{-4}$	7

равным нулю, а остаточные напряжения на здоровых фазах предполагались распределенными по закону равномерной плотности в интервалах: $-0,8, -0,3$, и $0,3, 0,8 U_{вып}$, где $U_{вып}$ — вынужденное напряжение в конце разомкнутой линии передачи в симметричном режиме [2].

Принятым в расчетах параметрам электропередачи соответствует $U_{вып} = 1,1 U_{ф}$. Установленные на линии магнитно-вентильные разрядники отвечают требованию глубокого ограничения перенапряжений. В расчетах предполагалось, что пробивное напряжение искровых промежутков разрядников подчинено нормальному закону с математическим ожиданием $U_{пр} = 1,4 U_{ф}$ и средним квадратическим отклонением $\sigma[U_{пр}] = 0,06 U_{ф}$. Вольт-амперная характеристика рабочих сопротивлений разрядников принималась в виде $U = ci^\alpha$ ($c = 1,4$; $\alpha = 0,38$).

Вероятность перекрытия изоляции определялась для ВЛ со свободной подвеской проводов (рис. 3, б).

Если обозначить число промежутков типа H_1 (провод — стойка опоры в отклоненном положении гирлянды), подвергающихся воздействию перенапряжений, через n_1 , а число промежутков типа H_2 — через n_2 , то вероятность перекрытия изоляции линии в целом определится выражением

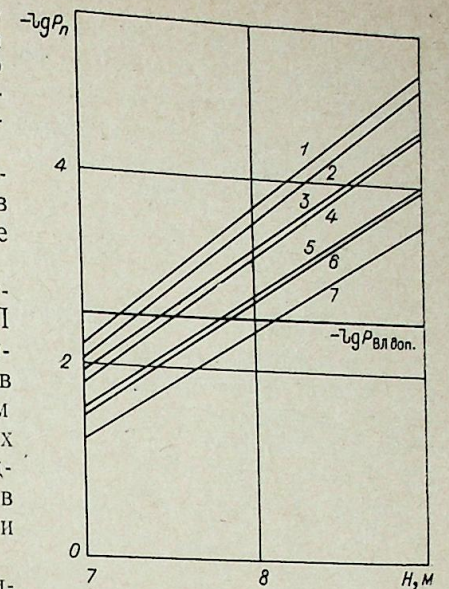
$$P_{ВЛ} = 1 - (1 - P_{n_1}^{(H_1)})(1 - P_{n_2}^{(H_2)}),$$

где $P_{n_1}^{(H_1)}$ и $P_{n_2}^{(H_2)}$ — вероятности перекрытия совокупностей промежутков типа H_1 и H_2 .

Расчеты показывают, что при определении вероятности перекрытия ВЛ, защищенной разрядниками, достаточно учесть число промежутков, приходящихся на среднюю часть линии, составляющую примерно 1/3 ее длины.

Результаты расчетов вероятности перекрытия изоляции ВЛ сведены в табл. 2 и иллюстрируются зависимостями $-\lg P_{ВЛ}$ от габарита $H = H_1 = H_2$ (рис. 4). На этом же рисунке нанесена прямая $\lg P_{ВЛ \text{ опт}}$, где $P_{ВЛ \text{ опт}}$ — оптимальная вероятность перекрытия изоляции ВЛ, полученная путем минимизации приведенных затрат на сооружение линии, учитыва-

Рис. 4. Зависимость $-\lg P_{ВЛ}$ от H при различных гипотезах о законах распределения максимумов перенапряжений и разрядного напряжения системы промежутков (табл. 2).



ющих зависимость стоимости ее сооружения от габаритов промежутков на опорах и ущербы, обусловленные перекрытиями изоляции ВЛ.

Примем, что допустимая вероятность перекрытия изоляции ВЛ $P_{ВЛ \text{ доп}}$ во время осуществления единичной коммутации включения в цикле ТАПВ равна 0,003, и оценим требуемые габариты воздушных промежутков при различных предположениях относительно законов распределения перенапряжений и разрядных напряжений.

Из рис. 4 следует, что к минимальным габаритам приводит общепринятая аппроксимация законов распределения перенапряжений и разрядных напряжений нормальным законом. Наиболее точная аппроксимация (кривая 7) дает наибольшие габариты воздушных промежутков на опоре. Поскольку зависимости $-\lg P_{ВЛ}$ практически линейны аналогичное положение будет наблюдаться и при других значениях $P_{ВЛ \text{ доп}}$.

С увеличением габаритов промежутков на опорах (с повышением класса напряжения ВЛ) расхождение в них, полученное при различных способах аппроксимации законов распределения перенапряжений и разрядных напряжений, увеличивается.

ВЫВОДЫ

1. Вероятности перекрытия, полученные при аппроксимации законов распределения перенапряжений и разрядного напряжения системы нормальными законами, существенно отличаются от значений, полученных при истинных законах распределения. В зависимости от габарита H ($H = 7-9$ м) упрощенное определение вероятности перекрытия приводит к ее занижению в 9-50 раз.

2. Замещение истинного закона распределения перенапряжений нормальным законом приводит к большим ошибкам в определении вероятностей перекрытия, чем замещение нормальным законом истинного закона распределения разрядного напряжения системы. В рассмотренном случае первый из указанных факторов приводит к уменьшению вероятности перекрытия в 4-20 раз (в зависимости от значений H и вида закона распределения $U_{пр}$); второй — в 2-6 раз (в зависимости от H и вида закона распределения перенапряжений).

3. Оптимальные в технико-экономическом отношении габариты промежутков на опорах ВЛ заметно зависят от способа аппроксимации законов распределения перенапряжений и разрядного напряжения системы. При этом приближенный способ определения вероятностей перекрытия, основанный на аппроксимации обоих законов распределения нормальными законами, дает заниженные значения габаритов промежутков. При выборе оптимальных габаритов с помощью приближенного

способа определения вероятностей перекрытия фактическая ненадежность работы изоляции ВЛ на порядок превышает ее расчетную ненадежность.

Сибирский научно-исследовательский институт энергетики,
Новосибирск

Поступила в редакцию
26/V 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Н. Александров, В. Л. Иванов, В. Е. Кизеветтер. Электрическая прочность наружной высоковольтной изоляции. М., «Энергия», 1969. 239 с.
2. Д. Е. Артемьев, Н. Н. Тиходеев, С. С. Шур. Статистические основы выбора изоляции линий электропередачи высших классов напряжения. М.—Л., «Энергия», 1965. 376 с.
3. Б. Р. Левин. Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. 1. М., «Советское радио», 1974. 550 с.

УДК 621.311

Г. В. НОЗДРЕНКО, И. А. КУЗЬМИНА, Н. Д. СЫЧЕВА

РАЗДЕЛЕНИЕ ЗАТРАТ ТОПЛИВА ПРИ ПРОИЗВОДСТВЕ ТЕПЛА И ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ НА ТЭЦ

При разработке математических моделей функционирования теплофикационных установок для АСУ ТЭС необходимо располагать методикой оценки расходов топлива на отпускаемую электроэнергию и тепло. В последнее время предложен ряд методов разделения затрат топлива [1—5].

В данной статье сделана попытка провести сравнительный анализ некоторых методов и наметить пути объективного разделения затрат топлива между отпускаемой электроэнергией и теплом.

Как известно, физический метод приводит к условному разделению затрат. В принципе он учитывает длину технологического процесса производства тепла, однако оставляет без оценки качество отпускаемых продуктов. Методы [1—3] оценивают качество отпускаемых продуктов, но не учитывают длину технологического процесса (согласно принципу «черного ящика» затраты распределяются пропорционально эксергии тепла и электроэнергии). В [4] также используется разделение затрат по типу «черного ящика». Однако на «выходе» проводится коррекция полученного результата условным введением «продаваемой» части энергии отпускаемого тепла. Естественный результат при применении [1—4] — результат условный. В [5] учтена длина технологического процесса производства тепла. При этом использовано условное приведение отпускаемого тепла к эквивалентному количеству электроэнергии.

Наряду с положительными качествами такой подход имеет и отрицательный результат: это условное *приведение ведет* к тому, что в конечном сечении технологического процесса работа, произведенная паром в ЧВД, сравнивается с эквивалентной работой, которая была бы произведена паром П- и Т-отборов в ЧНД турбины. В итоге искажается ценность энергии, что отражается на результате разделения затрат. Кроме того, в методическом плане применение [5] при анализе Р-турбины приводит к искусственной оценке по типу «черного ящика». Однако в целом подход, предложенный в [5], позволяет надеяться на более объективную, чем по [1—4], оценку.

Развивая принципы анализа [6—8], учитывая положительные стороны физического метода и методов [1—5], а также используя подход, изложенный в [9], можно сделать попытку решить задачу о разделении затрат следующим образом.

Теплоэнергетической установке (ТЭУ) вместе с взаимосвязями с внешней средой можно поставить в соответствие некоторый ориентированный граф [9]

$$\Gamma = \{I, J\}. \quad (1)$$

Множество вершин I графа отображает элементы системы и внешней среды, а множество дуг J — связи между элементами. Для каждого

Расход топлива энергоустановкой (с турбиной ПТ-135-130/15)

Показатели	Абсолютные затраты, т/ч	Удельные затраты, г/кВт·ч
Расход топлива (в целом на энергоустановку)	71,2	—
Расход топлива на тепло (193,7 МВт), отпускаемое из П-отбора ($P=13$ бар)	23,5	121,3
Расход топлива на тепло (87,2 МВт), отпускаемое из верхнего Т-отбора (при $P_T=1,3$ бар)	5,5	63,6
Расход топлива на тепло (91 МВт), отпускаемое из нижнего Т-отбора	5,1	56
Расход топлива по энергоустановке на отпускаемое потребителю тепло (364,6 МВт)	34,1	93,7
Расход топлива на отпускаемую электроэнергию (122 МВт с учетом собственных нужд)	37,1	305

i -го элемента задается множество входов (множество элементов, из которых исходят дуги, входящие в элементы i)

$$V(i) = \{j \in I; (j, i) \in J\}$$

и множество выходов (множество элементов, в которые приходят дуги, исходящие из элементов i)

$$W(i) = \{j \in I; (i, j) \in J\}$$

Все множество вершин I графа Γ можно разделить на несколько непересекающихся множеств (например, I_1 соответствует источникам «сырья», I_2 — потребителям, I_3 — элементам технологической схемы и т. д.).

С каждой дугой, ведущей из элемента i в элемент j , связана величина E_{ij} , называемая потоком по ветви и представляющая собой количество некоторого продукта элемента i , поставляемого элементу j . Для любого элемента $i \in I_3$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} E_{ij} &= E \{E_{hi}; \forall k \in V(i)\}, \forall j \in W(i); \\ \{E_{hi}; \forall k \in V(i); E_{ij}, \forall j \in W(i)\} &\in R_i^*; \\ \sum_{h \in V(i)} E_{hi} - \sum_{j \in W(i)} E_{ij} &\geq 0; \quad E_{ij} \leq E_{ij}^*; \quad \sum_{j \in W(i)} E_{ij} \leq E_i^*, \end{aligned} \quad (2)$$

где R_i^* — некоторые замкнутые области (определяемые техническими условиями); E_{ij}^* , E_i^* — максимальная производительность по данному виду продукта и по всем видам продуктов i -го элемента. В целом для функционирующей ТЭУ в данном случае можно записать:

$$\sum_{j \in I_2} \sum_i c_{ij} E_{ij} = \sum_{i \in I_1} \sum_j c_{ij} E_{ij}, \quad (3)$$

где c_i , c_j^2 — некоторые затраты, приписываемые единице исходного и конечного продукта (удельные затраты).

Основное свойство E_{ij} состоит в том, что эта величина несет информацию о физическом процессе в ТЭУ, т. е. находится в соответствии с ним. По пути технологического процесса E_{ij} может менять свою физическую природу. Очевидно, E_{ij} сопоставимы: 1) если E_{ij} приведены к E_{ij}^{**} , имеющим одинаковую физическую природу, при сохранении той инфор-

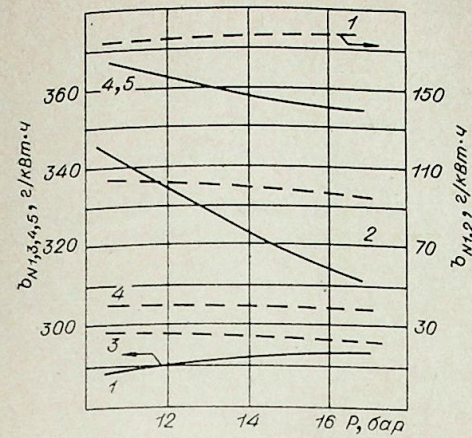
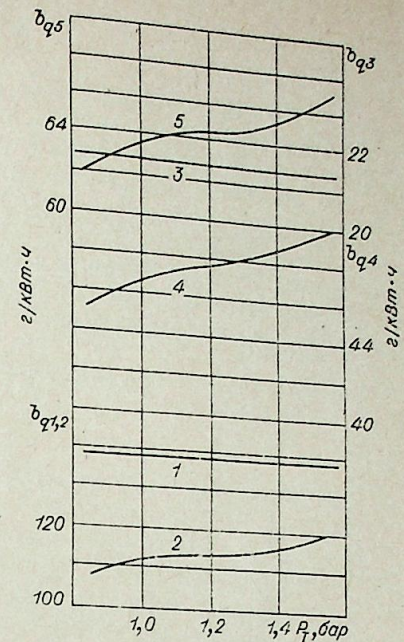


Рис. 1. $b_N = f(P)$.

Р-100-130/13; — — — ПТ-135-130/15;
1 — по физическому методу; 2 — по [4]; 3 — по [1—3]; 4 — по методу авторов; 5 — по [5].

Рис. 2. $b_q = f(P_T)$ для Т-175-130.

1 — по физическому методу; 2 — по [4]; 3 — по [1—3]; 4 — по методу авторов; 5 — по [5].



мации, которую несут E_{ij} ; 2) если E_{ij}^{**} относятся к одному сечению технологического процесса

$$E_{ij} \Rightarrow E_{ij}^{**}; \{ \forall j \in W(i), \exists E_{ij}^{**}, c_{ij}^{**} = \text{idem} \}, i \in I_3. \quad (4)$$

Из (1) — (4) следует, что E_{ij}^{**} неравноценны в смысле удельных затрат c_{ij}^{**} (c_{ij}^{**} тем выше, чем ближе $i \in I_3$ к I_2 графа Γ ; это свойство можно было бы назвать принципом неравноценности потоков). Система уравнений (1) — (4) описывает состояние графа Γ и соответствующую ему технологическую схему ТЭУ. Применяя (1) — (4) к теплофикационной установке, можно получить расходы топлива на отпускаемое тепло и электроэнергию. Такой подход естествен, достаточно прост, удобен и понятен инженеру-энергетику и одновременно строг, исключает какие-либо условности.

В таблице для примера приведены результаты расчета на ЭЦВМ одного из режимов работы установки с турбиной ПТ-135-130/15. В качестве E_{ij}^{**} рассматривались потоки эксергии. Для простоты в расчетах расход электроэнергии собственных нужд, приходящий на отпускаемое тепло, условно отнесен к отпускаемой электроэнергии.

На ЭЦВМ разными методами были выполнены расчеты энергоустановок с турбинами ПТ-135-130/15, Т-175-130, Р-100-130/13 для различных режимов работы.

На рис. 1 показана зависимость удельного расхода топлива на отпускаемую электроэнергию (b_N) в функции от давления пара (P) П-отпускаемого (или противодействия). По [4] b_N ниже даже расходов топлив найденных физическим методом, что является отрицательной характеристикой метода. Расчеты по [1—3, 5] дают лишь качественные соотношения зависимости для b_N , отражая реальные количественные соотношения только в частных случаях (например, для Р-турбины, т. е. когда длины технологических процессов производства тепла и электроэнергии мало отличаются друг от друга). Методы [1—3] выгоду от комбинированного производства относят на выработку тепла, а [4, 5] — в большей степени на электроэнергию. Это иллюстрирует рис. 2, где приведены удельные расходы топлива на тепло (b_q) в зависимости от давления пара (P_T) в регулируемом теплофикационном отборе.

ВЫВОДЫ

1. Известные методы расчета затрат топлива на отпускаемое тепло и электроэнергию не учитывают либо технологические процессы производства тепла и электроэнергии, либо качество производимых продуктов, или содержат целый ряд условностей, приводящих к условности получаемых результатов при разделении затрат.

2. Применение «принципа равноценности потоков» позволяет эффективно распределять затраты топлива на тепло и электроэнергию. Такой подход естествен, достаточно прост, удобен и понятен инженеру-энергетику и одновременно строг.

Новосибирский электротехнический институт

Поступила в редакцию
25/V 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Шаргут, Р. Петела, Эксергия, М., «Энергия», 1968.
2. R Nitsch. Sonderdruck, Wiss.—Z. TN. Chemie. Leuna—Merseburg, 1965, 7, N. 2, 100.
3. Д. П. Гохштейн. Современные методы термодинамического анализа энергетических установок. М., «Энергия», 1969.
4. В. А. Слабиков. Распределение затрат топлива при комбинированном производстве электро- и теплоэнергии.—Изв. вузов. Энергетика, 1973, № 4.
5. А. Э. Пир, В. Б. Кунтыш. Эффективность выработки тепла и электроэнергии на ТЭЦ.—Изв. вузов. Энергетика, 1976, № 2.
6. А. И. Андрущенко. Термодинамические расчеты оптимальных параметров тепловых электростанций. М., «Высшая школа», 1963.
7. В. М. Бродянский. Эксергетический метод термодинамического анализа. М., «Энергия», 1973.
8. А. С. Горшков. Техничко-экономические показатели тепловых электростанций. М., «Энергия», 1974.
9. Г. В. Ноздренко. Использование эксергетической функции при математическом моделировании теплоэнергетических установок.—Изв. вузов. Энергетика, 1976, № 10.

УДК 621.454

Влияние процесса сжатия в воздухозаборнике на удельные тяговые характеристики ГПВРД. Затолока В. В., Звегинцев В. И., Шумский В. В. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 8, сер. техн. наук, вып. 2. с. 3—12.

В диапазоне чисел Маха полета от 8 до 15 рассмотрена зависимость внутренних удельных тяговых характеристик гиперзвукового прямооточного воздушно-реактивного двигателя со сверхзвуковым горением (ГПВРД) от характеристик процесса сжатия захватываемой струи воздуха в воздухозаборнике при использовании в качестве топлива водорода. При этом влияние процесса в воздухозаборнике определяется двумя независимыми величинами. Приведены графики тяговых характеристик в широком диапазоне изменения параметров процесса сжатия в воздухозаборнике. Рис. 9, табл. 1, библи. 7.

УДК 539.95 : 538.4

Влияние закрутки на свойства электрической дуги в цилиндрическом канале. Бербасов В. В., Урюков Б. А. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, сер. техн. наук, вып. 2. с. 13—17.

Теоретически исследовано влияние закрутки газа на свойства ламинарной электрической дуги, горящей в цилиндрическом пористом канале. Тангенциальная скорость на стенке камеры отлична от нуля, радиальная постоянна по длине. Считается, что осевые скорость и градиент давления линейно зависят от продольной координаты, что позволяет свести задачу к автономной. Расчеты показали, что закрутка потока проявляется на электрических свойствах дуги через перераспределение давления — создание разряжения в районе столба дуги. При достаточно больших параметрах вдува и скоростях закрутки на стенке напряженность электрического поля в воздушной дуге снижается на 20%. При уменьшении параметра вдува влияние закрутки снижается. В свою очередь, электрическая дуга сильно влияет на гидродинамику закрученного потока. Рис. 7, библи. 3.

УДК 537.523.5

Динамические характеристики электрической дуги, горящей в цилиндрическом канале. Бобнев А. А. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 8, сер. техн. наук, вып. 2. с. 18—30.

В терминах термической плазмы получены уравнения, позволяющие строить динамические характеристики для электрической дуги, выявлены недостатки прежних математических и эмпирических моделей, обнаружен эффект уменьшения модуля дифференциального сопротивления тонких электрических дуг в некотором диапазоне частот накладываемых на дугу гармонических колебаний, указана возможность выявления влияния произвольных малых возмущений на динамические характеристики электрической дуги с помощью интегрального преобразования Фурье. Библи. 2.

УДК 537.523

Экспериментальное исследование стабилизированной вихрем электрической дуги в продольном магнитном поле. Мельникова Т. С., Попенко В. Г., Уланов И. М. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 8, сер. техн. наук, вып. 2. с. 31—38.

Исследовались стационарная ($I_g=100-200$ А) и импульсная ($I_g=25$ кА) электрические дуги в аргоне и гелии в продольном магнитном поле $B_{max}=1,2$ Тесла. Диаметр плазменной камеры $2 \cdot 10^{-2}$ м. Изучалось влияние скорости вихревой крутки газа на поведение таких дуг. Приведены фотографии, полученные методом непрерывной развертки, вольт-амперные характеристики в зависимости от магнитного поля. Изучались тепловые потоки в стенку плазменной камеры спектральными методами определялась температура в зависимости от магнитного поля и вихревой скорости газа.

Показано, что с ростом магнитного поля стационарная дуга становится неустойчивой, напряжение дуги возрастает, особенно сильно в гелии, за счет уменьшения излучения дуги уменьшается тепловой поток в стенку канала, температура в центре дуги в аргоне при изменении от 0 до 1,2 Т падает от 11 500 до 8200°. При скоростях вихревого движения газа 80 м/с стационарную дугу в аргоне при магнитном поле 1,2 Т удается отжать от стенки камеры слоем холодного газа. Импульсная электрическая дуга достаточно стабильна и занимает среднюю зону вихря, не достигая стенок разрядной камеры. Рис. 12, библи. 11.

Исследование вольфрамовых катодов плазмотрона. Пустогаров А. В., Халбошин А. П., Захаркин Р. Я., Завидей В. И. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 8, сер. техн. наук, вып. 2, с. 39—45.

Приведены результаты исследования влияния геометрии вольфрамовых катодов (диаметр $d_k = 2-4 \cdot 10^{-3}$ м, длина $l_k = 0-45 \cdot 10^{-3}$ м), заделанных в медный охлаждаемый корпус, на их эрозию при токе $I = 150$ А в He ($p = 10^5$ Па). С уменьшением длины катода плотность тока в пятне возрастает от 10^7 до 10^9 А/м², удельный тепловой поток — от 10^4 до 10^7 кВт/м², температура — от 3600 до 5000 К, а эрозия при этом снижается от 10^{-10} до 10^{-11} кг/Кл.

Показано, что в диапазоне температур 3600—5000 К экспериментальные данные по плотности тока на вольфрамовых катодах описываются законом термоэмиссии при эффективной работе выхода электронов в диапазоне 4,2—4,6 эВ. Рис. 5, библиограф. 17.

УДК 621.387.143 : 546.11

Двухступенчатый многоэлектродный плазмотрон. Р. Я. Захаркин, А. В. Пустогаров, А. П. Халбошин. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 8, сер. техн. наук, вып. 2, с. 46—50.

Приведены результаты экспериментального исследования при атмосферном давлении в гелии двухступенчатого многоэлектродного плазмотрона. Проанализирована зависимость температуры термокатодов второй ступени от параметров обеих ступеней. Показано, что наличие маломощной дуги первой ступени позволяет нагреть основные термокатоды до температур 3000—32000 К, плавно зажечь вторую ступень и равномерно распределить ток по четырем термокатадам без дополнительных балластных сопротивлений. Рис. 5, библиограф. 12.

УДК 621.387

Измерение температуры электродов плазмотрона. Пустогаров А. В., Завидей В. И., Захаркин Р. Я., Халбошин А. П. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 8, сер. техн. наук, вып. 2, с. 51—61.

Проанализированы специфические особенности измерения температуры электродов плазмотронов в зоне дуги. Показано, что наиболее эффективно такие измерения проводятся средствами оптической пирометрии. В качестве иллюстраций представлены результаты измерений температур от 2800 до 5000 К и монохроматической излучательной способности вольфрамовых электродов разности геометрии при атмосферном давлении в аргоне и гелии в диапазоне токов 50—300 А. Оценены погрешности измерения излучательной способности электродов. Обсуждены перспективные методы определения температуры электродов, основанные на использовании стороннего источника излучения, поляризации излучения. С целью исключения излучения плазмы при измерениях рекомендуется осуществлять переход в инфракрасную область спектра. Рис. 7, табл. 1, библиограф. 48.

УДК 621.314.5

Особенности рабочих процессов в сильноточных газоразрядных приборах с отрицательной проводимостью. Баранников А. Л., Пекшев П. Ю. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 8, сер. техн. наук, вып. 2, с. 62—77.

Ранее была показана принципиальная возможность создания нового класса газоразрядных приборов, использующих свойства участка дифференциальной особенности новых вентилях — сочетание сильноточности с полной управляемостью.

Современный этап разработки вентилях такого типа характеризуется переходом от исследований на лабораторных слаботочных образцах к созданию мощных приборов. Настоящая работа посвящена изучению эффектов, которые при увеличении интегрального тока или плотности тока, пропускаемого через плазменные основные характеристики. Одним из основных факторов, которые требуют учета, является действие собственного магнитного поля, которые требуют учета, значительно увеличивать горения разряда, уменьшать критический ток разряда, изменять требуемый для гашения заданного тока I_D потенциала сетки $U_{с.гаш}$ и, наконец, вызывать гашение разряда. Пондеромоторные силы, возникающие при взаимодействии собственного магнитного поля с током разряда, могут вызывать

неравномерность загрузки сеточных отверстий, а в ряде случаев нарушать устойчивое горение разряда для определенной зоны отверстий. Кроме того, эксперименты показали, что в плазме сильноточного разряда развиваются интенсивные колебания, увеличивающие эффективную проводимость по отношению к столкновительной. Поскольку картина колебаний неоднородна по сечению, это также приводит к неравномерности распределения тока по сечению прибора.

Полученные результаты позволяют уточнить формулы для определения основных характеристик мощных газоразрядных приборов с участком дифференциальной проводимости на вольт-амперной характеристике. Рис. 15, библиограф. 26.

УДК 621.365

Нестационарный метод комплексного определения теплофизических свойств высокотемпературных материалов. Г. А. Алексеев, В. Д. Даргаев, В. И. Завидей, Г. Н. Мельников, А. В. Пустогаров. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 8, сер. техн. наук, вып. 2, с. 78—81.

Описывается методика комплексного определения монокроматической и интегральной излучательной способности, электросопротивления, теплопроводности и теплоемкости на одном образце за один импульсный нагрев в интервале температур, ограниченном сверху температурой плавления исследуемого материала, а снизу возможностями оптических пирометров. Приводятся результаты определения теплофизических свойств графита марки ГСП по стационарной и нестационарной методикам и отмечается удовлетворительное согласие между результатами, полученными по обоим методикам.

Рис. 4, библиограф. 5.

УДК 621.436

Экспериментальное исследование испарения капель углеводородных топлив при высоких температурах и давлениях газовой среды. Лебедев О. Н., Марченко В. Н. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 8, сер. техн. наук, вып. 2, с. 82—85.

Проведено экспериментальное исследование процесса испарения капель различных углеводородных топлив в неподвижной газовой среде (азот) в широком интервале температур и давлений. Описана методика проведения экспериментов, реализующая предложенный способ крепления капли на тонком вольфрамовом волоске.

В работе подтверждается обнаруженный в последние годы эффект интенсификации скорости испарения при высоких давлениях среды.

Получена обобщенная зависимость для расчета времени существования капли в высокотемпературной среде нейтрального газа.

Рис. 7, библиограф. 5.

УДК 532.517.4

К определению длины пути смещения для турбулентного течения в канале. Правдина М. Х. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 8, сер. техн. наук, вып. 2, с. 86—90.

На основе принципа максимальной устойчивости, сформулированного М. А. Гольдштиком, определена константа l_0 в аппроксимации длины пути смещения для турбулентного течения в канале. При анализе устойчивости решалось уравнение типа уравнения Орра — Зоммерфельда, в котором взаимодействие малого возмущения с турбулентными пульсациями скорости моделировалось с помощью «добавочной» средней поперечной скорости. «Добавочная» скорость выжалась через длину пути смещения и осредненный профиль скорости, поэтому и профиль скорости, и «добавочная» скорость содержали лишь один параметр, подлежащий определению, — l_0 .

Расчет константы l_0 завершает теоретическое определение констант, характеризующих профиль скорости турбулентного течения в канале.

Рис. 3, библиограф. 13.

УДК 536.24 : 532.54

Экспериментальное исследование локальных характеристик закрученного турбулентного течения в цилиндрическом канале. Сухович Е. П. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 8, сер. техн. наук, вып. 2, с. 91—100.

Выполнено экспериментальное исследование процессов переноса тепла и импульса в закрученном ограниченном течении. Составляющие тензора напряжений

и коэффициенты турбулентного переноса определены по измеренным осредненным величинам скорости, статического давления и температуры. Расчеты показывают, что осевая и тангенциальная составляющие напряжения трения неизотропны. Коэффициенты турбулентного переноса зависят от степени закрутки и координат. В закрученном течении при больших градиентах момента количества движения центробежные силы оказывают подавляющее воздействие на процессы турбулентного переноса тепла и импульса в потоке. Рис. 8, библиограф. 13.

УДК 532.32; 532.12

Плотность движений при флаттере бесконечных пластин. Корнев В. М. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 8, сер. техн. наук, вып. 2, с. 101—105.

Исследуется поведение растянутых пластин на упругом основании в потоке газа при заданных внешних воздействиях. Считается, что пластина, закрепленная произвольно, бесконечна вдоль по потоку. Анализируются собственные движения в виде бегущих волн по продольной координате, по поперечной координате. Решение состоит из основной части и динамического краевого эффекта. Установлено, что краевые условия слабо влияют на основную часть решения. Рассчитаны критические параметры потока, частоты и длины бегущих волн. Изучена плотность собственных движений пластины в потоке газа. Обнаружена точка сгущения собственных движений в окрестности минимального критического параметра потока.

Рассматриваются вопросы аппроксимации системы с распределенными параметрами при заданных внешних возмущениях системой с конечным числом степеней свободы. Системы, для которых плотность собственных движений начинается с точки сгущения, обладают повышенной чувствительностью к внешним воздействиям; для них экспериментальные результаты по определению критических параметров потока обладают большим разбросом. Библиограф. 8.

УДК 536.3.001.24+535.34.001.24

Об итерационно-зональном методе исследования и расчета лучистого теплообмена в поглощающей и рассеивающей среде. Суринов Ю. А. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 8, сер. техн. наук, вып. 2, с. 106—125.

Даны теоретические основы общего итерационно-зонального метода решения интегральных уравнений излучения, позволяющего производить численные определения и исследования локальных и осредненных в пределах соответствующих граничных и объемных зон характеристик лучистого теплообмена в излучающей системе, заполненной поглощающей и изотропно рассеивающей средой.

Построены алгоритмы для трех основных форм указанного метода и установлена внутренняя связь между ними. Каждая из этих форм позволяет провести решение обобщенной пространственной постановки задачи, охватывающей восемь основных конкретных ее постановок по классификации автора, имеющих единственное решение, с любой заданной степенью точности для любых фиксированных чисел n граничных и m объемных зон, на которые подразделяется излучающая система. Библиограф. 12.

УДК 62—50 : 66.012—52.001.57

Оптимальное управление технологическими процессами с рециркуляцией взаимодействующих потоков. Демиденко Н. Д., Девятов Б. Н., Елин М. В. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 8, сер. техн. наук, вып. 2, с. 126—130.

В статье осуществляется постановка и решение задачи оптимального управления процессами химической технологии с рециркуляцией взаимодействующих потоков. Получены необходимые условия оптимальности управляющих потоков. Анализ этих условий показывает, что управляющее воздействие кусочно-постоянно и принимает граничные условия. Библиограф. 7.

УДК 536.2

Процессы переноса в дисперсиях при умеренных концентрациях. Гроссман А. Г. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 8, сер. техн. наук, вып. 2, с. 131—134.

Предлагается метод замыкания стационарных уравнений типа теплопроводности для макроскопических величин. Основное отличие метода от известных со-

счит в том, что такое замыкание осуществляется точно до членов второго порядка по средней объемной концентрации частиц, т. е. с учетом парных взаимодействий частиц дисперсной фазы. Библиограф. 5.

УДК 621.233.431.2

Релаксационные колебания в системах на туннельных переходах Джозефсона. Рычков С. Н. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 8, сер. техн. наук, вып. 2, с. 135—139.

В работе рассмотрены автоколебательные процессы в некоторых системах на туннельных переходах Джозефсона, в элементах, используемых для создания различных сверхвысокочувствительных устройств, сверхчувствительных вольтметров, магнетометров и т. д., а также ЭВМ с производительностью 10^{10} операций в секунду. В результате сделан вывод о числе периодических решений и их устойчивости.

Исследована хорошо известная и широко применяемая система из двух туннельных переходов Джозефсона, включенных параллельно.

Получены условия возникновения релаксационных колебаний, а также расчетные формулы для частоты и амплитуды колебаний. Рис. 3, библиограф. 4.

УДК 621.3.013.782.3

Некоторые особенности расчетов электромеханических переходных процессов. Гамм Б. З., Ефименко Н. Н. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 8, сер. техн. наук, вып. 2, с. 140—145.

Предлагается способ обращения матрицы собственных и взаимных сопротивлений (СВС) синхронной машины, позволяющий при учете в ней насыщения, когда необходимо многократное обращение матрицы СВС в ходе расчета переходного процесса, значительно сократить затраты машинного времени.

Приведено выражение, соединяющее в себе уравнение узловых напряжений и уравнения связи различных систем координат. Табл. 1, рис. 1, библиограф. 3.

УДК 681.3.013 : 621.31.001

Информационное и алгоритмическое обеспечение пакета прикладных программ машинного проектирования электрических сетей энергосистем. Манусов В. З., Вечерский М. И. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 8, сер. техн. наук, вып. 2, с. 146—151.

В работе изложены основные принципы машинного проектирования электрических сетей энергосистем. Описаны структура математического обеспечения программ проектирования и основные алгоритмы. Рис. 2, библиограф. 7.

УДК 621.315.1.015.38

Определение вероятности перекрытия системы воздушных промежутков при различных аппроксимациях законов распределения разрядного напряжения и воздействующих перенапряжений. Ефремов И. А., Левинштейн М. Л., Смирнов Е. А. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 8, сер. техн. наук, вып. 2, с. 152—160.

При координации внешней изоляции линий и подстанций с параметрами защитных устройств возникает задача определения вероятности перекрытия системы воздушных промежутков при воздействии коммутационных перенапряжений. Вероятность перекрытия системы промежутков зависит от вида аппроксимации законов распределения разрядного напряжения и воздействующих перенапряжений. Рассмотрены аппроксимации нормальным законом и законом Грама—Шарлье.

В качестве эталонного закона распределения разрядного напряжения системы принят закон $F_n(x) = 1 - \left[\frac{1}{2} - \Phi_0 \left(\frac{x - m_1}{\sigma_1} \right) \right]^n$, полученный при нормальности закона распределения разрядного напряжения единичного промежутка. Рис. 4, табл. 2, библиограф. 3.

УДК 621.311

Разделение затрат топлива при производстве тепла и электроэнергии на ТЭЦ. Ноздренко Г. В., Кузьмина И. А., Сычева Н. Д. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1978, № 8, сер. техн. наук, вып. 2, с. 161—164.

Приведен сравнительный анализ некоторых методов разделения затрат топлива при производстве электроэнергии и тепла на ТЭЦ. Изложен «принцип равноценности потоков». Показано, что применение этого «принципа» позволяет объективно распределять затраты топлива на ТЭЦ. Табл. 1, рис. 2, библиограф. 9.