

ИЗВЕСТИЯ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

СЕРИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

Год основания журнала 1957 Год основания серии 1963	Периодичность журнала 15 номеров в год Периодичность серии 3 номера в год	№ 8 (278) вып. 2	Июнь 1977
--	--	---------------------	--------------

СОДЕРЖАНИЕ

Публикации по фундаментальным и прикладным работам в серии технических наук «Известий СО АН СССР»	3
Н. А. Рубцов, А. Г. Тарасов. Излучательные свойства кристаллоориентированного пиролитического графита при высоких температурах	8
Ю. А. Суринов. Обобщенный зональный метод исследования и расчета лучистого теплообмена в поглощающей и рассеивающей среде	13
А. Н. Хозе, А. С. Захаров. Объемный коэффициент теплоотдачи при конденсации водяного пара в проточном динамическом двухфазном слое	30
Ю. Е. Боголюбов, Л. П. Смирнова. Массоотдача в окрестности лобовой точки в пульсирующем потоке	34
Э. П. Волчков, В. К. Козьменко, В. П. Лебедев. Экспериментальное исследование эффективности газовой завесы в сверхзвуковом осесимметричном сопле	40
М. Д. Бродецкий, В. С. Косорыгин, А. А. Рафаэлянци, Г. А. Черемухин. Экспериментальное исследование сопротивления крыльев при сверхзвуковых скоростях	47
Ю. Г. Головачев, О. Н. Мареникова, А. А. Тарнавский. Устойчивость стратифицированных потоков. Сообщение I. Невязкое двухслойное течение	54
Б. М. Маркеев. О граничной скорости изотермического скольжения при течении бинарной смеси слаборазреженного газа вдоль твердой поверхности	66
В. Г. Дулов, В. А. Шепановский. Торможение сверхзвукового потока за криволинейной ударной волной с предшествующим изотропическим сжатием	72
Г. М. Шумский. Нелинейная задача о движении профиля вблизи волнистой стенки	79
В. А. Драч, О. А. Кудрявцев. Радиальное сопло	85
Б. А. Урюков, С. М. Хайтман. Автомодельные свойства электрической дуги, горячей в турбулентной струе	91
Ю. В. Курочкин, А. В. Пустогаров, В. И. Старшинов, В. В. Уколов. Исследование эффективности пористого охлаждения стабилизирующего канала плазмотрона	97
Т. С. Мельникова. Измерение радиального распределения температуры в нестационарной дуге во времени	103
Н. Д. Демиденко, Е. А. Александрова. Метод численного анализа нестационарных режимов технологических процессов	109
К. Б. Канн, В. Н. Феклистов. Об электропроводности газожидкостных эмульсий и пен	116
В. Г. Богдевич, Н. К. Рубан. Всплытие сферического пузырька с растворением в покоящейся жидкости	121
И. А. Петраковский, Р. Г. Хлебопрос. Метод получения и анализа спектральных характеристик природных образований	126
Г. Г. Счастливый, А. И. Титко. Задача определения характеристик электромагнитного поля в проводящей шине с воздушным окном	132
А. Л. Баранников, П. Ю. Пекшев. Газоразрядные приборы с отрицательной проводимостью	140
Б. Н. Стихановский. Об одном механоэлектрическом процессе, сопровождающем удар твердых тел	152

ИЗВЕСТИЯ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

Главный редактор журнала чл.-корр. *М. Ф. Жуков*
Заместитель главного редактора д-р физ.-мат. наук *В. Г. Дулов*

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ СЕРИИ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

Ответственный редактор серии чл.-корр. *М. Ф. Жуков*
Чл.-корр. *О. Ф. Васильев*, д-р техн. наук *Б. Н. Девятков*, д-р физ.-мат. наук
В. Г. Дулов, чл.-корр. *Н. А. Желтухин* (зам. ответственного редактора),
д-р техн. наук *В. Е. Накоряков*, д-р техн. наук *Н. А. Рубцов* (ответствен-
ный секретарь серии), д-р техн. наук *Б. А. Урюков*, д-р техн. наук
В. К. Щербаков

Новосибирск, 99, Советская, 18, комн. 331.

Редактор *Т. Б. Мелкозерова*
Художественный редактор *Э. С. Филонычева*
Технический редактор *Г. Я. Герасимчук*
Корректор *В. К. Тришина*

Сдано в набор 14 апреля 1977 г. Подписано к печати 6 июля 1977 г. МН 01543. Формат 70×108^{1/16}.
Бумага типографская № 1. 10 печ. л., 14 усл.-печ. л., 14,0 уч.-изд. л. Тираж 2040. Заказ № 515.
Цена 70 коп.

Издательство «Наука», Сибирское отделение, 630099, Новосибирск, 99, Советская, 18.
4-я типография издательства «Наука», 630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25.

©Издательство «Наука»
«Известия Сибирского отделения АН СССР», 1977 г.

ПУБЛИКАЦИИ

ПО ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМ И ПРИКЛАДНЫМ РАБОТАМ
В СЕРИИ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК «ИЗВЕСТИЙ СО АН СССР»

В связи с 20-летием Сибирского отделения Академии наук СССР в настоящем обзоре подводятся краткий итог деятельности серии технических наук журнала.

Эта серия была создана в 1963 г. с целью широкого освещения фундаментальных и прикладных исследований в области технических наук, а также новых научных направлений, связанных с развитием производительных сил Сибири и Дальнего Востока.

Журнал способствовал развитию работ в области теплофизики и прикладной газодинамики, совершенствования и управления химико-технологическими и энергетическими системами, создания высокоэффективных источников энергии. Большие заслуги в области фундаментальных и прикладных работ, имеющих крупное народнохозяйственное значение, принадлежат организатору Сибирского отделения АН СССР — акад. М. А. Лаврентьеву. Его фундаментальные теоретические исследования и крупные прикладные работы содействовали плодотворному развитию теории и ее практических приложений.

1. В журнале широко представлены результаты исследований в области теплофизики, в том числе по некоторым проблемам теории тепло- и массообмена, термодинамики необратимых процессов и различным практическим приложениям теплофизики.

Ряд работ С. С. Кутателадзе и др. посвящены принципам энергетического использования геотермальных источников [65, 1]*. Энергия термальных вод находит все большее применение для отопления жилья, теплиц, выработки электроэнергии, холодильных установок.

Рассмотрены основы и перспективы применения воднофреоновых энергетических установок [68, 1], сообщено о разработке и успешных испытаниях первой воднофреоновой установки, использующей геотермальное тепло, о разработках и исследованиях абсорбционных бромистолитиевых холодильных машин.

Различные аспекты решения частных задач по проблемам теплофизики изложены в статьях [67, 2, 3; 72, 1; 73, 3; 76, 3].

Работы Н. А. Рубцова и др. посвящены изучению радиационно-кондуктивного, радиационно-конвективного теплообмена и решению связанных с ним задач [68, 3; 74, 1; 75, 2, 3; 76, 1; 77, 1]. Такие задачи возникают в астро- и геофизике, метеорологии, космической технике, в многочисленных отраслях промышленной теплотехники, особенно высокотемпературной.

2. Значительное число работ посвящено результатам исследований по фундаментальным проблемам в прикладной газодинамике, динамике вязкой жидкости, исследований режимов течения одно- и двухфазных

* Здесь и далее первые две цифры означают год издания, остальные — выпуск серии технических наук журнала [1965, вып. 1].

систем. Много работ опубликовано по численным методам в газовой динамике.

Ряд статей посвящен газотермодинамическому расчету потоков в трубопроводах. В этих работах осуществляются постановка задач, построение моделей и методов анализа, проводится исследование стационарных и нестационарных режимов [68, 3; 69, 2; 72, 1].

В работах, выполненных под руководством О. Ф. Васильева, рассмотрены методы расчета колебаний воды и судна, исследованы вопросы силовых воздействий на судно в шлюзах [64, 1, 2]. Приводятся результаты исследований течений спутных потоков в каналах при возникновении рециркуляционных зон [70, 2].

Помещено значительное число публикаций по разработке численных методов в газовой динамике и применению их для расчета стационарных и нестационарных режимов течения газа. Большинство работ выполнено исследователями школы Н. Н. Яненко, Б. Г. Кузнецовым и др. [67, 2; 69, 1]. В них изложены методы расчета двумерных задач, расчет стационарного режима вязкой сжимаемой жидкости, расчет неустановившегося движения вязкой несжимаемой жидкости и т. д. Опубликована работа Н. Н. Яненко о применении метода расщепления для численного расчета движения теплопроводного газа в криволинейных координатах. Предложенный алгоритм применяется для решения задачи об осесимметричном движении с учетом теплопроводности в неоднородных средах. При этом решение двумерной задачи сводится к последовательности одномерных расчетов. В выпусках 1, 2, 3 за 1967 г. содержатся результаты решения задач, основанных на применении конечно-разностных схем. Различные видоизменения разностных схем связаны с построением экономичных разностных схем [67, 3; 77, 1], явных схем переменного направления и т. д. Большинство названных выше работ нашли свое отражение в обзорной статье В. Г. Дулова по итогам I-й Сибирской конференции по аэродинамике [70, 1].

К важнейшим направлениям современной прикладной газодинамики относятся исследования нестационарных процессов. В журнале опубликована серия статей по нестационарной газодинамике, акустике, теории гидродинамической устойчивости и теории турбулентности.

В работах Н. А. Желтухина и др. [69, 1; 70, 3; 72, 2] исследованы задачи устойчивости рабочих процессов в сложных термогазодинамических системах, например в камерах сгорания. Сформулированы признаки безусловной устойчивости термогазодинамической системы, рассмотрена акустика каналов переменного сечения и другие вопросы. В ряде публикаций [70, 2; 72, 2, 3; 75, 3] отражены результаты комплекса исследований по газодинамике и акустике сверхзвуковых струй и многоструйных газодинамических систем.

В работах В. Г. Дулова и др. [72, 3; 75, 1; 76, 3] рассмотрено взаимодействие сверхзвуковых струй с преградами. Для осесимметрической задачи построено аналитическое решение на основе линейной аппроксимации зависимости скорости от давления.

Опубликованы результаты исследования гидродинамики и теплообмена в трубе с резким изменением сечения. Излагаются методы и результаты расчета аэродинамических характеристик крыльев различных форм [69, 2; 77, 1].

Проблема возникновения и развития турбулентности составляет одно из основных направлений в теории гидродинамической устойчивости. Проведено теоретическое исследование процессов потери устойчивости и первых этапов развития нестационарных явлений в пограничном слое в канале, струе и других плоско-параллельных и близких к ним течениях [70, 2; 71, 1; 74, 3; 75, 2]. При экспериментальных исследованиях наблюдались эффекты, возникающие в сложном волновом потоке, потерявшем устойчивость.

Феноменологические и статистические аспекты теории турбулентности отражены в публикациях [69, 3; 71, 1; 72, 2; 74, 2].

Исследована аэродинамика летательных аппаратов сложной пространственной конфигурации [69, 1; 72, 2; 75, 1]. Аэродинамические характеристики тел большого удлинения, вращающихся во время полета, представлены работами [72, 3; 74, 1; 75, 2].

3. Значительное количество статей посвящено фундаментальным работам по теоретическому и экспериментальному исследованию низкотемпературной газоразрядной плазмы. В них рассматриваются принципы создания новых генераторов плазмы, вопросы теплообмена, тепловая защита элементов конструкции плазмотронов, процессы в приэлектродных областях, задачи стабилизации электрической дуги.

Анализ важнейших теоретических и экспериментальных исследований в этой области посвящены проблемные статьи М. Ф. Жукова, Б. А. Урюкова и др. [73, 3; 75, 2] и других авторов. В них рассмотрены теплофизические и электрические проблемы; изложены теоретические исследования электрической дуги в потоке газа; дан анализ характеристик дуги, свободно горящей в воздухе при больших токах, рассмотрены струи плазмы в электродных областях сильноточных разрядов; большое внимание уделено исследованиям теплопереноса в плазме и другим вопросам.

При анализе проблем совершенствования генераторов низкотемпературной плазмы [75, 2] отмечалось, что в связи с созданием мощных плазмохимических и металлургических установок возникает необходимость в плазмотронах с высоким тепловым к. п. д. и большим ресурсом работы электродов. В этой связи указывалось на необходимость иметь достаточно полную и надежную информацию о тепловых потерях в различные элементы плазмотрона, о процессах в приэлектродных областях, об уровне пульсаций тока, при определенных условиях, существенно влияющих на скорость эрозии, о неустойчивости горения дуги и причинах, ее порождающих, и о многих других явлениях в электродуговой камере.

Намечены пути повышения теплового к. п. д. плазмотронов первого поколения (плазмотроны с самоустанавливающейся длиной дуги и со ступенчатыми электродами), а также повышения напряженности электрического поля дуги в перспективных плазмотронах с заградительным охлаждением стенок.

Теоретические исследования электрической дуги в потоке газа [73, 3] показали, что расчеты канальной дуги переменного тока качественно достаточно правильно описывают свойства дуги. Поэтому дальнейшей задачей являются расчет дуги переменного тока, горящей в потоке газа.

Большинство публикаций в области газового разряда выполнено под руководством М. Ф. Жукова. Много работ посвящено изучению физических процессов в плазме, экспериментальным исследованиям дуги в потоке газа [65, 3; 67, 3; 69, 1; 70, 1, 2; 71, 2; 72, 2, 3; 73, 1, 3; 74, 1; 75, 2; 76, 1; 77, 1]. Открыт и изучен один из наиболее общих динамических процессов в плазмотроне: «шунтирование», т. е. электрический пробой между дугой и проводящей стенкой канала и между отдельными участками дуги.

В теоретических и экспериментальных исследованиях впервые предложены схема горения дуги в условиях взаимодействия ее с потоком газа, со стенками канала и с магнитными полями. Получены определяющие критерии подобия.

В публикациях [71, 2; 73, 1; 75, 2] частично представлены исследования по эрозии электродов. Экспериментальные работы по определению тепловых потоков в электроды и ряд других исследований позволили создать электроды с рекордными результатами по удельной эрозии.

Тепловая защита элементов конструкций плазмотронов отражена в статьях [71, 2; 73, 1; 75, 2].

Большая серия статей [68, 1; 73, 1, 3; 74; 75, 1, 2; 76, 1; 77, 1] посвящена описанию процессов в плазме, теоретическому исследованию дуги в потоке газа.

Исследования физических процессов в электродуговых устройствах, разработанные инженерные методы расчета плазмотронов послужили основой для прогнозирования путей развития высокоэффективных генераторов плазмы и их практического применения.

4. В журнале представлены теоретические и прикладные работы по моделированию и управлению системами с распределенными параметрами [74, 3; 76, 2]. Опубликованы новые прикладные методы теории оптимального управления распределенными процессами. Эти методы связывают задачи оптимального управления с задачами оптимизации распределенного контроля и распределенного управления.

Разработаны методы исследования статических и динамических режимов объектов с распределенными параметрами [61; 63; 71, 3; 70, 2; 75, 2]. Новое развитие идей оптимизации распределенного контроля и управления химико-техническими процессами тепло-массообмена представлено публикацией серии работ [70, 1, 2; 73, 1; 74, 3; 75, 3].

Эти работы выполнены под руководством Б. Н. Девятова [73, 2; 74, 3; 76, 2]. К ним же относится серия статей по развитию новых методов вероятностного моделирования сложных распределенных процессов распространения [76, 2]. Эти идеи развиваются в связи с разработкой нового специального математического аппарата теории вероятностей. На его основе строятся математические модели и алгоритмы прогнозирования и управления для борьбы с лесными пожарами [73, 3; 76, 1, 2; 77, 1]. Данный математический аппарат может быть также применен в задачах моделирования и управления самыми разнообразными пространственно распределенными процессами: распространение жидкости в пористой среде, процесс горения в турбулентном потоке, рост полимеров, процессы перематничивания, размножение пространственных популяций, распространение эпидемий и т. д. [76, 2].

5. Имеются оригинальные работы по общим вопросам оптимальных систем, оптимального управления. В них рассмотрены системы с управляемой структурой, задачи синтеза оптимального быстрого действия, квазиоптимальные системы, некоторые вопросы оптимального управления плазмохимическими процессами [64, 1, 3; 65, 2; 66, 1; 68, 3; 70, 2; 75, 3].

6. Серия статей посвящена актуальным исследованиям устойчивости и оптимальному управлению электроэнергетическими системами. К ней относятся работы В. К. Щербакова и др. [63, 3; 64, 2; 66, 1; 68; 72, 1; 73, 2; 74, 3; 76, 1]. В частности, рассмотрены общие задачи определения запаса по статической устойчивости, которые имеют существенное практическое значение [74, 3], а также важные вопросы о принципах автоматического управления единой энергосистемой [76, 1] и др.

В связи с задачами формирования единой энергетической системы страны отмечается [76, 1] необходимость создания адекватной ей единой автоматической системы управления с иерархической структурой и применения при ее разработке системного подхода.

Значительное число работ посвящено общим вопросам исследования режимов электроэнергетических систем [68; 70; 71, 1, 2; 72, 1; 73, 1, 2; 74, 2, 3].

7. В журнале публикуются также прикладные работы в значительной степени регионального значения [63, 3; 64, 2; 65, 2, 3; 66, 2; 75, 3]. Эти исследования посвящены актуальным для Сибири задачам: вопросам регулирования снежного покрова и стока вод, характери-

кам переноса снега, исследованиям снего-ветрового потока и аэродинамики снегозащит.

Рассмотрены задачи о сезонном промерзании грунта в Западной Сибири, проблемы предохранения грунта от промерзания и др.

Показана эффективность применения водовоздушных полимерных пен в качестве теплоизоляционных покрытий для предохранения грунтов от промерзания [75, 3]. Разработаны вопросы рецептуры пен, технологии их получения и нанесения на грунт, исследованы механические и теплофизические характеристики.

Под руководством акад. П. Я. Кочкиной проводились исследования, связанные с орошением и водным балансом Кулунды. Результаты этих исследований опубликованы ее учениками во многих статьях. Подняты важные вопросы исследования грунтовых вод Кулунды, режимов грунтовых вод, задачи расчета влажности грунтов Сибири, тепловой и водный баланс в Кулундинской степи [65, 3; 66, 3]. В частности, в результате теоретических и экспериментальных исследований были построены карты областей инфильтрации и испарения Кулунды [66, 3]. Получены расчетные формулы для определения параметров характеристик грунтовых вод.

В заключение следует отметить, что дальнейшая деятельность журнала должна быть еще теснее связана с выполнением общих современных задач, поставленных Партией и Правительством перед учеными Сибирского отделения АН СССР.

В опубликованном в феврале 1977 г. Постановлении ЦК КПСС о деятельности Сибирского отделения Академии наук СССР содержится высокая оценка труда сибирских ученых, указаны пути дальнейшего повышения качества и эффективности научных исследований, расширения и укрепления связи науки с производством, участия в формировании территориальных производственных комплексов, в использовании богатств Сибири.

Борьба за достижение этих целей и решение других задач, отмеченных в Постановлении ЦК КПСС, безусловно, должны найти отражение в дальнейшей деятельности журнала.

Н. А. РУБЦОВ, А. Г. ТАРАСОВ

ИЗЛУЧАТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА
КРИСТАЛЛООРИЕНТИРОВАННОГО ПИРОЛИТИЧЕСКОГО
ГРАФИТА ПРИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Для контроля и регулирования температуры высокотемпературных технологических процессов, а также при создании материалов и покрытий новой техники необходимо знать излучательные свойства материалов и сред.

В нашей стране и за рубежом усиленно исследуются радиационные характеристики широкого круга конструкционных материалов. К сожалению, подавляющее число исследований относится к области сравнительно невысоких температур. Недостаточно изучены интегральные и особенно спектральные характеристики излучения в широком интервале длин волн при высоких температурах.

В данной работе проведены исследования спектральной излучательной способности пиролитического графита для образцов с поверхностью, параллельно ориентированной плоскости осаждения и для образцов с поверхностью, перпендикулярной поверхности осаждения графита. Образцы представляли собой штабики квадратной формы размером $25 \times 25 \times 5$ мм. Предварительно образцы обрабатывали: исследуемые поверхности шлифовали, а затем полировали. Для достижения однородности структуры исследуемой поверхности образцы подвергались двух-, трехразовому нагреванию до $800-900^\circ\text{C}$ и последующему охлаждению.

Эксперимент проводился в атмосфере воздуха на установке, оптическая схема которой представлена на рис. 1. В отличие от [1, 2] в данной схеме использовалось дополнительное эллиптическое зеркало с эталонной лампой СИ 10-300, помещаемой в фокус зеркала. Для увеличения мощности энергетических потоков применялись зеркала больших диаметров (600 мм против 360 мм в [2]). Образец, помещаемый в фоку-

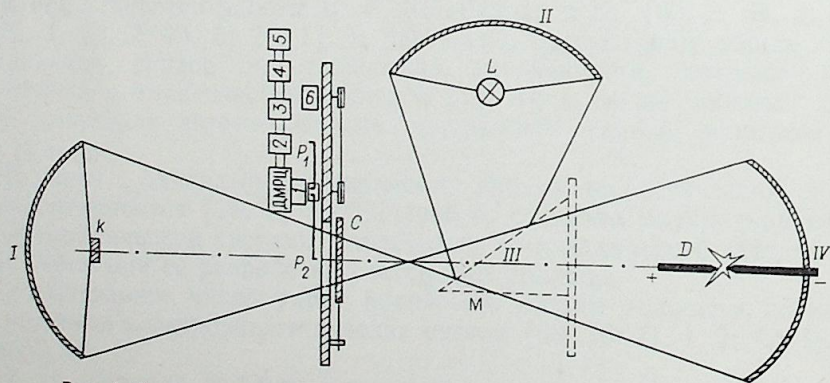


Рис. 1. Оптическая схема измерений спектральной степени черноты.
1 — согласующая оптическая приставка; 2 — фотоумножитель; 3 — усилитель; 4 — аттенюатор; 5 — осциллограф; 6 — мотор для вращения перископов P_1 и P_2 ; C — обтюратор; D — электрическая дуга; L — эталонная лампа; K — образец; I, II, IV — эллиптические зеркала; III — плоское зеркало со шторкой M.

се зеркала II, разогревался электрической дугой, находящейся в фокусе другого зеркала. Одновременно с включением дуги срабатывал электромагнитный затвор, который освобождал шторку с плоским зеркалом. Шторка опускалась, отсекала поток со стороны дуги и посылала на образец через сканирующий пирометр сигнал этой эталонной лампы.

Вращающиеся перископы P_1 и P_2 , выполненные в виде светопроводов, попеременно передавали через оптическую согласующую приставку и монохроматор ДМР-4 сигналы собственного и отраженного излучений, а также постоянный сигнал от эталонной лампы на фотоумножитель ФЭУ-83. Сигналы усиливались фотоумножителем и усилителем, поступая через аттенюатор 3, записывались на осциллограмме шлейфового осциллографа. На рис. 2 приведена осциллограмма, показывающая кинетику остывания образца в зависимости от времени. Падающее излучение, согласно оптической схеме рис. 1, запишется в виде

$$A_\lambda = K_1 K_2 K_3 E_0, \quad (1)$$

где E_0 — плотность потока излучения эталонной лампы L при T_0 ; K_1 , K_2 , K_3 — коэффициенты ослабления зеркал. На осциллограмме зарегистрируется излучение A_p

$$A_p = K_2 K_3 K'_2 E_0, \quad (2)$$

где K'_2 — коэффициент ослабления перископа P_2 . Из (1) и (2) имеем

$$A_\lambda = \frac{K_1}{K'_2} A_p, \quad (3)$$

регистрируемое значение плотности потока, отраженного от образца излучения, определяется из

$$R_\lambda = K'_1 K'_1 K_2 K_3 r_\lambda E_0, \quad (4)$$

где r_λ — полусферический спектральный коэффициент отражения; K'_1 — коэффициент ослабления перископа P_1 .

Из (1), (3) и (4) получаем

$$r_\lambda = C_\lambda R_\lambda, \quad (5)$$

где $C_\lambda = \frac{1}{K_1 K'_1} A^{-1}$ — спектральная постоянная оптической схемы, получаемая вследствие отражения на пленке из окиси магния [1]. Зная r_λ , находим

$$\varepsilon_\lambda = 1 - r_\lambda. \quad (6)$$

Последовательно размещая эталонную лампу при одной и той же температуре T_0 в фокусах зеркал I и II, определяем коэффициент N_λ . Последний связывает собственное излучение образца E_λ с излучением эталонной лампы A_p , регистрируемым осциллографом при одинаковых температурах,

$$E_\lambda = N_\lambda A_p. \quad (7)$$

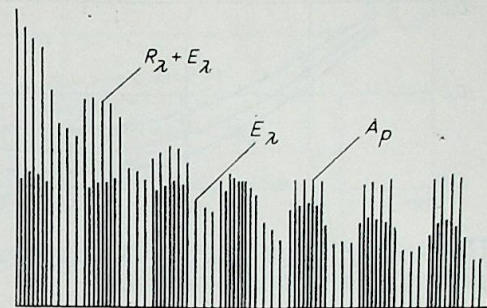


Рис. 2. Кинетика остывания образца пирографита.

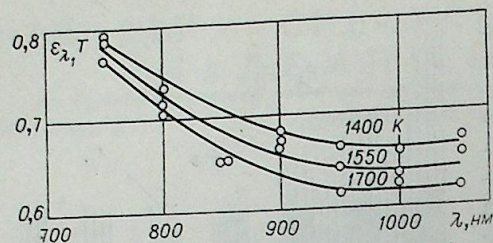


Рис. 3. Зависимость спектральной степени черноты базисной поверхности пиролитического графита от длины волны при $T = \text{const}$.

По закону Вина плотность полусферического излучения образца определится следующим образом:

$$E_{\lambda_i}(T_j) = \left[1 - r_{\lambda_i}(T_j) C_1 \lambda_i^{-5} \exp\left(-\frac{C_2}{\lambda_i T_j}\right) \right], \quad (8)$$

где T_j — температура образца.

Излучение эталонной лампы находится из соотношения

$$E_{\lambda_i} = C_1 \lambda_i^{-5} \exp\left(-\frac{C_2}{\lambda_i T_0}\right). \quad (9)$$

Используя (7) — (9), получим расчетную формулу для определения температуры образца

$$T_j = \frac{T_0}{1 - \frac{\lambda_i T_0 \ln \frac{E_{\lambda_i}(T_j)}{\varepsilon_{\lambda_i} N_{\lambda_i} A_p}{C_2}}}, \quad (10)$$

где ε_{λ_i} — спектральный коэффициент полусферического излучения. Задавая на предварительно проградуированном монохроматоре ДМР-4 различные значения длин волн и получая соответствующие осциллограммы, можно, используя (5), (6) и (10), получить соответствующий диапазон значений спектральных коэффициентов излучения и отражения в зависимости от длины волны и температуры.

На рис. 3—5 приведены результаты экспериментального исследования излучательной способности кристаллоориентированного пиролитического графита в зависимости от длины волны и температуры. Наблюдается четко выраженная зависимость спектральной степени черноты от характера расположения базисных плоскостей. Для поверхности, параллельной поверхности осаждения пирографитового материала, спек-

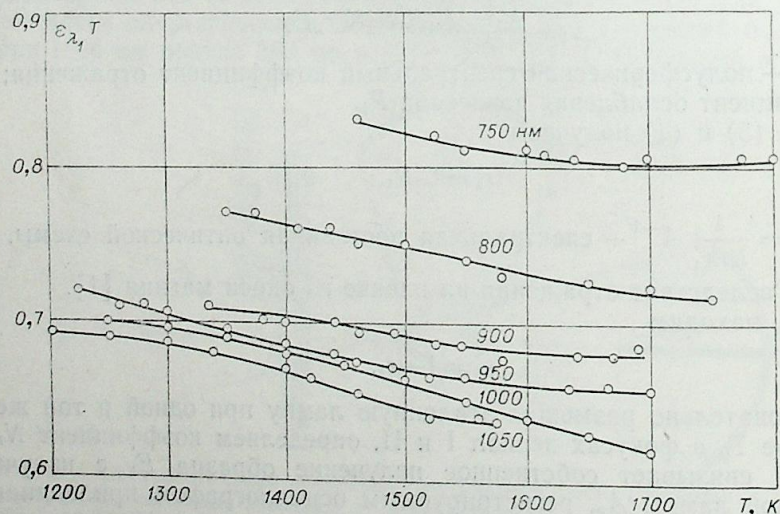


Рис. 4. Зависимость спектральной степени черноты базисной поверхности пиролитического графита от температуры при $\lambda = \text{const}$.

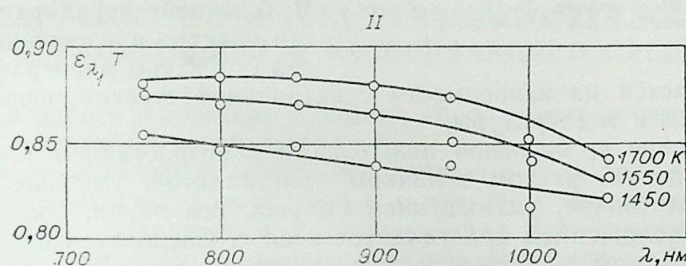
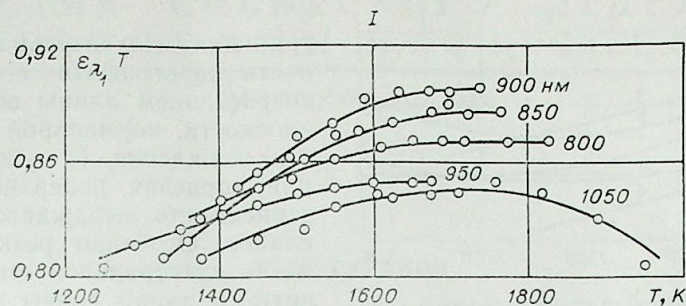


Рис. 5. Зависимость спектральной степени черноты торцевой поверхности пиролитического графита от температуры при $\lambda = \text{const}$ (I) и от длины волны при $T = \text{const}$ (II).

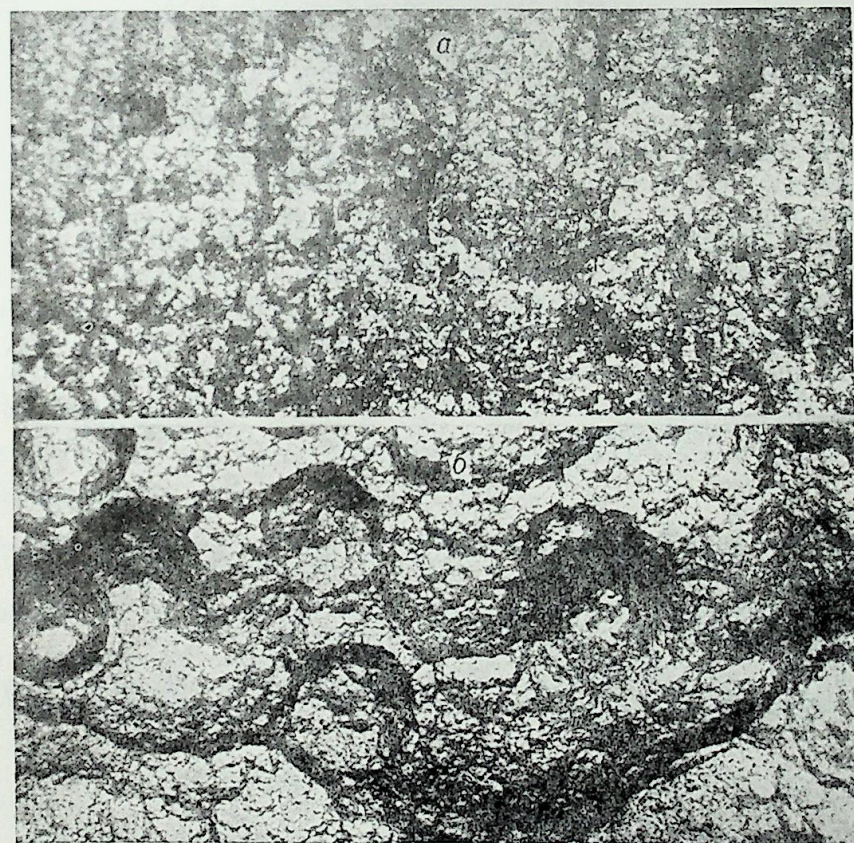


Рис. 6. Микроструктура кристаллоориентированного пиролитического графита. $\times 200$.
а — полированная поверхность; б — поверхность после нагревания до 2800°C.

Ю. А. СУРИНОВ

ОБОБЩЕННЫЙ ЗОНАЛЬНЫЙ МЕТОД
ИССЛЕДОВАНИЯ И РАСЧЕТА ЛУЧИСТОГО ТЕПЛООБМЕНА
В ПОГЛОЩАЮЩЕЙ И РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЕ *

Данная работа посвящена развитию обобщенного зонального метода теории лучистого теплообмена [1—6].

Новый аналитический метод, предлагаемый в данной работе, связан с обобщенной постановкой задачи о лучистом теплообмене в излучающей системе, заполненной поглощающей и рассеивающей средой, охватывающей все восемь основных постановок задачи по классификации автора [3], имеющих единственное решение и различающихся между собой способами задания граничных условий и внутренних характеристик поля излучения.

В основе этого метода, позволяющего проводить определения и численные исследования локальных (граничных и внутренних) и осредненных (в пределах граничных и объемных зон) характеристик излучения, лежат конечные линейные системы алгебраических уравнений, аппроксимирующие системы интегральных уравнений для основных разрешающих характеристик излучения.

В работе рассматриваются две формы представления указанного метода, тесно связанные между собой.

СИСТЕМА ОБОБЩЕННЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
И ЕЕ РЕШЕНИЕ [4]

Полагая, что кусочно-гладкая граничная поверхность F системы и объем V поглощающей и рассеивающей среды, ограниченный этой поверхностью, состоят соответственно из конечных чисел n и m оптически и энергетически однородных граничных и объемных зон ($F = \sum_{k=1}^n F_k$; $V = \sum_{j=1}^m V_j$), приходим к следующей системе интегральных уравнений [1—4]:

$$E_{\alpha\Phi}(M_i) - \tilde{R}_i \sum_{k=1}^n \int_{F_k} E_{\alpha\Phi}(N_k) K(M_i, N_k) dF_{N_k} - \tilde{R}_i \sum_{j=1}^m \int_{V_j} \eta_{\alpha\Phi}(P_j) L(M_i, P_j) \times \\ \times dV_{P_j} = E_{\alpha,i} \quad (M_i \in F_i; \quad i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

$$\eta_{\alpha\Phi}(M_i) - \kappa_i \sum_{j=1}^m \int_{V_j} \eta_{\alpha\Phi}(P_j) L^{(\prime)}(M_i, P_j) dV_{P_j} - \kappa_i \sum_{k=1}^n \int_{F_k} E_{\alpha\Phi}(N_k) K^{(\prime)}(M_i, N_k) \times \\ \times dF_{N_k} = \eta_{\alpha,i} \quad (M_i \in V_i; \quad i = 1, 2, \dots, m), \quad (2)$$

* Содержание данной статьи докладывалось на пленарном заседании Всесоюзной научной конференции по лучистому теплообмену в г. Краснодаре в сентябре 1973 г. и на семинаре по интегральным уравнениям излучения механико-математического факультета МГУ в 1970—1972 гг.

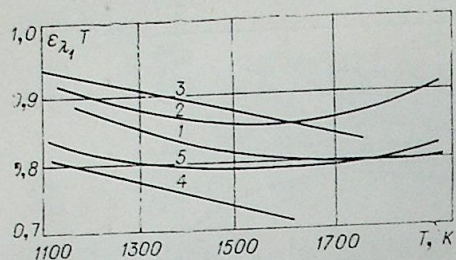


Рис. 7. Спектральная степень черноты поликристаллического графита.
1 — настоящее исследование, $\lambda = 750$ нм; 2 — [3], $\lambda = 660$ нм; 3, 4, 5 — [4], $\lambda = 660$ нм.

ше сказывается на зависимости спектральной степени черноты ϵ_λ от длины волны и температуры.

Понижение ϵ_λ базисной поверхности с возрастанием температуры можно объяснить ростом величины кристаллитов, уменьшением межслоевого расстояния, уменьшением полуширины линии, более упорядоченным расположением кристаллитов в слое. Следовательно, с повышением температуры совершенствуется кристаллическая структура поверхности пирографита, что приводит к понижению коэффициента излучения.

Влияние термообработки на структуру поверхности видно из приведенных на рис. 6 фотографий (съемка проводилась на металлографическом микроскопе МИМ 8М при 200-кратном увеличении). Следует отметить, что имеющиеся литературные данные по излучательным характеристикам пирографита лежат в широком интервале значений 0,6—0,95 (рис. 7). Существенное расхождение с литературными данными связано с различием условий изготовления образцов пирографита, оптические свойства которых меняются в зависимости от условий их изготовления (температуры, осаждения, давления углеродов, характера нагрева подложки). Теплофизические свойства пирографита можно изменить в несколько раз последующей термообработкой при температурах, превышающих температуру осаждения. Разнообразие в способах исследования также приводит к получению различных данных по излучательным способностям пирографитов.

Институт теплофизики СО АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
14/V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Ж. Уилсон, К. Р. Спидер. Ракетная техника и космонавтика, 1968, 5, 59.
2. С. С. Кутателадзе, Н. А. Рубцов, Г. В. Мякин. Теплофизика, 1969, № 3, 18.
3. В. Я. Чеховский, В. А. Петров, И. И. Петрова, Е. Н. Люкшин. Теплофизика высоких температур, т. 8, 1970, с. 1204.
4. Р. В. Планкетт, В. Д. Кинджер. Монокристаллическая и интегральная излучательная способность углеродистых материалов. Графит как высокотемпературный материал. М., «Мир», 1964.

где

$$K(M_i, N_k) = e^{-h(M_i, N_k)} \frac{\cos \Theta_{M_i} \cos \Theta_{N_k}}{\pi r_{M_i N_k}^2}, \quad L(M_i, P_j) = e^{-h(M_i, P_j)} \frac{\cos \Theta_{M_i}}{4\pi r_{M_i P_j}^2},$$

$$K^{(\prime)}(M_i, N_k) = e^{-h(M_i, N_k)} \frac{\cos \Theta_{N_k}}{\pi r_{M_i N_k}^2}, \quad L^{(\prime)}(M_i, P_j) = e^{-h(M_i, P_j)} \frac{1}{4\pi r_{M_i P_j}^2};$$

$$h(M_i, N_k) = \int_{M_i}^{N_k} k(P) dr = kr(M_i, N_k); \quad k = \alpha + \beta.$$

Решая систему уравнений (1)–(2) методом итераций, получаем для локальных характеристик излучения

$$E_{\text{пад}}(M_i) = \frac{E_{\text{эф}}(M_i) - E_{\alpha, i}}{\tilde{R}_i} \sum_{h=1}^n E_{\alpha, h} \Pi(M_i, F_h) + \sum_{j=1}^m \eta_{\alpha, j} \zeta(M_i, V_j);$$

$$(M_i \in F_i; \quad i = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

$$\eta_{\text{пад}}(M_i) = \frac{\eta_{\text{эф}}(M_i) - \eta_{\alpha, i}}{\kappa_i} \sum_{h=1}^n E_{\alpha, h} \Pi^{(\prime)}(M_i, F_h) + \sum_{j=1}^m \eta_{\alpha, j} \zeta^{(\prime)}(M_i, V_j);$$

$$(M_i \in V_i; \quad i = 1, 2, \dots, m), \quad (4)$$

где

$$\Pi(M_i, F_h) = \int_{F_h} \Omega(M_i, N_k) dF_{N_k}; \quad (5)$$

$$\zeta(M_i, V_j) = \int_{V_j} \chi(M_i, P_j) dV_{P_j} = \frac{1}{4\alpha_j} \tilde{\mathfrak{A}}(M_i, V_j); \quad (6)$$

$$\Pi^{(\prime)}(M_i, F_h) = \int_{F_h} \Omega^{(\prime)}(M_i, N_k) dF_{N_k}; \quad (7)$$

$$\zeta^{(\prime)}(M_i, V_j) = \int_{V_j} \chi^{(\prime)}(M_i, P_j) dV_{P_j} = \frac{1}{4\alpha_j} \tilde{\mathfrak{A}}^{(\prime)}(M_i, V_j). \quad (8)$$

Содержащиеся в выражениях резольвенты определяются так [3, 4]:

$$\chi^{(\prime)}(M_i, P_j) - \sum_{s=1}^m \kappa_s \int_{V_s} Z^{(\prime)}(M_i, N_s) \chi^{(\prime)}(N_s, P_j) dV_{N_s} = Z^{(\prime)}(M_i, P_j), \quad (9)$$

$$\chi^{(\prime)}(M_i, P_j) - \sum_{s=1}^m \kappa_s \int_{V_s} \chi^{(\prime)}(M_i, N_s) Z^{(\prime)}(N_s, P_j) dV_{N_s} = Z^{(\prime)}(M_i, P_j), \quad (10)$$

$$\Omega^{(\prime)}(M_i, N_k) - \sum_{j=1}^m \kappa_j \int_{V_j} Z^{(\prime)}(M_i, P_j) \Omega^{(\prime)}(P_j, N_k) dV_{P_j} = \Gamma^{(\prime)}(M_i, N_k), \quad (11)$$

$$\Omega^{(\prime)}(M_i, N_k) - \sum_{j=1}^m \kappa_j \int_{V_j} \chi^{(\prime)}(M_i, P_j) \Gamma^{(\prime)}(P_j, N_k) dV_{P_j} = \Gamma^{(\prime)}(M_i, N_k), \quad (12)$$

$$\chi(M_i, P_j) = Z(M_i, P_j) + \sum_{s=1}^m \kappa_s \int_{V_s} Z(M_i, N_s) \chi^{(\prime)}(N_s, P_j) dV_{N_s}, \quad (13)$$

$$\chi(M_i, P_j) - \sum_{s=1}^m \kappa_s \int_{V_s} \chi(M_i, N_s) Z^{(\prime)}(N_s, P_j) dV_{N_s} = Z(M_i, P_j), \quad (14)$$

$$\Omega(M_i, N_k) = \Gamma(M_i, N_k) + \sum_{s=1}^m \kappa_s \int_{V_s} Z(M_i, P_s) \Omega^{(\prime)}(P_s, N_k) dV_{P_s}, \quad (15)$$

$$\Omega(M_i, N_k) = \Gamma(M_i, N_k) + \sum_{s=1}^m \kappa_s \int_{V_s} \chi(M_i, P_s) \Gamma^{(\prime)}(P_s, N_k) dV_{P_s}. \quad (16)$$

Содержащиеся в системах интегральных уравнений и выражений (9)–(16) резольвенты $\Gamma(M_i, N_k)$, $Z(M_i, P_j)$, $\Gamma^{(\prime)}(M_i, N_k)$ и $Z^{(\prime)}(M_i, P_j)$ находятся следующим образом [1–5]:

$$\Gamma(M_i, N_k) - \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \int_{F_j} K(M_i, P_j) \Gamma(P_j, N_k) dE_{P_j} = K(M_i, N_k), \quad (17)$$

$$\Gamma(M_i, N_k) - \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \int_{F_j} \Gamma(M_i, P_j) K(P_j, N_k) dF_{P_j} = K(M_i, N_k), \quad (18)$$

$$Z(M_i, P_j) - \sum_{s=1}^n \tilde{R}_s \int_{F_s} K(M_i, N_s) Z(N_s, P_j) dF_{N_s} = L(M_i, P_j), \quad (19)$$

$$Z(M_i, P_j) - \sum_{s=1}^n \tilde{R}_s \int_{F_s} \Gamma(M_i, N_s) L(N_s, P_j) dF_{N_s} = L(M_i, P_j), \quad (20)$$

$$\Gamma^{(\prime)}(M_i, N_k) - \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \int_{F_j} \Gamma^{(\prime)}(M_i, P_j) K(P_j, N_k) dF_{P_j} = K^{(\prime)}(M_i, N_k), \quad (21)$$

$$\Gamma^{(\prime)}(M_i, N_k) - \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \int_{F_j} K^{(\prime)}(M_i, P_j) \Gamma(P_j, N_k) dF_{P_j} = K^{(\prime)}(M_i, N_k), \quad (22)$$

$$Z^{(\prime)}(M_i, P_j) - \sum_{s=1}^n \tilde{R}_s \int_{F_s} K^{(\prime)}(M_i, N_s) Z(N_s, P_j) dF_{N_s} = L^{(\prime)}(M_i, P_j), \quad (23)$$

$$Z^{(\prime)}(M_i, P_j) - \sum_{s=1}^n \tilde{R}_s \int_{F_s} \Gamma^{(\prime)}(M_i, N_s) L(N_s, P_j) dF_{N_s} = L^{(\prime)}(M_i, P_j). \quad (24)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ РАЗРЕШАЮЩИХ ХАРАКТЕРИСТИК ИЗЛУЧЕНИЯ

На основании (5)–(16) получаем

$$\Pi(M_i, F_h) = \Psi(M_i, F_h) + \sum_{j=1}^m \kappa_j \int_{V_j} Z(M_i, P_j) \Pi^{(\prime)}(P_j, F_h) dV_{P_j}, \quad (25)$$

$$\Pi(M_i, F_h) = \Psi(M_i, F_h) + \sum_{j=1}^m \kappa_j \int_{V_j} \chi(M_i, P_j) \Psi^{(\prime)}(P_j, F_h) dV_{P_j}, \quad (26)$$

$$\Pi^{(\prime)}(M_i, F_h) - \sum_{j=1}^m \kappa_j \int_{V_j} Z^{(\prime)}(M_i, P_j) \Pi^{(\prime)}(P_j, F_h) dV_{P_j} = \Psi^{(\prime)}(M_i, F_h), \quad (27)$$

$$\Pi^{(\prime)}(M_i, F_h) - \sum_{j=1}^m \kappa_j \int_{V_j} \chi^{(\prime)}(M_i, P_j) \Psi^{(\prime)}(P_j, F_h) dV_{P_j} = \Psi^{(\prime)}(M_i, F_h), \quad (28)$$

$$\zeta(M_i, V_j) = \xi(M_i, V_j) + \sum_{s=1}^m \kappa_s \int_{V_s} Z(M_i, N_s) \zeta^{(\prime)}(N_s, V_j) dV_{N_s}, \quad (29)$$

$$\xi(M_i, V_j) = \xi(M_i, V_j) + \sum_{s=1}^m \alpha_s \int_{V_s} \chi(M_i, N_s) \xi^{(')} (N_s, V_j) dV_{N_s}, \quad (30)$$

$$\xi^{(')} (M_i, V_j) - \sum_{s=1}^m \alpha_s \int_{V_s} Z^{(')} (M_i, N_s) \xi^{(')} (N_s, V_j) dV_{N_s} = \xi^{(')} (M_i, V_j), \quad (31)$$

$$\xi^{(')} (M_i, V_j) = \xi^{(')} (M_i, V_j) + \sum_{s=1}^m \alpha_s \int_{V_s} \chi^{(')} (M_i, N_s) \xi^{(')} (N_s, V_j) dV_{N_s}, \quad (32)$$

где

$$\Psi(M_i, F_k) = \int_{F_k} \Gamma(M_i, N_k) dF_{N_k}; \quad (33)$$

$$\xi(M_i, V_j) = \int_{V_j} Z(M_i, P_j) dV_{P_j} = \frac{1}{4k_j} \mathfrak{A}(M_i, V_j); \quad (34)$$

$$\Psi^{(')} (M_i, F_k) = \int_{F_k} \Gamma^{(')} (M_i, N_k) dF_{N_k}; \quad (35)$$

$$\xi^{(')} (M_i, V_j) = \int_{V_j} Z^{(')} (M_i, P_j) dV_{P_j} = \frac{1}{4k_j} \mathfrak{A}^{(')} (M_i, V_j). \quad (36)$$

На основании (17) — (24) и (33) — (36) аналогично получаем [1—5]

$$\Psi(M_i, F_k) - \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \int_{F_j} K(M_i, P_j) \Psi(P_j, F_k) dF_{P_j} = \psi(M_i, F_k), \quad (37)$$

$$\Psi(M_i, F_k) - \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \int_{F_j} \Gamma(M_i, P_j) \Psi(P_j, F_k) dF_{P_j} = \psi(M_i, F_k), \quad (38)$$

$$\Psi^{(')} (M_i, F_k) - \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \int_{F_j} K^{(')} (M_i, P_j) \Psi(P_j, F_k) dF_{P_j} = \psi^{(')} (M_i, F_k), \quad (39)$$

$$\Psi^{(')} (M_i, F_k) - \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \int_{F_j} \Gamma^{(')} (M_i, P_j) \Psi(P_j, F_k) dF_{P_j} = \psi^{(')} (M_i, F_k), \quad (40)$$

$$\xi(M_i, V_j) - \sum_{s=1}^n \tilde{R}_s \int_{F_s} K(M_i, N_s) \xi(N_s, V_j) dF_{N_s} = \rho(M_i, V_j), \quad (41)$$

$$\xi(M_i, V_j) - \sum_{s=1}^n \tilde{R}_s \int_{F_s} \Gamma(M_i, N_s) \rho(N_s, V_j) dF_{N_s} = \rho(M_i, V_j), \quad (42)$$

$$\xi^{(')} (M_i, V_j) - \sum_{s=1}^n \tilde{R}_s \int_{F_s} K^{(')} (M_i, N_s) \xi(N_s, V_j) dF_{N_s} = \rho^{(')} (M_i, V_j), \quad (43)$$

$$\xi^{(')} (M_i, V_j) - \sum_{s=1}^n \tilde{R}_s \int_{F_s} \Gamma^{(')} (M_i, N_s) \rho(N_s, V_j) dF_{N_s} = \rho^{(')} (M_i, V_j), \quad (44)$$

где

$$\Psi(M_i, F_k) = \int_{F_k} K(M_i, N_k) dF_{N_k}; \quad (45)$$

$$\rho(M_i, V_j) = \int_{V_j} L(M_i, P_j) dV_{P_j} = \frac{1}{4k_j} A(M_i, V_j); \quad (46)$$

$$\Psi^{(')} (M_i, F_k) = \int_{F_k} K^{(')} (M_i, N_k) dF_{N_k}; \quad (47)$$

$$\rho^{(')} (M_i, V_j) = \int_{V_j} L^{(')} (M_i, P_j) dV_{P_j} = \frac{1}{4k_j} A^{(')} (M_i, V_j). \quad (48)$$

ПЕРВАЯ ФОРМА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МЕТОДА

Полагая под знаками интегралов в (38) и (40)

$$\psi(M_i, F_k) = \psi_{ik} (M_i \in F_i; i, k = 1, 2, \dots, n) \quad (49)$$

и соответственно в (42) и (44)

$$\rho(N_s, V_j) = \rho_{sj} (N_s \in F_s; s = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m), \quad (50)$$

где

$$\psi_{ik} = \frac{1}{F_i} \int_{F_i} \int_{F_k} \psi(M_i, F_k) dF_{M_i} = \frac{1}{F_i} \int_{F_i} \int_{F_k} K(M_i, N_k) dF_{M_i} dF_{N_k}, \quad (51)$$

$$\rho_{sj} = \frac{1}{F_s} \int_{F_s} \int_{V_j} \rho(N_s, V_j) dF_{N_s} = \frac{1}{F_s} \int_{F_s} \int_{V_j} L(N_s, P_j) dV_{P_j} dF_{N_s} = \frac{1}{4k_j} A_{sj}, \quad (52)$$

приходим к следующим приближенным системам алгебраических уравнений и выражений [1—5]:

$$\Psi(M_i, F_k) - \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \psi_{jk} \Psi(M_i, F_j) = \psi(M_i, F_k) \\ (M_i \in F_i; i, k = 1, 2, \dots, n); \quad (53)$$

$$\Psi^{(')} (M_i, F_k) - \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \psi_{jk} \Psi^{(')} (M_i, F_j) = \psi^{(')} (M_i, F_k) \\ (M_i \in V_i; i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n); \quad (54)$$

$$\xi(M_i, V_j) = \rho(M_i, V_j) + \sum_{s=1}^n \tilde{R}_s \rho_{sj} \Psi(M_i, F_s) \\ (M \in F_i; i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m); \quad (55)$$

$$\xi^{(')} (M_i, V_j) = \rho^{(')} (M_i, V_j) + \sum_{s=1}^n \tilde{R}_s \rho_{sj} \Psi^{(')} (M_i, V_s) \\ (M_i \in V_i; i, j = 1, 2, \dots, m). \quad (56)$$

Системы уравнений (53) и (54) имеют одинаковую невырожденную матрицу, определитель которой отличен от нуля. Решая системы уравнений (53) и (54) и подставляя затем полученные решения соответственно в (55) и (56), определяем функции $\xi(M_i, V_j)$ и $\xi^{(')} (M_i, V_j)$.

Подставляя в (26) и (28) под знаками интегралов вместо $\Psi^{(')} (P_j, F_k)$ выражение, являющееся решением системы уравнений (54),

$$\Psi^{(')} (M_i, F_k) = \psi^{(')} (M_i, F_k) + \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \psi^{(')} (M_i, F_j) \Psi_{jk}, \quad (57)$$

получаем

$$\Pi(M_i, F_k) = \Psi(M_i, F_k) + \sum_{j=1}^m \alpha_j \int_{V_j} \chi(M_i, P_j) \left[\psi^{(')} (P_j, F_k) + \right. \\ \left. + \sum_{s=1}^n \tilde{R}_s \psi^{(')} (P_j, F_s) \Psi_{sh} \right] dV_{P_j}, \quad (58)$$

$$\Pi^{(')} (M_i, F_k) = \Psi^{(')} (M_i, F_k) + \sum_{j=1}^m \alpha_j \int_{V_j} \chi^{(')} (M_i, P_j) \times \\ \times \left[\psi^{(')} (P_j, F_k) + \sum_{s=1}^n \tilde{R}_s \psi^{(')} (P_j, F_s) \Psi_{sh} \right] dV_{P_j}. \quad (59)$$

Аналогично подставляя под знаками интегралов в (29) и (32) вместо $\xi^{(i)}(N_s, V_j)$ выражение (56), получаем

$$\zeta(M_i, V_j) = \xi(M_i, V_j) + \sum_{s=1}^m \alpha_s \int_{V_s} \chi(M_i, N_s) \times \left[\rho^{(i)}(N_s, V_j) + \sum_{t=1}^n \tilde{R}_t \Psi^{(i)}(N_s, F_t) \rho_{tj} \right] dV_{N_s}, \quad (60)$$

$$\xi^{(i)}(M_i, V_j) = \xi^{(i)}(M_i, V_j) + \sum_{s=1}^m \alpha_s \int_{V_s} \chi^{(i)}(M_i, N_s) \times \left[\rho^{(i)}(N_s, V_j) + \sum_{t=1}^n \tilde{R}_t \Psi^{(i)}(N_s, F_t) \rho_{tj} \right] dV_{N_s}. \quad (61)$$

Полагая далее, что выполняется система равенств вида

$$\Psi^{(i)}(M_i, F_k) = \Psi_{ik}^{(i)} = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \Psi^{(i)}(M_i, F_k) dV_{M_i} \quad (M_i \in V_i; i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n), \quad (62)$$

на основании (57) находим

$$\Psi^{(i)}(M_i, F_k) = \Psi_{ik}^{(i)} = \Psi_{ik}^{(i)} + \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \Psi_{ij}^{(i)} \Psi_{jk}. \quad (63)$$

Если выполняется условие

$$\rho^{(i)}(M_i, V_j) = \rho_{ij}^{(i)} = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \rho^{(i)}(M_i, V_j) dV_{M_i} \quad (M_i \in V_i; i, j = 1, 2, \dots, m), \quad (64)$$

то в силу (56) имеем

$$\xi^{(i)}(M_i, V_j) = \xi_{ij}^{(i)} = \rho_{ij}^{(i)} + \sum_{s=1}^n \tilde{R}_s \rho_{sj} \Psi_{is}^{(i)} \quad (M_i \in V_i; i, j = 1, 2, \dots, m). \quad (65)$$

При этом выражения (60) и (61) преобразуются в следующие конечные системы линейных алгебраических уравнений:

$$\zeta(M_i, V_j) - \sum_{s=1}^m \alpha_s \xi_{sj}^{(i)} \zeta(M_i, V_s) = \xi(M_i, V_j) \quad (M_i \in F_i; i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m), \quad (66)$$

$$\xi^{(i)}(M_i, V_j) - \sum_{s=1}^m \alpha_s \xi_{sj}^{(i)} \xi^{(i)}(M_i, V_s) = \xi^{(i)}(M_i, V_j) \quad (M_i \in V_i; i, j = 1, 2, \dots, m). \quad (67)$$

Системы уравнений (63) и (65) можно получить также непосредственно из (40) и (44) на основании (62) и (64).

Пользуясь условием (62), преобразуем выражения (58) и (59) к виду

$$\Pi(M_i, F_k) = \Psi(M_i, F_k) + \sum_{j=1}^n \alpha_j \Psi_{jk} \zeta(M_i, V_j) \quad (M_i \in F_i; i, k = 1, 2, \dots, n), \quad (68)$$

$$\Pi^{(i)}(M_i, F_k) = \Psi^{(i)}(M_i, F_k) + \sum_{j=1}^m \alpha_j \Psi_{jk}^{(i)} \xi^{(i)}(M_i, V_j) \quad (M_i \in V_i; i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n). \quad (69)$$

Системы алгебраических уравнений (66) и (67) и выражений (55), (56), (68) и (69) на основании (6), (8), (34), (36) и (52) представим в следующем виде:

$$\tilde{\mathfrak{A}}(M_i, V_j) - \frac{1}{4} \sum_{s=1}^m \frac{\alpha_s}{\alpha_s} \mathfrak{A}_{sj}^{(i)} \tilde{\mathfrak{A}}(M_i, V_s) = \mathfrak{A}(M_i, V_j) \quad (M_i \in F_i; i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m), \quad (70)$$

$$\tilde{\mathfrak{A}}^{(i)}(M_i, V_j) - \frac{1}{4} \sum_{s=1}^m \frac{\alpha_s}{\alpha_s} \mathfrak{A}_{sj}^{(i)} \tilde{\mathfrak{A}}^{(i)}(M_i, V_s) = \mathfrak{A}^{(i)}(M_i, V_j) \quad (M_i \in V_i; i, j = 1, 2, \dots, m), \quad (71)$$

$$\mathfrak{A}(M_i, V_j) = A(M_i, V_j) + \sum_{s=1}^n \tilde{R}_s A_{sj} \Psi(M_i, F_s) \quad (M_i \in F_i; i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m), \quad (72)$$

$$\mathfrak{A}^{(i)}(M_i, V_j) = A^{(i)}(M_i, V_j) + \sum_{s=1}^n \tilde{R}_s A_{sj} \Psi^{(i)}(M_i, F_s) \quad (M_i \in V_i; i, j = 1, 2, \dots, m), \quad (73)$$

$$\Pi(M_i, F_k) = \Psi(M_i, F_k) + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{\alpha_j} \Psi_{jk}^{(i)} \tilde{\mathfrak{A}}(M_i, V_j) \quad (M_i \in F_i; i, k = 1, 2, \dots, n), \quad (74)$$

$$\Pi^{(i)}(M_i, F_k) = \Psi^{(i)}(M_i, F_k) + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{\alpha_j} \Psi_{jk}^{(i)} \tilde{\mathfrak{A}}^{(i)}(M_i, V_j) \quad (M_i \in V_i; i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n). \quad (75)$$

Системы уравнений (53), (54), (66), (67) и выражений (55), (56), (68) и (69) или отличающиеся от них только по форме системы уравнений (53), (54), (70), (71) и выражений (72)–(75) лежат в основе первой формы представления предлагаемого метода, которая сводится к последовательному определению соответствующих разрешающих характеристик излучения. Согласно этой форме представления метода необходимо сначала на основании систем алгебраических уравнений (53), (54) и выражений (55), (56) определить разрешающие характеристики $\Psi(M_i, F_k)$ и $\Psi^{(i)}(M_i, F_k)$, $\xi(M_i, V_j)$ и $\xi^{(i)}(M_i, V_j)$ и затем на основании систем уравнений (66) и (67) и выражений (68) и (69) — более сложные разрешающие характеристики $\zeta(M_i, V_j)$, $\zeta^{(i)}(M_i, V_j)$, $\Pi(M_i, F_k)$ и $\Pi^{(i)}(M_i, F_k)$.

ВТОРАЯ ФОРМА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МЕТОДА

Эта форма основана на использовании следующих систем интегральных уравнений, впервые полученных в несколько ином виде в работе [6]:

$$\Omega(M_i, N_k) - \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \int_{F_j} \Omega(M_i, P_j) K(P_j, N_k) dF_{P_j} -$$

$$-\sum_{s=1}^m \alpha_s \int_{V_s} \chi(M_i, P_s) K^{(\prime)}(P_s, N_k) dV_{P_s} = K(M_i, N_k), \quad (76)$$

$$\chi(M_i, P_j) - \sum_{s=1}^m \alpha_s \int_{V_s} \chi(M_i, N_s) L^{(\prime)}(N_s, P_j) dV_{N_s} - \sum_{t=1}^n \tilde{R}_t \times \\ \times \int_{F_t} \Omega(M_i, N_t) L(N_t, P_j) dF_{N_t} = L(M_i, P_j). \quad (77)$$

Заметим, что системы интегральных уравнений (76) и (77) могут быть получены с помощью несложных преобразований систем (14), (16), (22) и (24).

На основании (5) и (6) системы (76) и (77) преобразуем к виду

$$\Pi(M_i, F_k) - \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \int_{F_j} \Omega(M_i, P_j) \psi(P_j, F_k) dF_{P_j} - \sum_{s=1}^m \alpha_s \times \\ \times \int_{V_s} \chi(M_i, P_s) \psi^{(\prime)}(P_s, F_k) dV_{P_s} = \psi(M_i, F_k) \\ (M_i \in F_i; i, k = 1, 2, \dots, n), \quad (78)$$

$$\xi(M_i, V_j) - \sum_{s=1}^m \alpha_s \int_{V_s} \chi(M_i, N_s) \rho^{(\prime)}(N_s, V_j) dV_{N_s} - \sum_{t=1}^n \tilde{R}_t \times \\ \times \int_{F_t} \Omega(M_i, P_t) \rho(P_t, V_j) dF_{P_t} = \rho(M_i, V_j) \\ (M_i \in F_i; i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m). \quad (79)$$

Аналогично на основании (10), (12), (22) и (24) получаем [4]

$$\Omega^{(\prime)}(M_i, N_k) - \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \int_{F_j} \Omega^{(\prime)}(M_i, P_j) K(P_j, N_k) dF_{P_j} - \sum_{s=1}^m \alpha_s \times \\ \times \int_{V_s} \chi^{(\prime)}(M_i, P_s) K^{(\prime)}(P_s, N_k) dV_{P_s} = K^{(\prime)}(M_i, N_k), \quad (80)$$

$$\chi^{(\prime)}(M_i, P_j) - \sum_{s=1}^m \alpha_s \int_{V_s} \chi^{(\prime)}(M_i, N_s) L^{(\prime)}(N_s, P_j) dV_{N_s} - \sum_{t=1}^n \tilde{R}_t \times \\ \times \int_{F_t} \Omega^{(\prime)}(M_i, N_t) L(N_t, P_j) dF_{N_t} = L^{(\prime)}(M_i, P_j). \quad (81)$$

Осуществляя почленное интегрирование (80) и (81) согласно (7) и (8), находим

$$\Pi^{(\prime)}(M_i, F_k) - \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \int_{F_j} \Omega^{(\prime)}(M_i, P_j) \psi(P_j, F_k) dF_{P_j} - \sum_{s=1}^m \alpha_s \times \\ \times \int_{V_s} \chi^{(\prime)}(M_i, P_s) \psi^{(\prime)}(P_s, F_k) dV_{P_s} = \psi^{(\prime)}(M_i, F_k) \\ (M_i \in V_i; i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n), \quad (82)$$

$$\xi^{(\prime)}(M_i, V_j) - \sum_{s=1}^m \alpha_s \int_{V_s} \chi^{(\prime)}(M_i, N_s) \rho^{(\prime)}(N_s, V_j) dV_{N_s} - \sum_{t=1}^n \tilde{R}_t \times \\ \times \int_{F_t} \Omega^{(\prime)}(M_i, N_t) \rho(N_t, V_j) dF_{N_t} = \rho^{(\prime)}(M_i, V_j) \\ (M_i \in V_i; i, j = 1, 2, \dots, m). \quad (83)$$

Заменяя на основании (49), (50), (62) и (64) под знаками интегралов в (78), (79), (82) и (83) локальные исходные характеристики $\psi(P_j, F_k)$, $\psi^{(\prime)}(P_j, F_k)$, $\rho(N_t, V_j)$ и $\rho^{(\prime)}(N_s, V_j)$ соответствующими осредненными характеристиками ψ_{jk} , $\psi_{jk}^{(\prime)}$, ρ_{tj} и $\rho_{sj}^{(\prime)}$, приходим к следующим конечным системам алгебраических уравнений, лежащих в основе второй формы представления нового метода:

$$\Pi(M_i, F_k) - \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \psi_{jk} \Pi(M_i, F_j) - \sum_{s=1}^m \alpha_s \psi_{sh}^{(\prime)} \xi(M_i, V_s) = \psi(M_i, F_k) \\ (M_i \in F_i; i, k = 1, 2, \dots, n), \quad (84)$$

$$\xi(M_i, V_j) - \sum_{s=1}^m \alpha_s \rho_{sj}^{(\prime)} \xi(M_i, V_s) - \sum_{t=1}^n \tilde{R}_t \rho_{tj} \Pi(M_i, F_t) = \rho(M_i, V_j) \\ M_i \in F_i; i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m), \quad (85)$$

$$\Pi^{(\prime)}(M_i, F_k) - \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \psi_{jk} \Pi^{(\prime)}(M_i, F_j) - \sum_{s=1}^m \alpha_s \psi_{sh}^{(\prime)} \xi^{(\prime)}(M_i, V_s) = \\ = \psi^{(\prime)}(M_i, F_k) (M_i \in V_i; i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n), \quad (86)$$

$$\xi^{(\prime)}(M_i, V_j) - \sum_{s=1}^m \alpha_s \rho_{sj}^{(\prime)} \xi^{(\prime)}(M_i, V_s) - \sum_{t=1}^n \tilde{R}_t \rho_{tj} \Pi^{(\prime)}(M_i, F_t) = \rho^{(\prime)}(M_i, V_j) \\ \text{или} \quad (87)$$

$$\Pi(M_i, F_k) - \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \psi_{jk} \Pi(M_i, F_j) - \frac{1}{4} \sum_{s=1}^m \frac{\alpha_s}{\alpha_s} \psi_{sh}^{(\prime)} \tilde{\mathfrak{A}}(M_i, V_s) = \\ = \psi(M_i, F_k), \quad (88)$$

$$\tilde{\mathfrak{A}}(M_i, V_j) - \frac{1}{4} \sum_{s=1}^m \frac{\alpha_s}{\alpha_s} A_{sj}^{(\prime)} \tilde{\mathfrak{A}}(M_i, V_s) - \sum_{t=1}^n \tilde{R}_t A_{tj} \Pi(M_i, F_t) = A(M_i, V_j), \quad (89)$$

$$\Pi^{(\prime)}(M_i, F_k) - \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \psi_{jk} \Pi^{(\prime)}(M_i, F_j) - \frac{1}{4} \sum_{s=1}^m \frac{\alpha_s}{\alpha_s} \psi_{sh}^{(\prime)} \tilde{\mathfrak{A}}^{(\prime)}(M_i, V_s) = \\ = \psi_{jk}^{(\prime)}(M_i, F_k), \quad (90)$$

$$\tilde{\mathfrak{A}}^{(\prime)}(M_i, V_j) - \frac{1}{4} \sum_{s=1}^m \frac{\alpha_s}{\alpha_s} A_{sj}^{(\prime)} \tilde{\mathfrak{A}}^{(\prime)}(M_i, V_s) - \sum_{t=1}^n \tilde{R}_t A_{tj} \Pi^{(\prime)}(M_i, F_t) = \\ = A^{(\prime)}(M_i, V_j). \quad (91)$$

Системы уравнений (84)–(87) или соответственно (88)–(91) позволяют проводить численные определения и исследования локальных разрешающих характеристик $\Pi(M_i, F_k)$, $\xi(M_i, V_j)$, $\Pi^{(\prime)}(M_i, F_k)$ и $\xi^{(\prime)}(M_i, V_j)$, содержащихся в выражениях (3) и (4), непосредственно через исходные локальные и осредненные оптико-геометрические параметры системы $\psi(M_i, F_k)$, $\rho(M_i, V_j)$, $\psi^{(\prime)}(M_i, F_k)$, $\rho^{(\prime)}(M_i, V_j)$, ψ_{jk} , $\psi_{sh}^{(\prime)}$, ρ_{sj} и $\rho_{sj}^{(\prime)}$. Независимо от использования при решении конкретных задач первой или второй форм представления изложенного выше обобщенного зонального метода для проверки результатов расчетов локальных характеристик излучения широко применяются уравнения замкнутости вида [1–4]:

$$\sum_{k=1}^n \psi(M_i, F_k) + \sum_{j=1}^m A(M_i, V_j) = 1 \quad (M_i \in F_i; i = 1, 2, \dots, n), \quad (92)$$

$$\sum_{k=1}^n \psi^{(')} (M_i, F_k) + \sum_{j=1}^m A^{(')} (M_i, V_j) = 4 \quad (M_i \in V_i; i = 1, 2, \dots, m), \quad (93)$$

$$\sum_{k=1}^n \tilde{A}_k \Pi (M_i, F_k) + \sum_{j=1}^{m_1} \tilde{\mathfrak{A}} (M_i, V_j) = 1 \quad (M_i \in F_i; i = 1, 2, \dots, n), \quad (94)$$

$$\sum_{k=1}^n \tilde{A}_k \Pi^{(')} (M_i, F_k) + \sum_{j=1}^{m_1} \tilde{\mathfrak{A}}^{(')} (M_i, V_j) = 4 \quad (M_i \in V_i; i = 1, 2, \dots, m), \quad (95)$$

где m_1 —число объемных зон, для которых задаются температуры ($0 \leq m_1 \leq m$).

Уравнения замкнутости (92) и (93) не зависят от постановки задачи, определяемой заданием соответствующих характеристик излучения на границе системы и по объему поглощающей и рассеивающей среды, ее заполняющей. Кроме того, в случае применения первой формы представления метода важное значение приобретают уравнения замкнутости

$$\sum_{k=1}^n \tilde{A}_k \Psi (M_i, F_k) + \sum_{j=1}^m \mathfrak{A} (M_i, V_j) = 1 \quad (M_i \in F_i; i = 1, 2, \dots, n), \quad (96)$$

$$\sum_{k=1}^n \tilde{A}_k \Psi^{(')} (M_i, F_k) + \sum_{j=1}^m \mathfrak{A}^{(')} (M_i, V_j) = 4 \quad (M_i \in V_i; i = 1, 2, \dots, m). \quad (97)$$

Уравнения замкнутости (96), (97) занимают промежуточное место между уравнениями замкнутости (94), (95), с одной стороны, и уравнениями замкнутости (92), (93) — с другой, поскольку уравнения (94), (95) сводятся к ним в случае излучающей системы, заполненной чисто поглощающей средой с заданным полем температур по ее объему, а уравнения (96), (97) сводятся к (92), (93) в случае излучающей системы, состоящей из черных граничных тел, разделенных чисто поглощающей средой с заданным распределением температур по ее объему.

Рассмотрим две теоремы, сводящие определение функций $A(M_i, V_j)$ и $A^{(')} (M_i, V_j)$ к определению соответственно локальных обобщенных угловых коэффициентов излучения и обобщенных телесных углов.

Теорема 1. Локальная ослабляющая способность $A(M_i, V_j)$ объема V_j среды от площадки dF_{M_i} в граничной точке $M_i \in F_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), расположенной в плоскости, не пересекающей объем V_j , равна разности локальных обобщенных угловых коэффициентов излучения от площадки dF_{M_i} на поверхностях F'_j и F''_j , составляющих замкнутую поверхность $F_j = F'_j + F''_j$, ограничивающую объем V_j [5]:

$$A(M_i, V_j) = \psi(M_i, F'_j) - \psi(M_i, F''_j) \quad (M_i \in F_i; i = 1, 2, \dots, n), \quad (98)$$

где F'_j — часть поверхности F_j ($F'_j \subset F_j$), через которую излучение от площадки dF_{M_i} входит в объем V_j и F''_j — часть поверхности F_j ($F''_j \subset F_j$), через которую излучение от площадки dF_{M_i} после частичного ослабления объемом V_j выходит из него.

Доказательство. Рассмотрим конический объем V_i среды с вершиной в точке $M_i \in F_i$, опирающийся на поверхность F'_j и соответ-

ственно объем V_{i+j} , равный сумме объемов V_i и V_j ($V_{i+j} = V_i + V_j$). На основании закона сохранения энергии получаем

$$\psi(M_i, F'_j) + A(M_i, V_i) = \varphi(M_i, F'_j) \quad (M_i \in F_i; i = 1, 2, \dots, n), \quad (99)$$

$$\psi(M_i, F''_j) + A(M_i, V_{i+j}) = \varphi(M_i, F''_j) \quad (M_i \in F_i; i = 1, 2, \dots, n). \quad (100)$$

Но в силу конгруэнтности лучистых потоков

$$\varphi(M_i, F'_j) = \varphi(M_i, F''_j). \quad (101)$$

Поэтому

$$\psi(M_i, F'_j) + A(M_i, V_i) = \psi(M_i, F''_j) + A(M_i, V_{i+j}). \quad (102)$$

Учитывая, что локальная ослабляющая способность является аддитивной функцией

$$A(M_i, V_{i+j}) = A(M_i, V_i) + A(M_i, V_j), \quad (103)$$

приходим к выражению (98).

Прежде чем перейти к рассмотрению второй теоремы, введем некоторые новые термины, связанные с величинами $\psi^{(')} (M_i, F_k)$ и $A^{(')} (M_i, V_j)$. Будем называть функцию $\psi^{(')} (M_i, V_k)$, областью определения которой является объем V_i ($M_i \in V_i$), приведенным обобщенным телесным углом с вершиной в точке $M_i \in V_i$, опирающимся на поверхность F_k . Соответственно функцию $A^{(')} (M_i, V_j)$ в точке $M_i \in V_i$ назовем дополнением приведенного обобщенного телесного угла, так как их сумма равна $\frac{1}{\pi} \omega(M_i, F_k)$:

$$\psi^{(')} (M_i, F_k) + A^{(')} (M_i, V_k) = \frac{1}{\pi} \omega(M_i, F_k) \quad (M_i \in V_i; i = 1, 2, \dots, m), \quad (104)$$

где V_k — конический объем среды с вершиной в точке $M_i \in V_i$, ограниченный телесным углом $\omega(M_i, F_k)$ с вершиной в точке $M_i \in V_i$, опирающимся на поверхность F_k . Соотношение (104) можно переписать в виде

$$\tilde{\psi}^{(')} (M_i, F_k) + \tilde{A}^{(')} (M_i, V_k) = \omega(M_i, F_k), \quad (104a)$$

где $\tilde{\psi}^{(')} (M_i, F_k) = \pi \psi^{(')} (M_i, F_k)$ — обобщенный телесный угол, представляющий часть телесного угла $\omega(M_i, F_k)$, определяемую дошедшим из точки $M_i \in V_i$ до поверхности F_k через объем среды V_k излучением, и $\tilde{A}^{(')} (M_i, V_k) = \pi A^{(')} (M_i, V_k)$ — дополнение обобщенного телесного угла $\tilde{\psi}^{(')} (M_i, F_k)$.

Теорема 2. Дополнение приведенного телесного угла $A^{(')} (M_i, V_j)$ с вершиной во внутренней точке $M_i \in V_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) системы, расположенной вне объема V_j среды, равно разности приведенных обобщенных телесных углов с вершиной в точке $M_i \in V_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$), опирающихся соответственно на поверхности F'_j и F''_j , составляющие замкнутую поверхность $F_j = F'_j + F''_j$, ограничивающую объем V_j :

$$A^{(')} (M_i, V_j) = \psi^{(')} (M_i, F'_j) - \psi^{(')} (M_i, F''_j) \quad (M_i \in V_i; i = 1, 2, \dots, m). \quad (105)$$

Доказательство данной теоремы аналогично доказательству предыдущей. Имеем

$$\psi^{(')} (M_i, F'_j) + A^{(')} (M_i, V_i) = \psi^{(')} (M_i, F'_j) = \frac{1}{\pi} \omega(M_i, F'_j)$$

$$\psi^{(i)}(M_i, F_j) + A^{(i)}(M_i, V_{i+j}) = \varphi^{(i)}(M_i, F_j) = \frac{1}{\pi} \omega(M_i, F_j) - \frac{\eta_{\text{рез.}i}}{\alpha_i}, \quad (110)$$

$$(M_i \in V_i; i = 1, 2, \dots, m),$$

$$\eta_{\text{рез.}i} = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \eta_{\text{рез}}(M_i) dV_{M_i}, \quad (110a)$$

где V_i — конический объем среды с вершиной в точке $M_i \in V_i$; ($i = 1, 2, \dots, m$), опирающийся на поверхность F_j , и V_{i+j} — конический объем с вершиной в точке $M_i \in V_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$), опирающийся на поверхность F_j , равный сумме объемов V_i и V_j ($V_{i+j} = V_i + V_j$). Учитывая, что телесные углы обладают свойством конгруэнтности

$$\omega(M_i, F_j) = \omega(M_i, F_j^*) \quad (M_i \in V_i; i = 1, 2, \dots, m),$$

получаем

$$\psi^{(i)}(M_i, F_j) + A^{(i)}(M_i, V_i) = \psi^{(i)}(M_i, F_j^*) + A^{(i)}(M_i, V_{i+j}).$$

Отсюда на основании аддитивности функции $A^{(i)}(M_i, V_{i+j})$

$$A^{(i)}(M_i, V_{i+j}) = A^{(i)}(M_i, V_i) + A^{(i)}(M_j, V_j)$$

приходим к соотношению (105).

Аналогично можно доказать теорему, согласно которой локальная результирующая поглощательная способность $A_{\text{рез.п}}(M_i, V_j)$ объема V среды от площадки dF_{M_i} , расположенной во внутренней точке $M_i \in V$ системы вне объема V_j в плоскости, пересекающей этот объем и разделяющей его на две части V_j' и V_j'' ($V_j = V_j' + V_j''$), равна разности результирующих локальных обобщенных угловых коэффициентов излучения от площадки dF_{M_i} на соответствующие части F_j' и F_j'' поверхности F_j ($F_j = F_j' + F_j''$)

$$A_{\text{рез.п}}(M_i, V_j) = \psi_{\text{рез.п}}(M_i, F_j') - \psi_{\text{рез.п}}(M_i, F_j'') \quad (M_i \in V_i; i = 1, 2, \dots, m). \quad (106)$$

Справедлива и аналогичная теорема, относящаяся к векторной поглощательной способности $\vec{A}(M_i, V_j)$ объема V_j среды в точке $M_i \in V_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Однако в данной работе мы не будем подробно останавливаться на рассмотрении этих теорем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСРЕДНЕННЫХ (ЗОНАЛЬНЫХ) ХАРАКТЕРИСТИК ИЗЛУЧЕНИЯ

Для определения осредненных характеристик излучения в пределах граничных и объемных зон, на которые подразделяется излучающая система, воспользуемся наряду с (51), (52), (62) и (64), также соотношениями

$$E_{\text{пад.}i} = \frac{Q_{\text{пад.}i}}{F_i} = \frac{1}{F_i} \int_{F_i} E_{\text{пад}}(M_i) dF_{M_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (107)$$

$$E_{\text{рез.}i} = \frac{Q_{\text{рез.}i}}{F_i} = \frac{1}{F_i} \int_{F_i} E_{\text{рез}}(M_i) dF_{M_i}. \quad (108)$$

$$q_{\text{погл.}i} = \frac{Q_{\text{погл.}i}}{V_i} = \frac{\alpha_i}{V_i} \int_{V_i} \eta_{\text{пад}}(M_i) dV_{M_i} \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (109)$$

$$\eta_{0i} = 4\sigma_0 T_i^4 = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \eta_0(M_i) dV_{M_i} = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \eta_{\text{пад}}(M_i) dV_{M_i} -$$

$$\Pi_{ik} = \frac{1}{F_i} \int_{F_i} \Pi(M_i, F_k) dF_{M_i} = \frac{1}{F_i} \int_{F_i} \int_{F_k} \Omega(M_i, N_k) dF_{N_k} dF_{M_i}, \quad (111)$$

$$\zeta_{ij} = \frac{1}{4\alpha_i} \tilde{\mathfrak{A}}_{ij} = \frac{1}{F_i} \int_{F_i} \zeta(M_i, V_j) dF_{M_i} = \frac{1}{F_i} \int_{F_i} \int_{V_j} \chi(M_i, P_j) dV_{P_j} dF_{M_i}, \quad (112)$$

$$\Pi_{ik}^{(i)} = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \Pi^{(i)}(M_i, F_k) dV_{M_i} = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \int_{F_k} \Omega^{(i)}(M_i, N_k) dF_{N_k} dV_{M_i}, \quad (113)$$

$$\zeta_{ij}^{(i)} = \frac{1}{4\alpha_j} \tilde{\mathfrak{A}}_{ij}^{(i)} = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \zeta^{(i)}(M_i, V_j) dV_{M_i} = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \int_{V_j} \chi^{(i)}(M_i, P_j) dV_{P_j} dV_{M_i}. \quad (114)$$

При этом исходные расчетные выражения приобретают вид

$$E_{\text{пад.}i} = \sum_{h=1}^n E_{\alpha,h} \Pi_{ih} + \sum_{j=1}^m \eta_{\alpha,j} \zeta_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (115)$$

$$q_{\text{погл.}i} = \alpha_i \left(\sum_{h=1}^n E_{\alpha,h} \Pi_{ih}^{(i)} + \sum_{j=1}^m \eta_{\alpha,j} \zeta_{ij}^{(i)} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (116)$$

На основании (3), (4), (53) — (56), (63), (64), (67), (68) и (110), (114) получаем следующие осредненные разрешающие системы алгебраических уравнений и расчетных выражений.

Для первой формы представления метода:

$$\Psi_{ik} - \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \Psi_{jk} \Psi_{ij} = \psi_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n), \quad (117)$$

$$\Psi_{ik} - \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \Psi_{ij} \Psi_{jk} = \psi_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n), \quad (118)$$

$$\Psi_{ik}^{(i)} - \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \Psi_{jk} \Psi_{ij}^{(i)} = \psi_{ik}^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n), \quad (119)$$

$$\xi_{ij} = \rho_{ij} + \sum_{s=1}^n \tilde{R}_s \Psi_{is} \rho_{sj} \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m), \quad (120)$$

$$\xi_{ij}^{(i)} = \rho_{ij}^{(i)} + \sum_{s=1}^n \tilde{R}_s \Psi_{is}^{(i)} \rho_{sj} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m), \quad (121)$$

$$\zeta_{ij} - \sum_{s=1}^m \alpha_s \xi_{sj}^{(i)} \zeta_{is} = \xi_{ij}^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (122)$$

$$\zeta_{ij}^{(i)} - \sum_{s=1}^m \alpha_s \xi_{sj}^{(i)} \zeta_{is}^{(i)} = \xi_{ij}^{(i)} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m), \quad (123)$$

$$\Pi_{ik} = \Psi_{ik} + \sum_{j=1}^m \alpha_j \Psi_{jk}^{(i)} \zeta_{ij} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n), \quad (124)$$

$$\Pi_{ik}^{(i)} = \Psi_{ik}^{(i)} + \sum_{j=1}^m \alpha_j \Psi_{jk}^{(i)} \zeta_{ij}^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n). \quad (125)$$

Системы алгебраических уравнений (122), (123) и расчетных алгебраических выражений (120), (121) и (124), (125) на основании (111), (114) могут быть представлены также в следующем виде [2—6]:

$$\tilde{\mathfrak{A}}_{ij} - \frac{1}{4} \sum_{s=1}^m \frac{\kappa_s}{\alpha_s} \mathfrak{A}_{sj}^{(s)} \tilde{\mathfrak{A}}_{is} = \mathfrak{A}_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m). \quad (126)$$

$$\tilde{\mathfrak{A}}_{ij}^{(s)} - \frac{1}{4} \sum_{s=1}^m \frac{\kappa_s}{\alpha_s} \mathfrak{A}_{sj}^{(s)} \tilde{\mathfrak{A}}_{is}^{(s)} = \mathfrak{A}_{ij}^{(s)} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m), \quad (127)$$

$$\mathfrak{A}_{ij} = A_{ij} + \sum_{s=1}^n \tilde{R}_s \Psi_{is}^{(s)} A_{sj} \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m), \quad (128)$$

$$\tilde{\mathfrak{A}}_{ij}^{(s)} = A_{ij}^{(s)} + \sum_{s=1}^n \tilde{R}_s \Psi_{is}^{(s)} A_{sj} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m), \quad (129)$$

$$\Pi_{ik} = \Psi_{ik} + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^m \frac{\kappa_j}{\alpha_j} \tilde{\mathfrak{A}}_{ij} \Psi_{jk}^{(j)} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n), \quad (130)$$

$$\Pi_{ik}^{(s)} = \Psi_{ik}^{(s)} + \sum_{j=1}^m \frac{\kappa_j}{\alpha_j} \tilde{\mathfrak{A}}_{ij}^{(s)} \Psi_{jk}^{(j)} \quad (i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n). \quad (131)$$

Уравнения замкнутости для осредненных оптико-геометрических характеристик излучения имеют вид [2—6]

$$\sum_{k=1}^n \Psi_{ik} + \sum_{j=1}^m A_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (132)$$

$$\sum_{k=1}^n H(F_i, F_k) + \sum_{j=1}^m H(F_i, V_j) = F_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (133)$$

$$\sum_{k=1}^n \Psi_{ik}^{(1)} + \sum_{j=1}^m A_{ij}^{(1)} = 4 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (134)$$

$$\sum_{k=1}^n H(V_i, F_k) + \sum_{j=1}^m H(V_i, V_j) = 4k_i V_i \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (135)$$

$$\sum_{k=1}^n \tilde{A}_k \Psi_{ik} + \sum_{j=1}^m \mathfrak{A}_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (136)$$

$$\sum_{k=1}^n \tilde{A}_k P(F_i, F_k) + \sum_{j=1}^m P(F_i, V_j) = F_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (137)$$

$$\sum_{k=1}^n \tilde{A}_k \Psi_{ik}^{(1)} + \sum_{j=1}^m \mathfrak{A}_{ij}^{(1)} = 4 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (138)$$

$$\sum_{k=1}^n \tilde{A}_k P(V_i, F_k) + \sum_{j=1}^m P(V_i, V_j) = 4k_i V_i \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (139)$$

$$\sum_{k=1}^n \tilde{A}_k \Pi_{ik} + \sum_{j=1}^{m_1} \tilde{\mathfrak{A}}_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (140)$$

$$\sum_{k=1}^n \tilde{A}_k \tilde{P}(F_i, F_k) + \sum_{j=1}^{m_1} \tilde{P}(F_i, V_j) = F_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (141)$$

$$\sum_{k=1}^n A_k \Pi_{ik}^{(1)} + \sum_{j=1}^{m_1} \mathfrak{A}_{ij}^{(1)} = 4 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (142)$$

$$\sum_{k=1}^n \tilde{A}_k \tilde{P}(V_i, F_k) + \sum_{j=1}^{m_1} P(V_i, V_j) = 4k_i V_j \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (143)$$

где m_1 — число объемных зон, для которых задаются температуры, и

$$H_{ik} = H(F_i, F_k) = \Psi_{ik} F_i; \quad H(F_i, V_j) = A_{ij} F_i = 4k_j \rho_{ij} F_i; \quad (144)$$

$$H(V_i, F_k) = k_i \Psi_{ik}^{(s)} V_i; \quad H(V_i, V_j) = k_i A_{ij}^{(s)} V_i; \quad (144)$$

$$P_{ik} = P(F_i, F_k) = \Psi_{ik} F_i; \quad P(F_i, V_j) = \mathfrak{A}_{ij} F_i = 4k_j \xi_{ij} F_i; \quad (145)$$

$$P(V_i, F_k) = k_i \Psi_{ik}^{(s)} V_i; \quad P(V_i, V_j) = k_i \mathfrak{A}_{ij}^{(s)} V_i, \quad (145)$$

$$\tilde{P}_{ik} = \tilde{P}(F_i, F_k) = \Pi_{ik} F_i; \quad \tilde{P}(F_i, V_j) = \tilde{\mathfrak{A}}_{ij} F_i = 4\alpha_j \zeta_{ij} F_i; \quad (146)$$

$$\tilde{P}(V_i, F_k) = \alpha_i \Pi_{ik}^{(s)} V_i; \quad \tilde{P}(V_i, V_j) = \alpha_i \tilde{\mathfrak{A}}_{ij}^{(s)} V_i. \quad (146)$$

Функции, определяемые соотношениями (121), (122) и (123), удовлетворяют следующим уравнениям взаимности:

$$H_{ik} = H(F_i, F_k) = \Psi_{ik} F_i = \Psi_{ki} F_k = H(F_k, F_i) = H_{ki} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n), \quad (147)$$

$$P_{ik} = P(F_i, F_k) = \Psi_{ik} F_i = \Psi_{ki} F_k = P(F_k, F_i) = P_{ki} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n), \quad (148)$$

$$\tilde{P}_{ik} = \tilde{P}(F_i, F_k) = \Pi_{ik} F_i = \Pi_{ki} F_k = \tilde{P}(F_k, F_i) = \tilde{P}_{ki} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n), \quad (149)$$

$$H(V_i, V_j) = k_i A_{ij}^{(s)} V_i = 4k_i k_j \rho_{ij}^{(s)} V_i = 4k_i k_j \rho_{ji}^{(s)} V_j = k_j A_{ji}^{(s)} V_j = H(V_j, V_i) \quad (i, j = 1, 2, \dots, m), \quad (150)$$

$$P(V_i, V_j) = k_i \alpha_{ij}^{(s)} V_i = 4k_i k_j \xi_{ij}^{(s)} V_i = 4k_i k_j \xi_{ji}^{(s)} V_j = k_j \alpha_{ji}^{(s)} V_j = P(V_j, V_i) \quad (i, j = 1, 2, \dots, m), \quad (151)$$

$$\tilde{P}(V_i, V_j) = \alpha_i \tilde{\alpha}_{ij}^{(s)} V_i = 4\alpha_i \alpha_j \zeta_{ij}^{(s)} V_i = 4\alpha_i \alpha_j \zeta_{ji}^{(s)} V_j = \alpha_j \tilde{\alpha}_{ji}^{(s)} V_j = \tilde{P}(V_j, V_i) \quad (i, j = 1, 2, \dots, m), \quad (152)$$

$$H(F_i, V_j) = A_{ij} F_i = 4k_j \rho_{ij} F_i = k_j \Psi_{ji}^{(s)} V_j = H(V_j, F_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m), \quad (153)$$

$$P(F_i, V_j) = \alpha_{ij} F_i = 4k_j \xi_{ij} F_i = k_j \Psi_{ji}^{(s)} V_j = P(V_j, F_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m) \quad (154)$$

$$\tilde{P}(F_i, V_j) = \tilde{\alpha}_{ij} F_i = 4\alpha_j \zeta_{ij} F_i = \alpha_j \Pi_{ji}^{(s)} V_j = \tilde{P}(V_j, F_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m), \quad (155)$$

Для второй формы представления метода.

$$\Pi_{ik} - \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \Psi_{jk} \Pi_{ij} - \sum_{s=1}^m \kappa_s \Psi_{sk}^{(s)} \zeta_{is} = \Psi_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n), \quad (156)$$

$$\zeta_{ij} - \sum_{s=1}^m \kappa_s \rho_{sj}^{(s)} \zeta_{is} - \sum_{t=1}^n \tilde{R}_t \rho_{tj} \Pi_{it} = \rho_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m), \quad (157)$$

$$\Pi_{ik}^{(s)} - \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \Psi_{jk} \Pi_{ij}^{(s)} - \sum_{s=1}^m \kappa_s \Psi_{sk}^{(s)} \zeta_{is}^{(s)} = \Psi_{ik}^{(s)} \quad (i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n), \quad (158)$$

$$\zeta_{ij}^{(s)} - \sum_{s=1}^m \kappa_s \rho_{sj} \zeta_{is}^{(s)} - \sum_{t=1}^n \tilde{R}_t \rho_{tj} \Pi_{it} = \rho_{ij}^{(s)} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m), \quad (159)$$

или

$$\Pi_{ik} - \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \psi_{jk} \Pi_{ij} - \frac{1}{4} \sum_{s=1}^m \frac{\alpha_s}{\alpha_s} \psi_{sh}^{(')} \mathfrak{A}_{is}^{(')} = \psi_{ik} \quad (16)$$

$$\tilde{\mathfrak{A}}_{ij} - \frac{1}{4} \sum_{s=1}^m \frac{\alpha_s}{\alpha_s} A_{sj}^{(')} \tilde{\mathfrak{A}}_{is}^{(')} - \sum_{t=1}^n \tilde{R}_t A_{it} \Pi_{ij} = A_{ij} \quad (16)$$

$$\Pi_{ik}^{(')} - \sum_{j=1}^n \tilde{R}_j \psi_{jk} \Pi_{ij}^{(')} - \frac{1}{4} \sum_{s=1}^m \frac{\alpha_s}{\alpha_s} \psi_{sh}^{(')} \tilde{\mathfrak{A}}_{is}^{(')} = \psi_{ik}^{(')} \quad (16)$$

$$\tilde{\mathfrak{A}}_{ij}^{(')} - \frac{1}{4} \sum_{s=1}^m \frac{\alpha_s}{\alpha_s} A_{sj}^{(')} \tilde{\mathfrak{A}}_{is}^{(')} - \sum_{t=1}^n \tilde{R}_t A_{it} \Pi_{ij}^{(')} = A_{ij}^{(')} \quad (16)$$

Таким образом, вторая форма представления нового обобщенно зонального метода исследования и расчета лучистого теплообмена в излучающих системах, заполненных поглощающей и рассеивающей средой, опирается на две конечные системы алгебраических уравнений, каждая из которых состоит из $n+m$ уравнений с $n+m$ неизвестными, которые приходится решать при определении и локальных, и осредненных характеристик излучения. Все эти системы уравнений имеют одинаковую невырожденную матрицу для всех восьми постановок задачи, охватываемых обобщенной постановкой задачи [2—6]. Исключением составляет девятая постановка, характеризуемая заданием всюду в границе системы поверхностной плотности результирующего излучения $E_{\text{рез}}$ и всюду по объему заполняющей ее среды плотности объемного результирующего излучения $\eta_{\text{рез}}$, которая не имеет единственного решения и для которой может быть доказана лишь теорема существования решения [1, 4]. Приведенные выше уравнения замкнутости и взаимности могут быть широко использованы при проведении численных исследований и расчетов, проводимых на основании как первой, так и второй форм представления данного метода. В случае использования второй формы метода применяются только те уравнения замкнутости и взаимности, которые относятся к разрешающим характеристикам, определяемым на основании систем уравнений типа (156), (157). В любом случае при расчете осредненных характеристик излучения определение A_{ij} и $A_{ij}^{(')}$ сводится к вычислению соответствующих величин ψ_{ij} и $\psi_{ij}^{(')}$. В частности, средняя ослабляющая способность объема V_j среды от конечной поверхности F_i равна разности между средними обобщенными угловыми коэффициентами излучения от поверхности F_i на части F_j' и F_j'' замкнутой поверхности F_j ($F_j = F_j' + F_j''$), ограничивающей объем V_j , через которые лучистый поток, посылаемый поверхностью F_i , входит в объем V_j и соответственно выходит из него.

$$A_{ij} = A(F_i, V_j) = \psi(F_i, F_j') - \psi(F_i, F_j'') \quad (16)$$

Аналогично определяется и величина $A_{ij}^{(')}$:

$$A_{ij}^{(')} = A^{(')} (V_i, V_j) = \psi^{(')} (V_i, F_j') - \psi^{(')} (V_i, F_j'') \quad (16)$$

В заключение заметим, что обе формы представления обобщенного зонального метода, изложенного в данной работе, могут быть широко использованы при решении и исследовании конкретных постановок многообразных задач о лучистом теплообмене в излучающих системах, заполненных поглощающей и рассеивающей средой. Теоретические основы этого метода были разработаны автором ранее и изложены в работах [1—6]. В частности, в этих работах приводится классификация основных девяти постановок задачи, охватываемых обобщенной постановкой задачи, и указываются конкретные обобщенные граничные (\tilde{R} , E_α) и объемные (α , η_α) характеристики излучения.

ВЫВОДЫ

1. Даны теоретические обоснования нового обобщенного зонального метода, позволяющего проводить для обобщенной постановки задачи, охватываемой по классификации автора [3] восемь различных постановок задачи, имеющих единственное решение, численные определения и исследования локальных и осредненных в пределах соответствующих граничных и объемных зон характеристик лучистого теплообмена в излучающих системах, состоящих из диффузно излучающих и отражающих граничных серых тел, разделенных поглощающей и изотропно рассеивающей средой.

2. Данный метод, являющийся значительным обобщением и развитием зонального метода, предложенного автором ранее, опирается на использование новых оптико-геометрических характеристик излучения $\psi^{(')} (M_i, F_k)$, $\rho (M_i, V_j)$, $\rho^{(')} (M_i, V_j)$. Предполагается, что наряду с $\psi (M_i, F_k)$ они удовлетворяют системам равенств (49), (50), (62), (64), которые, будучи приближенными, выполняются тем более точно, чем больше числа n граничных и m объемных зон, на которые подразделяется излучающая система.

3. Предложены и систематически рассмотрены две основные формы представления указанного метода, тесно связанные между собой, но опирающиеся на различные конечные системы алгебраических уравнений. Первая форма характеризуется двумя последовательными этапами решения задачи, из которых первый связан с решением системы из n алгебраических уравнений с n неизвестными, а второй, опирающийся на решение первого этапа, состоит в решении второй системы из m алгебраических уравнений с m неизвестными, где n — число граничных и m — число объемных зон.

Московский экономико-статистический институт

Поступила в редакцию 2/IX 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Суринов. К решению интегральных уравнений излучения для обобщенной постановки задачи.— Изв. вузов, «Физика», 1964, № 3.
2. Ю. А. Суринов. Методы определения и численного расчета локальных характеристик поля излучения.— Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт, 1965, № 5.
3. Ю. А. Суринов. К теории переноса излучения и лучистого теплообмена в поглощающей и рассеивающей среде.— Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт, 1966, № 6.
4. Ю. А. Суринов. К решению обобщенной пространственной задачи о переносе излучения в поглощающей и рассеивающей среде.— Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт, 1968, № 2.
5. Ю. А. Суринов. О зональном методе решения интегральных уравнений теории лучистого теплообмена в системах тел, разделенных поглощающей средой с учетом как граничных, так и объемных зон.— Тр. МЭСИ. Математические и статистические исследования в экономике и производстве, 1971.
6. Ю. А. Суринов. Определение разрешающей ослабляющей способности поглощающей и рассеивающей среды.— Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт, 1972, № 3.

А. Н. ХОЗЕ, А. С. ЗАХАРОВ

ОБЪЕМНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ ТЕПЛОТДАЧИ ПРИ КОНДЕНСАЦИИ ВОДЯНОГО ПАРА В ПРОТОЧНОМ ДИНАМИЧЕСКОМ ДВУХФАЗНОМ СЛОЕ

Для ряда технических задач несомненный интерес представляет конденсация паров в динамическом двухфазном слое. При создании теплообменных устройств, использующих этот способ конденсации, требуется исследование процессов гидродинамики и тепломассообмена. В известной нам литературе таких данных нет.

В настоящей работе приводятся некоторые результаты экспериментального исследования конденсации в динамическом двухфазном слое.

Исследование выполнено на установке, принципиальная схема которой приведена на рис. 1. Экспериментальный участок представлял собой колонну, выполненную из оргстекла, в которую снизу через парораспределительную решетку поступал пар. Вода подводилась на стенки колонны через расположенную сверху трубку с отверстиями. Конденсат

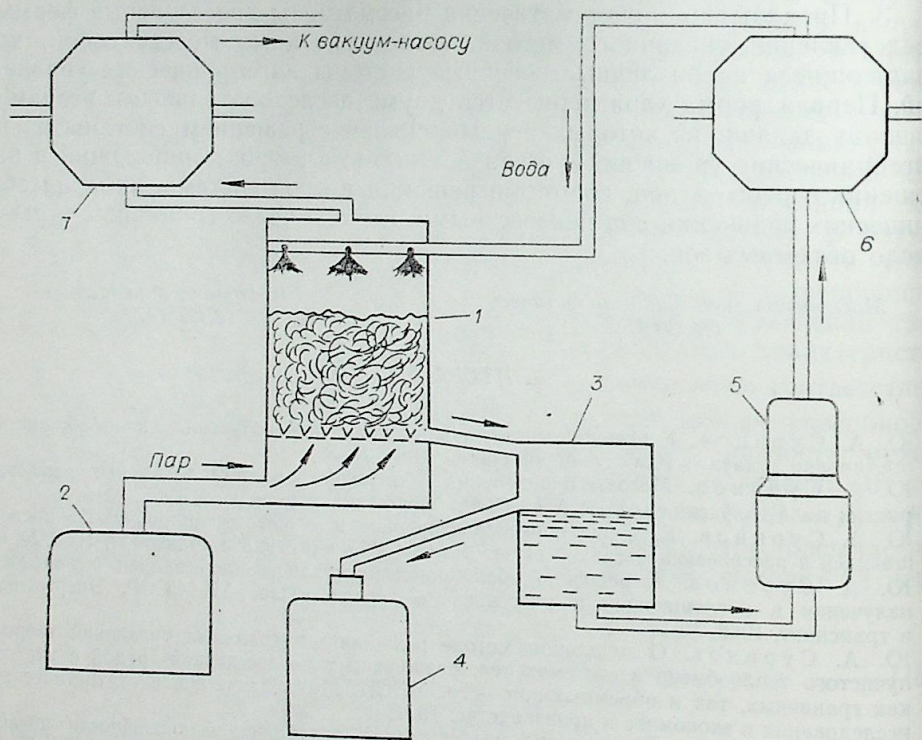


Рис. 1. Схема экспериментальной установки.
1 — колонна; 2 — парогенератор; 3 — сосуд постоянного уровня; 4 — сборник конденсата; 5 — водяной насос; 6 — охлаждающий теплообменник; 7 — дополнительный конденсатор.

и охлаждающая жидкость через отверстия с регулируемым сечением, расположенные непосредственно над решеткой, стекали в сосуд постоянного уровня. При этом часть жидкости, равная количеству сконденсированного пара, поступала в сборник конденсата, а оставшаяся — в насос. Из насоса жидкость направлялась в охлаждающий теплообменник, а затем снова в колонну. Несконденсированный пар поступал в дополнительный конденсатор.

Выход экспериментальной установки на режим начинался после ее предварительной работы под вакуумом в течение часа с целью максимального удаления воздуха из жидкости и всей системы. Количество воздуха, поступающего в систему вследствие ее негерметичности, определялось расчетным путем. В исследуемом диапазоне давлений в конденсаторе в зависимости от расхода пара массовая концентрация воздуха изменялась от 0,11 до 0,35%. При конденсации не отмечено заметного влияния воздуха на теплоотдачу.

На первом этапе работы экспериментально исследованы закономерности гидравлического сопротивления и среднего объемного паросодержания проточного динамического двухфазного слоя при пониженных давлениях $P < 0,1$ бар. Эксперименты выполнены при средних по высоте, приведенных скоростях пара $\bar{W}_0 = 0,5 \div 3,0$ м/с и достаточно широком диапазоне исходных слоев жидкости $h_0 = 0,03 \div 0,095$ м. Визуальные наблюдения, кино- и фотосъемка показали качественное изменение гидродинамической обстановки по сравнению с аналогичными процессами при $P \sim 1,0$ бар. Усиливалась неустойчивость работы газораспределительной решетки, становились более заметными пульсации свободной поверхности слоя, местные мелкомасштабные циркуляционные движения делались менее интенсивными, появлялись крупномасштабные неустойчивые циркуляционные движения [1].

В результате корреляции экспериментальных данных получены зависимости для среднего паросодержания $\bar{\varphi}_n$ и гидравлического сопротивления:

$$\bar{\varphi}_n = 0,6 K^{0,1} \left(\frac{h_0}{l_0} \right)^{-0,1} \left(\frac{\nu'}{\nu''} \right)^{-0,06} \quad (1)$$

и

$$Eu_n = 1,7 K^{-2} \left(\frac{h_0}{l_0} \right)^{0,8} \left(\frac{\nu'}{\nu''} \right)^{-0,08} \quad (2)$$

Здесь $K = \frac{\bar{W}_0 \sqrt{\rho''}}{\sqrt{g(\rho' - \rho'')}}}$ — число подобия, характеризующее меру взаимодействия динамического напора паровой фазы с поверхностным натяжением на границе раздела фаз и силой тяжести; Eu_n — число Эйлера; ρ' , ν' и ρ'' , ν'' — плотность и вязкость соответственно жидкой и

газовой фаз; $l_0 = \sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho' - \rho'')}}}$ — характерный размер. В качестве определяющей температуры принята средняя температура динамического слоя. Формулы (1) и (2) получены при изменении K в диапазоне от 0,08 до 0,4.

При конденсации водяного пара в динамическом двухфазном слое структура слоя не позволяла провести с достаточной точностью расчет межфазной поверхности. В связи с этим при обработке экспериментальных данных использовался объемный коэффициент теплоотдачи $\bar{\alpha}_v$, рассчитываемый по формуле

$$\bar{\alpha}_v = \frac{Q}{V_n \Delta \bar{t}}, \quad (3)$$

где Q — количество тепла, отводимое в охлаждающем теплообменнике; V_n — объем динамического слоя; $\Delta \bar{t} = \bar{t}'' - \bar{t}'$.

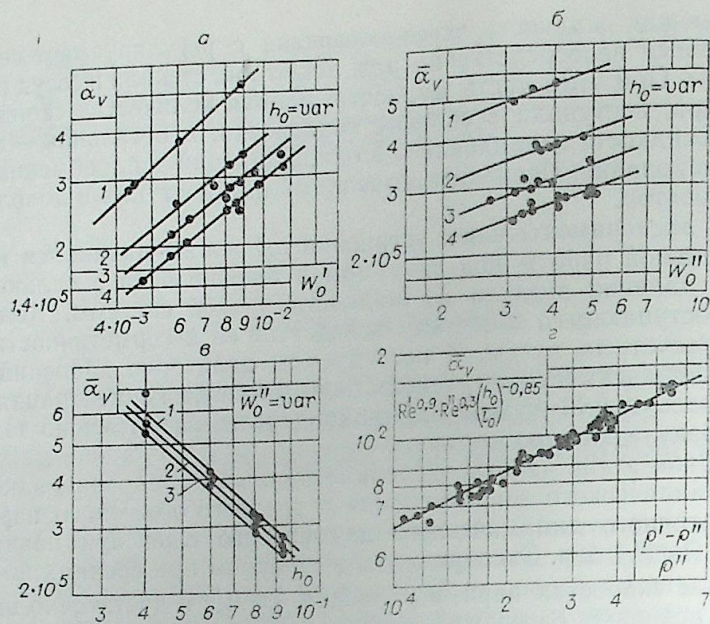


Рис. 2. Зависимость объемного коэффициента теплоотдачи α_v от основных определяющих факторов:

- а) $\bar{\alpha}_v = f_1(W_0')$; $h_0 = 0,045$ м (1); 0,06 (2); 0,08 (3); 0,095 м (4);
 б) $\bar{\alpha}_v = f_2(\bar{W}_0'')$; $h_0 = 0,03$ м (1); 0,045 ÷ 0,06 (2); 0,08 (3); 0,095 м (4);
 в) $\bar{\alpha}_v = f_3(h_0)$; $\bar{W}_0'' = 4,5$ м/с (1); 3,5 (2); 2,5 м/с (3);
 г) $\frac{\bar{\alpha}_v}{Re'^{0,9} Re''^{0,3} \left(\frac{h_0}{l_0}\right)^{-0,85}} = f_4\left(\frac{\rho' - \rho''}{\rho''}\right)$.

Влияние на $\bar{\alpha}_v$ основных определяющих факторов показано на рис. 2. Функциональная зависимость для $\bar{\alpha}_v$ может быть представлена в виде

$$\bar{\alpha}_v = F(W_0', \bar{W}_0'', h_0, \rho'') \quad (4)$$

или

$$\bar{\alpha}_v = F_1\left(Re', Re'', \frac{h_0}{l_0}, \frac{\rho' - \rho''}{\rho''}\right), \quad (5)$$

где W_0' — приведенная скорость жидкости на входе в колонну; $Re' = \frac{W_0' l_0}{\nu'}$
 $Re'' = \frac{\bar{W}_0'' l_0}{\nu''}$.

В результате получено

$$\bar{\alpha}_v = 1,25 Re'^{0,9} Re''^{0,3} \left(\frac{\rho' - \rho''}{\rho''}\right)^{0,45} \left(\frac{h_0}{l_0}\right)^{-0,85}, \text{ кВт/м}^3\text{град}, \quad (6)$$

при $q_v = 916 \div 5040$ кВт/м³; $\Delta \bar{t} = 3,9 \div 10,3$ град; $Re' = 11 \div 40$; $Re'' = 12 \div 101$; $h_0/l_0 = 10,9 \div 44,4$; $\bar{W}_0'' = 1,82 \div 5,39$ м/с; $P = 0,05 \div 0,1$ бар. Разброс опытных точек не превышает $\pm 15\%$.

Расчеты, выполненные по формуле (6), в рассматриваемом диапазоне исходных характеристик дают следующие численные значения $\bar{\alpha}_v = 80 \div 570$ кВт/м³град при $H_n = 0,06 - 0,21$ м.

Для сопоставления приведены некоторые данные по конденсации фреона-12 в процессе его барботаж через слой воды [2]: $q_v = 53 \div 236$ кВт/м³; $\Theta = \Delta t_{\text{лог}} = 1,084 \div 2,08$ град; $\bar{\alpha}_v = 64 \div 200$ кВт/м³град, а также данные по теплоотдаче без массообмена при охлаждении дв

окси углерода водой [3]: $\bar{W}_0'' = 1,07 \div 4,25$ м/с; $H_n = 0,105 \div 0,22$; $P = 1$ бар; $\alpha_v = 65 \div 80$ кВт/м³град.

При этом формула для α_v предложена в виде

$$\bar{\alpha}_v = 5,67 Re'^{0,56} Re''^{0,19} \left(\frac{V_{\text{эл}}}{V}\right)^{0,49} \quad (7)$$

Здесь $V_{\text{эл}}$ — объем пенного слоя; V — объем всей ступени.

ВЫВОДЫ

1. Установлены особенности гидродинамики при конденсации водяного пара в проточном динамическом двухфазном слое.
2. Получены расчетные зависимости для определения среднего паросодержания, гидравлического сопротивления и объемного коэффициента теплоотдачи.

Новосибирский электротехнический институт

Поступила в редакцию
20/VIII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Хозе, Ю. В. Дьяченко, А. С. Захаров. Исследование конденсации водяного пара в случае поверхностей, помещенных в динамический двухфазный слой. — Тр. V Всес. совещ. по тепло- и массообмену, т. III, ч. 2. Минск, 1976, с. 148—151.
2. В. Н. Филаткин, И. И. Пилин. Теплообмен при конденсации фреона-12 в воде. — Холодильная техника, 1975, № 11, 45—47.
3. А. И. Карпович, Г. И. Соловьев, И. М. Плехов, А. И. Ершов. Исследование теплопередачи в аппарате с барботажно-прямоточными контактными устройствами. — Изв. вузов. Энергетика, 1975, № 4, 137—139.

Ю. Е. БОГОЛЮБОВ, Л. П. СМИРНОВА

МАССООТДАЧА В ОКРЕСТНОСТИ ЛОБОВОЙ ТОЧКИ В ПУЛЬСИРУЮЩЕМ ПОТОКЕ

В последние годы в гидродинамике двухфазных и однофазных сред широкое применение находит электродиффузионный метод измерения скорости потока [1—5]. Измерение пульсационных характеристик потока требует знания частотной характеристики диффузионного пограничного слоя на датчике.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим датчик типа «лобовая точка», представляющий собой осесимметричное тело, в окрестности лобовой точки которого помещена активная поверхность, обтекаемая безграничным пульсирующим потоком вязкой несжимаемой жидкости (рис. 1). Ось обтекаемого тела направим вдоль по потоку. Систему координат выберем следующим образом: ось x по образующей обтекаемого тела, уравнение которой $x=x(r)$, а ось y — перпендикулярна к x . Активная поверхность — датчик, выполняющая роль катода, анод, помещенный на «бесконечном» удалении от тела, и жидкость — электролит образуют в совокупности электрохимическую ячейку. Ток в ячейке создается миграцией ионов, вызванной двумя факторами: электрическим полем и градиентом концентрации ионов вблизи электродов.

Добавление буферных ионов позволяет нейтрализовать электрическое поле, оставить только влияние градиента концентрации [3]. Диффузионный ток в электрохимической ячейке определяется как $I = nFsD \times \left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_{y=0}$. Здесь nF — произведение числа зарядов на число Фарадея; s — площадь катода; D — коэффициент диффузии; C — концентрация ионов. Передаточная функция датчика есть отношение сигнала на выходе системы к входному сигналу. Сигналом на входе системы служат пульсации скорости потока, задаваемой в виде $V = V_0(1 + \epsilon e^{i\omega t}) = V_0 + V'$, где $V_0 = ax$; V_0 , V' — стационарная и пульсационная составляющие скорости; ω — частота; $a = \text{const}$, зависящая от конфигурации обтекаемого тела; a на выходе — пульсации диффузионного тока, снимаемого с датчика.

Величина диффузионного тока представлена в виде суммы стационарной и пульсационной составляющих: $I(t) = I_0 + I_1 \epsilon e^{i\omega t} = I_0 + I'(t)$; I_1 — амплитуда пульсационной составляющей. Тогда $|H(i\omega)| = |I'|/|V'|$ и $\arg H(i\omega) = \arg I' - \arg V'$; H — передаточная функция; V_∞ — скорость

потока на ∞ . Следовательно, задача состоит в определении безразмерного коэффициента переноса в зависимости от числа Рейнольдса и частоты пульсаций скорости. Подобная постановка используется в задачах, связанных с электрохимическим методом исследования гидродинамики потока [1].

Математически эта задача описывается совокупностью уравнений диффузионного и динамического пограничных слоев

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{dV}{dx} + \nu \frac{d^2 u}{dy^2} \\ \frac{\partial(ur)}{\partial x} + \frac{\partial(vr)}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} &= D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (1)$$

с граничными условиями

$$u = v = 0, C = 0 \text{ при } y = 0, u \rightarrow V, C \rightarrow C_\infty \text{ при } y \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Поле концентраций определяется как

$$C = C_0 + C_1 \epsilon e^{i\omega t} = C_0 + C', \quad (3)$$

где $\epsilon \ll 1$; подобным образом определены u и v ; C_0 , C' — стационарная и пульсационная составляющие концентрации, а C_1 — амплитуда пульсационной составляющей; C_∞ — концентрация на ∞ ; u , v — составляющие скорости в пограничном слое; ν — кинематическая вязкость.

Из решения задачи (1) — (2) находим градиент концентрации ионов $\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_{y=0}$ у поверхности катода, для чего требуется найти функцию $C(x, y, t)$, определенную в области $0 \leq y \leq \delta_\infty$, $0 \leq x \leq L$, удовлетворяющую (1) — (2), и вычисляем коэффициент массообмена между поверхностью датчика и потоком

$$\text{Nu}(\text{Pe}) = \int_{l_1}^{l_2} \left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_{y=0} dx.$$

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Преобразование Манглера — Степанова [2] для течения в окрестности лобовой точки

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x^3/3R^2, \bar{y} = xy/R, \bar{V} = V, u = \bar{u}, \bar{t} = t, \\ \bar{v} &= (R/x)(v + y(u/x)), \bar{C} = C \end{aligned}$$

сводит исходную систему уравнений к следующей:

$$\begin{aligned} \left(\frac{R}{x}\right)^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} &= \left(\frac{R}{x}\right)^2 \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{t}} + V \frac{d\bar{V}}{d\bar{x}} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}, \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= 0, \\ \left(\frac{R}{x}\right)^2 \frac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{y}} &= D \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial \bar{y}^2} \end{aligned} \quad (4)$$

с граничными условиями

$$\bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{C} = 0 \text{ при } \bar{y} = 0, \bar{u} \rightarrow \bar{V}, \bar{C} \rightarrow \bar{C}_\infty \text{ при } \bar{y} \rightarrow \infty \quad (5)$$

(далее черту опустим).

$$V = mx^{1/3}(1 + \epsilon e^{i\omega t}), \text{ где } m = a(3R^2)^{1/3}.$$

Величина постоянной a определяется из решения задачи потенциального обтекания [6] для тонкого диска $a=2V_\infty/\pi R$, для сферы $a=1,5V_\infty/R$, в общем же случае $a=k\frac{V_\infty}{R}$. Множитель k для тел произвольной формы определяется тарировкой датчика; R — радиус максимального поперечного сечения обтекаемого тела.

Подставив искомые функции (3) в систему уравнений (4) и введя автомодельные переменные

$$\eta = (2m/3\nu)^{1/2} x^{-1/3} y, \theta_0 = \frac{C_0}{C_\infty}, \theta_1 = \frac{C_1}{C_\infty},$$

$$u_1 = V_0 g'(\eta), u_0 = V_0 f'(\eta),$$

$$v_0 = -(2m\nu/3)^{1/2} x^{-1/3} \left(f - \frac{1}{2} \eta f' \right),$$

$$v_1 = -(2m\nu/3)^{1/2} x^{-1/3} \left(g - \frac{1}{2} \eta g' \right),$$

исходную задачу разбиваем на две отдельные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений: задачу для стационарной составляющей (6)–(7) и задачу для пульсационной составляющей (10)–(11).

Задача для стационарной составляющей

$$f''' + ff'' + \frac{1}{2}(1-f'^2) = 0, \quad (6)$$

$$\theta_0'' + \text{Pr} f \theta_0' = 0$$

с граничными условиями

$$f=f'=0, \theta_0=0 \text{ при } \eta=0, f' \rightarrow 1, \theta_0 \rightarrow 1 \text{ при } \eta \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Здесь Pr — критерий Прандтля.

Для функции f решение найдено Холманом [2]

$$f(\eta) = 0,464\eta^2 - 0,0833\eta^3 + 0(\eta^4). \quad (8)$$

Но для жидких растворов электролитов коэффициент диффузии ионов мал ($D \sim 10^{-6}$ см/с) по сравнению с коэффициентом кинематической вязкости жидкости ($\nu \sim 10^{-2}$ см²/с). Поэтому толщина диффузионного пограничного слоя много меньше толщины динамического и профиль скорости в пределах диффузионного слоя можно принять линейным. Тогда

$$\theta_0 = \frac{\alpha^{1/3}}{\Gamma(4/3)} \int_0^\eta e^{-\alpha x^3} dx. \quad (9)$$

Здесь $\alpha = 0,155 \text{ Pr}$; Γ — гамма функция.

Задача для пульсационной составляющей

$$g''' + fg'' - f'g' + f''g = i\bar{\omega}(g' - 1) - 1, \quad (10)$$

$$\theta_1'' + \text{Pr} f \theta_1' = i\bar{\omega} \text{Pr} \theta_1 - \text{Pr} g \theta_0'$$

с граничными условиями

$$g=g'=0, \theta_1=0 \text{ при } \eta=0, g' \rightarrow 1, \theta_1 \rightarrow 0 \text{ при } \eta \rightarrow \infty, \quad (11)$$

где $\omega = \bar{\omega}/2a$.

Функция g и θ выбираются комплексными: $g = \Phi + i\psi$, $\theta = X + iY$, и задача (10)–(11) принимает вид

$$\Phi''' + f\Phi'' - f'\Phi' + f''\Phi = -\bar{\omega}\psi - 1,$$

$$\psi''' + f\psi'' - f'\psi' + f''\psi = \bar{\omega}\Phi - \bar{\omega},$$

$$X'' + \text{Pr} fX' = -\bar{\omega} \text{Pr} Y - \text{Pr} \Phi \theta_0',$$

$$Y'' + \text{Pr} fY' = \bar{\omega} \text{Pr} X - \text{Pr} \psi \theta_0'$$

и

$$\Phi = \Phi' = 0, \psi = \psi' = 0, X = Y \text{ при } \eta = 0,$$

$$\Phi' \rightarrow 1, \psi' \rightarrow 0, X' \rightarrow 0, Y' \rightarrow 0 \text{ при } \eta \rightarrow \infty$$

(13)

Численная реализация краевой задачи (12)–(13) проведена методом пристрелки по граничным условиям с интегрированием по схеме Рунге — Кутты.

ОБСУЖДЕНИЕ

В результате выполненных вычислений получена передаточная функция, квадрат модуля которой представлен на рис. 2 (кривая 4) и в таблице. Для сравнения нанесены также кривые высокочастотного (2) и низкочастотного (1) приближений. Аппроксимирующая формула

$$|\bar{H}(i\omega_*)|^2 = \frac{0,25(1 + 0,0576\omega_*^2)}{1 + 0,331\omega_*^2 + 0,00249\omega_*^4 \text{Pr}^{1/2}}, \quad (14)$$

где $\omega_* = \text{Pr}^{1/3} \bar{\omega}$ и $\bar{H} = H \frac{V_0}{I_0}$, представлена кривой 3. Нужно отметить, что в диапазоне частот $\omega_* = 0 \div 0,8$ (в размерном виде это частоты от 0 до 1000 Гц, при скорости набегающего потока 1 м/с и размере датчика 100 мкм) для передаточной функции хорошо «работает» низкочастотное приближение

$$|\bar{H}(i\omega_*)|^2 = 0,25 - 0,0624\omega_*^2.$$

Таким образом, при известной передаточной функции датчика можно по спектральной плотности пульсаций тока легко определить спектральную плотность пульсаций скорости потока

$$S_u = \frac{S_g}{|H(i\omega)|^2}.$$

Получена также зависимость аргумента частотной характеристики (рис. 3, кривая 3, и табл.) от частоты. Аппроксимирующая формула

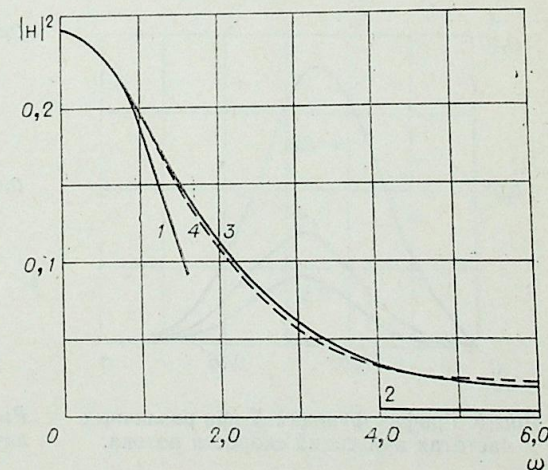
$$\varphi = \arg H(i\omega_*) = 1,96(1 - \exp \times (-0,34/\omega_* - 0,0214\omega_*^2))$$

соответствует кривой 4. Низкочастотное приближение (кривая 1) представлено формулой

$$\varphi = \text{arctg} \{ 0,375\omega_*/(0,5 - 0,0965\omega_*^2) \},$$

Рис. 2. Квадрат модуля частотной характеристики электродиффузионного датчика типа «лобовая точка».

1 — низкочастотное приближение; 2 — высокочастотное приближение; 3 — расчетная кривая; 4 — аппроксимация по формуле (14).



Квадрат модуля и аргумент частотной характеристики датчика с лобовой точкой

ω_*	$ H ^2$	$\arg H$	ω_*	$ H ^2$	$\arg H$	ω_*	$ H ^2$	$\arg H$
0	0,25	0	1,80	0,126	0,977	3,43	0,0455	1,46
0,163	0,248	0,0173	1,96	0,114	1,05	3,59	0,0413	1,50
0,326	0,244	0,2	2,12	0,103	1,10	3,75	0,0375	1,53
0,489	0,235	0,313	2,28	0,093	1,16	3,92	0,0340	1,56
0,652	0,224	0,409	2,44	0,0838	1,21	4,08	0,0310	1,74
0,815	0,211	0,505	2,61	0,0756	1,29	4,89	0,0197	1,81
0,978	0,197	0,591	2,78	0,0682	1,30	6,52	0,00892	1,86
1,14	0,171	0,678	2,94	0,0617	1,35	8,15	0,00487	1,94
1,305	0,167	0,762	3,10	0,0556	1,39	9,78	0,00262	1,99
1,47	0,152	0,838	3,26	0,0503	1,43	10,9	0,00186	2,00
1,63	0,139	0,907						

а высокочастотное (кривая 2) — формулой $\varphi = \pi/2$. Для доказательства исходных предположений на рис. 2, 4—6 приведены соответственно значения величин Φ' , Ψ' и X , Y как функции от η .

Рис. 4 показывает, что при $\eta = 1,4$ пульсирующая составляющая скорости становится равной пульсационной составляющей скорости набегающего потока. Для стационарной составляющей $\eta = 2,8$ [7].

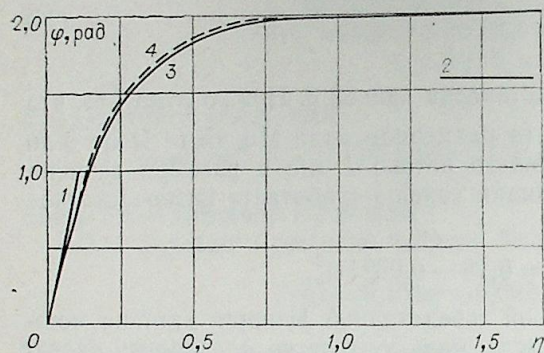


Рис. 3. Аргумент частотной характеристики электродиффузионного датчика типа «лобовая точка».

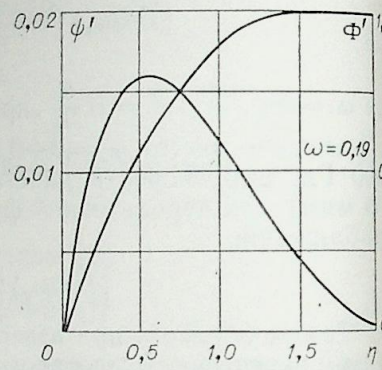


Рис. 4. График функций Φ' и Ψ' при $\omega = 0,19$.

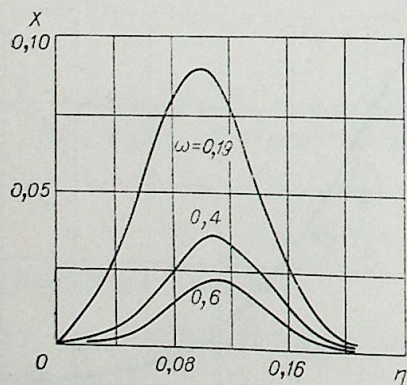


Рис. 5. График функции X при различных частотах пульсаций скорости потока.

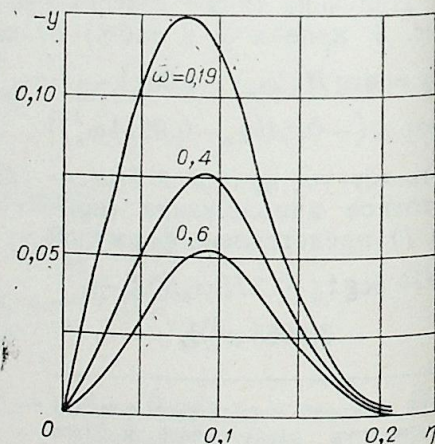


Рис. 6. График функции Y при различных частотах пульсаций скорости потока.

рис. 4 видно, что сдвиг фаз между пульсациями скорости набегающего потока и пульсациями скорости в пограничном слое мал при малых частотах в любой точке пограничного слоя. Максимум сдвига фаз достигается при $\eta = 0,6$.

Рис. 5 и 6 подтверждают справедливость предположения о том, что толщины диффузионного и динамического слоев различны. Видно, что толщина диффузионного пограничного слоя $\eta = 0,2$, а для динамического слоя [7] $\eta = 2,8$. С ростом частоты максимум амплитуды пульсаций концентрации падает и смещается в направлении верхней границы диффузионного пограничного слоя.

Институт теплофизики
СО АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
23/III 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Mitchell, T. Hanratti. A study of turbulence of a wall using an electrochemical wall shear-stress meter.— J. Fluid. Mech., 1966, 26, part. 1.
2. Г. Шлихтинг. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.
3. В. Е. Накоряков и др. Исследование турбулентных течений двухфазных сред. Новосибирск, 1973.
4. А. П. Бурдуков, Б. К. Козьменко, В. Е. Накоряков. Распределение профилей скорости жидкой фазы в парожидкостном потоке при малых газосодержаниях.— ПМТФ, № 6, 1975.
5. T. Misushina. Electrochemical method in transport Phenomena.— Advances in Heat Transfer, 7, Academic Press, 1972.
6. F. Homan. Der Einfluss grosser Zähigkeit bei der Stromung in den Zylinder und die Kugel.— ZAMM, 1936, 16, 153—164.
7. N. Frossling. Verdunstung, Wärmeübergang und Geschwindigkeitverteilung bei zweidimensionalen Grenzschichtstromung Lunds.— Arsskr. N. F. Avd. 2, 35, N 4 (1940).

Э. П. ВОЛЧКОВ, В. К. КОЗЬМЕНКО, В. П. ЛЕБЕДЕВ

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
ЭФФЕКТИВНОСТИ ГАЗОВОЙ ЗАВЕСЫ
В СВЕРХЗВУКОВОМ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ СОПЛЕ

Во многих энергетических аппаратах рабочие поверхности испытывают воздействие высокотемпературных газовых потоков. Для тепловой защиты стенок широко используют завесы из охлаждающего газа, подаваемого вдоль обтекаемой поверхности. Охлаждение стенок характеризуется эффективностью газовой завесы, определяемой распределением относительной безразмерной температуры стенки от места подачи охладителя вниз по потоку. Эффективность газовой завесы хорошо изучена в простых условиях (дозвуковое течение с постоянной скоростью по длине канала). На практике же чаще встречается течение в каналах сложной конфигурации с переменной скоростью, которая может быть и сверхзвуковой. В данной работе исследована эффективность газовой завесы в осесимметричном сверхзвуковом сопле, включая дозвуковую сужающуюся и сверхзвуковую расширяющуюся части.

Экспериментальные исследования проведены в аэродинамической трубе непрерывного действия. В качестве рабочего тела использовался сжатый воздух. Экспериментальная установка состоит из входного конического диффузора, форкамеры с выравнивающими сетками, конфузора для поджатия потока, исследуемого сверхзвукового сопла, выходного цилиндрического канала — эжектора и шумоглушителя. Для организации завесы в установке имеется камера подачи вдуваемого газа. Детали основного узла экспериментальной установки показаны на рис. 1.

Рабочим участком установки является сверхзвуковое сопло. С целью теплоизоляции оно выполнено из текстолита и имеет толщину стенки 12—16 мм. Полуугол сужения дозвуковой части сопла 30° , раствора расширяющейся части — 6° . Диаметр сопла на входе 80 мм, в критическом сечении 20, на срезе 50 мм. Во избежание отрыва потока и образования застойных зон контур сопла скруглен во входной области радиусом, составляющим 0,7 от радиуса входного сечения, а в области критического сечения радиусом, равным $1,5 R_{кр}$. При такой геометрии сопла максимальный градиент скорости потока $2,2 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$.

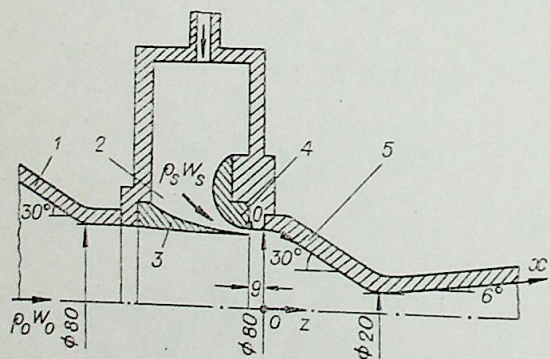


Рис. 1. Схема рабочей части экспериментальной установки.

1 — конфузор; 2 — камера подачи вдуваемого газа; 3 — разделяющая перегородка; 4 — обтекатель из текстолита; 5 — сверхзвуковое сопло.

Для осуществления тепловых измерений вдоль образующей сопла заподлицо с внутренней поверхностью заделаны 19 нихром-константовых термопар, изготовленных из проволоки диаметром 0,2 мм. В некоторых сечениях по окружности установлены четыре термопары для оценки симметричности нагрева потока. После установки термопар поверхность тщательно шлифовалась, чтобы в местах заделки термопар не было никаких микрошероховатостей. Наружная поверхность сопла теплоизолирована слоем ваты толщиной около 10 см. Для измерения статического давления на стенке сопла в тех же сечениях, где установлены термопары (но со смещением по винтовой линии), просверлены отверстия диаметром 0,4 мм.

В качестве основного потока в опытах использовался воздух при давлении торможения на входе в сопло $p_0 = 5 \cdot 10^5 - 15 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2$ и температуре торможения $T_0 = 297 - 307 \text{ К}$, близкой к температуре окружающей среды. Расход воздуха составлял 0,3—1,0 кг/с. Величина скорости на входе в сопло 14—15 м/с, число Маха на срезе сопла 3,4.

Завеса организовывалась вдувом вторичного потока воздуха перед соплом через кольцевую щель высотой $S = 2,7 \text{ мм}$ при температуре 80—100°C. Разделяющая основной и вторичный потоки перегородка (с толщиной выходной кромки $\sim 0,2 \text{ мм}$) для уменьшения перетечек тепла изготовлена из фторопласта. Отношение массовой скорости вторичного потока к массовой скорости основного течения составляло в опытах $m = \rho_s W_s / \rho_0 W_0 = 0,05 - 0,30$.

В экспериментах измерялись температуры стенки сопла, основного и вторичного потоков воздуха. Для измерения электродвижущей силы термопар применялся потенциометр типа Р-348 класса 0,002 и электронный цифровой ампервольтметр Ф-30. Проводилось измерение на входе в сопло полного давления и скорости потока. Для измерения скорости использовались трубка полного напора и датчик статического давления, укрепленные на одной державке. Трубка полного давления имеет прямоугловое сечение высотой 0,6 и шириной 1,5 мм. Толщина стенки трубки 0,1 мм. Динамический напор фиксировался дифференциальным манометром типа ДТ-50, а полное давление — образцовым манометром. Статическое давление на стенке сопла измерялось групповым регистрирующим манометром ГРМ-2, а в области малых давлений и разрежения — образцовыми манометрами и вакуумметрами.

Первоначально исследовались динамические характеристики потока на входе в сопло. Для этого было измерено поле скоростей основного потока в сечении среза щели. Измерения показали хорошую равномерность потока (максимальная неравномерность не превышала 1%). В этом же сечении были измерены профили скоростей в пограничном слое. Замеры проводились трубкой полного напора высотой 0,36 мм, что позволило приблизиться к стенке на минимальное расстояние 0,18 мм. Профили скоростей хорошо описываются степенной зависимостью с показателем степени $n = 1/7$, характеризующей развитый турбулентный пограничный слой. Определенная по этим измерениям толщина пограничного слоя основного потока на входе в сопло составила $\sim 3 \text{ мм}$. Было измерено также поле скоростей вторичного потока на выходе из щели для трех значений расхода вдуваемого воздуха. Оно оказалось достаточно равномерным. Толщина пограничного слоя составляла здесь около 0,5 мм. Предварительные измерения показали наличие равномерного поля скоростей во входной части сопла и развитого турбулентного течения.

Далее проводились исследования непосредственно в сопле. Измерялось распределение статического давления на стенке сопла для всего диапазона изменения давлений торможения основного потока. Характерное изменение статического давления показано на рис. 2, а в виде зависимости $p/p_0 = f(z)$, где p и p_0 — статическое давление на стенке

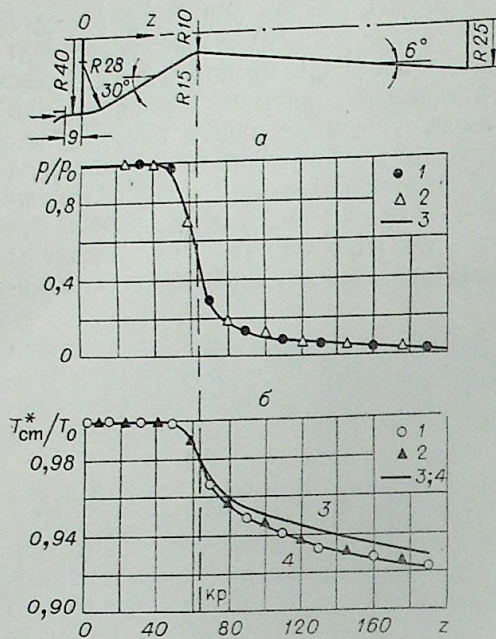


Рис. 2. Влияние вторичного вдува на распределение статического давления и температуры торможения на стенке сопла. а) статическое давление. Эксперимент при $p_0=11,7 \cdot 10^5$ н/м²: 1 — без вдува; 2 — вдув; 3 — расчет по одномерной теории; б) температура торможения на стенке. Эксперимент при $t_0=23,4^\circ\text{C}$: 1 — без вдува; 2 — при изоэнергетическом вдуве; 3 — расчет при $r=0,9$; 4 — расчет при $r=0,885$.

и полное давление потока соответственно; z — расстояние от оси сопла. Здесь же приведен расчет по одномерной теории для изоэнтропического течения. Наблюдается хорошее соответствие эксперимента и расчета. Эти данные свидетельствуют о безотрывном режиме течения в сопле. Приводятся также результаты измерения статического давления на стенке при тчении основного потока с одновременной подачей во

духа через щель. Из рисунка видно, что вдув вторичного потока воздуха через щель практически не повлиял на распределение статического давления. Это наблюдалось для всего исследуемого диапазона изменения параметра вдува ($m < 0,3$).

Было измерено распределение температуры торможения основного потока на адиабатической стенке сопла. Типичный результат показан на рис. 2, б (1) в виде зависимости $T_{ст}^*/T_0 = f(z)$, где $T_{ст}^*$ — температура торможения на адиабатической стенке, T_0 — температура торможения в ядре потока. Температура торможения на стенке падает по длине сопла с увеличением числа Маха. Расчет по формуле

$$T_{ст}^*/T_0 = \left(1 + r \frac{k-1}{2} M^2\right) / \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)$$

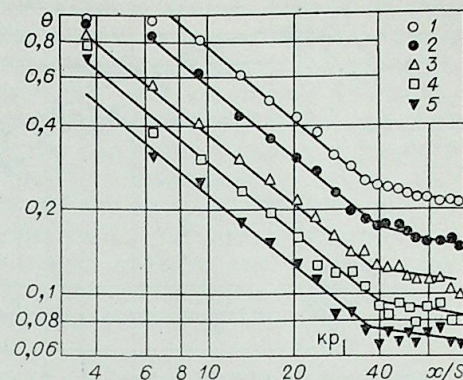
с коэффициентом восстановления $r=0,9$ с точностью до 1% соответствует экспериментальным данным. Еще лучшее соответствие получается при $r=0,885$. Однако, как показывают опыты работы [1], вдув воздуха через пористый участок изменяет коэффициент восстановления на пористой поверхности и в области завесы. Влияние же тангенциального вдува воздуха через щель на коэффициент восстановления не изучено. Чтобы выяснить это влияние, проводились специальные опыты, для чего через щель подавался воздух при температуре торможения на стенке, равной температуре торможения основного потока. При таких условиях влияние на коэффициент восстановления может оказать только динамическое воздействие вдува. Характерное изменение температуры стенки при изоэнергетическом вдуве (2) в сопоставлении с аналогичным изменением температуры без вдува показано на рис. 2, б. Температура стенки в дозвуковой части сопла не повлиял на коэффициент восстановления температуры (при параметре $m < 0,3$).

Далее исследовалась эффективность тепловой завесы в сопле, которая определялась по измеренным температурам по формуле [2]

$$\Theta = (T_{ст} - T_{ст}^*) / (T_{ст} - T_{ст}^*)_1.$$

Рис. 3. Изменение эффективности завесы по длине сопла при различных значениях параметра вдува.

1 — $m=0,29$; $p_0=7,2 \cdot 10^5$ н/м²; 2 — 0,22, 7,2; 3 — 0,15, 7,2; 4 — 0,08, 10,1; 5 — 0,05, 14,5.



Здесь $T_{ст}$ и $T_{ст}^*$ — температура адиабатической стенки сопла при наличии и отсутствии завесы соответственно; индекс 1 означает, что указанные параметры взяты в сечении среза щели.

Изменение эффективности завесы по длине сверхзвукового сопла при разных значениях относительной массовой скорости вдува m показано на рис. 3 в виде зависимости $\Theta = f(x/S)$, где x — расстояние, отсчитываемое от среза щели по контуру сопла; S — высота щели. Как видно из рисунка, с увеличением параметра вдува эффективность завесы растет. Наблюдается разный характер изменения эффективности по длине сопла в дозвуковой и сверхзвуковой частях. Видно, что падение эффективности в сверхзвуковой части замедляется. Это можно объяснить влиянием сжимаемости потока, которое усиливается с ростом числа Маха по длине сопла. Повышение эффективности завесы в сжимаемых потоках экспериментально отмечено в работе [3] в опытах на пластине при постоянном числе $M=3,0$.

Для обобщения опытных данных по эффективности газовых завес во многих работах используется безразмерный комплекс [2]

$$\frac{Re_{\Delta x}}{Re_S^{1,25}} \left(\frac{\mu_0}{\mu_s}\right)^{1,25}, \quad (2)$$

где

$$Re_{\Delta x} = \frac{\rho W (x - x_0)}{\mu_0}, \quad Re_S = \frac{\rho_s W_s S}{\mu_s},$$

ρW и $\rho_s W_s$ — массовые скорости основного и вторичного потоков; μ_0 и μ_s — вязкость воздуха при температуре торможения основного и вторичного потоков соответственно; x_0 — длина начального участка — расстояния вниз по потоку от щели, на котором параметры завесы сохраняются постоянными. Для обработки опытов на пластине и в начальном участке цилиндра значения плотности и скорости основного потока в (2) постоянны. При тчении же в соплах величина ρW изменяется по длине. В связи с этим встает вопрос об определяющем значении плотности и скорости при обработке экспериментальных данных. В некоторых работах, например в [4], используются начальные значения плотности и скорости для обработки опытных данных по эффективности завесы и при градиентных течениях основного потока. Наши эксперименты в сопле в подобной обработке показаны на рис. 4, 2. Здесь же для сравнения нанесены экспериментальные данные (1), полученные на данной установке в цилиндрическом канале с постоянной скоростью по длине. Эти опыты проведены при скорости основного потока $W_0=25-80$ м/с ($Re_x=3,8 \cdot 10^5-1,2 \cdot 10^6$) и относительном параметре вдува $m=0,1-0,6$. Эксперименты в цилиндре хорошо согласуются с нанесенным на графике расчетом для безградиентного дозвукового течения по формуле [2]:

$$\Theta = \left[1 + 0,25 \frac{Re_{\Delta x}}{Re_S^{1,25}} \left(\frac{\mu_0}{\mu_s}\right)^{1,25}\right]^{-0,8}. \quad (3)$$

Видно, что обобщение зависимости (3) опытов в сопле менее удовлетворительно. Это свидетельствует о влиянии на эффективность завесы

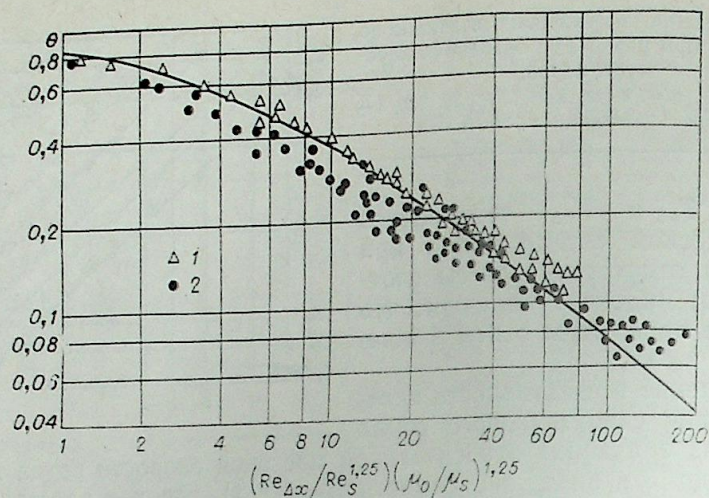


Рис. 4. Сравнение эффективности завесы в сопле и цилиндре (обработка по входным параметрам).

Опыт: 1 — цилиндр; 2 — сопло. Кривая — расчет по формуле (3).

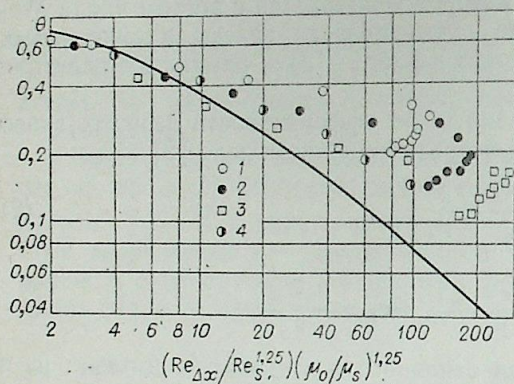


Рис. 5. Обработка опытов в сопле по текущим значениям плотности и скорости основного потока.

Эксперимент: 1 — $m=0,29$; 2 — $0,22$; 3 — $0,15$; 4 — конфузор [5]. Кривая — расчет по формуле (3).

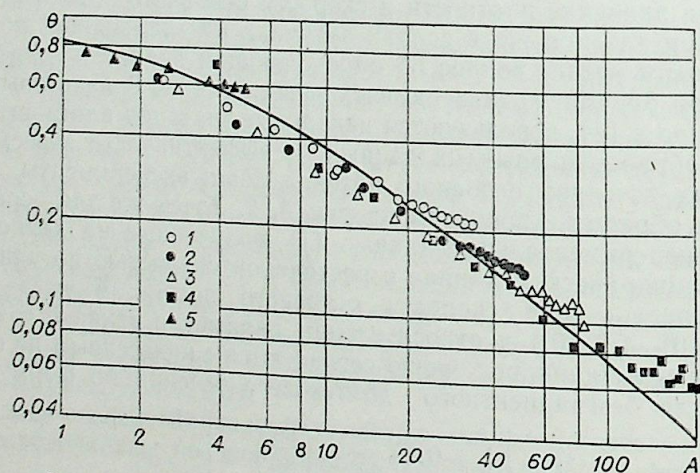


Рис. 6. Обобщение данных по эффективности завесы в сопле. Эксперимент: 1 — $m=0,29$; 2 — $0,22$; 3 — $0,15$; 4 — $0,07$; 5 — плоское сопло [6]. Кривая — расчет по формуле (4).

продольного градиента скорости и сжимаемости потока, которые не учитываются при такой обработке опытов. Более логично использование текущих значений плотности и скорости. Обработка наших экспериментальных данных по текущим параметрам ρ и W в комплексе (2) показана на рис. 5. Если эксперименты сопоставить с расчетом по формуле (3), то наблюдается сильное расхождение опытных данных и расчета (максимальное отклонение достигает 400%). Экспериментальные данные [5], полученные в плоском конфузоре с углом сужения 10° , в подобной обработке также лежат существенно выше расчета для цилиндра. Это говорит о том, что обобщение опытных данных для градиентных течений основного потока формулой (3) с использованием в (2) локальных параметров потока еще менее удовлетворительно, чем при использовании начальных значений ρ_0 и W_0 .

Формулу для расчета эффективности завесы в сопле можно получить, решая интегральное соотношение энергии для сжимаемого пограничного слоя с переменной скоростью на его внешней границе. В результате получается соотношение, учитывающее продольный градиент скорости и сжимаемость основного потока [2],

$$\Theta = \left[1 + 0,25 \left(\frac{D_{кр}}{D_0} \right)^{1,25} \frac{Re_{кр}}{Re_S^{1,25}} \left(\frac{\mu_0}{\mu_S} \right)^{1,25} \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}} \Psi_T \Psi_M \left(\frac{\mu_{ст}}{\mu_0} \right)^{0,25} \left(\frac{D_{кр}}{D} \right)^{0,75} d\bar{x} \right]^{-0,8}, \quad (4)$$

$$\text{где } \Psi_T = \left(\frac{2}{\sqrt{\Psi} + 1} \right)^2, \quad \Psi = \frac{T_{ст}}{T_0}, \quad \Psi_M = \left[\frac{\arctg M \sqrt{r \frac{k-1}{2}}}{M \sqrt{r \frac{k-1}{2}}} \right]^2;$$

$$Re_{кр} = 4G/\mu_0\pi D_{кр}; \quad \bar{x} = x/D_{кр}; \quad \bar{x}_0 = x_0/D_{кр};$$

D — текущий диаметр сечения сопла; $D_{кр}$ — диаметр критического сечения; D_0 — диаметр сопла в конце начального участка; $G = \rho W \pi D^2/4$ — массовый расход основного потока.

Текущие значения плотности и скорости в (4) выражены через геометрические размеры сопла и расход. Сжимаемость потока учитывается через функцию теплообмена Ψ_M , а неизотермичность — через Ψ_T .

В соответствии с формулой (4) были обработаны эксперименты по эффективности завесы в сопле. Поскольку опыты проведены в квазиизотермических условиях, значения Ψ_T и $(\mu_{ст}/\mu_0)^{0,25}$ близки к единице. Значение функции Ψ_M в условиях опытов уменьшается по длине от 1 на входе в сопло до 0,46 для крайних точек ($M=3,2$). Результаты такой обработки показаны на рис. 6 в виде зависимости $\Theta = f(A)$, где

$$A = \frac{Re_{кр}}{Re_S^{1,25}} \left(\frac{\mu_0}{\mu_S} \right)^{1,25} \left(\frac{D_{кр}}{D_0} \right)^{1,25} \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}} \Psi_M \left(\frac{D_{кр}}{D} \right)^{0,75} d\bar{x}.$$

Здесь же нанесены экспериментальные данные работы [6] по эффективности завесы в плоском сопле. Видно, что согласование экспериментов с расчетом по формуле (4) вполне удовлетворительное.

Таким образом, проведенные эксперименты показали, что изоэнергетический вдув воздуха через щель на входе в сопло не изменяет коэффициент восстановления температуры и статическое давление на стенке. Экспериментальные данные по эффективности завесы в сверхзвуковом сопле отличаются от расчетных значений эффективности завесы для безградиентного дозвукового течения. Проведенные опыты удовлетворительно обобщаются зависимостью (4), учитывающей градиент скорости и сжимаемость потока.

1. Ю. В. Барышев, Ю. А. Виноградов, А. И. Леонтьев, В. И. Рождественский. Коэффициенты восстановления на проницаемой поверхности в области газовой завесы в сверхзвуковом турбулентном пограничном слое.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 2, 131—136.
2. С. С. Кутателадзе, А. И. Леонтьев. Теплообмен и трение в турбулентном пограничном слое. М. «Энергия», 1972.
3. R. J. Goldstein, E. R. G. Eckert, D. J. Wilson. Film-cooling with porous injection into a supersonic flow.— Trans. ASME, 1968, ser. B, N 4, 584—588.
4. В. А. Зысн, М. С. Золотогор. Исследование эффективности плёночного охлаждения применительно к некоторым поверхностям статора газовой турбины. Изв. вузов, Энергетика, 1971, № 5, 48—53.
5. Ю. В. Барышев, А. И. Леонтьев, Н. К. Пейкер, В. И. Рождественский. Влияние продольного градиента давления на эффективность газовой завесы в дозвуковом турбулентном пограничном слое.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 146—150.
6. J. J. Nicolas, M. Izard. Protection thermique de tuyères supersoniques par fil gazeux.— La recherche aérospatiale; 1971, N 4, p. 197—208.

УДК 533.601.15+553.601.312

М. Д. БРОДЕЦКИЙ, В. С. КОСОРЫГИН,
А. А. РАФАЭЛЯНЦ, Г. А. ЧЕРЕМУХИН

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ КРЫЛЬЕВ ПРИ СВЕРХЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ

В последние годы опубликованы экспериментальные работы, посвященные исследованию сопротивления трения крыльев. При сверхзвуковых скоростях результаты измерений местных касательных напряжений и среднего сопротивления трения треугольных крыльев опубликованы лишь в работах [1 и 2].

Малое число работ о сопротивлении трения крыльев при сверхзвуковых скоростях потока связано с особенностями существующих методик исследования, а также с их трудоемкостью. Величина сопротивления трения крыла в работе [2] получалась интегрированием по поверхности распределения местных касательных напряжений, полученных с помощью модифицированных трубок Престона. В той же работе сопротивление трения крыла определялось как разность между полным сопротивлением, измеренным весами, и волновым, найденным интегрированием распределения статического давления.

Метод, использующий трубки Престона, позволяет получить полезную информацию, но довольно трудоемок. Определение сопротивления трения крыла как разности полного и волнового сопротивлений требует подробного измерения распределения статического давления.

В настоящей работе проведено исследование составляющих полного сопротивления крыла при нулевом угле атаки по результатам только весовых испытаний. Для испытаний изготовлено пять плоских крыльев. Крылья имели симметричный параболический профиль и отличались лишь относительной толщиной профилей, которая составляла 1,5, 2, 3, 4,12 и 4,93%. Для крепления на хвостовой державке на моделях имелось коническое утолщение с углом полураствора $\Theta_k = 4,3^\circ$ и высотой конуса $h = 0,234$ м. Дополнительно для каждого крыла изготовлено по две конические накладки. Эти накладки имели теоретическую высоту конуса, равную высоте конического утолщения моделей, но различные углы полураствора $\Theta_k = 5,5$ и $6,9^\circ$. При испытаниях с установленными на крыле коническими накладками на обтекатель хвостовой державки монтировались цилиндрические накладки, отношение наружного диаметра которых к диаметру мишеля соответствующих конических накладок сохранялось постоянным. Основные геометрические характеристики моделей приведены на рис. 1.

При испытаниях измерялись давления в донном стаканчике модели P_1 , на торцевом срезе державки P_2 , на торцевом срезе донного стаканчика модели P_3 и в донном стаканчике конических накладок P_4 . Схема расположения приемников давления показана на рис. 1. Инструментальная погрешность измерителей давления P_1 и P_2 составляла ± 2 кг/м², а P_3 и P_4 — $\pm 10,5$ кг/м². Модели испытывались в сверхзвуковой

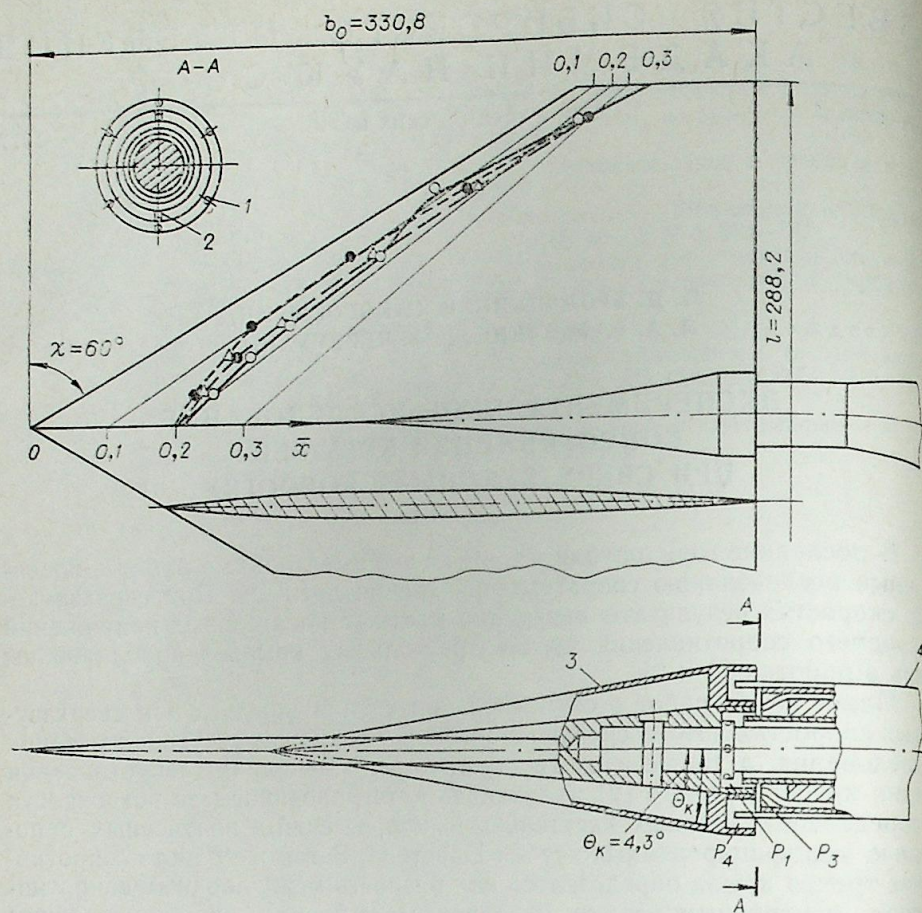


Рис. 1.

1 — трубки для замера P_4 (6 шт.); 2 — трубки для замера P_3 (2 шт.); 3 — коническая накладка; 4 — цилиндрическая накладка; \circ — конец перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный при числе $M=2,03$; Δ — то же, при числе $M=3,0$; \bullet — то же, при числе $M=4,04$.

аэродинамической трубе Т-313 при числах $M=2,03; 2,27; 2,51; 3,0$ и $4,04$ в диапазоне углов атаки $\alpha = \pm 2^\circ$. При этом числа Re , отнесенные к средней геометрической хорде крыла, составляли соответственно $Re_{b_{ср}} \cdot 10^{-6} = 5,42; 5,30; 5,48; 7,02$ и $10,00$. Все испытания проведены при естественном переходе ламинарного пограничного слоя в турбулентный.

Для оценки точности результатов измерений при числе $M=2,03$ и $4,04$ выполнены пятикратные испытания каждой модели. При остальных числах M модели испытывались трехкратно. Статистическая обработка результатов пятикратных испытаний показала, что при числах $M=2,03$ и $4,04$ среднеквадратичные отклонения коэффициента C_x не превышают значения $\sigma_{C_x} = 0,0001$.

Для определения минимального значения коэффициента лобового сопротивления C'_{x_0} осредненные по результатам многократных испытаний зависимости $C_y(C_x)$ для каждой комбинации крыло-коническая накладка аппроксимировались квадратичным трехчленом по методу наименьших квадратов. За величину C'_{x_0} принималось значение, соответствующее вершине аппроксимирующей параболы.

Полученные значения C'_{x_0} разложены на составляющие следующим образом:

$$C'_{x_0} = C_{x_0} \left(1 - \frac{S_1}{S}\right) + C_{x_b}^k \cdot \frac{S_M}{S} \left(1 - \frac{S_2 \theta_k}{S_M}\right) + C_F^k \cdot \frac{S_k}{S} \left(1 - \frac{S_2}{S_k}\right) + \delta_1 + \delta_2. \quad (1)$$

Первый член в правой части уравнения (1) представляет собой полное сопротивление изолированного крыла за вычетом части сопротивления, проходящего на площадь крыла в плане под конической накладкой S_1 . Второй член — волновое сопротивление изолированного конуса за вычетом волнового сопротивления поверхности конуса S_2 , вырезанной крылом. Третий член есть сопротивление трения изолированного конуса без сопротивления поверхности конуса, вырезанной крылом. S — площадь крыла в плане; S_k — площадь поверхности конуса; S_M — площадь миделя конуса. Члены δ_1 и δ_2 учитывают соответственно изменение сопротивления изолированного крыла, вызванное интерференционным воздействием конуса на крыло, и изменение сопротивления изолированного конуса за счет интерференционного воздействия крыла на конус.

Разделив обе части уравнения (1) на коэффициент при C_{x_0} и учитывая, что при малых углах θ_k

$$\frac{S_2}{S_k} \approx \frac{S_2 \theta_k}{S_M},$$

после преобразования получим

$$\frac{C'_{x_0}}{1 - \frac{S_1}{S}} = C_{x_0} + (C_{x_b}^k \theta_k + C_F^k) \frac{S_k - S_2}{S - S_1} + \delta_1' + \delta_2' \quad (2)$$

или

$$\frac{C'_{x_0}}{1 - \frac{S_1}{S}} = C_{x_0} + f(\eta), \quad (3)$$

где

$$\eta = (C_{x_b}^k \theta_k + C_F^k) \frac{S_k - S_2}{S - S_1}. \quad (4)$$

Таким образом, представив измеренные значения сопротивления комбинаций крыло-конические накладки (при $\bar{c} = \text{const}$) в виде зависимости (3), будем иметь при $\eta = 0$ величину полного сопротивления изолированного крыла данной относительной толщины профиля.

В выражение (4) входит коэффициент волнового сопротивления изолированного конуса $C_{x_b}^k$, который, согласно теории тонкого тела, может быть представлен в виде [3]

$$C_{x_b}^k = \bar{P}_k = 2\theta_k^2 \ln \frac{2}{\theta_k \sqrt{M_\infty^2 - 1}} - \theta_k^2, \quad (5)$$

где \bar{P}_k — коэффициент давления на поверхности конуса.

Коэффициент сопротивления трения изолированного конуса C_F^k при условии, что турбулентный пограничный слой начинается от вершины конуса, согласно работе [4], есть

$$C_F^k = 1,03 C_F^{пл}, \quad (6)$$

где $C_F^{пл}$ — коэффициент турбулентного сопротивления трения пластины длиной, равной высоте конуса.

Геометрические характеристики, входящие в выражение (4), получены путем совместного решения уравнений поверхностей крыльев и конических накладок.

Экспериментальные величины лобового сопротивления комбинаций крыло-конические накладки C'_{x_0} обработаны с учетом (4) — (6) и представлены для чисел $M=2,03$ и $4,04$ на рис. 2 в виде зависимостей (3)

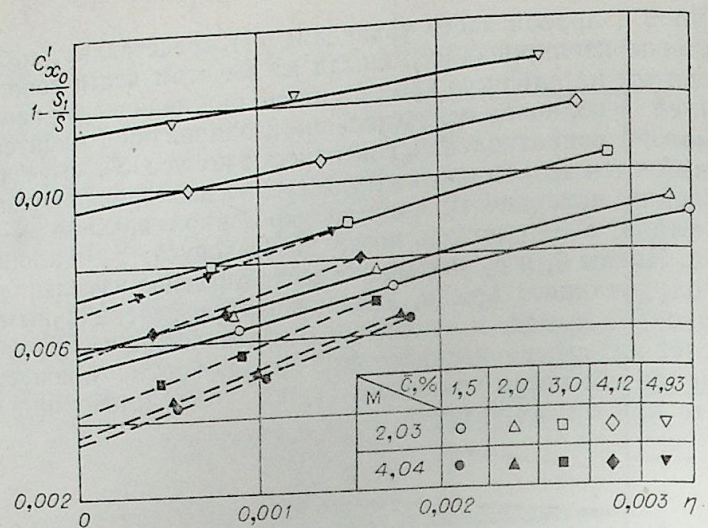


Рис. 2.

для различных относительных толщин крыла \bar{c} . Здесь же нанесены прямые

$$\frac{C'_{x_0}}{1 - \frac{S_1}{S}} = C_{x_0} + k\eta,$$

аппроксимирующие полученные данные по методу наименьших квадратов. Отклонения экспериментальных точек от аппроксимирующих прямых в основном не превышают их доверительных интервалов.

Следует заметить, что наклон прямых (7) меняется при изменении толщины крыла и числа Маха. По-видимому, это обусловлено членами δ'_1 и δ'_2 в (3).

Полное сопротивление изолированного крыла C_{x_0} , полученное экстраполяцией прямых в точку $\eta=0$, состоит из волнового сопротивления и трения, т. е.

$$C_{x_0} = C_{x_b} + C_{F\bar{c}}.$$

Согласно линейной теории первая составляющая полного сопротивления крыла является функцией следующих параметров:

$$C_{x_b} = \lambda \bar{c}^2 f(\lambda \sqrt{M_\infty^2 - 1}, \lambda \operatorname{tg} \chi_{1/2}, \gamma, \text{форма профиля}),$$

где λ — удлинение; γ — сужение; $\chi_{1/2}$ — угол стреловидности по линии максимальных толщин профилей. Вторая составляющая также зависит от числа М, формы в плане, относительной толщины профиля крыла и числа Рейнольдса. Для крыла с нулевой относительной толщиной профиля первое слагаемое исчезает, а второе представляет собой сопротивление трения тонкой пластины. Таким образом, представив полученные значения C_{x_0} в зависимости от квадрата относительной толщины профиля и экстраполируя до значения $\bar{c}=0$, получим коэффициенты сопротивления трения C_F крыла нулевой толщины. Такие зависимости показаны на рис. 3. Здесь же нанесены прямые, аппроксимирующие эти данные по методу наименьших квадратов. Отклонения значений C_{x_0} от прямой не превышают 0,0002. По-видимому, возможность линейной аппроксимации данных рис. 3 обусловлена существованием на моделях естественного перехода пограничного слоя. А именно увеличение относительной толщины крыла ведет к росту отрицательных градиентов давления, которые, с одной стороны, увеличивают сопротивление трения, а с другой —

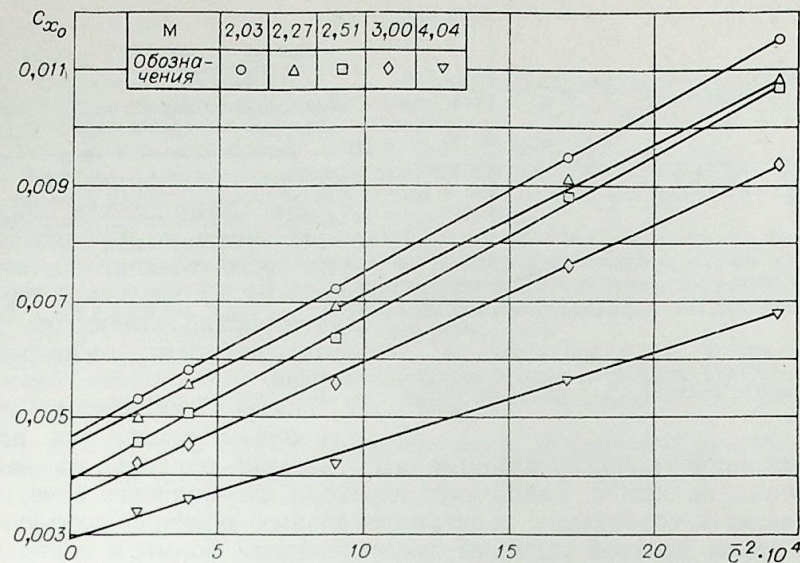


Рис. 3.

уменьшают его, затягивая переход. Это приводит к ослаблению зависимости суммарного трения крыла от толщины профиля.

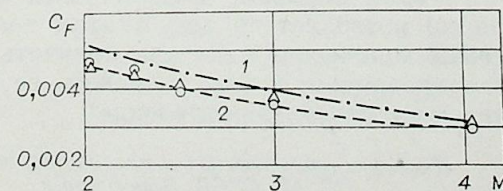
Величины коэффициентов сопротивления трения трапециевидного крыла нулевой толщины приведены на рис. 4. Кроме того, на рис. 4 приводятся результаты, полученные авторами [5] в 1972 г. с использованием изложенного метода на крыльях с относительными толщинами $\bar{c}=1,5, 2$ и 3% . Имеется хорошая сходимость с настоящими данными. Здесь же штрих-пунктиром нанесены результаты расчета коэффициентов турбулентного трения прямоугольной пластины, имеющей такую же площадь в плане и хорду, равную средней хорде крыла, по методу [6].

Ранее отмечалось, что все экспериментальные величины получены при естественном переходе ламинарного пограничного слоя в турбулентный. Для оценки положения перехода модель крыла с толщиной профиля $\bar{c}=2\%$ дренировалась. В шести сечениях крыла дренажные отверстия превращались в поверхностные трубки полного напора путем приклеивания над ними козырьков с высотой $h=0,08$ мм [7]. Трубки полного напора располагались в двух сечениях через 5% , а в остальных — через 10% длины местных хорд. Для устранения влияния впереди стоящих трубок на последующие опыты повторялись несколько раз с последовательным удалением передних трубок. Распределение давлений, зарегистрированное трубками полного напора, позволило получить положение конца перехода и оценки протяженности зоны перехода. На рис. 1 приведены данные о конце перехода, полученные при числах $M=2,03; 3$ и $4,04$. Эти результаты позволили провести оценку влияния ламинарного и переходного участков на сопротивление трения прямоугольной пластины.

В схеме расчета принималось, что коэффициент трения изменяется по законам ламинарного пограничного слоя до линии начала перехода. В переходном пограничном слое принималось линейное изменение

Рис. 4.

1 — расчетное сопротивление турбулентного трения прямоугольной пластины [6]; 2 — расчетное сопротивление трения прямоугольной пластины с учетом положения перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный на крыле с $\bar{c}=2\%$; ○ — результаты 2-й экстраполяции; △ — данные работы [5].



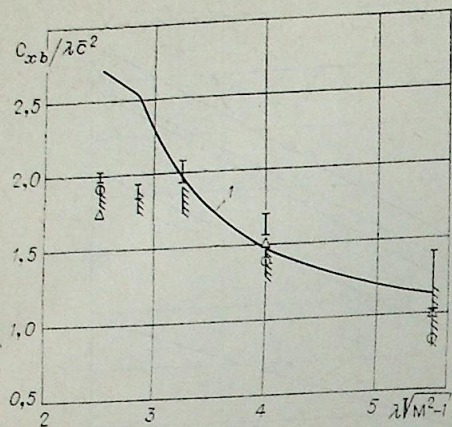


Рис. 5.
 1 — линейная теория [8]; 1 — данная работа
 черта со штриховкой — работа [5]; ○ — крыло
 с $c=2\%$ и △ — крыло с $c=4,12\%$ по результа-
 там дренажных испытаний.

местного коэффициента трения от его ламинарного значения до величины коэффициента турбулентного трения, соответствующего числу Re конца перехода. Далее трение изменялось по законам турбулентного пограничного слоя.

Числа Рейнольдса начала и конца перехода на плоской прямоугольной пластине принимались равными средним от величин, полученных на крыле. Такой учет перехода пограничного слоя привел практически к совпадению экспериментальных значений коэффициента трения крыла нулевой толщины трапециевидной пластины, имеющей такую же площадь и хорду, равную средней хорде крыла рис. 4.

Оценку волнового сопротивления исследуемых крыльев можно получить, вычтя из полного сопротивления изолированного крыла (7) величину сопротивления трения трапециевидной пластины и разделив разность на λc^2 . На рис. 5 определенные таким образом величины $C_{xb} / \lambda c^2$ сравниваются с результатами расчета, проведенного для этих моделей в рамках линейной теории [8]. Здесь же нанесены данные работы [5]. Анализ представленных результатов показывает, что при числах $M=2,03$ и $2,27$ величины волнового сопротивления крыльев, полученные в данной работе и в работе [5], удовлетворительно согласуются между собой, но лежат ниже значений, рассчитанных по линейной теории. При больших числах M результаты данной работы и работы [5] удовлетворительно согласуются с результатами линейной теории, однако погрешность определения волнового сопротивления методом экстраполяции при этом увеличивается. Это связано с тем, что с ростом числа M уменьшается доля волнового сопротивления в полном сопротивлении крыла. В результате даже очень незначительные ошибки в определении величин C_{x0} и C_f при больших числах M приводят к значительному изменению коэффициента волнового сопротивления. Для оценки достоверности полученных значений волнового сопротивления на крыльях с относительной толщиной 2 и 4,12% при числах $M=2,03$, 3,00 и 4,04 проведены измерения распределения статического давления. Измерение давления осуществлялось с помощью «навесного» дренажа в 100 точках, равномерно распределенных на каждой поверхности указанных крыльев. В качестве измерительных приборов использовались манометры ГРМ-2 класса точности 0,5 и с пределом измерения $0 \div -1$ ати.

Значения волнового сопротивления, полученные интегрированием распределения давления по поверхности каждого крыла и представленные на рис. 5, показывают удовлетворительную сходимость с результатами метода двойной экстраполяции.

Таким образом, предлагаемый в работе метод двойной экстраполяции позволяет по результатам только весовых испытаний моделей крыло-конические накладки получить величину лобового сопротивления изолированного крыла и оценить ее составляющие (сопротивление трения и волновое сопротивление).

ЛИТЕРАТУРА

1. K. G. Smith, L. Gaudet, K. G. Winter. The Use of Surface Pitot Tubes as Skin-Friction Meters at Supersonic Speeds., ARC R. & M., N 3351, 1964.
2. K. G. Winter, K. G. Smith. Measurements of Skin Friction on a Cambered Delta Wing at Supersonic Speeds., ARC R. & M., N 3501, 1967.
3. Дж. Нильсон. Аэродинамика управляемых снарядов. Оборонгиз, 1962.
4. Материалы к расчету сопротивления трения и теплоотдачи различных тел при гиперзвуковых скоростях потока. Тр. ЦАГИ, вып. 937, 1964.
5. М. Д. Бродецкий, В. С. Косорыгин, А. А. Рафаэлянц, Г. А. Черемухин. Экспериментальное исследование сопротивления пятиугольного крыла при сверхзвуковых скоростях.— В кн.: Аэрофизические исследования. Новосибирск, 1973.
6. В. М. Коваленко. Труды I Республиканской конференции по аэрогидромеханике, теплообмену и массообмену. Изд. Киевского ун-та, 1969.
7. Г. Р. Грек, С. В. Калинин, В. С. Косорыгин, С. Д. Ярахмедова. Измерение поверхностного трения модифицированными датчиками Престона в турбулентном пограничном слое.— В кн.: Аэрофизические исследования. Новосибирск, 1972.
8. Ю. Г. Боковиков. Расчет аэродинамических характеристик крыльев сложной геометрии в сверхзвуковом потоке. Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1974, сер. техн. наук, № 8, вып. 2.

Ю. Г. ГОЛОВАЧЕВ, О. Н. МАРЕННИКОВА, А. А. ТАРНАВСКИЙ

УСТОЙЧИВОСТЬ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ПОТОКОВ

Сообщение 1.

НЕВЯЗКОЕ ДВУХСЛОЙНОЕ ТЕЧЕНИЕ

Известно много работ по исследованию устойчивости плоскопараллельных слоев жидкости. Наиболее полный обзор с обширной библиографией дан П. Г. Драйзиным и Л. Н. Ховардом [1]. В случае течения невязкой несжимаемой жидкости доминирующими являются неустойчивости Гельмгольца и Тейлора. Математическое описание неустойчивости поверхностей раздела может быть только приближенным. В большинстве случаев опускаются такие явления как молекулярная диффузия через поверхность раздела, поверхностное натяжение, влияние градиента плотности или силы тяжести, вязкость среды, различие в вязкостях слоев жидкости, направление возмущения в системе. Поскольку неустойчивость Гельмгольца и Тейлора — чисто инерционное явление, оно может возникнуть и в невязкой несжимаемой жидкости, однако роль указанных выше физических факторов может быть существенной, иногда и доминирующей.

В данной работе исследуется связь неустойчивости Гельмгольца с неустойчивостью Тейлора для двухслойной модели течения при различных условиях стратификации и профилях скорости основного потока и в зависимости от направления возмущенного движения, так как задача является несимметричной. Учет направления возмущения в работах по устойчивости параллельных течений встречается редко, хотя влияние его весьма существенно.

Как показано в работах Р. Д. Своупа [2] и Т. Эйслера [3], при неустойчивой стратификации по плотности мода, перпендикулярная скорости основного потока, всегда неустойчива. Это согласуется с результатом данной работы и подтверждается экспериментом [4]. Хотя неустойчивость течения (при $Ri > Ri_{крит}$) приводит к тому, что все моды возмущения неустойчивы, однако декремент роста их амплитуды существенно зависит от того, под каким углом к направлению скорости основного потока распространяется возмущение.

Возможно также, что неустойчивость зависит не только от условий на границе раздела сред, но и от того, имеет ли профиль скорости внутри нижнего слоя излом больше критического. Подобная задача для однородной жидкости решена в интегральном плане Л. Д. Ландау [5]. Некоторые из профилей скорости основного потока, которые представлены на рис. 1, 3, 6 не имеют физического смысла или не соответствуют принятым допущениям, однако авторы посчитали целесообразным включить их в работу с целью сохранения непрерывности картины.

Вывод основного уравнения — традиционный в теории малых возмущений (например, [6]) с учетом специфических особенностей в постановке задачи. На основное движение, описываемое уравнениями Навье — Стокса, накладывается некоторое возмущающее движение в виде изолированной волны, вызывающей флуктуации скорости, плотности и давления. Новое течение также описывается уравнениями Навье — Стокса. Течение предполагается несжимаемым

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0,$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial y},$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial z} - \rho g,$$

где

$$\vec{v} = u_0(z) \vec{e}_x + \vec{v}'; \quad \rho = \rho_0(z) + \rho'; \quad P = P_0(z) + P'. \quad (2)$$

Волна возмущений распространяется в плоскости (x, y)

$$\vec{v}' = |\vec{v}'(z)| \exp(ik_x x + ik_y y - ict),$$

$$\rho' = |\rho'(z)| \exp(ik_x x + ik_y y - ict), \quad (3)$$

$$P' = |P'(z)| \exp(ik_x x + ik_y y - ict).$$

Подставляя (2) и (3) в (1) и выражая для компоненты скорости w возмущения, получим

$$(k_x u_0 - c)^2 [D^2 - k^2] w - k_x (k_x u_0 - c) w D^2 u_0 - g k^2 \frac{D \rho_0}{\rho_0} w + \frac{D \rho_0}{\rho_0} [(k_x u_0 - c)^2 D w - k_x (k_x u_0 - c) w D u_0] = 0, \quad (4)$$

$$\text{где } D = \frac{d}{dz}; \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2.$$

Уравнение (4) в безразмерном виде переписывается как

$$\rho_0 (k_x u_0 - c)^2 [D^2 - k^2] w - k_x \rho_0 (k_x u_0 - c) w D^2 u_0 + D \rho_0 [(k_x u_0 - c)^2 D w - k_x (k_x u_0 - c) w D u_0] - Ri^* k^2 D \rho_0 w = 0, \quad (5)$$

где $Ri^* = \frac{g \lambda}{u_0^2}$ — аналог числа Ричардсона (в дальнейшем называемое числом Ричардсона); за масштаб длины взята толщина нижнего слоя λ ; скорости — максимальная скорость основного потока; плотности — плотность нижнего слоя. Интегрируя (5) по δ -окрестности точки излома функции (ρ_0 или u_0) от $z_i - \delta$ до $z_i + \delta$, где δ — бесконечно малая величина, получим

$$(k_x u_0 - c)^2 [\rho_0 D w]_i - k_x (k_x u_0 - c) w [\rho_0 D u_0]_i = Ri^* k^2 w [\rho_0], \quad (6)$$

где [] означают скачок функции в точке z_i . Уравнение или система уравнений (6) (в зависимости от числа точек z_i) вместе с граничными условиями представляет собой задачу на собственные значения для системы (6).

Решение для компоненты w скорости возмущения может быть взято в виде

$$w = A_1 e^{-kz} + A_{i+1} e^{kz}, \quad (7)$$

(см., например, [6]). Граничные условия сводятся к требованию обращения w в нуль на бесконечности и при $z=0$, т. е.

$$w \Big|_0^\infty = 0. \quad (8)$$

С учетом (7), (8) система (6) меняет свой характер, и из дифференциальной становится алгебраической.

МОДЕЛЬ 1

Рассмотрим течение, представляющее собой скольжение одного слоя по другому. Слой различной плотности ρ_1 и $\rho_2=1$ (ρ_1 взят в масштабе ρ_2) (рис. 1). Излом профиля скорости основного течения находится на границе раздела сред. С учетом граничных условий выражения для w будут иметь вид

$$w_1 = A_1 e^{-kz}, \quad w_2 = A_2 (e^{-kz} - e^{-kz}) \quad (9)$$

и условие непрерывности $A_1 e^{-k} = A_2 (e^{-k} - e^k)$. Подставляя (9) в (6) и производя вычисления, получим

$$(k_x - c)^2 k (\rho + \text{cth } k) - k_x (k_x - c) + \text{Ri}^* k^2 (\rho - 1) = 0, \quad (10)$$

где $k_x = k \cos \Theta$.

Представим $c = c_r + ic_i$. Разделяя мнимую и вещественные части уравнения (10), имеем

$$\begin{aligned} k(k_x - c_r)^2 (\rho + \text{cth } k) - k_x (k_x - c_r) + \text{Ri}^* k^2 (\rho - 1) - c_i^2 k (\rho + \text{cth } k) &= 0, \\ 2k(k_x - c_r) (\rho + \text{cth } k) - k_x &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

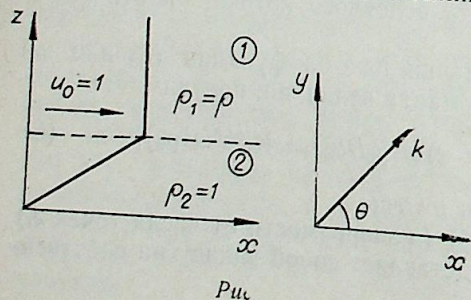
На кривой нейтральной устойчивости $c_i = 0$ получим зависимость для c_r и Ri^* от K , ρ , Θ :

$$\begin{aligned} c_r &= k \left(1 - \frac{1}{2k(\rho + \text{cth } k)} \right) \cos \Theta, \\ \text{Ri}^* &= \frac{\cos^2 \Theta}{4k(\rho - 1)(\rho + \text{cth } k)}, \end{aligned} \quad (12)$$

$\text{Ri}^* > 0$ только при $\rho > 1$ (неустойчивая стратификация), для $\rho < 1$, $\text{Ri}^* < 0$, т. е. устойчивая стратификация по плотности порождает устойчивость для всех мод и направлений малых возмущений. Для модели 1 течение, устойчивое в смысле Тейлора, будет устойчивым и в смысле Гельмгольца.

Наоборот, если $\rho > 1$, то $\text{Ri}^* > 0$, и надо рассматривать при каких условиях может существовать бегущая волна, т. е. когда $c_r > 0$.

Если $\Theta < 90^\circ$, то $c_r > 0$, и кривая нейтральной устойчи-



вости имеет вид, представленный на рис. 2.

Устойчивыми являются только те моды, волновые векторы которых составляют со скоростью основного потока угол $\Theta < 90^\circ$, и зона устойчивости малых колебаний убывает с ростом Θ и ростом неустойчивости по Тейлору. Вопрос об устойчивости однородного течения требует дополнительного исследования.

Из (10) при $\rho=1$ следует, что

$$\begin{aligned} 2(k_x - c_r) k e^{2k} - k_x (e^{2k} - 1) &= c_i^2 k [1 - \rho + (1 + \rho) e^{2k}], \\ c_i [2k(k_x - c_r) 2e^{2k} + k_x (1 - e^{2k})] &= 0, \end{aligned}$$

если $c_i \neq 0$, то это приводит к

$$c_i^2 = - \frac{k_x^2 (e^{2k} - 1)^2}{16k^2 e^{4k}},$$

что невозможно, если $k \neq 0$. При $k=0$ (т. е. возмущение представляет собой стоячую волну) $c_i=0$; при $k \neq 0$ $c_i \equiv 0$. Таким образом, если течение типа 1 существует с $\rho=1$, то относительно малых возмущений оно является устойчивым.

МОДЕЛЬ 2

Рассмотрим течение, характеризующееся профилем скорости, представленным на рис. 3, когда точка излома скорости основного потока не совпадает с границей раздела сред, а находится в верхнем слое.

С учетом граничных условий и условий непрерывности для z имеем $w_1 = A_1 e^{-kz}$,

$$\begin{aligned} w_2 &= A_2 e^{-kz} + A_3 e^{kz}, \quad w_3 = A_4 (e^{-kz} - e^{kz}), \\ A_1 e^{-kh} &= A_2 e^{-kh} + A_3 e^{kh}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$A_2 e^{-k} + A_3 e^k = A_4 (e^{-k} - e^k). \quad (14)$$

Подставляя (13) и (14) в (6) и производя соответствующие вычисления, получим

$$\begin{aligned} A(k_x - c)^2 (k_x h - c) + B(k_x - c)^2 + C(k_x - c) \times \\ \times (k_x h - c) + D(k_x - c) + \\ + E \text{Ri}^* (k_x h - c) + F \text{Ri}^* = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} A &= -2k^2 (\rho + \text{cth } k) e^{-2h}; \\ B &= k k_x [(\rho + \text{cth } k) e^{-2h} + (\rho - \text{cth } k) e^{-2kh}]; \\ C &= 2k k_x e^{-2h} (1 - \rho); \\ D &= k_x^2 (1 - \rho) (e^{-2kh} - e^{-2h}); \\ E &= 2k^3 (1 - \rho) e^{-2h}; \\ F &= k^2 k_x (1 - \rho) (e^{-2kh} - e^{-2h}). \end{aligned}$$

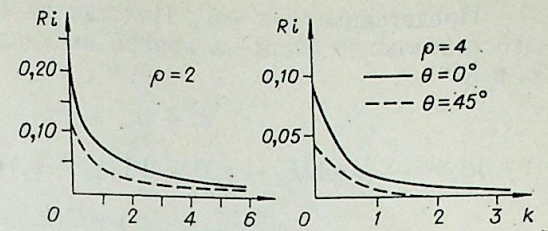


Рис. 2.

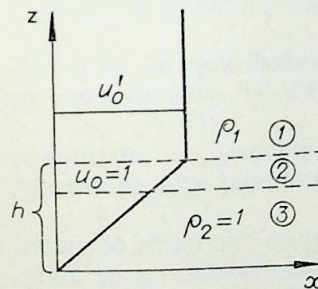


Рис. 3.

Представим $c=c_r+ic_i$. Подставляя c в (15) и разделяя мнимую действительную части на кривой нейтральной устойчивости, имеем для c_r и Ri^*

$$c_r^3 + ac_r^2 + bc_r + d = 0,$$

$$Ri = -\frac{1}{E} [A(k_x - c_r)^2 + 2A(k_x - c_r)(k_x h - c_r) + 2B(k_x - c_r) + C(k_x - c_r) + C(k_x h - c_r) + D], \quad (16)$$

где

$$a=L/2A; \quad b=M/2A; \quad d=N/2A$$

и

$$L=-2Ak_x(1+2h)-B-C-3AF/E;$$

$$M=2Ak_x^2h(2+h)+2Bk_xh+2Ck_xh+\frac{2AF}{E}k_x(2+h)+\frac{2BF}{E}+\frac{2CF}{E};$$

$$N=-2Ak_x^3h^2+Bk_x^2(1-2h)-Ck_x^2h^2+Dk_x(1-h)-\frac{AF}{E}k_x^2(1+2h)-\frac{2BF}{E}k_x-\frac{CF}{E}k_x(1+h)-\frac{DF}{E}.$$

Легко заметить, что

$$a=\hat{a}(k, h, \rho) \cos \Theta,$$

$$b=\hat{b}(k, h, \rho) \cos^2 \Theta,$$

$$d=\hat{d}(k, h, \rho) \cos^3 \Theta$$

и, следовательно, на кривой нейтральной устойчивости

$$c_r=f(k, h, \rho) \cos \Theta, \quad (17)$$

$$Ri=\varphi(k, h, \rho) \cos^2 \Theta,$$

где $f(k, h, \rho)$ — решение кубического уравнения с действительными коэффициентами

$$f^3 + \hat{a}f^2 + \hat{b}f + d = 0. \quad (18)$$

Не приступая к расчету системы (16) (кривой нейтральной устойчивости), можно сделать следующие выводы:

1. Если уравнение (18) имеет один действительный корень, то устойчивыми являются либо моды с $\Theta < 90^\circ$, либо с $\Theta > 90^\circ$, что зависит от знака f .

2. Если (18) имеет не один действительный корень, то возможно совместное существование устойчивых мод, направленных как по потоку, так и против потока.

3. Если возмущение направлено перпендикулярно скорости основного потока, то условие (17) на кривой нейтральной устойчивости не допускает существования бегущей волны, и вопрос об исследовании устойчивости стоячей волны не может быть решен системой (16). Легко показать, однако, что если $\rho > 1$ (неустойчивость Тейлора), то перпендикулярные возмущения неустойчивые (неустойчивость Гельмгольца) и наоборот: для перпендикулярных мод устойчивость Тейлора влечет за собой устойчивость Гельмгольца.

Рассмотрим решение системы (16). В этом параграфе число Ричардсона строится по скорости на границе слоев.

Устойчивая стратификация ($\rho < 1$). Кривые нейтральной устойчивости для $\rho=0,5$ и $\rho=0,2$ представлены на рис. 4, а—в. (в зависимости от h). Область устойчивости состоит из двух зон, одна из которых (линзовая) убывает с увеличением h , а другая распространяется в область меньших k , поскольку двухслойная модель течения сводится к однослойной. Границы зон устойчивости существенно зависят

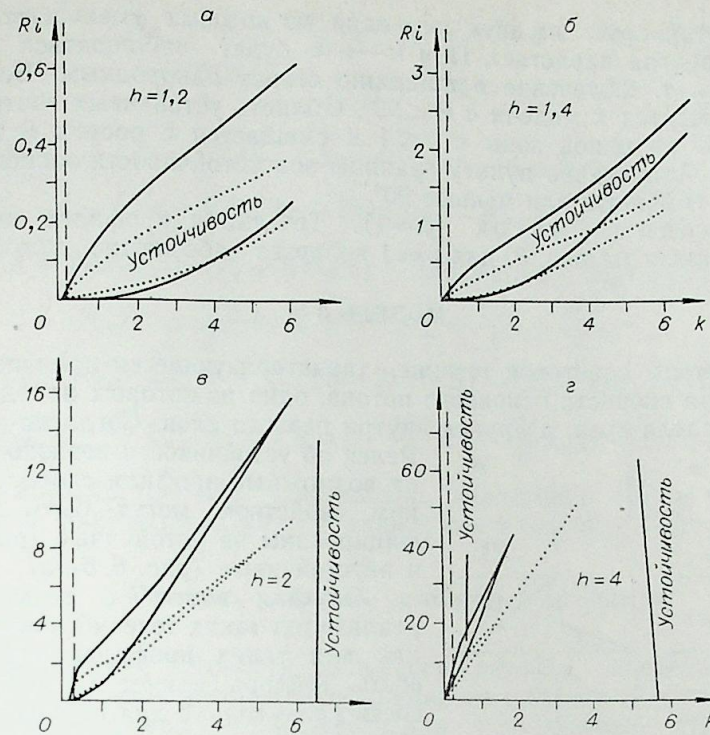


Рис. 4.

— $\rho=0,5; \Theta=0^\circ$; - - - $\rho=0,25; \Theta=0^\circ$; ···· $\rho=0,5; \Theta=180^\circ$.

от направления распространения возмущения и подразделяются на две группы с $\Theta < 90^\circ$ и $\Theta > 90^\circ$ (в каждой группе границы зон устойчивости не зависят от Θ).

Неустойчивая стратификация ($\rho > 1$). Кривые нейтральной устойчивости представлены на рис. 5, а—в, область устойчивости

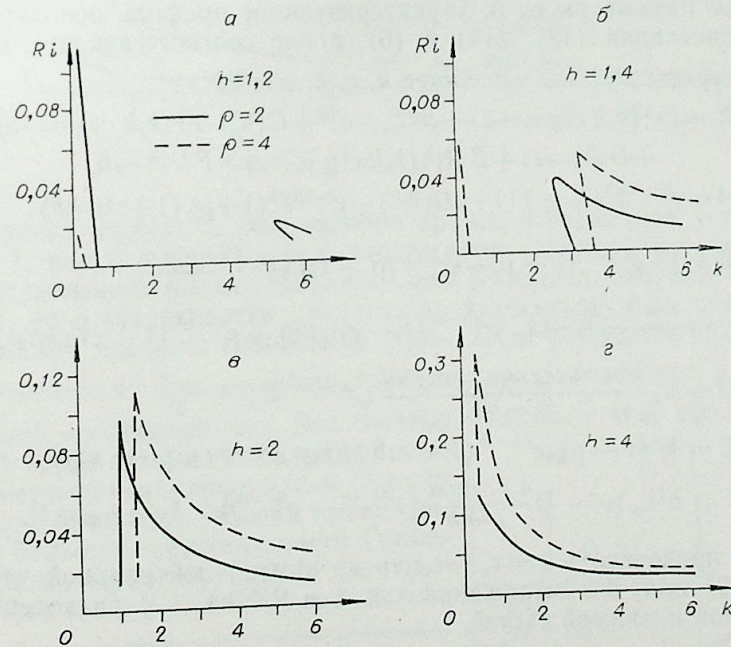


Рис. 5.

здесь также состоит из двух зон, одна из которых уменьшается с ростом h , а другая нарастает. При $h \rightarrow \infty$ будет наблюдаться полная утойчивость, т. к. течение в принципе станет однородным. Все изложенное относится к модели с $\Theta < 90^\circ$. Область устойчивых «встречных» мод состоит из одной зоны с $k \ll 1$ и смещается с ростом h в район меньших k . Аналогично пункту границы зон устойчивости зависят только от того, Θ больше или меньше 90° .

Однородный поток ($\rho=1$). Течение с профилем скорости, представленным на рис. 3, для $\rho=1$ является абсолютно устойчивым.

МОДЕЛЬ 3

Рассмотрим сдвиговое течение, характеризующееся наличием двух точек излома скорости основного потока, одна из которых находится на границе раздела сред, а другая внутри первого слоя. Согласно теореме

Релея об устойчивости невязкого потока возможные профили скорости с таким свойством могут быть классифицированы на устойчивые (рис. 6, а) и неустойчивые (рис. 6, б—г).

Опуская вопрос о возможности реализации таких течений, рассмотрим как для таких профилей неустойчивость Тейлора влияет на неустойчивость Гельмгольца для различных мод возмущения и какие параметры основного течения являются наиболее существенными.

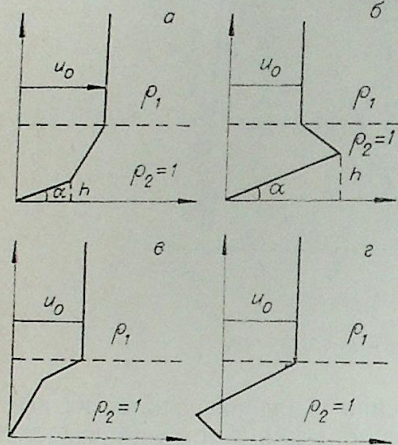


Рис. 6.

Общие уравнения

Вводя параметры α , h , характеризующие профиль основной скорости, и подставляя (13), (14) в (6), после соответствующих выкладок получим уравнение, связывающее k , c , h , α и Ri^*

$$A(k_x - c)^2(k_x h \operatorname{ctg} \alpha - c) + B(k_x - c)^2 + C(k_x - c)(k_x h \operatorname{ctg} \alpha - c) + D(k_x - c) + E Ri^*(k_x h \operatorname{ctg} \alpha - c) + F Ri^* = 0, \quad (19)$$

где $A = e^{kh-h} k^2 (1-\rho) (1-\operatorname{cth} kh) - e^{h-h} k^2 (1+\rho) (1+\operatorname{cth} kh);$

$$B = [-e^{kh-h} (1-\rho) - e^{h-h} (\rho+1)] k k_x \frac{1-\operatorname{ctg} \alpha}{1-h};$$

$$C = \frac{1-h \operatorname{ctg} \alpha}{1-h} k k_x \{e^{kh-h} (1-\operatorname{cth} kh) + e^{h-h} (1+\operatorname{cth} kh)\};$$

$$D = k_x^2 \frac{(1-h \operatorname{ctg} \alpha)(1-\operatorname{ctg} \alpha)}{(1-h)^2} (e^{h-h} - e^{kh-h});$$

$$E = k^3 (1-\rho) \{e^{kh-h} (1-\operatorname{cth} kh) + e^{h-h} (1+\operatorname{cth} kh)\};$$

$$F = k^2 k_x (\rho-1) \frac{1-\operatorname{ctg} \alpha}{1-h} (e^{kh-h} - e^{h-h}); \quad k_x = k \cos \Theta.$$

Если представить $c = c_r + ic_i$, то на кривой нейтральной устойчивости ($c_i = 0$) получим выражения для c_r и Ri^* из (19) разделением действительной и мнимой частей,

$$c_r^3 + ac_r^2 + bc_r + d = 0,$$

$$Ri^* = -\frac{1}{E} [A(k_x - c_r)^2 + 2A(k_x - c_r)(k_x h \operatorname{ctg} \alpha - c_r) + 2B(k_x - c_r) + C(k_x - c_r) + C(k_x h \operatorname{ctg} \alpha - c_r) + D], \quad (20)$$

где

$$a = L/2A; \quad b = M/2A; \quad d = N/2A;$$

$$L = -2Ak_x(1+2h \operatorname{ctg} \alpha) - B - C - \frac{3AF}{E};$$

$$M = 2Ak_x^2 h \operatorname{ctg} \alpha (2+h \operatorname{ctg} \alpha) + 2Bk_x h \operatorname{ctg} \alpha + 2Ck_x h \operatorname{ctg} \alpha + \frac{2AF}{E} k_x (2+h \operatorname{ctg} \alpha) + \frac{2BF}{E} + \frac{2CF}{E};$$

$$N = -2Ak_x^3 h^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha + Bk_x^2 (1-2h \operatorname{ctg} \alpha) - Ck_x^2 h^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha + Dk_x (1-h \operatorname{ctg} \alpha) - \frac{AF}{E} k_x^2 (1+2h \operatorname{ctg} \alpha) - \frac{2BF}{E} k_x - \frac{CF}{E} k_x (1+h \operatorname{ctg} \alpha) - \frac{DF}{E}.$$

Легко заметить, что (20) совершенно аналогично (16) и его решение зависит от направления моды Θ также, как и решение (16).

Профиль скорости, устойчивый по Релею

Для профиля скорости основного течения, представленного на рис. 6, а, при устойчивой стратификации не найдено неустойчивых мод. Кривая нейтральной устойчивости для неустойчивой стратификации

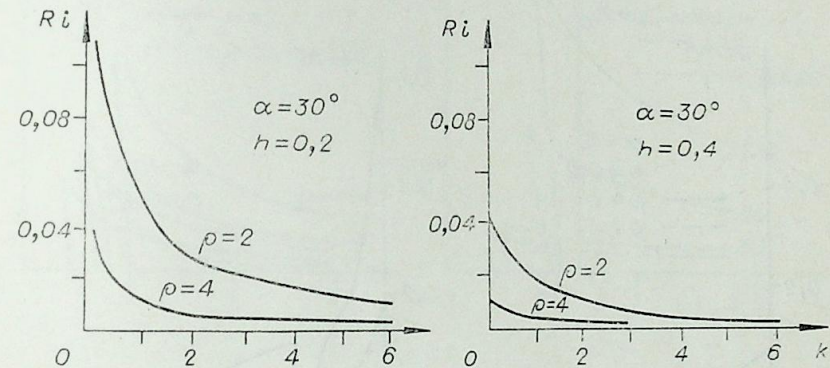


Рис. 7.

представлена на рис. 7. Она подобна кривой нейтральной устойчивости модели 1; как и в том случае, наблюдается неустойчивость для всех мод, направленных перпендикулярно или навстречу скорости основного течения. Зона устойчивости существенно зависит от угла, образованного отрезками профиля скорости φ (рис. 8), и убывает с убыванием φ .

$\varphi_{кр} = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} h$. Для профиля скорости, представленного на рис. 8, б,

не найдено устойчивых мод. Это связано, видимо, с тем, что с кинематической точки зрения такой профиль является неустойчиво-равновесным. Увеличение неустойчивости Тейлора также приводит к большей неустойчивости Гельмгольца и при определенном Ri^* наблюдается неустойчивость течения для всех мод.

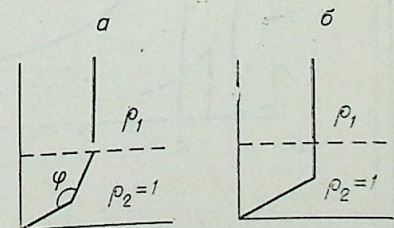


Рис. 8.

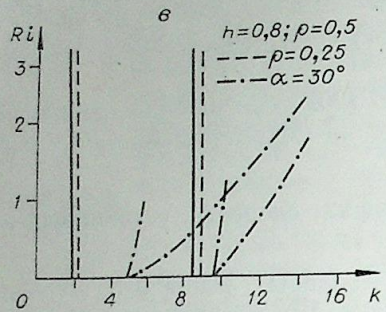
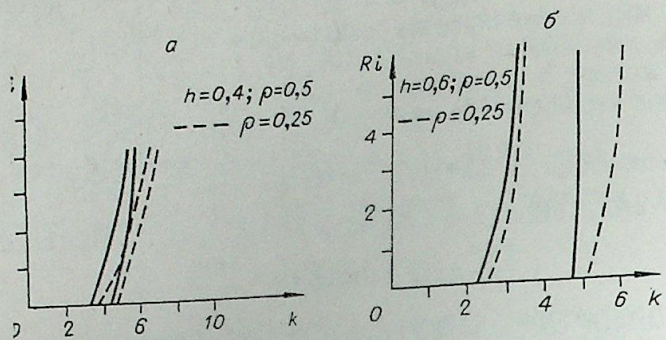


Рис. 9.

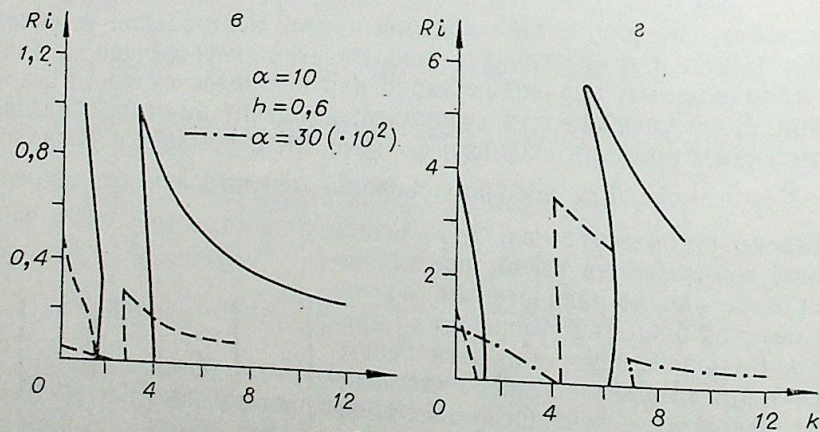
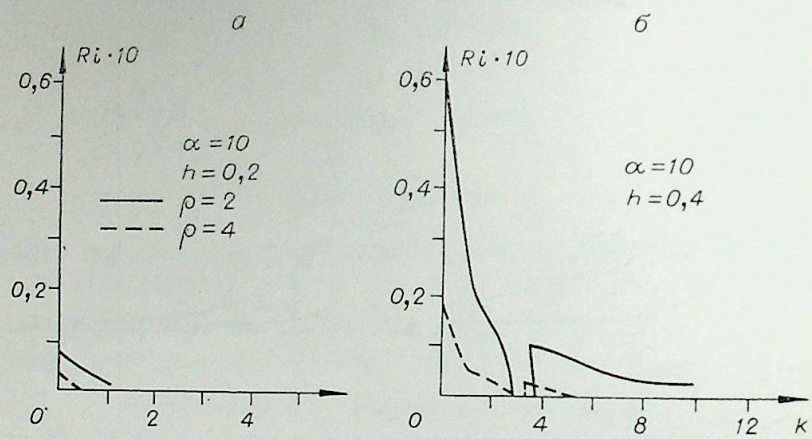


Рис. 10.

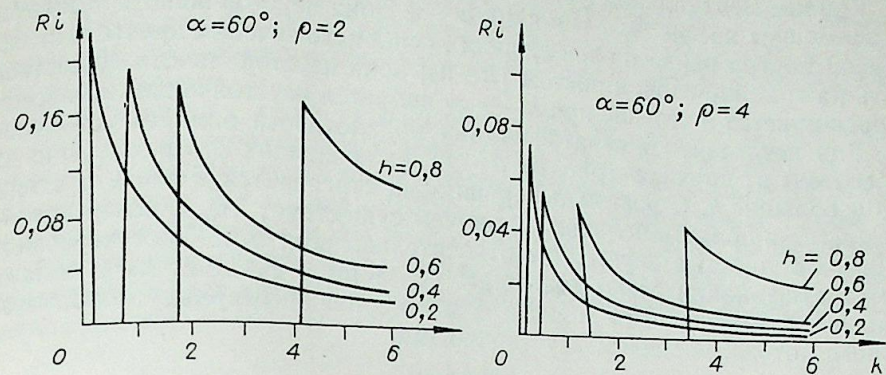


Рис. 11.

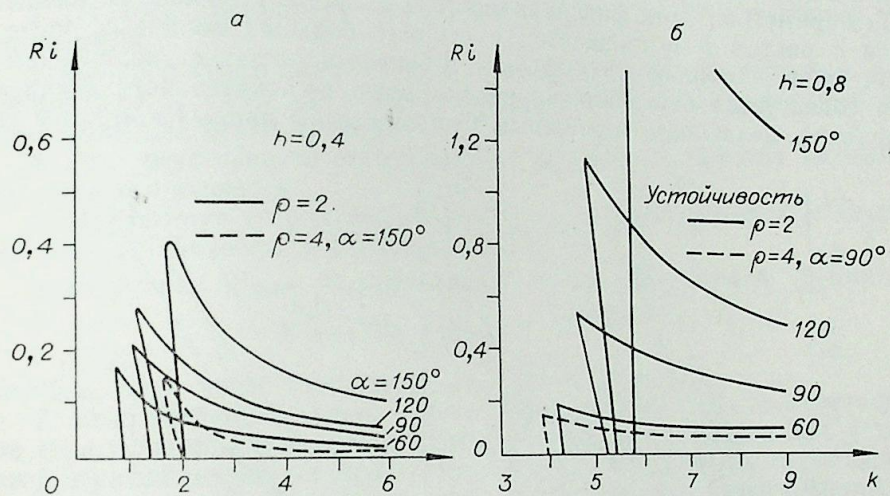


Рис. 12.

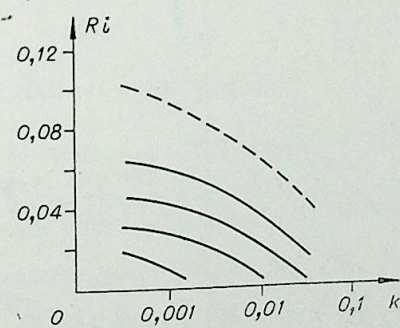


Рис. 13.

$\rho=2; \theta=180^\circ; \alpha=120^\circ; \text{---} \alpha=150^\circ$.

Профиль скорости с отрицательным градиентом давления

Кривые нейтральной устойчивости для профиля скорости рис. 6, б представлены на рис. 9, а — в и 10, а — г. Зона неустойчивости существует, если внутри первого слоя скорость основного течения превышает скорость на границе слоя; с ростом $|u-u_0|$ зона неустойчивости существенно расширяется и течение при $h \rightarrow \infty$ является неустойчивым для всех k .

Для неустойчивой стратификации по плотности область устойчивости состоит из двух зон (рис. 10, а — г), включающих соответственно малые и большие k . С ростом h первая зона стягивается к $k=0$, а вторая смещается в область больших k , причем существует $Ri_{крит}$, выше которого поток полностью неустойчив относительно всех мод. Рост неустойчивой стратификации резко уменьшает обе зоны и смещает их в область меньших k . «Встречные» моды и моды, перпендикулярные скорости основного потока, являются неустойчивыми.

Выпуклые профили скорости и возвратное течение

Неустойчивая стратификация. Вид области неустойчивости представлен на рис. 11, а — б, 12, а — б, 13, в зависимости от различных параметров. Для фиксированного α область устойчивости уменьшается с ростом h и смещается в сторону больших волновых чисел k . Для фиксированного h область устойчивости растет с увеличением α , что согласуется с стабилизирующей ролью положительного градиента давления, делающим возможным существование данных профилей ско-

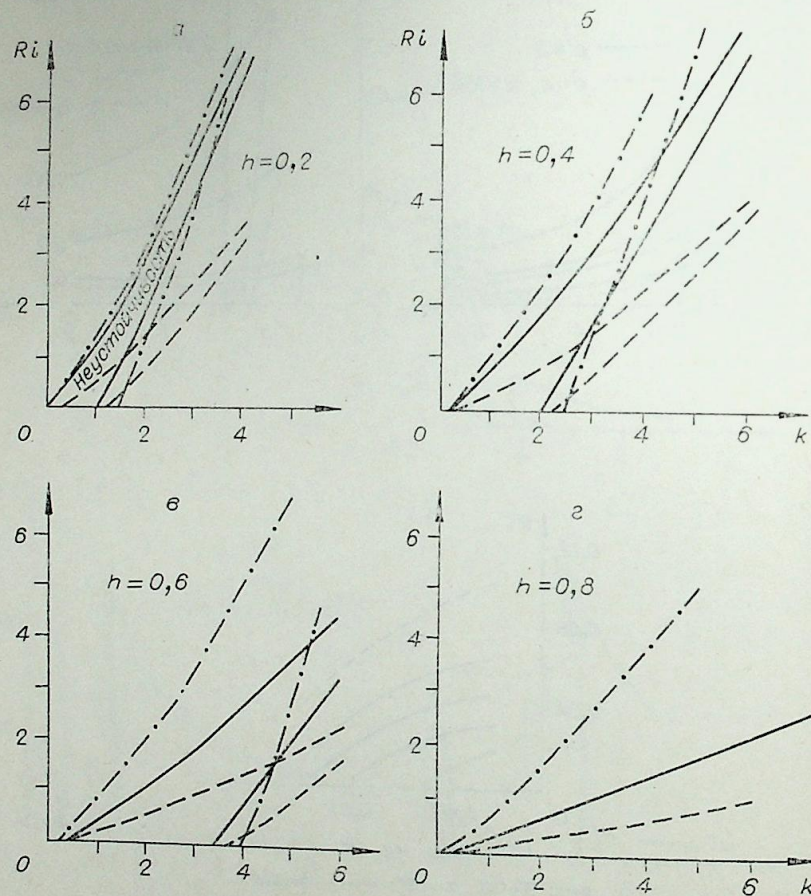


Рис. 14.

--- $\rho=0,25; \alpha=60^\circ$; - · - $\rho=0,5; \alpha=90^\circ$; — $\rho=0,5; \alpha=60^\circ$

рости основного потока. Все это относится лишь к модам с $\Theta < 90^\circ$ причем число Ri зависит от Θ как $Ri(0) \times \cos^2 \Theta$, а границы зон от Θ не зависят. Иначе обстоит дело для «встречных» мод ($\Theta > 90^\circ$), область устойчивости для $\Theta > 90^\circ$ существует лишь для $\alpha > 90^\circ$ и для малых k . Увеличение градиента давления (увеличение α) приводит к расширению зоны устойчивости.

Устойчивая стратификация. На рис. 14, а — г представлены области неустойчивости в зависимости от h для $\alpha=60^\circ, \Theta < 90^\circ$. С ростом h неустойчивые моды смещаются в область больших k (для фиксированного Ri) и зона неустойчивости в интегральном плане растет. Все «возвратные» моды неустойчивы. Если $\alpha > 90^\circ$, то существуют устойчивые «встречные» моды, лежащие в области малых k . И рост α (связанного с положительным градиентом давления) увеличивает устойчивость потока.

Выводы

1. Профили скорости, у которых угол излома φ лежит в пределах $\varphi_{кр} < \varphi < 180^\circ$, где $\varphi_{кр} \geq 90^\circ$, являются устойчивыми. С ростом φ устойчивость увеличивается.

2. Профили скорости, у которых $\varphi < \varphi_{кр}$ и $\varphi > 180^\circ$, являются неустойчивыми.

3. Влияние стратификации по плотности гораздо существеннее, чем влияние угла φ , и уже для $\rho_1 - \rho_2 = \epsilon \ll 1$, где $\epsilon > 0$, появляются неустойчивые моды для любого угла φ .

4. Рост неустойчивой стратификации приводит к резкому уменьшению зоны устойчивости.

5. Нарастание «отрицательной» стратификации приводит к смещению зоны устойчивости в область меньших k .

Зависимость $Ri_{крит}^*$ от направления возмущения дается формулой

$$Ri_{крит}^*(\Theta) = Ri_{крит}^*(0) \cos^2 \Theta,$$

где $Ri_{крит}^*(0)$ — число Ричардсона двумерной задачи.

7. Если течение не носит характер возвратного, то для неустойчивой стратификации и при неустойчивых профилях скорости для устойчивой стратификации все моды возмущений, направленные перпендикулярно или против скорости основного потока, являются неустойчивыми.

8. В случае возвратного течения возможно существование устойчивых «встречных» мод ($\Theta > 90^\circ$), лежащих в области малых k .

Институт теплофизики
СО АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
4/IV 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. P. G. Drazin, L. N. Howard. Hydrodynamic Stability of Parallel Flow of Inviscid Fluid.— Advances of Applied Mechanics, 1966, 9.
2. R. D. Swope. Fluid Layers Stability near Flat Plane in Liquid.— AIAA paper, 69—389.
3. T. J. Eisler. Helmholtz Flow Instability in Unstable Atmosphere.— Physics of Fluid, 1967, 10.
4. Р. Даф. Неустойчивость линии скольжения. В кн.: Гидродинамическая неустойчивость. М., Мир, 1964.
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред. М., «Гостехиздат», 1944.
6. Ц. Ц. Линь. Теория гидродинамической устойчивости. М., ИЛ, 1958.

Б. М. МАРКЕЕВ

О ГРАНИЧНОЙ СКОРОСТИ ИЗОТЕРМИЧЕСКОГО СКОЛЬЖЕНИЯ
ПРИ ТЕЧЕНИИ БИНАРНОЙ СМЕСИ
СЛАБОРАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА ВДОЛЬ ТВЕРДОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Для течений слабо разреженного газа характерно изменение граничных условий на обтекаемых твердых поверхностях. Это резко отличает их от течений с пренебрежимо малыми числами Кнудсена ($Kn = \lambda/L$, где λ — длина свободного пробега; L — характерный гидродинамический масштаб). Скольжение газа вдоль твердой поверхности рассматривалось в ряде работ, начиная с Максвелла [1—10]. При этом обычно использовались некоторые допущения. В рамках метода полупространственных моментов [2] в связи с вычислительными трудностями, связанными с получением полупространственных моментов от интегралов столкновений, найдены функции распределения для молекул кнудсеновского слоя и скорость скольжения лишь в частном случае максвелловского газа и газа, молекулы которого взаимодействуют по закону твердых сфер [4—7].

Для произвольного закона взаимодействия молекул скольжения бинарной смеси газа на основе вариационного метода, справедливость которого доказана лишь для малых чисел Кнудсена, исследовалось в [11]. Функцию распределения при этом искали в виде разложения по полным моментам возле максвелловской функции распределения со среднемаассовой скоростью. Однако вблизи поверхности, где $Kn \sim 1$, возможно состояние смеси с разностью парциальных и среднемаассовых скоростей порядка среднемаассовой скорости [12].

В данном сообщении на основе модифицированного метода полупространственных моментов [13] получено выражение для изотермического скольжения бинарной смеси газа, представляющего собой одно из граничных условий при течении слабо разреженного газа на обтекаемой поверхности. Проведены анализ искомого выражения и сравнение с соответствующим выражением для скорости скольжения простого газа, полученного на основе модельного кинетического уравнения.

Рассмотрим задачу о куэттовском течении между двумя плоскостями, расстояние между которыми $2L$. Данная задача имеет самостоятельный интерес, так как позволяет вычислить граничную скорость изотермического скольжения, выяснить характер течения вблизи поверхности тел, обтекаемых бинарной смесью разреженного газа. Пусть верхняя пластина движется со скоростью \vec{u}' в направлении оси y , а нижняя со скоростью $-\vec{u}'$. Ось x направим перпендикулярно плоскостям. Решение уравнения Больцмана для парциальной функции распределения будем искать в виде разложения по полиномам Эрмита — Чебышева.

$$f_{\alpha}^{\pm}(\vec{r}_{\alpha}, \vec{v}_{\alpha}, t) = \frac{n_{\alpha}}{\pi^{3/2} v_{T\alpha}^3} \exp \left\{ - \left(\frac{\vec{v} - \vec{u}_{\pm\alpha y}}{v_{T\alpha}} \right)^2 \right\} \left\{ 1 - \frac{\sigma_{\pm\alpha xy}}{2n_{\alpha}T} \frac{m_{\alpha}}{T} (v_y - u_{\pm\alpha y}) v_{\alpha x} \right\},$$

$$F_{\alpha}(\vec{v}_{\alpha}, \vec{r}_{\alpha}, t) = \frac{1}{2} (1 + \text{sign } v_{\alpha x}) f_{\alpha}^{+} + \frac{1}{2} (1 - \text{sign } v_{\alpha x}) f_{\alpha}^{-}, \quad (1)$$

где

$$\text{sign } v_{\alpha x} = \begin{cases} 1 & \text{при } v_{\alpha x} > 0 \\ -1 & \text{при } v_{\alpha x} < 0. \end{cases}$$

Здесь T — температура в энергетических единицах; n_{α} — парциальная концентрация. Для парциальных величин средней скорости $u_{\pm\alpha y}$ и тензора вязких напряжений $\sigma_{\pm\alpha xy}$ из кинетического уравнения получим следующую систему [13]:

$$\begin{aligned} \nabla_x \sigma_{\alpha xy}^{+} &= \frac{n_{\alpha} n_{\beta} T}{n D_{\alpha\beta}} (u_{\alpha} - u_{\beta}) + \sum_{\beta} \left(\frac{g_{\alpha\beta}}{\lambda_{\beta}} + \delta_{\alpha\beta} \frac{g_{\alpha}}{\lambda_{\alpha}} \right) \sigma_{\beta xy}^{-}, \quad \nabla_x \sigma_{xy}^{-} = (\mu_{\alpha}^{-} / (\lambda_{\alpha}^{-})^2) u_{\alpha y}^{-}, \\ \nabla_x u_{\alpha y}^{+} &= \sum_{\beta} \frac{a_{\alpha\beta}}{y_{\alpha} y_{\beta}} \sigma_{\beta xy}^{+} + \sum_{\beta} \left(\frac{h_{\alpha\beta}}{\lambda_{\beta}} - \delta_{\alpha\beta} \frac{h_{\alpha}}{\lambda_{\alpha}} \right) u_{\beta y}^{-}, \quad \nabla_x u_{\alpha y}^{-} = (1/\mu_{\alpha}^{-}) \sigma_{\alpha xy}^{-}, \end{aligned} \quad (2)$$

где
$$u_{\alpha y}^{\pm} = \frac{1}{2} (u_{\alpha y} \pm u_{-\alpha y}), \quad \sigma_{\alpha xy}^{\pm} = \frac{1}{2} (\sigma_{\alpha xy} \pm \sigma_{-\alpha xy}).$$

Величины $g_{\alpha\beta}$, g_{α} , $h_{\alpha\beta}$, h_{α} приведены в приложении 1, а $a_{\alpha\beta}$, λ_{α}^{-} — в [13]. Система уравнений переноса (2) имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} u_0 &= \mu (\nabla_x u_0)_0 \left\{ 1 - \frac{u}{L (\nabla_x u_0)_0} \right\} x + a u_{\alpha\beta}, \\ u_{\alpha}^{+} &= u_0 + (\rho_{\beta}/\rho) u_{\alpha\beta} - \sum_{\beta} (h_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} h_{\alpha}) \left(u_{\beta}(-L) \exp \left\{ - \frac{x+L}{\lambda_{\beta}^{-}} \right\} - \right. \\ &\quad \left. - u_{\beta}(-L) \exp \left\{ \frac{x-L}{\lambda_{\beta}^{-}} \right\} \right) + \sum_{\beta, \gamma} \frac{a_{\alpha\beta}}{y_{\alpha} y_{\beta}} (\lambda_{\gamma}^{-} g_{\beta\gamma} + \delta_{\beta\gamma} \lambda_{\beta}^{-} g_{\beta}) \sigma_{\gamma xy}^{-}, \\ u_{\alpha\beta} &= u_{\alpha}^{+} - u_{\beta}^{+} = u_{\alpha\beta}(-L) \exp \left\{ - \frac{x+L}{\lambda} \right\} + u_{\alpha\beta}(L) \exp \left\{ \frac{x-L}{\lambda} \right\}, \\ \sigma_{\alpha\beta}^{+} &= (\mu_{\alpha}/\mu) \sigma + \sigma_{\alpha\beta} - \sum_{\beta} (g_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta} g_{\alpha}) \left(\sigma_{\beta}(-L) \exp \left\{ - \frac{x+L}{\lambda_{\beta}^{-}} \right\} - \right. \\ &\quad \left. - \sigma_{\beta}(L) \exp \left\{ \frac{x-L}{\lambda_{\beta}^{-}} \right\} \right), \\ \sigma_{\alpha\beta} &= \sigma_{\alpha xy}^{+} (\mu_{\beta}/\mu) - \sigma_{\beta xy}^{+} (\mu_{\alpha}/\mu) = (n_{\alpha} n_{\beta} T / n D_{\alpha\beta}) \lambda^2 \nabla_x u_{\alpha\beta}, \\ \sigma &= \sigma_{\alpha xy}^{+} + \sigma_{\beta xy}^{+} = \mu \nabla_x [u_0 - a u_{\alpha\beta}], \\ u_{\alpha}^{-} &= u_{\alpha}(-L) \exp \left\{ - \frac{x+L}{\lambda_{\alpha}^{-}} \right\} + u_{\alpha}(L) \exp \left\{ \frac{x-L}{\lambda_{\alpha}^{-}} \right\}, \\ \sigma_{\alpha xy}^{-} &= \sigma_{\alpha}(-L) \exp \left\{ - \frac{x+L}{\lambda_{\alpha}^{-}} \right\} + \sigma_{\alpha}(L) \exp \left\{ \frac{x-L}{\lambda_{\alpha}^{-}} \right\}, \end{aligned}$$

где $a = (\omega_{\alpha} - \omega_{\beta})/\mu + (\mu_{\beta}\rho_{\alpha} - \mu_{\alpha}\rho_{\beta})/\mu\rho$.

Величины ω_{α} , μ_{α} , λ приведены в [13].

При получении (3) предполагалось, что между пластинами бинарная смесь газа находится в стационарном состоянии, при котором средняя скорость газа имеет линейный профиль с градиентом немассовая скорость газа имеет линейный профиль с градиентом $(\nabla_x u_0)_0$. Скорость скольжения смеси газа u и постоянные $u_{\alpha}(\pm L)$, $\sigma_{\alpha}(\pm L)$ определяются из закона частичного отражения молекул от поверхности:

$$f_{\alpha}^{+}(v_x) = \epsilon_{\alpha} f_{0\alpha} + (1 - \epsilon_{\alpha}) f_{\alpha}^{-}(-v_x) \quad \text{при } v_x > 0, \quad (3)$$

где $f_{0\alpha}$ — парциальная максвелловская функция, ϵ_{α} — парциальный коэффициент аккомодации. В результате имеем следующее выражение

для скорости изотермического скольжения бинарной смеси газа вдоль поверхности:

$$u = k(\omega\mu) (\nabla_x u_0)_0, \quad (4)$$

где

$$k = \left\{ 1 - \frac{nD_{\alpha\beta}}{n_{\alpha}n_{\beta}T} \frac{1}{\lambda} \frac{\alpha}{\delta_1 + \Delta} \left(\omega_{\alpha}^{-1} \frac{\mu_{\beta}}{\mu} - \omega_{\beta}^{-1} \frac{\mu_{\alpha}}{\mu} \right) \right\},$$

$$\omega^{-1} = \omega_{\alpha}^{-1} + \omega_{\beta}^{-1}; \quad \kappa = \mu\omega.$$

Величины α , ω_{α} , Δ , δ_1 приведены в приложении 2, $D_{\alpha\beta}$ — коэффициенты диффузии.

На основе модельных кинетических уравнений изотермическое скольжение простого газа исследовалось в ряде работ (см., например, [5, 8, 14]). Так, выражение для скорости скольжения однокомпонентного газа, полученного в [14], можно представить посредством соотношения

$$u = \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} (1 + 0,137\varepsilon) \frac{\sqrt{\pi}}{2} l_p (\nabla_x u_0)_0. \quad (5)$$

При этом длина свободного пробега l_p , фигурирующая в (5), определяется из сравнения коэффициентов вязкости, полученных, например, в рамках метода Чепмена — Энскога и на основе модельного кинетического уравнения. В этой связи следует отметить, что уравнения переноса (2) содержат параметры λ_{α} , μ_{α} , μ и поэтому модельный интеграл, адекватно описывающий динамику столкновений в кнудсеновском слое, вообще говоря, должен содержать большее число «свободных» параметров, чем обычный модельный интеграл, используемый в [5, 8, 14]. Вместе с тем получение коэффициентов переноса для конкретного вида потенциала взаимодействия между молекулами в кинетической теории сопряжено с большой вычислительной работой по расчету интегралов Чепмена — Каулинга и представляет собой самостоятельную вычислительную задачу. Данному вопросу посвящено большое число работ (см., например [15] и приведенную там библиографию).

Для предельного случая одноатомного максвелловского газа зависимость коэффициента скольжения от коэффициента аккомодации, рассчитанная по формуле (4) для различных величин обратного числа Кнудсена $2L/\lambda^{-}$, приведена на рис. 1. При этом структура зависимости коэффициента скольжения от коэффициента аккомодации (5), полученная на основе модельных кинетических уравнений, и структура коэффициента скольжения, приведенная на рис. 1 для пренебрежимо малых чисел Кнудсена ($2L/\lambda^{-} = \infty$), совпадают. Количественное различие не превосходит нескольких процентов. При диффузионном отражении максвелловских молекул от поверхности для $K_p = 0$ коэффициент изотермического скольжения (4) $\kappa = 1,13$, что хорошо согласуется с известными результатами [7, 9, 16]. Для конечных чисел Кнудсена прямая, определяющая зависимость коэффициента скольжения от коэффициента аккомодации (см. рис. 1), располагается ниже прямой $K_p = 0$. При этом с увеличением K_p прямая опускается.

Известно, что при малых числах Кнудсена скорость скольжения пропорциональна K_p , а коэффициент скольжения имеет постоянную величину. Однако при увеличении K_p коэффициент скольжения начинает уменьшаться и в переходной области чисел $K_p \sim 1$, как следует из (4), уменьшается экспоненциально. Для простого максвелловского газа экспоненциальное уменьшение коэффициента скольжения в области промежуточных чисел K_p для различных коэффициентов аккомодации показано на рис. 2.

Выражение для коэффициента изотермического скольжения (4), как было показано выше, в предельном случае простого газа полностью согласуется с известными результатами [1, 7, 9, 16]. Для произвольной

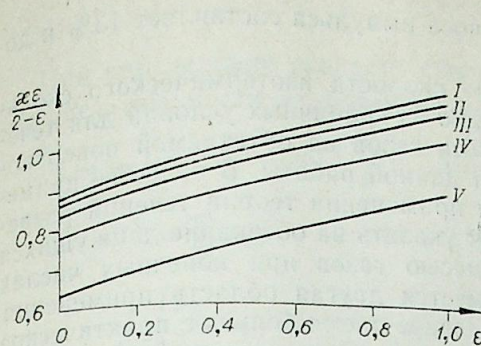


Рис. 1.

I — $2L/\lambda^{-} = \infty$; II — $2L/\lambda^{-} = 4$; III — $2L/\lambda^{-} = 3$;
IV — $2L/\lambda^{-} = 2$; V — $2L/\lambda^{-} = 1$.

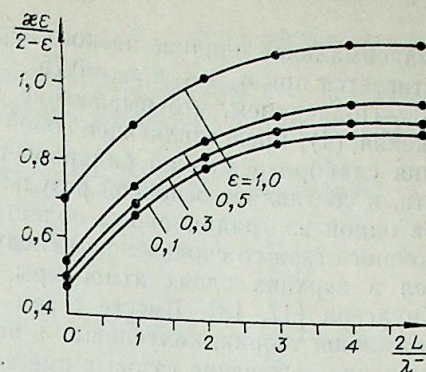


Рис. 2.

смеси двух газов коэффициент изотермического скольжения аналогично прочим коэффициентам переноса бинарной смеси, например коэффициенту вязкости, зависит от парциальных концентраций компонентов смеси. Эта зависимость определяется динамикой обмена импульсом между компонентами смеси в кнудсеновском слое.

Обратимся к коэффициенту k , фигурирующему в выражении для изотермического скольжения (4), и запишем его для смеси максвелловских газов посредством соотношения

$$k = 1 + \frac{\delta_f (y_{\alpha} y_{\beta})^{3/2}}{\sqrt{2\pi}d} \left\{ \frac{2}{(2-\varepsilon)d} \frac{\varepsilon_{\alpha} - \varepsilon_{\beta}}{\varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta}} + \left(1 + \frac{3\delta_f}{2d\sqrt{\pi}} \right) x_{\alpha} + \frac{4}{3} z_{\alpha} \right\} \left\{ \left(1 - \frac{3\delta_f}{4\sqrt{\pi}d} \right) x_{\alpha} - \frac{3}{4} z_{\alpha} \right\},$$

$$x_{\alpha} = \frac{m_{\alpha} - m_{\beta}}{m_{\alpha} + m_{\beta}}, \quad z_{\alpha} = 2 \frac{\sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta}}{\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta}},$$

$$|\varepsilon_{\alpha} - \varepsilon_{\beta}| \ll \varepsilon_{\alpha}, \quad \varepsilon_{\alpha} \simeq \varepsilon_{\beta} = \varepsilon, \quad d = 1 + \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}}. \quad (6)$$

Второй член данного выражения для простого газа вместе с параметрами x_{α} , z_{α} , $\varepsilon_{\alpha} - \varepsilon_{\beta}$ обращается в нуль. При отличных от нуля x_{α} , z_{α} и $\varepsilon_{\alpha} - \varepsilon_{\beta}$ он представляет собой квадратичную форму относительно данных параметров и достигает своего максимума на границе области $x_{\alpha} \leq 1$, $z_{\alpha} \leq 1$, $\varepsilon_{\alpha} - \varepsilon_{\beta} \leq 1$. Ниже приводится уменьшение коэффициента k (в %) при $\varepsilon_{\alpha} = \varepsilon_{\beta}$, $y_{\alpha} = y_{\beta} = 1/2$, обусловленное вторым слагаемым для конкретных газов.

N_2	CO_2	$\sigma_{\alpha} \gg \sigma_{\beta}$	H_2	H_2	Cl_2	Hg	$\sigma_{\alpha} \gg \sigma_{\beta}$
C_2H_4	C_3H_8	$m_{\alpha} = m_{\beta}$	C_2H_4	$n-C_7H_{16}$	$n-C_9H_{20}$	$n-C_9H_{20}$	$x_{\alpha} = 0,75$
2,84	1,6	12,8	1,9	8,4	6,5	8,0	13

Появление второго слагаемого в (6) для бинарной смеси определяется вкладом в навье-стоксовскую часть функции распределения кнудсеновского слоя вязкого переноса импульса за счет диффузионных скоростей. Отметим, что вне кнудсеновского слоя вязким переносом импульса за счет диффузионных скоростей пренебрегают, так как его вклад мал и составляет $K_p \ll 1$. Первые два столбца соответствуют переносу вязкого с одинаковыми массами. При этом парциальный перенос вязкого импульса определяется различием сечений рассеяния молекул различных сортов. В третьем столбце приводится максимальное влияние вязкого переноса импульса на коэффициент скольжения бинарной смеси, компоненты которой имеют одинаковую массу молекул, но разные сечения рассеяния, и составляет 12,8%. Прочие примеры соответствуют смеси, молекулы компонентов которой имеют разные массы. При этом

максимальное влияние вязкого переноса импульса составляет 13% и до-стигается при $\sigma_\alpha \gg \sigma_\beta$ и $x_\alpha = 0,75$.

Подчеркнем, что выражение для скорости изотермического скольжения (4), представляющее собой одно из граничных условий для течения слаборазреженной бинарной смеси газов на обтекаемой поверхности, и составляет основной результат данной работы. В качестве примера одной из традиционных областей применения теории течений разреженного газа со скольжением следует указать на обтекание движущихся тел в верхних слоях атмосферы смесью газов при конечных числах Кнудсена [17, 18]. Вместе с тем имеется другая область применения указанной теории, получившая в последнее время большое практическое значение, — течение газовых смесей в порах катализатора [19]. Оказывается, что в катализаторе два класса пор резко различного размера [19]. При этом на долю класса с меньшим размером пор приходится большая часть каталитической поверхности, и обычно в порах этого класса течение смеси газов происходит при малых, но конечных числах Кнудсена. Поэтому изучение вопросов скольжения вдоль поверхности слаборазреженной смеси газов в порах катализатора, и для практических применений при расчете режимов катализатора.

Выражаю благодарность акад. В. В. Струминскому за интерес к работе.

Приложение 1

Подставляя функцию распределения (1) в уравнение Больцмана и используя теорию интегралов, зависящих от параметров [20], приходим к следующим значениям для коэффициентов:

$$g_\alpha = 4 \frac{\lambda_\alpha^-}{v_{T\alpha}} \sum_\beta \{ M_\alpha^{3/2} \omega_{\alpha\beta} [t_x^2 t_x] + M_\alpha^{1/2} M_\beta \omega_{\alpha\beta} [t_x \omega_y \omega'_y] - M_\alpha M_\beta^{1/2} \omega_{\alpha\beta} [t_y^2 \omega_y] - M_\beta^{3/2} \omega_{\alpha\beta} [\omega_x \omega_y \omega'_y] \},$$

$$g_{\alpha\beta} = 4 \frac{\lambda_\beta^-}{v_{T\beta}} \frac{n_\alpha}{n_\beta} M_\alpha \{ M_\beta^{1/2} \omega_{\alpha\beta} [t_x \omega_y (\omega_y - \omega'_y)] + M_\alpha^{1/2} \omega_{\alpha\beta} [\omega_x \omega_y (\omega_y - \omega'_y)] \},$$

$$h_{\alpha\beta} = 4 \frac{\lambda_\beta^-}{v_{T\beta}} M_\alpha^{1/2} M_\beta^{1/2} \{ M_\alpha^{1/2} \omega_{\alpha\beta} [t_x \omega_y (\omega_y - \omega'_y)] - M_\beta^{1/2} \omega_{\alpha\beta} [\omega_y (\omega_y - \omega'_y)] \},$$

$$h_\alpha = 4 \frac{\lambda_\alpha^-}{v_{T\alpha}} \sum_\beta \{ -M_\alpha^{1/2} \omega_{\alpha\beta} [t_x \omega_y \omega'_y] + M_\beta^{1/2} \omega_{\alpha\beta} [\omega_y (\omega_x \omega_y - \omega'_x \omega'_y)] \}.$$

Здесь $\omega_{\alpha\beta} [\varphi]$ представляет собой функционал, определяемый посредством формулы

$$\omega_{\alpha\beta} [\varphi(\vec{t}, \vec{\omega}, \vec{\omega}')] = \frac{n_\beta}{(\pi v_{T\alpha} v_{T\beta})^3} \int \int d\vec{t} d\vec{\omega} d\Omega \sigma_{\alpha\beta}(\omega, \vartheta) \omega \text{ sign } v_{\alpha x} \times \exp \left\{ -\frac{t^2}{v_0^2} - \frac{\omega^2}{v^2} \right\} \varphi \left(\frac{\vec{t}}{v_0}, \frac{\vec{\omega}}{v}, \frac{\vec{\omega}'}{v} \right),$$

где $\sigma_{\alpha\beta}(\omega\vartheta)$ — дифференциальное сечение рассеяния; $d\Omega$ — элемент телесного угла; $\vec{v}_\alpha = \vec{t} - M_\beta \vec{\omega}$; $v^2 = v_{T\alpha}^2 + v_{T\beta}^2$;
 $v_0^2 = v_{T\alpha}^2 v_{T\beta}^2 / v^2$; $v_{T\alpha}^2 = 2T/m_\alpha$; $M_\alpha = m_\alpha / (m_\alpha + m_\beta)$.

Приложение 2

При определении скорости скольжения бинарной смеси газа вдоль твердой поверхности приходим к следующим значениям для α , Δ , $\omega_{\alpha\beta}^{-1}$:

$$\alpha = - \left[\omega_\alpha^{-1} \frac{\rho_\beta}{\rho} - \omega_\beta^{-1} \frac{\rho_\alpha}{\rho} \right]; \quad \Delta = \frac{n D_{\alpha\beta}}{n_\alpha n_\beta T} \frac{w}{\lambda} (\omega_{\alpha\alpha}^{-1} \omega_{\beta\beta}^{-1} - \omega_{\alpha\beta}^{-1} \omega_{\beta\alpha}^{-1});$$

$$\omega_\alpha^{-1} = \sum_\beta \omega_{\alpha\beta}^{-1}, \quad \delta_1 = \left(1 + \exp \left\{ -\frac{2L}{\lambda} \right\} \right) / \left(1 - \exp \left\{ -\frac{2L}{\lambda} \right\} \right);$$

$$\omega_{\alpha\alpha}^{-1} = \frac{1}{\Delta_d} \left(\frac{\mu_\alpha^-}{\lambda_\alpha} c_{\alpha\alpha} d_{\alpha\alpha} - \frac{\mu_\beta^-}{\lambda_\beta} c_{\alpha\beta} d_{\beta\alpha} \right), \quad \omega_{\alpha\beta}^{-1} = \left(\frac{\mu_\beta^-}{\lambda_\beta} c_{\alpha\beta} d_{\alpha\alpha} - \frac{\mu_\alpha^-}{\lambda_\alpha} c_{\alpha\alpha} d_{\alpha\beta} \right);$$

$$\Delta_d = d_{\alpha\alpha} d_{\beta\beta} - d_{\alpha\beta} d_{\beta\alpha}.$$

При этом величины $c_{\alpha\beta}$ и $d_{\alpha\beta}$ выражаются через $g_{\alpha\beta}$, $h_{\alpha\beta}$, g_α , h_α посредством соотношений $c_{\alpha\alpha} = -(g_{\alpha\alpha} + g_\alpha) \delta_\alpha^+$, $c_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} \delta_\beta^+$;

$$d_{\alpha\alpha} = \delta_{\varepsilon\alpha}^{-1} \left\{ \left(1 + \frac{m_\alpha^0}{\gamma \pi} \delta_{\varepsilon\alpha} \right) - \delta_{\varepsilon\alpha} \delta_\alpha^- (h_{\alpha\alpha} - h_\alpha) \right\}, \quad d_{\alpha\beta} = -h_{\alpha\beta} \delta_\beta^-;$$

$$m_\alpha^0 = \frac{\mu_\alpha^- v_{T\alpha}}{\lambda^- n_\alpha T_\alpha}; \quad \delta_{\varepsilon\alpha} = \frac{\varepsilon_\alpha}{2 - \varepsilon_\alpha}; \quad \delta_\alpha^\pm = 1 \pm \exp \left\{ -\frac{2L}{\lambda_\alpha} \right\}.$$

Величины $D_{\alpha\beta}$, λ_α^- , μ_α^- приводятся в [13], ε_α — парциальный коэффициент аккомодации молекул.

Институт проблем механики
АН СССР,
Москва

Поступила в редакцию
14/IV 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. I. S. Maxwell. Collected works, N. Y., 1953.
2. E. P. Gross, E. A. Jackson, S. Ziering. Boundary value problems in kinetic theory of gases.— Annals of Physics, 1957, 1, № 2, 141—167.
3. Р. Я. Кучеров, Л. Э. Рикенглаз. Скольжение и температурный скачок на границе газовой смеси.— ЖЭТФ, 1959, 36, 1758—1761.
4. И. Н. Ивченко, Ю. И. Яламов. Тепловое скольжение неоднородно нагретого газа.— МЖГ, 1969, 59—66.
5. П. Е. Суэтин, Б. Т. Породинов. Кинетическая теория движения газа между двумя параллельными плоскостями при любых числах Кнудсена.— ЖТФ, 1967, XXXVII, 171.
6. C. Cercignani, P. Foresti, F. Sernagioto. Dependence of the slip coefficient on the form of the collision frequency.— Nuovo Gimento, 1968, 47, № 2.
7. С. П. Баканов, Б. В. Дерягин. К вопросу о состоянии газа, движущегося вблизи твердой поверхности.— Докл. АН СССР, 1961, 139, 71—74.
8. С. Л. Горелов, М. Н. Коган. Решение линейных задач динамики разреженного газа методом Монте-Карло.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 6.
9. М. М. Кузнецов. Об аналитическом решении уравнения Больцмана в кнудсовском слое.— ПМТФ, 1971, № 4.
10. I. Darrozes. Perfect gas slip along the walls in Guette flow.— La Recherche Aéropatinal, 1967, № 119, 1—23.
11. S. K. Loyalka. Velocity slip Coefficient and the Diffusion Slip Velocity for a Multicomponent Gas Mixture.— The Physics of Fluids, 14, 12, 2599—2604.
12. Б. М. Маркеев. К вопросу о вязком переносе импульса в газовой смеси.— ЖТФ, 1974, 44, 1554.
13. Б. М. Маркеев. О диффузионном скольжении бинарной газовой смеси.— ПММ, 1975, № 3.
14. Ю. Ю. Абрамов. Приближенный метод решения кинетического уравнения вблизи границы. I. Скольжение.— Теплофизика высоких температур, 1970, 8, 828.
15. Дж. Гиршфельдер, Ч. Кертисс, Р. Бенд. Молекулярная теория газов и жидкостей. М., ИЛ, 1961.
16. Б. М. Маркеев. Об одном методе исследования скольжения газа вдоль твердой поверхности.— ЖТФ, 1974, 44, 1098—1100.
17. В. П. Шидловский. Введение в динамику разреженного газа. М., «Наука», 1965.
18. М. Н. Коган. Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.
19. Р. Арнс. Анализ процессов в химических реакторах. Л., «Химия», 1967.
20. В. С. Владимиров. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1971.

В. Г. ДУЛОВ, В. А. ЩЕПАНОВСКИЙ

ТОРМОЖЕНИЕ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА
ЗА КРИВОЛИНЕЙНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ
С ПРЕДШЕСТВУЮЩИМ ИЗОЭНТРОПИЧЕСКИМ СЖАТИЕМ

В работе рассмотрены пространственные сверхзвуковые течения идеальной среды в окрестности тел, построенных вырезкой по линиям тока из осесимметричного течения. Неравномерное течение состоит из двух областей: зоны изэнтропического сжатия и зоны завихренного течения. Для описания течения в завихренной зоне используется точное решение с переменной энтропией [1]. В области непрерывного течения решение строится приближенно путем разложения решения в ряд по малому параметру. Исследовано влияние формы вырезки и величины завихренности течения на поджатие струи и коэффициент потерь полного давления.

1. В [1] рассмотрено решение осесимметричных уравнений идеального газа с переменной энтропией. Это течение описывается обыкновенным дифференциальным уравнением для характеристической функции $z(h)$:

$$z'' = -z' \frac{az'^2 + h \left[\frac{2\alpha}{\kappa} + 4(\alpha - 1) \right] zz' - \frac{2}{\kappa - 1} z^2 + \frac{2}{\kappa - 1} h(1 - h)}{bz'^2 + \frac{4\alpha(\kappa - 1)}{\kappa} h^2 zz' - hz^2 + h(1 - h)}, \quad (1.1)$$

$$a = h(1 - h) \frac{4}{\kappa^2} [\kappa\alpha(\alpha - 1) - \kappa^2(1 + \alpha)^2] + \frac{4(\kappa - 1)}{\kappa^2} \left[\alpha\kappa - \alpha^2(\kappa - 1) - \frac{3}{4} \alpha^2 \right] h,$$

$$b = \frac{\kappa - 1}{\kappa} h^2 [h(\kappa\alpha^2 - 4\kappa\alpha + 3\alpha^2) - 4\kappa\alpha(\alpha - 1)],$$

а распределение полных давлений по линиям тока имеет вид $p_0 = C(\psi_0 - \psi)^\alpha$ (α, C, ψ_0 — произвольные постоянные). Здесь и далее все величины приведены к безразмерному виду: энтальпия h отнесена к полному теплосодержанию h_m , величины с размерностью скорости к максимальной скорости стационарного истечения в вакуум $\sqrt{2h_m}$, давление к полному давлению p_0 . При таких условиях функция тока ψ должна быть отнесена к величине $p_0 l / \sqrt{2h_m}$, где l — характерный линейный размер.

Переход на плоскость годографа (u, v) и физическую плоскость (x, y) течения (1.1) дается соотношениями

$$u = z - \alpha \frac{\kappa - 1}{\kappa} h z', \quad v = \sqrt{1 - h - \left(z - \alpha \frac{\kappa - 1}{\kappa} h z' \right)^2}, \quad (1.2)$$

$$x = \sqrt{\frac{\psi_0 - \psi}{p}} \int_{h_0}^h F dh, \quad y = \sqrt{2 \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\psi_0 - \psi}{p} h z'}, \quad (1.3)$$

$$F = \frac{\left(\frac{\kappa - 1}{\kappa} h z' - \frac{z''}{\kappa} \right) u - \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{2} + u \left(z' - \alpha \frac{\kappa - 1}{\kappa} h z'' - \alpha \frac{\kappa - 1}{\kappa} z' \right) \right]}{\sqrt{2 \frac{\kappa - 1}{\kappa} h z' v}}.$$

Примыкание течения (1.1) к равномерному потоку через криволинейный скачок в общем случае невозможно из-за недостатка произвольных параметров. Рассмотрим возможность сопряжения (1.1) с равномерным потоком через промежуточную область неравномерного течения Ω_1 (рис. 1). В точной постановке эта задача может быть решена только численно. Для построения аналитического приближенного решения предположим, что головной скачок AC (см. рис. 1) слабый и течение в Ω_1 изэнтропическое. Течение в Ω_2 завихренное, описывается уравнением (1.1) и сопрягается с Ω_1 через криволинейную ударную волну AB , распространяющуюся в неравномерном потоке.

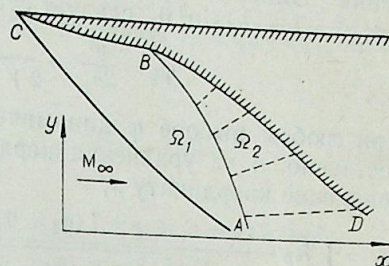


Рис. 1.

В переменных h, ψ волна AB (см. рис. 1) может быть представлена в виде $h = H(\psi)$. Из (1.3) в физической плоскости имеем

$$x = \sqrt{\frac{(\psi_0 - \psi)^{1-\alpha}}{C} H^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} I(H) = x(\psi)}, \quad I = \int F dh, \quad (1.4)$$

$$y = \sqrt{\frac{2(\kappa - 1)}{\kappa} \frac{(\psi_0 - \psi)^{1-\alpha}}{C} H^{-\frac{\kappa}{\kappa-1}} = y(\psi)}.$$

Обозначим через ξ квадрат модуля скорости в Ω_1 ; $\beta, \theta_1, \theta_2$ — углы наклона ударной волны AB и векторов скорости Ω_1, Ω_2 к оси симметрии. Тогда законы сохранения импульса и энергии на волне (1.4) с учетом изэнтропичности течения в Ω_1 могут быть записаны в виде

$$\xi = (1 - H) \left[\frac{\cos(\beta - \theta_2)}{\cos(\beta - \theta_1)} \right]^2,$$

$$\operatorname{tg}(\beta - \theta_1) = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{H/(1 - H) + \sin^2(\beta - \theta_2)}{\sin(\beta - \theta_2) \cos(\beta - \theta_2)}, \quad (1.5)$$

$$(1 - \xi)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = C (\psi_0 - \psi)^\alpha H^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \left[1 - \frac{2\kappa}{\kappa - 1} \frac{1 - H}{H} \operatorname{tg}(\beta - \theta_2) \sin(\theta_2 - \theta_1) \right].$$

Закон сохранения массы удовлетворен, так как координата ψ — функция тока — непрерывна при переходе через скачок. Соотношение $\operatorname{tg} \beta = y'_\psi / x'_\psi$ дает уравнение для волны

$$\frac{dH}{d\psi} = -\frac{1 - \alpha}{\psi_0 - \psi} \frac{1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1} \frac{1}{z'H}} \operatorname{tg} \beta}{\sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1} \frac{1}{z'H}} \operatorname{tg} \beta \left(F - \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{1}{2H} \right) - \frac{z''}{z'} + \frac{1}{\kappa - 1} \frac{1}{H}}. \quad (1.6)$$

Совокупность уравнений (1.1), (1.5), (1.6) и соотношение

$$\cos \theta_2 = \frac{z - \alpha \frac{\kappa - 1}{\kappa} z'H}{\sqrt{1 - H}}, \quad (1.7)$$

полученное из (1.2), представляют замкнутую систему уравнений для $z, H, \beta, \theta_1, \theta_2, \xi$. Решение этой системы определяет течение в Ω_2 , положение скачка (1.4) и распределение газодинамических параметров на передней стороне волны.

2. Для построения приближенного решения в Ω_1 в уравнениях движения газа осуществим переход к переменным годографа. Для задач с осевой симметрией такой переход обычно бесполезен при исследовании точных постановок и методов, так как уравнения остаются нелинейными, однако может оказаться весьма удобным для построения и анализа приближенных решений.

В предположении изоэнтропичности течения, т. е. $h=h(p)$, из уравнения Эйлера, преобразованного к переменным $\xi=u^2+v^2=1-h$, $\eta=v^2=(1-h)\sin^2\theta$, следует существование функции $\varphi(\xi, \eta)$ такой, что

$$\varphi_{\xi} = \frac{y^2}{2h_p} - \frac{\psi}{2\sqrt{\xi-\eta}}, \quad \varphi_{\eta} = \frac{\psi}{2\sqrt{\xi-\eta}}. \quad (2.1)$$

При любом выборе φ динамические уравнения удовлетворяются тождественно, а из уравнения неразрывности следуют соотношения, определяющие координату x ,

$$x_{\xi} = \sqrt{h_p} \frac{2(\xi-\eta)[\varphi_{\xi\xi} + i(\varphi_{\xi} + \varphi_{\eta})] - \varphi_{\eta}}{\sqrt{8\eta(\xi-\eta)(\varphi_{\xi} + \varphi_{\eta})}}, \quad x_{\eta} = \sqrt{h_p} \frac{\varphi_{\eta} + 2(\xi-\eta)\varphi_{\xi\eta}}{\sqrt{8\eta(\xi-\eta)(\varphi_{\xi} + \varphi_{\eta})}},$$

$$j = -\frac{h_{pp}}{h_p^2}. \quad (2.2)$$

Исключая из (2.2) x перекрестным дифференцированием, получаем уравнение, содержащее лишь одну функцию φ ,

$$2(\xi-\eta)\eta(\varphi_{\xi\xi}^2 - \varphi_{\xi\xi}\varphi_{\eta\eta}) - [2\xi(\xi-\eta)\varphi_{\eta} + 2\xi\varphi_{\xi}] \varphi_{\xi\xi} - 2\eta(2\varphi_{\xi} + 2\varphi_{\eta}) \varphi_{\xi\eta} - \eta\{2[1-j(\xi-\eta)](\varphi_{\xi} + \varphi_{\eta})\} \varphi_{\eta\eta} - 2\xi j(\varphi_{\xi} + \varphi_{\eta})^2 + (1-\eta j)\varphi_{\eta}(\varphi_{\xi} + \varphi_{\eta}) = 0. \quad (2.3)$$

Это уравнение представляет собой уравнение типа Монжа — Ампера с квазилинейной частью. Все слагаемые в уравнении содержат производные от искомой функции в виде произведения двух частных производных, причем коэффициенты при произведениях суть полиномы по переменной η степени не выше второй. Указанные свойства уравнения (2.3) позволяют искать решение в виде ряда по степеням η . Введем параметр $\varepsilon = \max_{\Omega_1} \eta$ и пусть

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \varphi_k(\xi, \bar{\eta}), \quad \eta = \varepsilon \bar{\eta}. \quad (2.4)$$

Подстановка (2.4) в (2.3) дает для φ_k уравнение

$$(2\xi j - 1) \varphi_{0,\eta} \left(\varphi_{k,\eta\eta} - \frac{1}{\eta} \varphi_{k,\eta} \right) = F_{k-1}. \quad (2.5)$$

Функция F_n выражается через φ_k и их производные с $k \leq n$

$$F_n = (2\xi j - 1) (\varphi_{s,\eta} - \eta \varphi_{s,\eta\eta}) \varphi_{n-s,\eta} - 2\xi \eta \varphi_{s,\xi} \varphi_{n-s,\xi\eta} + 2\eta [(1 - 2\xi j) \varphi_{s,\xi} + \eta j \varphi_{s,\eta} + 2\xi \eta \varphi_{s,\xi\xi}] \varphi_{n-s,\eta\eta} - [2\xi \varphi_{s,\xi\xi} - 2\eta \varphi_{s,\xi\eta} - \eta j \varphi_{s,\eta} - (1 - 4\xi j) \varphi_{s,\xi}] \varphi_{n-s,\eta} + 2\eta \varphi_{s,\eta\xi} \varphi_{n-s,\eta\xi} + (2\xi \varphi_{s,\xi} + \eta \varphi_{s,\eta} - 2\eta^2 \varphi_{s,\eta\eta}) \varphi_{n-s,\xi\xi} + (4\varphi_{s,\xi\eta} + 2\xi j \varphi_{s,\xi} - \eta j \varphi_{s,\eta}) \varphi_{n-s,\xi}.$$

Здесь по повторяющемуся индексу s предполагается суммирование от 0 до n . Если $2\xi j - 1 \neq 0$ (т. е. число Маха $M \neq 1$), формулы (2.5) представляют рекуррентные соотношения для φ_k . Очевидно, $F_{-1} = 0$, тогда из (2.5) $\varphi_0 = A^2 \frac{\eta^2}{2} + B$, где A, B — произвольные функции ξ . Течение, соответствующее этому решению, согласно (2.1), описывается формулами

$$x = \int_{\xi_0}^{\xi} \sqrt{\frac{h_p}{8\xi}} (2\xi j - 1) d\xi, \quad y^2 = 2h_p A^2 \eta,$$

которые определяют поток в канале с переменной площадью сечения в одномерном приближении (изобары $\xi = \text{const}$ суть прямые $x = \text{const}$).
Далее

$$F_0 = \frac{1}{2 - \xi j} \left\{ \left[\frac{\xi(A^2 - 1)}{A} \left(A'' + \frac{A'^2}{A} \right) + \frac{3 + 2\xi}{2} AA' - 5jA^2 \right] \eta - \frac{1 + 2\xi j}{\eta} B' \right\},$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{1 - 2\xi j} \left\{ [4\xi(AA'' - A'^2) + (5 + 2\xi j)AA' + 3jA^2] \frac{\eta^2}{3} + [(1 + 2\xi j)B' + 4B''] \eta \right\}.$$

Течение, соответствующее приближенному решению $\varphi = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1$, описывается соотношениями

$$x = \sqrt{\frac{h_p}{8\xi}} (A + 4\xi A') \eta + \int_{\xi_0}^{\xi} \sqrt{\frac{h_p}{8\xi}} (2\xi j - 1) d\xi, \quad (2.6)$$

$$y^2 = 2h_p A^2 \eta + \frac{2h_p}{2\xi j - 1} \left\{ [4\xi(AA'' - A'^2) + 4(1 + \xi j)AA' + 3jA^2] \eta^2 + 2(B' + 2\xi B'') \right\}.$$

Здесь ε положено равным 1, что фактически означает возвращение к недеформированной переменной η . Изобары, согласно (2.6), — кривые второго порядка.

Для ориентировочной оценки точности приближенного процесса сопоставим его с некоторым точным решением уравнений движения газа. Поскольку основой приближения является разложение по углу расхождения потока, то естественно для сравнения взять такое решение, при котором угол θ остается неизменным на траекториях, т. е. течение от газового источника, которое, кстати, является простейшим по структуре.

На рис. 2 представлены графики относительного отклонения δ (%) приближенных решений от точного в зависимости от угла конуса θ для двух чисел Маха на входе, где сплошные линии ($x = \text{const}$) — одномерное приближение, штриховые — приближение (2.6). Из рис. 2 следует, что наиболее точно описывается околоосевая область, учет второго приближения увеличивает точность примерно вдвое, и с увеличением числа Маха на входе, следовательно, и во всем потоке, ошибка уменьшается.

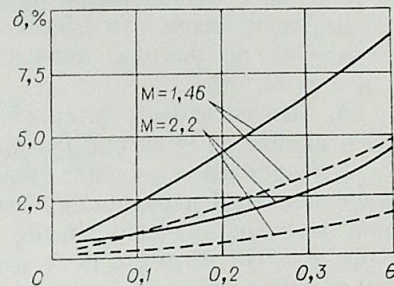


Рис. 2.

3. Для построения течения в Ω_1 используем приближенное решение (2.6). Волна AC (рис. 1) предполагается слабой, и углы разворота на ней малы, а именно в этом случае справедливо разложение (2.4). В переменных ξ, η слабый скачок AC описывается уравнением

$$\eta_{AC} = \frac{\xi}{M_{\infty}^2 - 1} \left(\sqrt{\frac{\xi}{\xi_{\infty}} - 1} \right)^2. \quad (3.1)$$

Из законов сохранения импульса и массы и сопряжения течения на AB получаем

$$A'' = \frac{2\xi j - 1}{4\xi \tau} \left[\frac{y_{AB}^2}{2h_p} - \frac{\lambda v}{2(\lambda_{\infty} - \lambda)} - A^2(\eta_{AB} - \eta_{AC}) \right] - \frac{A'^2}{A} - \frac{1 - \xi j}{\xi} A' + \frac{3j}{4\xi} A, \quad (3.2)$$

$$B'' = \frac{2\xi j - 1}{4\xi} \left[\frac{\eta_{AB}^2 + \tau y_{AB}^2}{\tau} - \frac{2\eta_{AB}^2 + \eta_{AC}^2}{\eta_{AB} - \eta_{AC}} A - \frac{2}{2\xi j - 1} B' - \frac{\lambda v}{2\tau(\lambda_\infty - \lambda)} \right],$$

$$y_{AC}^2 = \frac{v\sqrt{\xi}}{\lambda_\infty - \lambda}, \quad \left(\lambda = \frac{v\sqrt{\xi}}{h_p}, \quad \tau = \eta_{AB}^2 - \eta_{AC}^2, \quad v = 2B' - \frac{(\xi A^2)'}{\xi} \eta_{AC}^2 \right),$$

где y_{AB} , η_{AB} — функции ξ , определяемые системой (1.1), (1.5) — (1.7); индекс ∞ относится к соответствующим параметрам набегающего невозмущенного потока.

Общая система уравнений (1.1), (1.5) — (1.7), (3.1), (3.2) определяет течение в целом, т. е. дает решение задачи сопряжения завихренного потока (1.1) с равномерным течением.

Ударная волна AB достигает оси, если в (1.3) $y=0$, т. е. либо $\psi=\psi_0$, (а), либо $z'=0$ (б). В случае а на оси имеем для полного давления $p_0=0$, что невозможно. Рассмотрим второй вариант $z'=0$. Такая точка для (1.1) является особой, через которую проходит однопараметрическое семейство интегральных кривых $z = \sqrt{1-h_0+k(h_0-h)^2}$ (h_0 — значение энтальпии на оси, k — параметр). При этом на оси, согласно (1.2), $v=0$. Следовательно, ударная волна достигает оси и подходит к ней под прямым углом.

Расчет ведется от оси. Задавая M_∞ и α , находим параметр k , фиксирующий интегральную кривую в семействе решений, проходящих через узловую точку. Далее, отступая по аналитическому решению от особой точки, решаем общую систему обыкновенных дифференциальных и трансцендентных уравнений (1.1), (1.5) — (1.7), (3.1) — (3.2). На каждом шаге интегрирования дифференциальных уравнений система трансцендентных уравнений (1.5) решается методом итерации [2]. При этом за начальное приближение итерационного процесса берется решение с предыдущего шага, что обеспечивает быструю сходимость. Расчет продолжается до $y=y_{\max}$, значение которого соответствует линии тока $\psi_{\max} = \psi_0 - C^{-1/\alpha}$.

4. Интенсивность ударной волны AB уменьшается с увеличением y_{AB} и падает до нуля при $y=y_{\max}$. Изменение интенсивности происходит из-за искривления твердой стенки и неравномерности потока в Ω_1 . При значениях $\alpha \ll 1$ неравномерность потока в Ω_1 незначительна (при $\alpha=0,1$ максимальное значение $\partial\theta_1/\partial\psi$ на внешней стороне скачка равно 0,06, а при $\alpha=0,01$ $\partial\theta_1/\partial\psi=10^{-4}$) и искривление скачка происходит в основном за счет искривления стенки. В этом случае головная волна AC — почти характеристика и зона Ω_1 имеет значительные размеры. С увеличением α растет неравномерность течения в Ω_1 , скачок AC уже отличается от характеристики, зона Ω_1 уменьшается. Завихренность в Ω_2 здесь объясняется не только искривлением стенки, но и неравномерностью течения перед скачком. Отметим, что при этом уменьшается точность, с которой выполнены предположения, лежащие в основе решения в Ω_1 .

Полученное решение используем для описания течения в воздухозаборниках, построенных вырезкой по линиям тока из осесимметричного течения [3, 4]. Рассмотрим секторную вырезку с углом 2φ (рис. 3, а). Суммарный коэффициент потерь полного давления определяется по формуле

$$\mu_\Sigma = \iint p_0 dS, \quad (4.1)$$

где S — площадь захватываемой струн газа. Средний коэффициент восстановления полного давления для этой формы диффузора равен

$$\mu = \frac{\mu_\Sigma}{S} = (1 - \alpha) C \left(\frac{S}{\varphi} \right)^{\alpha/(1-\alpha)}. \quad (4.2)$$

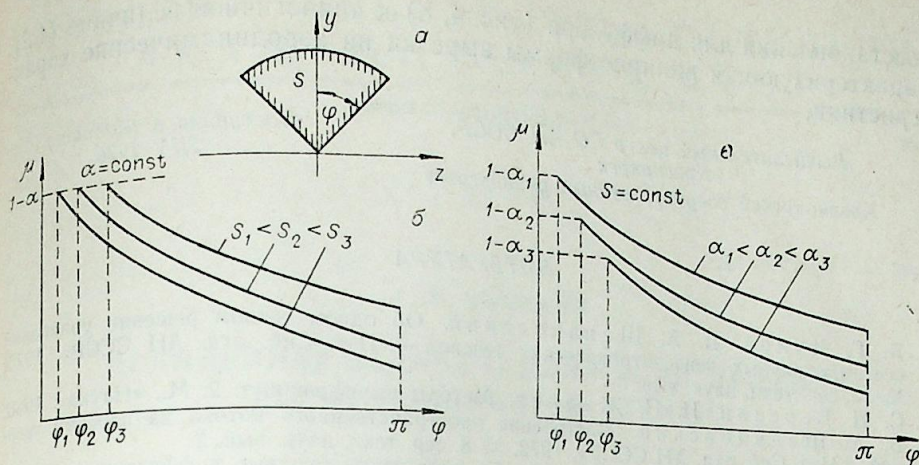


Рис. 3.

Зависимость μ от значения угла сектора φ при различных S приведена на рис. 3, б, а зависимость μ от величины показателя α — на рис. 3, в. Влияние α на коэффициент восстановления увеличивается с ростом φ . Значения φ_i на рис. 4, а, б определены соотношением $\varphi_i = S_i/y_{\max}$, которое показывает, что $y_i \leq y_{\max}$.

Для оценки величины поджатия входящей в воздухозаборник струи газа определим давление на AD (см. рис. 1). На AD $h = \text{const} = h_1$, тогда

$$\frac{p}{p_\infty} = C \left(\frac{h_1}{h_\infty} \right)^{\alpha/(\alpha-1)} (\psi_0 - \psi)^\alpha,$$

и для величины суммарного сжатия получим

$$\chi_\Sigma = C_1 \mu_\Sigma, \quad C_1 = \left(\frac{h_1}{h_\infty} \right)^{\alpha/(\alpha-1)},$$

где μ_Σ определено в (4.1).

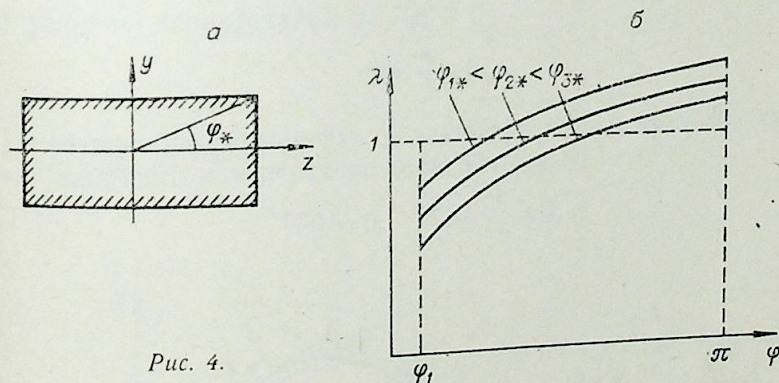


Рис. 4.

Аналогично могут быть определены характеристики входных диффузоров с другими формами вырезок. На рис. 4, а показан диффузор с прямоугольным входом, который можно характеризовать двумя параметрами: площадью захватываемой струи S и углом φ , показанным на рис. 4, а. На рис. 4, б показана зависимость отношения коэффициента

восстановления для диффузора (рис. 4, а) к аналогичной величине (4.2), характеризующая влияние формы вырезки на аэродинамические характеристики.

Вычислительный центр СО АН СССР,
Красноярск
Красноярский государственный университет

Поступила в редакцию
2/IV 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Дулов, В. А. Щепановский. Об одном точном решении уравнений осесимметричных неизэнтропических течений.— «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1976, № 13, сер. техн. наук, вып. 3.
2. С. И. Березин, Н. П. Жидков. Методы вычисления, т. 2. М., «Наука», 1966.
3. В. А. Щепановский. Построение пространственного потока из плоских течений.— «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1972, № 8, сер. техн. наук, вып. 2.
4. Б. И. Гутов, В. В. Затолока. Конвергентные входные диффузоры с начальным скачком уплотнения и дополнительным внешним сжатием.— В кн.: Аэрофизические исследования, вып. 2. Новосибирск, 1973.

Г. М. ШУМСКИЙ

НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ПРОФИЛЯ ВБЛИЗИ ВОЛНИСТОЙ СТЕНКИ

В последнее время появился ряд работ [1—5], посвященных развитию численных методов решения задач нелинейной теории крыла. В этих методах крыло моделируется системой особенностей. Применение последовательной линеаризации задачи позволяет строить решение шагами по времени. Аналогичным образом в данной работе строится решение задачи о неустановившемся движении тонкого профиля вблизи волнистой стенки, контур которой определяется любой дифференцируемой функцией. В качестве примера приводятся результаты расчетов аэродинамических характеристик пластинки.

1. Рассмотрим плоское течение идеальной несжимаемой жидкости около тонкого, криволинейного профиля, движущегося вблизи волнистой стенки L_3 , заданной в неподвижной декартовой системе координат Oxy (рис. 1). Заменяем профиль дужкой L_1 , а вихревой след — контуром L_2 .

Пусть течение потенциально вне $L(t) = L_1(t) + L_2(t) + L_3(t)$. Тогда потенциал скорости $\varphi(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0 \quad (1.1)$$

вне L и следующим граничным условиям:

- 1) условию непротекания на L_1

$$(\nabla\varphi - \vec{V}) \cdot \vec{n} = 0; \quad (1.2)$$

- 2) условию непротекания на L_3

$$\nabla\varphi \cdot \vec{n} = 0; \quad (1.3)$$

- 3) условию непрерывности давления и нормальной составляющей скорости жидкости при переходе через контур L_2

$$[P] = 0, \quad [\nabla\varphi \cdot \vec{n}] = 0; \quad (1.4)$$

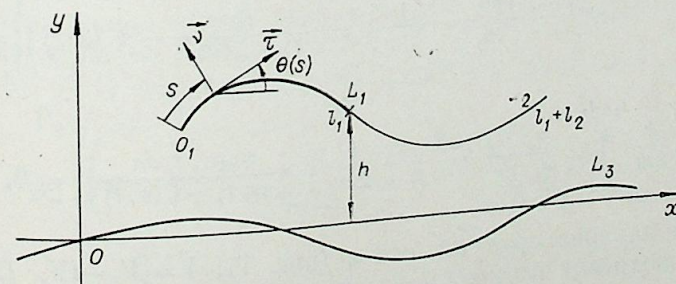


Рис. 1.

4) условию Жуковского на задней кромке профиля
 $[P] \rightarrow 0$ при $(x, y) \rightarrow (X, Y)$, $(x, y) \in L_1$; (1.5)

5) условию затухания возмущенных скоростей жидкости в бесконечно удаленной точке

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \nabla \varphi = 0, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1.6)$$

Здесь \vec{V} — скорость движения контура L_1 , \vec{v} — орт нормали к контуру L ; (X, Y) — координаты задней кромки контура L_1 .
 В начальный момент $t=0$

$$L(0) = L_1(0) + L_3(0), \quad \vec{V} = \vec{V}_0, \quad (1.7)$$

где \vec{V}_0 — постоянная скорость движения профиля.

2. Заменим контур L вихревым слоем. По определению

$$\gamma_1(s, t) = v_{\tau-} - v_{\tau+}, \quad s \in L_1 + L_2,$$

$$\gamma_2(s, t) = v_{\tau-} - v_{\tau+}, \quad s \in L_3,$$

где $v_{\tau+}$, $v_{\tau-}$ — касательные составляющие скорости жидкости в рассматриваемой точке контура L при подходе к нему сверху и снизу соответственно.

Введем комплексную скорость $\bar{v}(z, t) = v_x - i v_y$, аналитическую вне L . Предположим, что функции γ_1 при $s > 0$ и γ_2 удовлетворяют условию Гельдера, а контуры L_1 , L_2 , L_3 гладкие в понимании Ляпунова. Тогда комплексную скорость v можно представить в виде [6]

$$\bar{v}(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{l_1+l_2} \frac{\gamma_1(\sigma, t) d\sigma}{z - \zeta(\sigma, t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_2(\sigma, t) d\sigma}{z - \zeta(\sigma, t)}, \quad (2.1)$$

где (l_1+l_2) — длина контура L_1+L_2 .

Обозначим $\bar{v}_a(s, t) = (\bar{v}_+ + \bar{v}_-)/2$, где \bar{v}_+ , \bar{v}_- — предельные значения \bar{v} при подходе к контуру L сверху и снизу соответственно.

Из формул Сохотского — Племели следует, что

$$\bar{v}_a(s, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{l_1+l_2} \frac{\gamma_1(\sigma, t) d\sigma}{\zeta(s, t) - \zeta(\sigma, t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_2(\sigma, t) d\sigma}{\zeta(s, t) - \zeta(\sigma, t)}. \quad (2.2)$$

Поле скоростей, определяемое (2.1), удовлетворяет уравнению Лапласа (1.1), условию непрерывности нормальной составляющей скорости при переходе через L_2 и условию (1.6).

Условия непротекания (1.2), (1.3) можно записать в виде двух интегральных уравнений для γ_1 и γ_2

$$\text{Im} \left\{ e^{i\theta(s, t)} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_0^{l_1+l_2} \frac{\gamma_1(\sigma, t) d\sigma}{\zeta(s, t) - \zeta(\sigma, t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_2(\sigma, t) d\sigma}{\zeta(s, t) - \zeta(\sigma, t)} - \bar{V}(s, t) \right) \right\} = 0, \quad s \in L_1, \quad (2.3)$$

$$\text{Im} \left\{ e^{i\theta(s, t)} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_0^{l_1+l_2} \frac{\gamma_1(\sigma, t) d\sigma}{\zeta(s, t) - \zeta(\sigma, t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_2(\sigma, t) d\sigma}{\zeta(s, t) - \zeta(\sigma, t)} \right) \right\} = 0, \quad s \in L_3,$$

где θ — угол наклона орта $\vec{\tau}$ к оси x (рис. 1); $\bar{V} = V_x - i V_y$. Будем рассматривать вихревой слой на L_2 как систему свободных вихрей. Тогда выполняются условия (1.4).

Интенсивность элемента вихревого слоя, сходящего в каждый момент времени с задней кромки профиля, определяется равенством

$$\gamma_1(l_1, t) = -\frac{1}{U} \frac{d\Gamma}{dt}, \quad (2.4)$$

где

$$\Gamma = \int_0^{l_1} \gamma_1(\sigma, t) d\sigma, \quad U = v_{ax}(l_1, t) - V_{\tau}(l_1, t). \quad (2.5)$$

Таким образом, решение задачи (1.1—1.7) сводится к определению функции распределения интенсивности вихревого слоя на L . При этом неизвестный контур L_2 входит в уравнения (2.3), (2.4) нелинейным образом. Следуя работам [2, 3], решение строим последовательной линеаризацией задачи для малых промежутков времени.

3. В каждый расчетный момент времени t бесконечный контур стенки L_3 моделируем его конечным отрезком $L'_3(t)$, расположенным в окрестности контура $L_1(t)$.

Заменим вихревой слой на контурах L_1 , L_2 , L_3 системой дискретных вихрей, а условия непротекания (1.2), (1.3) выполним в контрольных точках. Выберем по некоторой заданной схеме координаты дискретных вихрей $z_q \in L_1$, $z_m \in L'_3$ и контрольных точек $Z_p \in L_1$, $Z_n \in L'_3$, где $q, p = 1, \dots, N_1$; $m, n = 1, \dots, N_2$.

Тогда в момент t_0 из (1.7), (2.3) получим систему линейных алгебраических уравнений относительно интенсивностей дискретных вихрей Γ_q, Γ_m на контурах L_1, L'_3 соответственно

$$\text{Im} \left\{ e^{i\theta(s_p, t_0)} \left(\frac{1}{2\pi i} \sum_{q=1}^{N_1} \frac{\Gamma_q}{Z_p - z_q} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=1}^{N_2} \frac{\Gamma_m}{Z_p - z_m} - \bar{V}(s_p, t_0) \right) \right\} = 0, \quad s_p \in L_1,$$

$$\text{Im} \left\{ e^{i\theta(s_n, t_0)} \left(\frac{1}{2\pi i} \sum_{q=1}^{N_1} \frac{\Gamma_q}{Z_n - z_q} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=1}^{N_2} \frac{\Gamma_m}{Z_n - z_m} \right) \right\} = 0, \quad s_n \in L'_3,$$

$$p = 1, \dots, N_1; \quad n = 1, \dots, N_2.$$

Предположим, что известно решение задачи в момент t_r , $r \geq 0$. Перейдем к построению решения в момент t_{r+1} . Выберем шаг по времени

$$\Delta t_{r+1} = t_{r+1} - t_r = \varepsilon / U(t_r), \quad \varepsilon = l_1 / N_1,$$

где $U(t_r)$ вычисляется по формуле (2.5).

Координаты r свободных вихрей на L_2 , образовавшихся до момента t_{r+1} , определяются формулой

$$\zeta_j(t_{r+1}) = \zeta_j(t_r) + v_a(\zeta_j, t_r) \cdot \Delta t_{r+1}, \quad j = 1, \dots, r.$$

Свободный вихрь, сошедший с профиля за время Δt_{r+1} , поместим в точке

$$\zeta_{r+1}(t_{r+1}) = Z(t_{r+1}) + \varkappa e^{i\theta(l_1, t_{r+1})}.$$

Здесь Z — комплексная координата задней кромки контура L ; \varkappa — постоянная, величина которой определяется выбором схемы расположения вихрей и контрольных точек.

Из (2.3), (2.4) получим систему уравнений для определения интенсивностей $\Gamma_q(t_{r+1})$, $\Gamma_m(t_{r+1})$ и $\gamma_1^{(r+1)}$

$$\text{Im} \left\{ e^{i\theta(s_p, t_{r+1})} \left(\frac{1}{2\pi i} \sum_{q=1}^{N_1} \frac{\Gamma_q}{Z_p - z_q} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=1}^{N_2} \frac{\Gamma_m}{Z_p - z_m} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{r+1} \frac{\gamma_1^{(j)}}{Z_p - \zeta_j} - \bar{V}(s_p, t_{r+1}) \right) \right\} = 0, \quad s_p \in L_1,$$

$$\operatorname{Im} \left[e^{i\theta(s_n, t_r+1)} \left(\frac{1}{2\pi i} \sum_{q=1}^{N_1} \frac{\Gamma_q}{z_n - z_q} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=1}^{N_2} \frac{\Gamma_m}{z_n - z_m} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{r+1} \frac{\gamma_1^{(j)}}{z_n - \zeta_j} \right) \right] = 0, \quad s_n \in L'_3,$$

$$\sum_{q=1}^{N_1} \Gamma_q + \gamma_1^{(r+1)} = \sum_{q=1}^{N_1} \Gamma_q(t_r), \quad p = 1, \dots, N_1; \quad n = 1, \dots, N_2.$$

Аэродинамические силы и продольный момент вычисляются с помощью интеграла Коши — Лагранжа [4].

4. В качестве примера рассмотрено движение пластинки с постоянной скоростью \vec{V}_0 вблизи волнистой стенки, контур которой задан функцией

$$y = \lambda \sin kx, \quad k = 2\pi l_1 / l,$$

где λ — амплитуда; l — длина волны контура стенки. Параметр k определяет здесь число Струхала. Дискретные вихри и контрольные точки на L_1 и L'_3 располагались по известной схеме С. М. Белоцерковского [7], при этом $\kappa = 1/4$.

Пусть x_1, x_2 — координаты левого и правого конца контура L'_3 соответственно. Величина $(x_1 - x_2)/l_1$ принималась равной 2π . Вначале были приведены расчеты аэродинамических характеристик пластинки без учета влияния вихревого следа. На рис. 2 и 3 представлено сравнение полученных коэффициентов нормальной силы c_n и момента c_m пластинки, движущейся вблизи плоской стенки ($\lambda = 0$), с данными работы [8]. Здесь $c_n = 2P_n / \rho V_0^2 l_1$; $c_m = 2M / \rho V_0^2 l_1^2$; $\bar{h} = h/l_1$, где P_n — нормальная сила; M — момент относительно передней кромки пластинки; ρ — плотность жидкости. На углах атаки $\alpha \geq 10^\circ$ наблюдается некоторое расхождение результатов, которое вызвано, по-видимому, тем, что бесконечный контур стенки моделировался конечным отрезком.

Значения коэффициента c_n пластинки при ее движении вблизи волнистой стенки удовлетворительно согласуются с данными работы [9] (рис. 4).

Зависимости $c_n(x)$, $c_m(x)$ и координаты центра давления $\bar{x}_0(x) = c_m(x)/c_n(x)$, определенные с учетом влияния вихревого следа за пластинкой, движущейся вблизи волнистой стенки, представлены на рис. 5. Пунктирной линией отмечена зависимость $c_n(x)$, полученная без учета этого влияния. Здесь же показана расчетная форма вихревого следа за пластинкой.

Обозначим

$$\Delta c_n = c_{n \max} - c_{n \min},$$

где $c_{n \max}$ — максимальное, а $c_{n \min}$ — минимальное значение $c_n(x)$ при фиксированном k . На рис. 6 даны значения Δc_n в зависимости от k . Видно, что функция $\Delta c_n(k)$, определенная с учетом влияния вихревого следа, имеет на рассмотренном интервале $0 \leq k \leq 8$ максимум и минимум в отличие от решения задачи в квазистационарной постановке, когда $\Delta c_n(k)$ монотонна на этом интервале. Максимум функции $\Delta c_n(k)$ достигается при $k \approx 6$ ($l_1 \approx l$), а минимум — при $k \approx 2$ ($l_1 \approx l/3$).

Расчеты показали, что предложенный метод позволяет эффективно решать задачу определения аэродинамических характеристик тонкого профиля, движущегося вблизи волнистой стенки, контур которой задан любой дифференцируемой функцией.

Автор выражает глубокую благодарность Д. Н. Горелову за постановку задачи и обсуждение результатов.

Поступила в редакцию
9/IV 1976

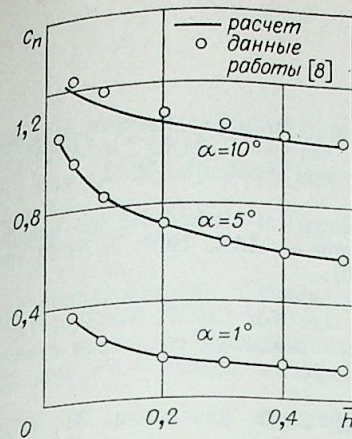


Рис. 2.

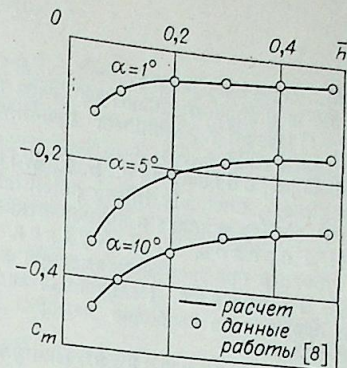


Рис. 3.

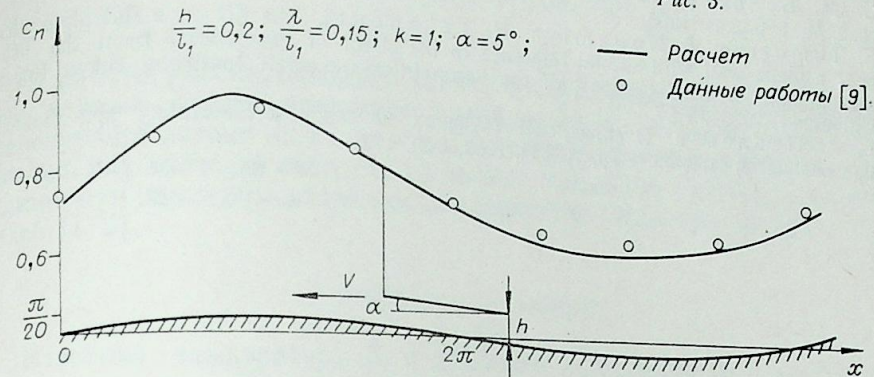


Рис. 4.

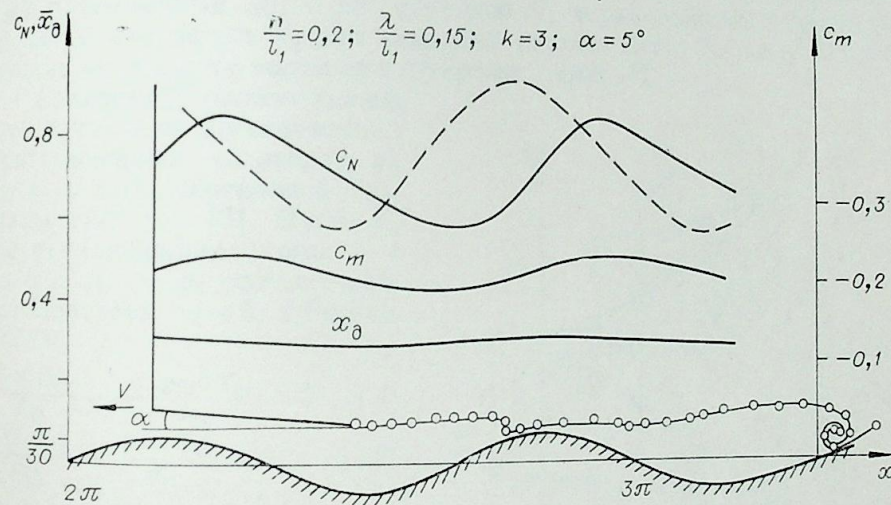


Рис. 5.

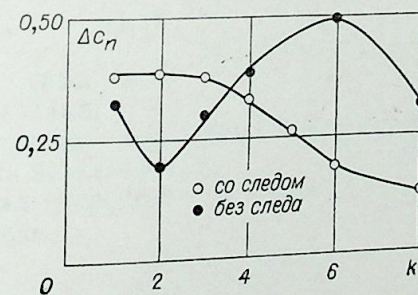


Рис. 6.

1. С. М. Белоцерковский. Расчет обтекания крыльев произвольной формы в плане в широком диапазоне углов атаки.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 4.
2. I. P. Giesing. Nonlinear two-dimensional unsteady potential flow with lift.— J. Aircraft, 1968, 5, No. 2.
3. R. H. Djojodihardjo, S. E. Widnall. A numerical method for the calculation of nonlinear, unsteady lifting potential flow problems.— AIAA, 1969, 7, № 10 (Русск. пер.: Ракетная техника и космонавтика, 1969, № 10).
4. Д. Н. Горелов, Р. Л. Куляев. Нелинейная задача о нестационарном обтекании тонкого профиля несжимаемой жидкостью.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 6.
5. В. А. Головкин. Нелинейная задача о неустановившемся обтекании произвольного профиля со свободно деформирующимся вихревым следом.— Уч. зап. ЦАГИ, 1972, т. 3, № 3.
6. Н. И. Мухилишвили. Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.
7. С. М. Белоцерковский. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. М., «Наука», 1965.
8. S. Tomotika, T. Nogamiya, N. Takenouti. The lift on a flat plate placed near a plane wall with special reference to the effect of the ground upon the lift of a monoplane aerofoil.— Report of the aeronautical research Institute, Tokyo Imperial University, 1933, № 97.
9. Г. А. Павловец. О силах, действующих на вихрь и пластинку при движении над волнистой стенкой.— Тр. ЦАГИ, 1969, вып. 1121.

В. А. ДРАЧ, О. А. КУДРЯВЦЕВ

РАДИАЛЬНОЕ СОПЛО

В работе рассматривается задача профилирования пространственного канала, осуществляющего преобразование плоскопараллельного равномерного потока на входе в равномерный радиальный поток той же, большей или меньшей скорости на выходе. Создание такого потока необходимо при экспериментальном исследовании круговых решеток профилей [1, 2].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Известны температура T_0 и давление P_0 торможения идеального совершенного газа. Для случая установившегося безвихревого изэнтропического движения построить канал, преобразующий плоскопараллельный равномерный поток со скоростью V_1 в равномерный радиальный поток со скоростью V_2 при заданных расходе газа G , угле раскрытия канала θ_0 , радиусе выходного отверстия r (рис. 1).

Запишем уравнения движения в системе ортогональных криволинейных координат q_1, q_2, q_3 в слое переменной толщины $\tau(q_1, q_2)$ [3]. Пусть v_1, v_2, v_3 — проекции скорости v на оси q_1, q_2, q_3 соответственно. Полагаем $v_3 = 0, \partial/\partial q_3 = 0$. Тогда

$$\frac{\partial(\rho v_1 \tau H_2)}{\partial q_1} + \frac{\partial(\rho v_2 \tau H_1)}{\partial q_2} = 0; \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial(v_2 H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(v_1 H_1)}{\partial q_2} = 0; \quad (1.2)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}}; \quad (1.3)$$

$$\frac{P_0}{\rho_0} = RT_0, \quad (1.4)$$

где ρ — плотность газа; H_1, H_2 — коэффициенты Ламе; κ — показатель адиабаты; ρ_0 — плотность торможения; R — газовая постоянная; a — скорость звука; $\lambda = v/a$.

Вводя потенциал скоростей ϕ и функцию тока ψ , запишем уравнения (1.1), (1.2) в виде

$$\frac{\partial \phi}{\partial q_2} = \rho v_1 \tau H_2, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial q_1} = -\rho v_2 \tau H_1, \quad (1.6)$$

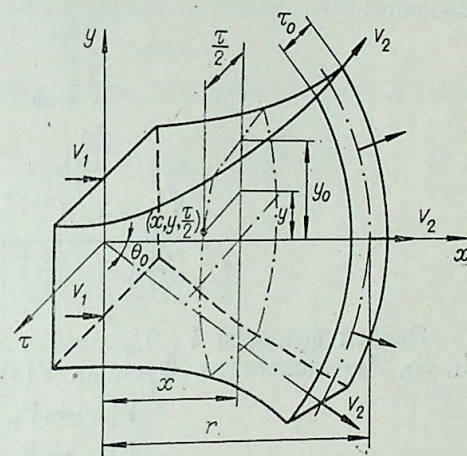


Рис. 1. Общий вид сопла. Основные обозначения.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} = v_1 H_1, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_2} = v_2 H_2. \quad (1.8)$$

Пусть $\varphi(q_1, q_2)$ — известная функция. Тогда из (1.5) — (1.8)

$$\frac{1}{H_1^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \frac{1}{H_2^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial q_2} = 0 \quad (1.9)$$

или

$$\frac{dq_1}{\frac{1}{H_1^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}} = \frac{dq_2}{\frac{1}{H_2^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}}. \quad (1.10)$$

Интеграл $\Phi(q_1, q_2, C) = 0$, где $C = \text{const}$, уравнения (1.10) представляет собой уравнение семейства линий тока. Для однозначного определения общего решения (1.9): $\psi = \psi(\Phi(q_1, q_2))$ используем граничные условия — значения расхода G на выходе из канала.

Направляя линии q_1 вдоль линий тока, переходим к естественной системе координат. Определив из (1.7) значения v , получим значения толщины τ в любой точке сопла

$$\tau = \frac{\frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}}{\rho \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}}. \quad (1.11)$$

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Функция φ на плоскости (x, y) должна удовлетворять следующим условиям:

$$\varphi|_{x=0} = 0; \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=0} = V_1; \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0; \quad (2.3)$$

$$\varphi|_{x=\sqrt{r^2-y^2}} = C_2 = \text{const}; \quad (2.4)$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2} \Big|_{x=\sqrt{r^2-y^2}} = V_2. \quad (2.5)$$

Введем функцию $V(x)|_{y=0} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3$, $0 \leq x \leq r$, где A_0, A_1, A_2, A_3 — константы. Функция $V(x)$ должна удовлетворять условиям:

$$V|_{x=0} = V_1, \quad (2.6)$$

$$V|_{x=r} = V_2, \quad (2.7)$$

$$\frac{dV}{dx} \Big|_{x=0, x=r} = 0. \quad (2.8)$$

Из условий (2.6) — (2.8) получим

$$A_0 = V_1, A_1 = 0; A_2 = \frac{3(V_2 - V_1)}{r^2}; A_3 = \frac{2(V_1 - V_2)}{r^3}.$$

Пусть $\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{y=0} = V(x)$. Тогда

$$\varphi|_{y=0} = V_1 x + \frac{V_2 - V_1}{r^2} x^3 - \frac{V_2 - V_1}{2r^3} x^4 + C_1. \quad (2.9)$$

Из условия (2.1) $C_1 = 0$.

Для $x > r$ полагаем $\varphi|_{y=0} = \varphi_r + V_2(x-r)$, где $\varphi_r = \varphi|_{x=r, y=0}$. Для $x < 0$ полагаем $\varphi = V_1 x$.
Зададим семейство изопотенциальных линий в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1, \text{ где } a \text{ — параметр, } 0 < a \leq r. \quad (2.10)$$

Полагая $y=0$ линией тока, получим значение φ в любой точке канала

$$\varphi = V_1 a + \frac{V_2 - V_1}{r^2} a^3 - \frac{V_2 - V_1}{2r^3} a^4. \quad (2.11)$$

Дифференциальное уравнение семейства линий тока, ортогональных изопотенциальным линиям,

$$y' = \frac{xy}{r^2 - y^2}. \quad (2.12)$$

Тогда уравнение семейства линий тока имеет вид

$$y = C \exp\left(\frac{x^2 + y^2}{2r^2}\right), \quad (2.13)$$

где $C = \text{const}$.

Переходя к полярным координатам (ρ^1, Θ) и полагая $\rho^1 = r$, получим

$$C = r e^{-1/2} \cdot \sin \Theta. \quad (2.14)$$

Выбираем верхнюю и нижнюю стенки канала так, чтобы они совпали с линиями тока. Тогда высота канала $2y_0$ определится из формулы

$$y_0 = r \sqrt{\exp\left(\frac{x^2 + y_0^2}{r^2} - 1\right) \sin \Theta_0}. \quad (2.15)$$

Функция тока ψ на выходе из канала

$$\psi|_{\sqrt{x^2+y^2}=r} = \rho_2 V_2 \tau_2 r \Theta, \quad (2.16)$$

где ρ_2, τ_2 — плотность газа и толщина канала на выходе соответственно,
 $\rho_2 = \text{const}, \tau_2 = \text{const}$.

Учитывая (2.14), получим выражение для функции тока в любой точке

$$\psi(x, y) = \rho_2 V_2 \tau_2 \arcsin \left[\frac{y}{r} \sqrt{\exp\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{r^2}\right)} \right]. \quad (2.17)$$

Скорость газа v определим из выражения

$$v = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}. \quad (2.18)$$

Для τ имеет место соотношение

$$\tau = \frac{\partial \psi / \partial y}{\rho \frac{\partial \varphi}{\partial x}} = - \frac{\partial \psi / \partial x}{\rho \frac{\partial \varphi}{\partial y}}. \quad (2.19)$$

Подставляя в (2.19) результаты дифференцирования (2.11), (2.17) и используя (1.3), получим

$$\tau = \left[\frac{2\kappa RT_0 - (\kappa - 1)V_2^2}{2\kappa RT_0 - (\kappa - 1)v^2(x, y)} \right]^{\frac{1}{\kappa - 1}} \sqrt{\frac{\exp\left[x^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2}\right)\right]}{1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2 \exp\left[x^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2}\right)\right]}} \times$$

$$\frac{V_2 \tau_2 \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^3}{\rho_0 f(a)},$$

где

$$v^2(x, y) = \left(\frac{a}{x}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{a^2}{r^2} \cdot \frac{y}{x}\right)^2 \right] f(a),$$

$$f(a) = V_1 + 3(V_2 - V_1) \left(\frac{a}{r}\right)^2 - 2(V_2 - V_1) \left(\frac{a}{r}\right)^3.$$

Для практических расчетов целесообразно воспользоваться численными методами. Координаты y точек пересечения линий тока и изопотенциальных линий определим из уравнений (2.10), (2.13)

$$y^2 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) = 2r^2 \ln \frac{y}{c} - a^2. \quad (2.20)$$

Решение (2.20) проводилось методом Ньютона по итерационной схеме

$$y_{k+1} = \frac{y_k}{2} \left[1 - \frac{r^2 \left(1 - 2 \ln \frac{y_k}{c} \right) + a^2}{r^2 - y_k^2 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right)} \right],$$

где k — номер итерации.

Значения C вычислялись из (2.14). В качестве начального приближения выбирались значения $y_0 = r \sin \Theta$. Координаты x точек пересечения вычислялись по (2.10). Так как канал симметричен относительно оси x , все расчеты проводились для $y \geq 0$, считая, что через эту часть канала проходит половинный расход газа.

Заменим уравнения (1.6), (1.8), записанные в естественной системе координат, разностными уравнениями. В качестве узлов выберем точки пересечения изопотенциальных линий и линий тока, координаты которых определены выше

$$\frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{\sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i-1,j})^2}} = v_{ij}; \quad (2.21)$$

$$\frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial q_2} = \frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{\sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j-1})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})^2}} = \rho_{ij} v_{ij} \tau_{ij}, \quad (2.22)$$

где φ_i — i -ая изопотенциальная линия; ψ_j — j -ая линия тока.

Из уравнения (2.21) определим значение скорости v в узле (i, j) — v_{ij} . Используя (1.3), (1.4), находим значение ρ_{ij} .

Толщину канала τ в узле (i, j) определим из (2.21), (2.22). Значения τ на верхней и нижней границах канала, не определенные при указанной разностной схеме, определяем линейной экстраполяцией по двум ближайшим к границе значениям τ на изопотенциальной линии. Значения τ на входе в канал полагаем равными толщине канала, определенной в ближайшем к входу узле, при $y=0$.

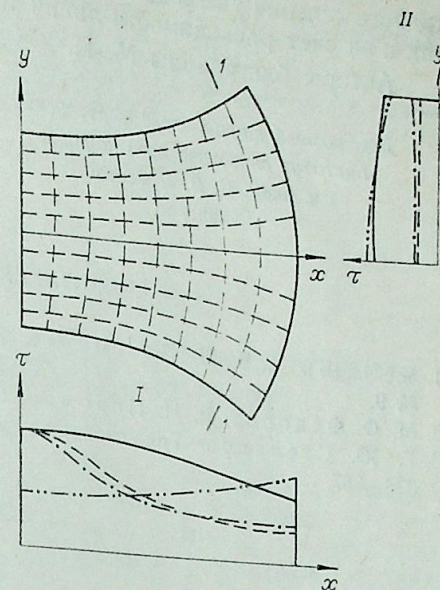
3. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ

Расчитаны конфигурации каналов для следующих случаев: рабочая среда — сухой воздух, $\Theta_0 = 32,5^\circ$; $r = 0,4$ м; $G = 13,6$ кг/с; $T_0 = 325^\circ\text{K}$, $\kappa = 1,41$, $P_0 = 1,77 \cdot 10^4$ кг/м², $a_0 = 330$ м/с.

- $V_1 = 100$ м/с, $V_2 = 100$ м/с,
- $V_1 = 100$ м/с, $V_2 = 300$ м/с,
- $V_1 = 100$ м/с, $V_2 = 400$ м/с,
- $V_1 = 300$ м/с, $V_2 = 100$ м/с.

Рис. 2. Конфигурация сопла.

$V_1 = V_2 = 100$ м/с; — — — — — $V_1 = 100$ м/с; $V_2 = 400$ м/с;
 $V_1 = 300$ м/с; - · - · - $V_1 = 100$ м/с; $V_2 = 100$ м/с. I — разрез сопла в плоскости $x\tau$ при $y=0$; II — развертка сопла по изопотенциальной линии 1-1.



На рис. 2 нанесены линии тока и изопотенциальные линии, построенные по вычисленным координатам точек их пересечения. Вычисление координат производилось с точностью до 0,1 мм. Значения y , полученные при $x=0$, исправлены так, чтобы расстояния между соседними точками были равны. Разность между вычисленными и исправленными значениями не превышала $\pm 0,3 \div 0,5$ мм. Здесь же показаны конфигурации каналов для указанных выше случаев. Отношения толщин каналов на выходе к толщинам на входе τ_2/τ_1 имеют значения 0,535; 0,253; 0,362; 1,250 для случаев a —г соответственно.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Отметим общие особенности построенных каналов.

1. Расчеты показали, что во всех случаях получен равномерный плоскопараллельный поток на входе. Отклонения толщины канала на входе у боковых стенок от толщины на оси канала следует отнести к погрешностям расчета.

2. Распределение толщин канала по изопотенциальным линиям и линиям тока имеет вид, показанный на рис. 2. Во всех случаях получена достаточно плавная форма изменения толщин.

3. При переходе от оси канала к боковым стенкам по изопотенциальным линиям имеет место некоторое повышение скоростей. При реальных течениях подтормаживание газа вследствие вязкости вблизи стенок должно привести к более равномерному полю скоростей по изопотенциальным линиям.

4. В рамках одномерной теории ускорение потока в дозвуковой части сопла достигается путем уменьшения площади канала, а для получения сверхзвукового потока, начиная с критического сечения, необходимо расширять канал. Это можно видеть и в нашем случае. Так, в случае a уменьшение толщины канала по движению газа компенсируется расходимостью линий тока. В случаях $b, в$ уменьшение толщины канала при разгоне потока в дозвуковой части сопровождается уменьшением площади проходного сечения. В случае $в$ после перехода через скорость звука не получено увеличения толщины канала. Это объясняется тем, что необходимое увеличение площади проходного сечения достигается за счет расходимости линий тока при радиальном течении. При торможении газа (случай $г$) и дозвуковых скоростей площадь про-

ходного сечения увеличивается как за счет увеличения толщины канала, так и за счет расходимости линий тока.

Авторы благодарны М. И. Жуковскому за обсуждение работы.

Всесоюзный научно-исследовательский
институт синтетического каучука
им. акад. С. В. Лебедева,
Ленинград

Поступила в редакцию
19/XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. И. Шнез, В. Н. Пономарев, А. В. Гаркуша. Теплоэнергетика, 1966, № 9.
2. М. Ф. Федоров, В. Н. Пономарев. Теплоэнергетика, 1966, № 6.
3. Г. Ю. Степанов. Гидродинамика решеток турбомашин. М., Физматгиз, 1962, 338—367.

Б. А. УРЮКОВ, С. М. ХАЙТМАН

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ДУГИ, ГОРЯЩЕЙ В ТУРБУЛЕНТНОЙ СТРУЕ

Электрическая дуга, горящая в турбулентном потоке, находится в поле пульсаций различных параметров течения, порожденных случайными процессами переноса массы, импульса и энергии в турбулентных образованиях-молях. Воздействие турбулентных пульсаций приводит к изменению режима передачи джоулева тепла потоку по сравнению с ламинарным течением. С другой стороны, присутствие дуги (выделение джоулева тепла) приводит к перестройке осредненного течения по сравнению с турбулентным «холодным» потоком.

В данной работе исследуются характеристики осредненного течения в свободной турбулентной струе при горении в ней электрической дуги. Считается, что дуга в среднем расположена на оси струи. Предполагается, что степень турбулентности потока невелика, т. е. размеры молей малы по сравнению с характерным размером дуги, а импульс молей слишком мал, чтобы заметно сдвигать столб дуги от осевого положения. В случае крупномасштабной турбулентности дуга может существенно сдвигаться относительно оси, что приведет к существенной перестройке осредненного течения.

Во всех опубликованных работах об электрической дуге в турбулентном потоке интенсивность турбулентности предполагалась малой [1]. В этом случае все эффекты изменения свойств дуги (кроме, может быть, влияния собственного магнитного поля дуги [1]) имеют порядок квадрата степени турбулентности и являются малыми. Следовательно, осредненные значения джоулева тепловыделения и плотности электрического тока выражаются через осредненные электропроводность σ и напряженность электрического поля E в виде $\overline{\sigma E^2} = \overline{\sigma} \overline{E^2}$; $\overline{j} = \overline{\sigma} \overline{E} = \overline{\sigma} \overline{E}$.

Запишем уравнения, описывающие турбулентную свободную струю, с учетом джоулева теплоподвода (черта означает осреднение по времени)

$$\frac{\partial}{\partial z} (\overline{\rho u r}) + \frac{\partial}{\partial r} (\overline{\rho v r}) = 0, \quad (1)$$

$$\overline{\rho u} \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} + \overline{\rho v} \frac{\partial \overline{u}}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_{\tau} \frac{\partial \overline{u}}{\partial r} \right), \quad (2)$$

$$\overline{\rho u} \frac{\partial \overline{h}}{\partial z} + \overline{\rho v} \frac{\partial \overline{h}}{\partial r} = \overline{\sigma} \overline{E^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \chi_{\tau} \frac{\partial \overline{h}}{\partial r} \right), \quad (3)$$

$$I = 2\pi \overline{E} \int_0^R \overline{\sigma} r dr. \quad (4)$$

Здесь μ_{τ} и χ_{τ} — турбулентные коэффициенты вязкости и теплопроводности (последний поделен на теплоемкость при постоянном давлении c_p), R — радиус струи. В уравнении энергии (3) пренебрегается диссипаци-

ей энергии на трение и кинетической энергией течения по сравнению с тепловой энергией. Последнее уравнение отражает постоянство силы тока I по длине струи. Коэффициенты μ_τ и χ_τ можно представить в двух модификациях, следуя различным гипотезам Прандтля,

$$\mu_\tau = \bar{\rho} l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|; \quad \chi_\tau = \bar{\rho} l l_\tau \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right| \quad (5)$$

или

$$\mu_\tau = k \bar{\rho} R \bar{u}_m; \quad \chi_\tau = k_\tau \bar{\rho} R \bar{u}_m, \quad (6)$$

где l и l_τ — пути длины смещения для переноса импульса и энергии соответственно; \bar{u}_m — скорость на оси струи; k и k_τ — эмпирические постоянные.

В расчетах свободных струй обычно стремятся свести задачу к автомодельной путем введения автомодельной переменной $\sim r/z$, от которой зависят некоторые безразмерные комбинации параметров. В случае сжимаемой жидкости (для основного участка струи или для «турбулентного источника») этого сделать не удается, так как нельзя удовлетворить условиям на границе струи (см., например, [2]), и приходится вводить некоторые упрощающие допущения (в работе [2] струя разбивается на ряд участков, в которых считается постоянной плотность на оси). Рассмотрим задачу в общей постановке, а автомодельное решение найдем из допущения, что осевая энтальпия газа намного больше граничной и последнюю можно положить равной нулю. Кроме того, для существования автомодельного решения следует предположить степенные зависимости плотности и проводимости от энтальпии.

Преобразуем уравнения (1) — (4). Будем считать, что $\bar{\rho} u = \bar{\rho} \bar{u}$; $\bar{\rho} v = \bar{\rho} \bar{v}$; используем выражения (5), в которых положим $l = cz$, $l_\tau = 2cz$, где c — эмпирическая постоянная, не зависящая от свойств течения; перейдем от переменных r, z к новым переменным $\varphi = r/R, z$.

Переход осуществляется по формулам

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}; \quad \frac{\partial}{\partial z} \rightarrow -\frac{R'}{R} \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial z}, \quad (7)$$

где $R' = dR/dz$.

Введем безразмерные величины (индексом m отмечены условия на оси струи, черточки опущены)

$$\begin{aligned} u &= u_m(z) F(\varphi, z); \\ v &= u_m(z) R'(z) f(\varphi, z); \\ \rho &= \rho_m(z) \theta(\varphi, z); \\ h &= h_m(z) \tau(\varphi, z); \\ \sigma &= \sigma_m(z) \omega(\varphi, z). \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда получим

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (\theta f_* \varphi) = -\theta F \varphi \frac{\partial \ln(\rho_m u_m R^2 \theta F)}{\partial \ln R}; \quad (9)$$

$$\theta f_* \frac{\partial F}{\partial \varphi} = \frac{c^2 z^2}{R^1 R^2} \frac{1}{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\theta \varphi \left| \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right| \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) - \theta F^2 \frac{\partial \ln(u_m F)}{\partial \ln R}; \quad (10)$$

$$\theta f_* \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} = \frac{2c^2 z^2}{R^1 R^2} \frac{1}{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\theta \varphi \left| \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right| \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} \right) + \beta^2 \omega - \tau \theta F \frac{\partial \ln(h_m \tau)}{\partial \ln R}; \quad (11)$$

$$\alpha = \beta \int_0^1 \omega \varphi d\varphi, \quad (12)$$

где

$$\alpha = \frac{I}{2\pi R \sqrt{\rho_m u_m h_m \sigma_m R R'}};$$

$$\beta = E \sqrt{\frac{\sigma_m R}{\rho_m u_m h_m R'}};$$

$$f_* = f - \varphi F.$$

Кроме интегрального условия сохранения силы тока (4) или (12) имеется еще одно условие сохранения полного импульса струи (вытекающее из уравнения (2) при условии $(\partial u / \partial r)_{R=0}$):

$$\int_0^R \rho u^2 r dr = \text{const}, \quad (13)$$

которое в безразмерных параметрах имеет вид

$$\int_0^1 \theta F^2 \varphi d\varphi = \gamma, \quad (14)$$

где $\gamma = \frac{\rho_0 u_0^2 R_0^2}{2\rho_m u_m^2 R^2}$; индексом 0 отмечены условия на выходе из сопла, где параметры потока считаются распределенными равномерно; R_0 — радиус сопла.

Автомодельное решение данной задачи (когда безразмерные величины зависят только от φ) существует при условиях $\theta = \tau^{-n}$; $\omega = \tau^m$; $n, M = \text{const}$; $R = bz$; $b = \text{const}$; $\tau(1) = 0$, которые необходимо наложить наряду с обычными граничными условиями: $F'(0) = \tau'(0) = 0$; $f_*(0) = 0$; $F(0) = \tau(0) = 1$.

Величины u_m, h_m, E будут степенными функциями z (или R), параметры b, α, β и γ — постоянными, которые определяются из решения системы уравнений

$$\frac{d}{d\varphi} (\varphi \theta f_*) = -a \varphi \theta F, \quad (15)$$

$$\varphi \theta f_* \frac{dF}{d\varphi} = \frac{c^2}{b^3} \frac{d}{d\varphi} \left(\varphi \theta \left| \frac{dF}{d\varphi} \right| \frac{dF}{d\varphi} \right) + a \varphi \theta F^2, \quad (16)$$

$$\varphi \theta f_* \frac{d\tau}{d\varphi} = 2 \frac{c^2}{b^3} \frac{d}{d\varphi} \left(\varphi \theta \left| \frac{dF}{d\varphi} \right| \frac{d\tau}{d\varphi} \right) + \beta^2 \varphi \omega + g \varphi \theta F \tau. \quad (17)$$

Уравнения (12) и (14) остаются неизменными.

Постоянство комплексов α, β, γ позволяет определить постоянные a и g и зависимости u_m, h_m, E от z (или R):

$$a = -\frac{d \ln u_m}{d \ln R} = \frac{M+1+\frac{n}{2}}{M+1-\frac{n}{2}}; \quad g = -\frac{d \ln h_m}{d \ln R} = \frac{2}{M+1-\frac{n}{2}}, \quad (18)$$

$$\tilde{h}_m = \left(\frac{\alpha_0^2 \sqrt{2\gamma}}{b \alpha^2} \right)^{\frac{1}{M+1-\frac{n}{2}}} \tilde{R}^{-\frac{2}{M+1-\frac{n}{2}}}, \quad (19)$$

$$\tilde{u}_m = \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \left(\frac{\alpha_0^2 \sqrt{2\gamma}}{b \alpha^2} \right)^{\frac{1}{2} \frac{n}{M+1-\frac{n}{2}} - \frac{M+1+\frac{n}{2}}{M+1-\frac{n}{2}}} \tilde{R}, \quad (20)$$

$$\beta_0 = \beta \frac{b^{\frac{1}{2}}}{(2\gamma)^{\frac{1}{4}}} \left(\frac{\alpha_0^2 \sqrt{2\gamma}}{b\alpha^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{M-1+\frac{n}{2}}{M+1-\frac{n}{2}} - \frac{2-n}{M+1-\frac{n}{2}} \bar{R} \quad (21)$$

где $\tilde{h}_m = h_m/h_0$; $\tilde{u}_m = u_m/u_0$; $\tilde{R} = R/R_0$; $\alpha_0 = I/2\pi R_0 \sqrt{\rho_0 u_0 h_0 \sigma_0 R_0}$; $\beta_0 = ER_0 \sqrt{\sigma_0} / \sqrt{\rho_0 u_0 h_0 R_0}$; h_0 — значения энтальпии на срезе сопла, σ_0 — значение проводимости при $h=h_0$. Постоянная $c^2=10^{-3}$ — в соответствии с работой [2].

Уравнение (16) может быть один раз проинтегрировано. Умножая (15) на F и складывая с (16), находим

$$\frac{d}{d\varphi} (\varphi \theta f_* F) = \frac{c^2}{b^3} \frac{d}{d\varphi} \left(\varphi \theta \left| \frac{dF}{d\varphi} \right| \frac{dF}{d\varphi} \right)$$

или, интегрируя при условии, что в точке $\varphi=0$ все функции ограничены, получаем

$$f_* = \frac{c^2}{b^3} \frac{1}{F} \left| \frac{dF}{d\varphi} \right| \frac{dF}{d\varphi} \quad (22)$$

Начальные и граничные условия для систем (15), (17) и (22) имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi=0; \quad F=1, \quad \tau=1, \quad f_* = 0, \quad \frac{d\tau}{d\varphi} = 0, \quad \frac{dF}{d\varphi} = 0; \\ \varphi=1; \quad F=0, \quad \tau=0. \end{aligned} \quad (23)$$

Первые четыре условия формально служат начальными условиями для указанной системы уравнений. Последние два — для определения постоянных b и β . Уравнения (12) и (14) после решения системы дифференциальных уравнений позволяют определить постоянные α и γ . Полезно привести выражения для определения постоянных b и β лишь через параметры течения (но не через их производные). Подставляя (22) в (15), формально интегрируя полученное выражение и учитывая знаки производных, можно найти

$$F' = - \sqrt{\frac{ab^3}{c^2}} \sqrt{\frac{F}{\varphi\theta} \int_0^\varphi \varphi\theta F d\varphi} \quad (24)$$

Принимая во внимание, что при $\varphi \rightarrow 0$ правая часть стремится к нулю и $F \rightarrow 1$, находим

$$F = 1 - \sqrt{\frac{ab^3}{c^2}} \int_0^\varphi \sqrt{\frac{F}{\varphi\theta} \int_0^\varphi \varphi\theta F d\varphi} d\varphi \quad (25)$$

Поскольку при $\varphi=1$ $F=0$, то

$$\frac{c^2}{b^3} = a \left(\int_0^1 \sqrt{\frac{F}{\varphi\theta} \int_0^\varphi \varphi\theta F d\varphi} d\varphi \right)^2 \quad (26)$$

Аналогично можно проинтегрировать уравнение (17) и найти

$$\beta^2 = a \left(\int_0^1 \frac{\int_0^\varphi \varphi\theta d\varphi}{\sqrt{\varphi\theta F \int_0^\varphi \varphi\theta F d\varphi}} d\varphi \right)^{-1} \left[\int_0^1 (2F - \tau) \sqrt{\frac{\int_0^\varphi \varphi\theta F d\varphi}{\varphi\theta F}} d\varphi + \right.$$

$$\left. + \left(1 - \frac{g}{a} \right) \int_0^1 \frac{\int_0^\varphi \tau\theta F d\varphi}{\sqrt{\varphi\theta F \int_0^\varphi \varphi\theta F d\varphi}} d\varphi \right] \quad (27)$$

Уравнения (26) и (27) можно использовать для приближенных оценок величин b и β . Однако надо иметь в виду, что уравнение (27) более чувствительно к аппроксимирующим функциям, нежели (26). Это происходит, во-первых, потому, что (27) содержит сумму членов, первый из которых может быть как положительным, так и отрицательным. Во-вторых, при неодинаковом стремлении τ и F к нулю при $\varphi \rightarrow 1$ в интегралах возникает (хотя и устраняемая) особенность.

На рис. 1 приведены графики распределения функций $F(\varphi)$, $\tau(\varphi)$ при значениях показателей $n=0,85$; $M=2,50$ и $0,57$. Показатель $n=0,85$ хорошо аппроксимирует зависимость плотности воздуха от энтальпии при атмосферном давлении. Показатель $M=2,5$ аппроксимирует зависимость проводимости воздуха от энтальпии при атмосферном давлении в диапазоне температур $5 \div (10-12)$ тыс. К, а показатель $M=0,57$ аппроксимирует зависимость проводимости от энтальпии при больших температурах в соответствии с аппроксимацией $\sigma/\sigma_0 = (h/h_0)^{0,57} \exp(-187h_0/h)$ [3]. Видно, что различия в распределениях по сечению струи относительных величин энтальпии и скорости для разных M невелики. В то же время распределения энтальпии и скорости качественно отличаются друг от друга. Если профиль энтальпии указывает на существование вблизи оси резкого пика температуры (энтальпия уменьшается на порядок по отношению к осевому значению на половине радиуса струи), то профиль скорости заполнен и больше напоминает степенной профиль скорости при турбулентном течении в трубе, нежели в струе.

Расчетные значения постоянных:

$$M=2,5; \quad b=0,216; \quad \beta=1,300; \quad \alpha=3,64 \cdot 10^{-2}; \quad \gamma=60,55;$$

$$M=0,57; \quad b=0,218; \quad \beta=0,258; \quad \alpha=3,85 \cdot 10^{-2}; \quad \gamma=27,36.$$

Видно, что зависимость радиуса струи от $z(R=bz)$ практически одинакова в обоих случаях, и полный угол раствора струи составляет примерно 25° .

Из соотношений (19)–(21) следует вид зависимостей осевых параметров струи от силы тока и координаты. Так,

при $M=2,5$ $h_m \sim (I/z)^{0,651}$;
 $u_m \sim I^{0,277} z^{-1,277}$; $E \sim I^{-0,623} \times z^{-0,374}$.

В данном случае $E-I$ характеристика падающая, однако, в зависимости от значений показателей M и n , как видно из (21), она может быть и возрастающей. Так, например, при $n=0,85$, $M=0,57$, $E \sim I^{0,004} z^{-1,004}$. Этот

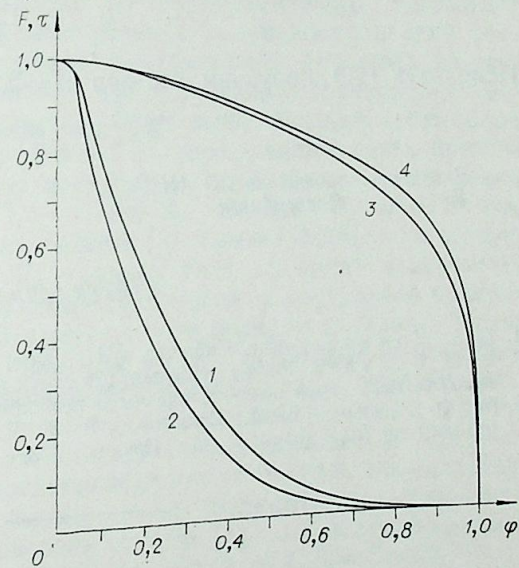


Рис. 1. Профили относительной энтальпии и скорости в струе.
 1 — $\tau(\varphi)$ при $M=0,57$; 2 — $\tau(\varphi)$ при $M=2,5$;
 3 — $F(\varphi)$ при $M=0,57$; 4 — $F(\varphi)$ при $M=2,5$.

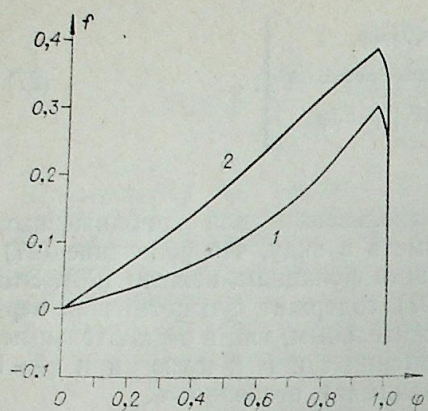


Рис. 2. Распределение величины f по радиусу струи.
1 — $f(\varphi)$ при $M=0,57$; 2 — $f(\varphi)$ при $M=2,5$.

$$\tilde{G} = \frac{2 \int_0^R \rho u r dr}{\rho_0 u_0 R_0^2} = 2 \tilde{\theta}_m \tilde{u}_m \tilde{R}^2 \int_0^1 \theta F \varphi d\varphi. \quad (28)$$

Интегрируя (15), находим

$$\int_0^1 \theta F \varphi d\varphi = -\frac{1}{a} (\theta f_*)_1. \quad (29)$$

В допущениях данной работы, когда считается, что $\tau(1) = 0$, масса втекающего в струю газа бесконечна, так как плотность на границе струи ($\rho \sim h^{-n}$) бесконечна. Поэтому можно говорить лишь об оценке величины расхода в струе, если в (29) положить, что на границе струи плотность равна ρ_0 . Тогда $\theta_1 = 1/\theta_m$ и

$$\tilde{G} = -\frac{2}{a} \tilde{u}_m \tilde{R}^2 f_*(1). \quad (30)$$

Из рис. 2 находим $f_*(1) = f(1) \approx -0,05$, следовательно,

$$\tilde{G} \approx 0,01 \frac{M+1 - \frac{n}{2}}{M+1 + \frac{n}{2}} \tilde{u}_m \tilde{R}^2. \quad (31)$$

Используя (20), получаем, что при $M=2,5$

$$\tilde{G} \sim 10^{0,277} \cdot z^{0,723}.$$

Институт теплофизики СО АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
5/IV 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Урюков. — «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1975, № 3, сер техн. наук, вып. 1.
2. В. И. Бакулев. Расчет турбулентных струй реального газа. — В кн.: Исследование турбулентных струй воздуха, плазмы и реального газа. М., «Машиностроение», 1967.
3. М. Ф. Жуков, Б. А. Урюков, В. Я. Смоляков. Электродуговые нагреватели газа (плазмотроны). М., «Наука», 1973, с. 100.

вывод может быть проверен лишь точными расчетами.

На рис. 2 показано распределение f по сечению струи, характеризующее изменение радиальной скорости. Видно, что на периферии происходит втекание газа внутрь струи ($v < 0$). Однако довольно быстро начинает проявляться эффект расширения газа за счет нагрева его дугой. Можно оценить изменение расхода газа в струе по ее длине, исходя из уравнения неразрывности (15). Обозначим отношение расхода газа в данном сечении струи к расходу газа, вытекающего из сопла, через \tilde{G} :

Ю. В. КУРОЧКИН, А. В. ПУСТОГАРОВ,
В. И. СТАРШИНОВ, В. В. УКОЛОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПОРИСТОГО ОХЛАЖДЕНИЯ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО КАНАЛА ПЛАЗМОТРОНА

В работе [1] показана эффективность использования пористого вдува для охлаждения стенок разрядной камеры плазмотрона. В [2] экспериментально обнаружено, что применение интенсивного вдува через пористую стенку помимо охлаждения ее увеличивает напряженность электрического поля разряда, уменьшает тепловые потери на участке межэлектродной вставки (МЭВ) и повышает напряжение пробоя промежутка дуга — стенка канала. На практике это означает возможность увеличения мощности, выделяющейся на единицу длины дуги, теплового к. п. д. плазмотрона и существенного упрощения конструкции за счет использования несекционированного канала МЭВ. Очевидно, что интенсивность вдува определяет как параметры газа в канале, так и тепловое состояние самой пористой стенки.

В связи с этим возникает вопрос об определении интенсивности вдува, обеспечивающей устойчивое горение дуги в несекционированном канале плазмотрона и допустимую температуру внутренней поверхности пористой стенки.

Приближенную оценку величины вдува, при котором отсутствует пробой промежутка дуга — стенка, можно сделать, используя результаты работы [3], в которой экспериментально определена зависимость эффективного напряжения пробоя U^* от размерного комплекса $I Uz/aG$ (I, U — ток и напряжение разряда; a — межэлектродное расстояние, G — суммарный расход газа, z — расстояние от катода до рассматриваемого сечения). Поскольку для устойчивого горения дуги необходимо, чтобы напряжение пробоя было выше падения потенциала на длине секции МЭВ, для определения нижней границы вдува примем $U = U^*$. Тогда, выбрав значения параметров, характерные для горения дуги в пористом канале [4], $I = 1000$ А, $U = 2000$ В, $a = 120$ мм, $r_1 = 17$ мм, согласно результатам работы [3] имеем $I Uz/aG = 3,5$ кДж/г. Полагая $G = G_0 + 2\pi \cdot r_1 \dot{m} z$, где G_0 — расход газа на входе в пористый канал; \dot{m} — расход вдуваемого газа, отнесенный к внутренней поверхности канала, получим $\dot{m} = 4,5$ кг/м²с, что по порядку величины согласуется с экспериментом [4]. Поскольку в [3] определение напряжения пробоя проводилось на секционированной МЭВ без вдува воздуха между секциями, действительное значение напряжения пробоя в случае пористого вдува будет выше, т. е. полученное значение \dot{m} является оценкой сверху. Естественно предположить, что при столь высоких значениях удельного расхода вдуваемого газа (например, по сравнению с экспериментом в секционированном канале [1]) отсутствует взаимодействие основного потока со стенкой канала, т. е. $C_f/2 = St \approx 0$.

Действительно, обозначив параметр вдува как $b_0 = \frac{\dot{m}}{\rho U} \cdot \frac{1}{St_0}$,

$$\rho U = \frac{G_0 + G_{\text{п}}}{\sigma_1 r_1^2} \quad [5], \text{ где } St_0 \text{ — число Стантона в отсутствие вдува; } G_{\text{п}} \text{ —}$$

суммарный расход газа на пористый вдув, и принимая $St_0 = 0,02$ [6] для ранее полученной оценки интенсивности вдува ($\dot{m} = 4,5 \text{ кг/м}^2\text{с}$), имеем $b_0 \geq 4$, что превышает значение критического параметра вдува [5, 7] на всей длине канала или на входном участке.

Проведенный анализ позволяет указать на две особенности пористого охлаждения канала, стабилизирующего дуговой разряд. Во-первых, для течения газа в пористом канале возможен режим оттеснения теплового пограничного слоя, и нагрев стенки будет обусловлен лучистым потоком от столба дуги. Во-вторых, в условиях радиационного нагрева и высокой интенсивности вдува тепловое состояние пористой стенки будет определяться превышением температуры материала стенки над температурой охлаждающего газа, т. е. в конечном счете интенсивностью внутреннего теплообмена в пористой стенке.

С учетом сделанных выводов для анализа температурного состояния пористой стенки канала плазмотрона примем следующую физическую модель. На внутреннюю поверхность пористого цилиндра радиуса r_1 действует лучистый тепловой поток q_1 , который экранируется этой поверхностью и распространяется за счет теплопроводности материала к внешней поверхности ($r = r_2$). Часть теплового потока поглощается охладителем, который продувается через пористую стенку со скоростью v . Рассматривая осесимметричный стационарный случай, предполагая отсутствие осевых перетечек тепла и массы и считая теплопроводность охладителя пренебрежимо малой по сравнению с теплопроводностью пористого материала, задачу о течении и теплообмене в пористой стенке сформулируем в виде уравнений баланса тепла и уравнения движения [1, 8]

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \lambda_w \frac{dT}{dr} \right) = \alpha_V (T - t), \quad (1)$$

$$\rho v C_p \frac{dt}{dr} = \alpha_V (T - t), \quad (2)$$

$$\frac{dP}{dr} = \alpha \mu v + \beta \rho v^2. \quad (3)$$

Уравнения (1—3) дополняются соотношением $\dot{m} r_1 = -\rho v r$ (связывающим удельный массовый расход и скорость газа и полученным из уравнения неразрывности), уравнением состояния $P = \rho R_m T$ и граничными условиями

$$r = r_1, \quad q_1 = -\lambda_w \frac{dT}{dr} \Big|_{r=r_1}, \quad (4)$$

$$r = r_2, \quad -\lambda_w \frac{dT}{dr} \Big|_{r=r_2} = \rho v C_p (t_{r=r_2} - t_p) + \varepsilon \sigma_0 T_{r=r_2}^4, \quad (5)$$

$$r = r_2, \quad -\lambda_w \frac{dT}{dr} \Big|_{r=r_2} = \alpha_2 (T_{r=r_2} - t_p) + \varepsilon \sigma_0 T_{r=r_2}^4, \quad P = P_2. \quad (6)$$

Здесь λ_w — коэффициент теплопроводности материала стенки; T , t — температура стенки и газа соответственно; α_V — коэффициент объемного теплообмена внутри пористой стенки; t_p — температура газа в ресивере; ε — излучательная способность материала пористой стенки; σ_0 — постоянная Стефана — Больцмана; α_2 — коэффициент поверхностного теплообмена на наружной стенке канала. Условия (5) — (6) учи-

тывают конвективный теплообмен наружной поверхности стенки с газом в ресивере и лучистые потери. Для решения системы уравнений (1) — (3) необходимо определить значения вязкостного α и инерционного β коэффициентов гидравлического сопротивления и коэффициент α_V . Уравнение (3) интегрировалось экспериментально, для чего и преобразовывалось к виду

$$y | \mu = a + b \frac{\dot{m}}{\mu},$$

где

$$y = \frac{P_2^2 - P_1^2}{2R_m t \cdot \dot{m} (r_2 - r_1)}; \quad a = \alpha \frac{r_1}{r_2 - r_1} \ln \frac{r_2}{r_1}; \quad b = \beta \frac{r_1}{r_2}; \quad (7)$$

μ — динамическая вязкость; R_m — газовая постоянная. Определение α и β осуществлялось графо-аналитическим методом [9] по зависимости (7), определяемой из эксперимента. Исследование проведено на цилиндрических образцах из пористой стали 1X18H10T ($r_1 = 17 \text{ мм}$, $r_2 = 20 \text{ мм}$) [10], керамики Al_2O_3 и вольфрама ($r_1 = 10 \text{ мм}$, $r_2 = 13 \text{ мм}$) [4, 11].

Для поддержания изотермического режима течения газа через образец и ликвидации влияния изменения μ от давления по толщине образца эксперимент проводился с противодавлением таким образом, что перепад давления на стенке оставался существенно меньше уровня давления. Коэффициенты гидравлического сопротивления и характеристики материалов (Π — пористость, d — диаметр частиц, и λ_w) приведены в таблице. Значение λ_w для керамики принято равным $2 \text{ Вт/м} \cdot \text{К}$ согласно [1]. Принималось, что $\lambda_w(T) = \text{const}$.

Материал	Источник	Π	d , мм	λ_w , $\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	α , м^{-2}	β , м^{-1}
Сталь 1X18H10T	[12]	0,33	0,3	5	$0,84 \cdot 10^{11}$	$0,212 \cdot 10^6$
Керамика Al_2O_3	[4]	0,36	0,1—0,07	2	$0,79 \cdot 10^{12}$	$0,26 \cdot 10^7$
Вольфрам	[11]	0,56	0,006 0,006	20 50	$0,4 \cdot 10^{13}$ $0,92 \cdot 10^{14}$	$0,626 \cdot 10^7$ $0,756 \cdot 10^8$

Наибольшую трудность представляет выбор соотношения для определения объемного коэффициента теплообмена. В соответствии с выводами работы [13], в которой приведен обзор последних результатов исследований теплообмена в пористых материалах, имеющиеся в литературе данные не позволяют однозначно определить α_V в зависимости от свойств пористого материала и охладителя, способа нагрева и уровня расхода. Поэтому в расчетах использовалась зависимость

$$\frac{Nu}{6(1-\Pi)} = 0,0175 \text{ Re}/\Pi, \quad (8)$$

где

$$Nu = \frac{\alpha_V d^2}{\lambda_r}; \quad \text{Pe} = \text{Re} \cdot \text{Pr} = \frac{\dot{m} \cdot d \cdot C_p}{\lambda_r},$$

полученная в [12], для схожих с рассматриваемым случаем условий эксперимента (односторонний лучистый нагрев) и свойств материала (сталь 1X18H10T, $\Pi = 0,33$, $d = 0,3$). Вопрос о правомерности использования выражения (8) для расчета пористого охлаждения керамики

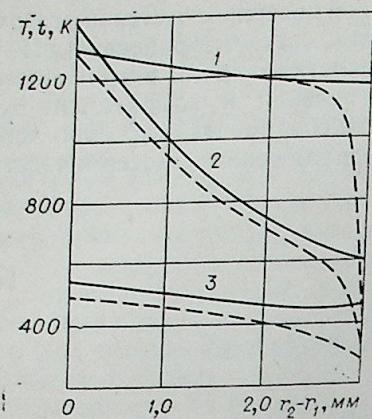


Рис. 1. Распределение температуры газа t и материала T по толщине пористой стенки при вдуве воздуха, $q_1 = 10^6$ Вт/м².

1 — ω ($\Pi = 0,56$); $\dot{m} = 1$ кг/м²·с; $\lambda_w = 20$ Вт/м·К; $\alpha_V = 1,3 \cdot 10^7$ Вт/м³·К; 2 — Al_2O_3 ($\Pi = 0,36$); $\dot{m} = 1$ кг/м²·с; $\lambda_w = 2$ Вт/м·К; $\alpha_V = 1,6 \times 10^8$ Вт/м³·К; 3 — ω ($\Pi = 0,56$); $\dot{m} = 5$ кг/м²·с; $\lambda_w = 20$ Вт/м·К; $\alpha_V = 6,5 \cdot 10^7$ Вт/м³·К; ——— T , - - - - t .

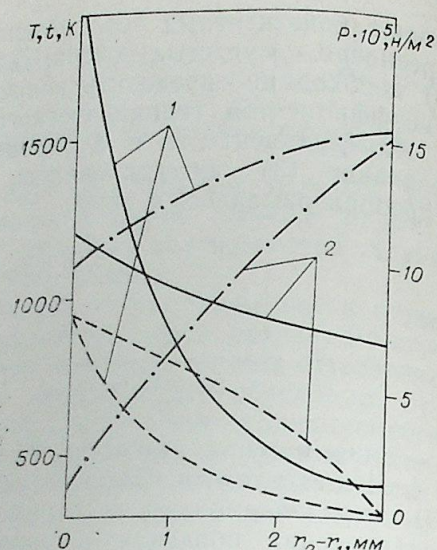


Рис. 2. Распределение температуры газа t , материала T и давления P по толщине пористой стенки, $q_1 = 10^7$ Вт/м².

1 — $1X18H10T$ ($\Pi = 0,33$); $\lambda_w = 5$ Вт/м·К; $\dot{m} = 1$ кг/м²·с; $\alpha_V = 10^7$ Вт/м³·К; 2 — ω ($\Pi = 0,25$); $\lambda_w = 50$ Вт/м·К, $\dot{m} = 5$ кг/м²·с, $\alpha_V = 10^8$ Вт/м³·К; ——— T , - - - - t , - · - · - P .

и вольфрама остается открытым, анализ влияния свойств пористого материала и охладителя на теплообмен будет сделан ниже.

Уравнения (1)–(3) совместно с граничными условиями (4)–(6) решались методом прогонки. Расчеты проведены для пористых стенок $r_1 = 17$ мм, $r_2 = 20$ мм из стали $1X18H10T$, керамики Al_2O_3 и вольфрама при двух значениях пористости (см. таблицу).

В качестве охладителей рассмотрены воздух, водород и аргон, температура газа в ресивере принималась $t_p = 300$ К. Величина удельного расхода охладителей задавалась равной 1 и 5 кг/м²·с, что соответствует нижнему уровню вдува, имевшему место в эксперименте [4]. Тепловой поток на внутреннюю поверхность пористого канала принимался равным 10^6 и 10^7 Вт/м² в соответствии с уровнем давления в разрядной камере [4] и данными работы [14]. Величина коэффициента теплообмена на наружной поверхности канала α_2 , согласно [15], принималась равной 100 Вт/м²·К. Результаты расчета представлены на рис. 1, 2. Из рис. 1 следует, что для менее теплопроводного материала (керамика) возможны большие температурные градиенты по сравнению с более теплопроводным материалом (вольфрам). Увеличение интенсивности вдува в пять раз приводит к снижению температуры внутренней поверхности более чем на 600 К (см. рис. 1, кривые 1, 3). Существуют режимы, когда отличие температур газа и материала стенки имеет место на части или на всей толщине пористой стенки и может достигать значительной величины: 250 – 1000 К (см. рис. 2, кривые 1, 2). Температурное превышение увеличивается с ростом \dot{m} и градиента температур. Так, при $\dot{m} = 1$ кг/м²·с и $\lambda_w = 2$ Вт/м·К (рис. 2, кривая 1) наибольшая разница температур существует на горячей поверхности стенки, что связано с большим градиентом температуры материала, в то время как при $\dot{m} = 5$ кг/м²·с и $\lambda_w = 50$ Вт/м·К температурное превышение максимально на холодной поверхности и определяется коэффициентом α_2 . Увеличение интенсивности объемного теплообмена (α_V) приводит к снижению температуры материала на горячей поверхности, а температур-

ное превышение уменьшается (рис. 2, кривые 1, 2). Перепад давления на пористой стенке зависит от уровня расхода и гидравлических свойств пористого материала. При значении теплового потока на уровне 10^7 Вт/м² температура горячей поверхности стенки может превышать 2000 К (см. рис. 2), что требует использования высокопрочных пористых материалов, например вольфрама. Наличие больших температурных градиентов в пористой керамике (см. рис. 1) ставит вопрос о термостойкости материала. Для оптимального решения задачи выбора материала стенки и обеспечения ее работоспособности необходимо знать влияние свойств материала и охладителя, уровня расхода на эффективность пористого охлаждения. Качественный анализ такого влияния проведен путем решения сформулированной ранее задачи (1)–(3) при вариации значений \dot{m} , C_p , λ_w , α_V , $r_1 - r_2 = \delta$, α_2 . Поскольку в общем случае α_V зависит от \dot{m} и C_p [15], при расчете использовалось предположение, что

$$\alpha_V = F \cdot \dot{m} C_p, \quad (9)$$

где F — некоторый параметр, зависящий от внутренней структуры и технологии изготовления пористого материала. Например, с учетом выражения (8)

$$F = 0,1 \frac{1 - \Pi}{\Pi} \cdot \frac{1}{\alpha}. \quad (10)$$

Хотя приведенное соображение является недостаточно строгим, общий характер его подтверждается экспериментом для случая радиационного одностороннего нагрева [12, 16].

Подстановка выражения (9) в уравнения (1)–(2) позволяет исключить из последних коэффициент α_V , зависящий от \dot{m} и C_p и провести вариантыные расчеты относительно независимых параметров \dot{m} , C_p , λ_w , F .

Для расчета был выбран некоторый «характерный» режим с параметрами $q_1 = 10^6$ Вт/м², $\dot{m} = 20$ кг/м²·с, $\lambda_w = 50$ Вт/м·К, $C_p = 529$ Дж/кг·К, $F = 60$ м⁻¹, $\alpha_2 = 100$ Вт/м², $\delta = 3$ мм, $r_1 = 10$ мм. Приведенный режим соответствует охлаждению аргоном пористой стенки из вольфрама. В процессе расчета каждый из приведенных параметров при неизменных остальных изменялся в большую и меньшую сторону от своей характерной величины. Результаты расчета приведены на рис. 3. По оси ординат отложены температура горячей поверхности стенки и безразмерное температурное превышение; по оси абсцисс — масштаб изменения характерных параметров. Так, точка на кривой 2 при $x = 0,5$ соответствует $T_1 = 1480$ К, полученной из расчета, когда все параметры имеют «характерное» значение, кроме $F = 60 \times 0,5 = 30$ м⁻¹.

Увеличение интенсивности вдува снижает температуру стенки (рис. 3, б, кривая 6), однако при пере-

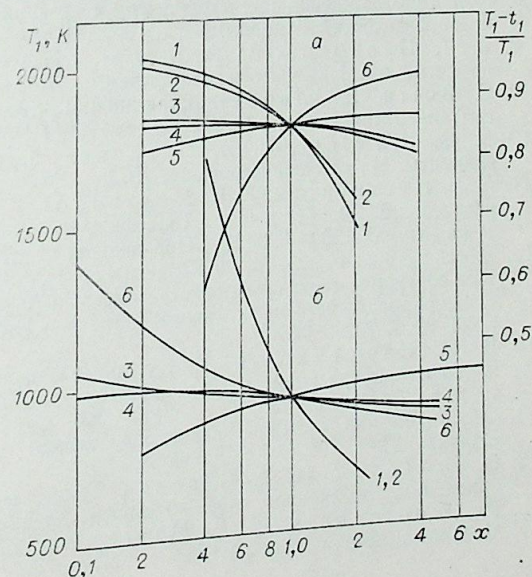


Рис. 3. Влияние характеристик пористой стенки и охладителя на температуру горячей поверхности стенки (б) и температурное превышение (а).
1 — δ ; 2 — F ; 3 — λ_w ; 4 — α_2 ; 5 — r_1 ; 6 — C_p, \dot{m} .

ходе к более высоким значениям вдува эффективность охлаждения уменьшается, что связано с увеличением температурного превышения (рис. 3, а, кривая б). Объяснение этому важному для практики выводу можно дать, учитывая, что при постоянном тепловом потоке на стенку степень подогрева охладителя с ростом вдува уменьшается. Замедление темпа роста температурного превышения с ростом \dot{m} , очевидно, связано с интенсификацией теплообмена, например из-за турбулизации течения в каналах пористого материала. Одинаковый характер влияния \dot{m} и C_p следует из выражения (9). Наиболее существенное влияние на эффективность пористого охлаждения оказывает параметр, характеризующий структуру материала пористой стенки (F). С ростом F уменьшается и температура горячей поверхности стенки и температурное превышение (рис. 3, а, б, кривая 2). Влияние теплопроводности материала и коэффициента α_2 на тепловое состояние стенки незначительно (рис. 3, а, б, кривые 3, 4), однако увеличение λ_w снижает температурный перепад между внутренней и наружной поверхностями стенки, что существенно для термостойкости материала.

Увеличивая толщину пористой стенки, можно уменьшить температуру горячей поверхности и температурное превышение (см. рис. 3, а, б, кривые 1).

Поступила в редакцию
10/VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Heberlein, E. Pfender, E. R. G. Eckert. Study of a transpiration-cooled constricted arc.— ARL 70—0007, January, 1970.
2. А. В. Пустогаров, Ю. В. Курочкин и др. Линейный плазмотрон с пористым охлаждением межэлектродной вставки — В кн.: Тезисы докладов VI Всес. конф. по генераторам низкотемпературной плазмы. Фрунзе, 1974, с. 90—93.
3. Г. Ю. Даутов, М. Ф. Жуков, Г. М. Мустафин, А. Н. Тимошевский. Исследование электрического пробоя промежутка плазма — холодный электрод.— ПМТФ, 1969, № 2, с. 67—72.
4. А. Б. Карabut, Ю. В. Курочкин и др. Плазмотрон с пористым каналом МЭВ мощностью 2 МВт.— Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1976, № 8, сер. техн. наук, вып. 2.
5. А. И. Леонтьев, Б. П. Миронов. Турбулентный пограничный слой при сильных вдувах и параметры отсеснения — В кн.: Проблемы теплофизики и физической гидродинамики. Новосибирск, «Наука», 1974, 85 с.
6. Ю. В. Курочкин, А. В. Пустогаров, Э. И. Молодых, Р. Я. Захаркин. Влияние турбулентности на дуговой разряд в цилиндрическом канале.— В кн.: Тез. докл. VI Всес. конф. по генераторам низкотемпературной плазмы. Фрунзе, 1974, с. 41—43.
7. Т. Ф. Бекмуратов. Экспериментальное исследование пористого и комбинированного охлаждения при турбулентном течении воздуха в круглой трубе.— Инженерно-физический журнал, 1969, т. 16, № 3, 417—422.
8. В. Т. Прокопов, В. Р. Шеляг. Некоторые закономерности течения через пористые металлокерамические системы.— Порошковая металлургия, 1970, № 9.
9. C. Boiffa, E. Pfender. Experimental investigation of gas flow characteristics in transpiration cooled porous matrices HTL TR № 0100, 1970.
10. Б. Ф. Шибряев, Е. И. Павловская. Металлокерамические фильтрующие элементы. М., «Машиностроение», 1972.
11. А. В. Пустогаров, Г. Н. Мельников, А. Н. Колесниченко, В. Д. Дарраган, Д. Д. Чепига. Теплофизические свойства пористого вольфрама при температурах 1200—3200 К.— Порошковая металлургия, 1974, № 11, 52—57.
12. А. Н. Бойко, В. М. Ерошенко, В. П. Мотулевич, Л. А. Яскин. Температурное состояние пористой пластины, охлаждаемой сильным вдувом в условиях радиационно-конвективного нагрева.— Инженерно-физический журнал, 1972, т. 23, № 5, 792—800.
13. В. М. Ерошенко, Л. А. Яскин. Теплообмен при вынужденной конвекции жидкости внутри пористых спеченных материалов.— Инженерно-физический журнал, 1976, т. 30, № 1, 5—13.
14. Очерки физики и химии низкотемпературной плазмы под ред. Л. С. Полака. М., «Наука», 1971, 202 с.
15. В. Л. Дорот, М. Х. Стрелец. Пористое охлаждение в сверхзвуковом турбулентном пограничном слое.— Теплофизика высоких температур, 1973, т. 11, № 3.
16. P. Grootenhuis, N. P. Моог. Proc. of the VII th Intern. Conf. of Appl. Mechanics. London, 1948, 3, 106.

Т. С. МЕЛЬНИКОВА

ИЗМЕРЕНИЕ РАДИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДУГЕ ВО ВРЕМЕНИ

При исследовании нестационарной дуговой плазмы наряду с другими ставится задача измерения профиля температуры по радиусу дугового канала. Для ее решения необходимо, во-первых, достаточно быстро просканировать изображение профиля интенсивности излучения по радиусу перед входной щелью спектрального прибора, во-вторых, записать последовательно во времени профили один за другим и, в-третьих, обеспечить минимальный временной интервал между экспозициями профилей.

Первая часть задачи ставилась ранее. Например, Канн [1] при исследовании стабилизированной вихрем дуги в продольном магнитном поле для радиальной развертки интенсивности излучения использовал вращающийся диск со щелью. Диаметр дугового канала 1,2 см сканировался за 2 мс. В работе [2] автор настоящей статьи использовал для развертки вращающееся зеркало. Диаметр дугового канала 5 мм сканировался за 40 мкс. Вайдман и Хопман [3] при исследовании распадающейся водородной плазмы применяли фотоэлектрический способ развертки. В их работе диаметр канала 76 мм сканировался за 30 мкс.

В случае механических разверток время записи профиля интенсивности для вращающегося диска

$$t = D/2\pi Rn,$$

для вращающегося зеркала

$$t = D/4\pi Rn,$$

где D — размер изображения диаметра дугового канала, которое проектируется на входную щель спектрального прибора; n — число оборотов вращающегося устройства в единицу времени; R — расстояние от оси вращения до входной щели спектрального прибора. Для диска со щелью оно определяется механическими свойствами диска, в случае же зеркальной развертки оно может быть взято достаточно большим и при постоянной скорости вращения время записи профиля может быть сокращено на порядок и больше. Фотоэлектрический способ развертки имеет ряд преимуществ по сравнению с механическими, однако в тех случаях, когда объект излучения

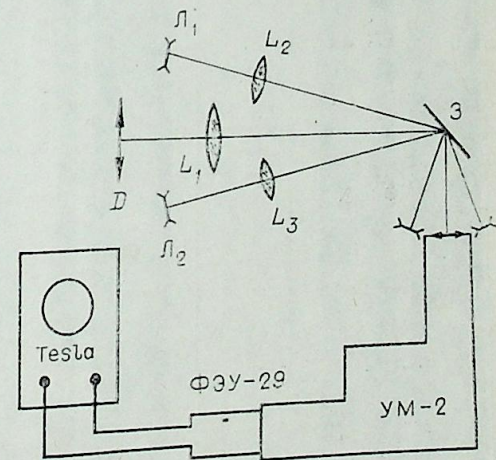


Рис. 1. Схема измерений.

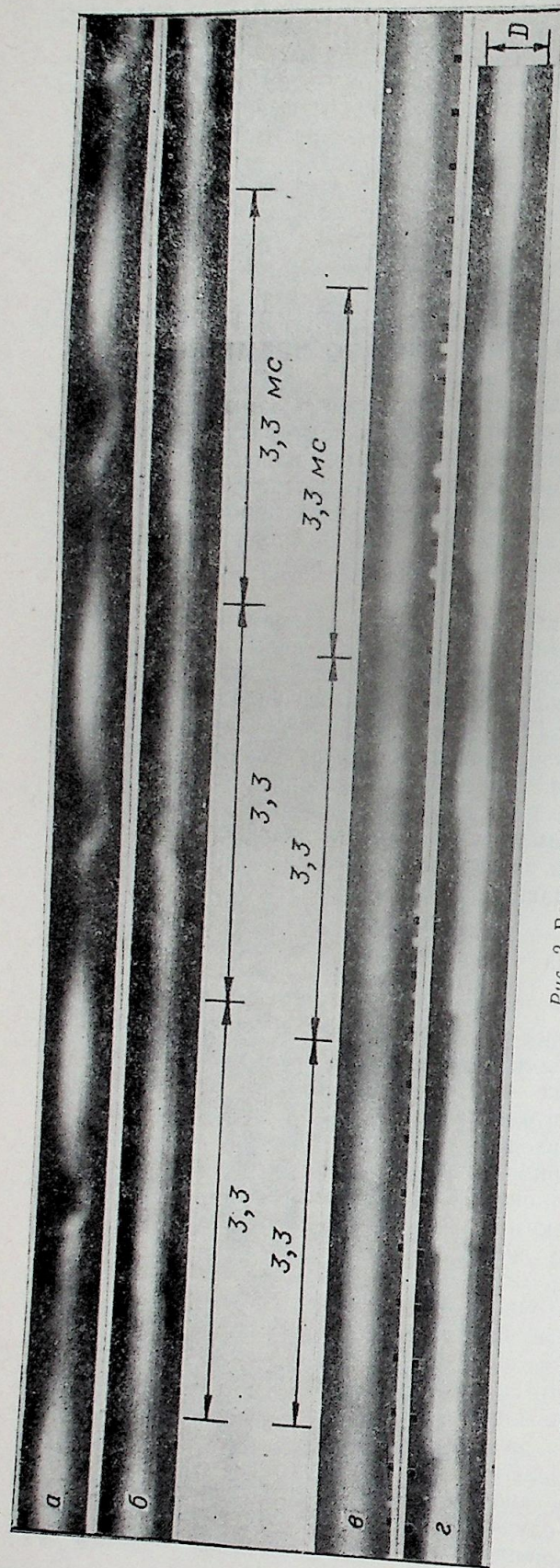


Рис. 2. Временная развертка диаметра дуги.

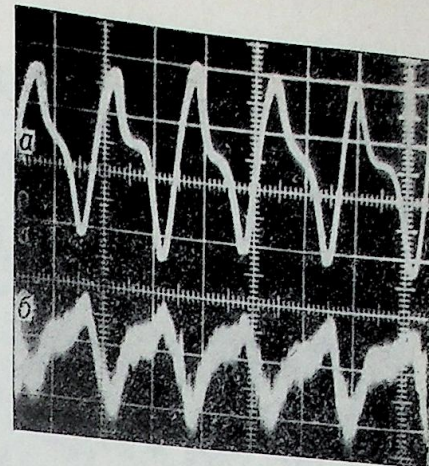
а — расход 0,8 г/с, ток дуги 35 А; б — расход 0,8 г/с, ток дуги 72 А; в — расход 0,2 г/с, ток дуги 100 А; г — расход 0,2 г/с, ток дуги 140 А.

Вторая часть задачи, а именно: записать последовательно во времени профили

достаточно яркий и не требуется слишком большого временного разрешения, проще пользоваться механическими развертками.

В настоящей работе применялась зеркальная развертка. Для сокращения временного интервала между предыдущей и последующей записями профилей вместо зеркала для развертки использовалась многогранная зеркальная призма. Схема измерений приведена на рис. 1. Изображение диаметра дугового канала D , отражаясь от зеркальной грани 12-гранной призмы, проектируется на входную щель монохроматора УМ-2. Для фиксирования центра дугового канала относительно получаемого сигнала по обе стороны канала по радиусу ставятся две лампочки L_1 , L_2 с вольфрамовыми нитями накала. Линзы L_2 , L_3 изображенные нити проектируются на плоскость входной щели УМ-2 по обе стороны от изображения канала дуги. При вращении призмы 3 перед щелью УМ-2 проходят последовательно изображения лампочки L_1 , дугового канала по диаметру, лампочки L_2 . Разложенный монохроматором свет попадает на фотумножитель ФЭУ-29, сигнал с которого подается на вертикальные пластины осциллографа «Tesla».

Рис. 3. Осциллограммы (развертка 2×10^{-3} с/см, чувствительность 10 мВ/см). а) колебания тока дуги регистрировались с помощью коаксиального шунта; б) колебания интенсивности излучения в центре дуги регистрировались через щель площадью $1 \cdot 0,04$ мм². Ток дуги 158 А.



один за другим, ранее не решалась, за исключением Вайдмана и Хопмана [3], которые записали три профиля интенсивности по радиусу через 3, 50 и 300 мкс с момента отключения источника возбуждения плазмы.

В настоящей работе эта часть задачи решалась следующим образом. Луч с экрана осциллографа проектировался на пленку скоростной кинокамеры СКС-1 М, работающей в режиме фоторегистра. Развертка сигнала по времени осуществлялась протяжкой пленки.

Данная методика использовалась для изучения изменения радиальной температуры в аргоновой дуге, стабилизированной стен-при давлении аргона 10^5 Н/м², расходе газа 0,8 и 0,2 г/с и токах 50—160 А. Излучение регистрировалось через кварцевое окно, находившееся на расстоянии 2 см от анода.

При изучении спектра излучения плазмы оказалось, что в нем присутствуют только линии Ag I и сплошной спектр. Линий, соответствующих не обнаружено внешних изменений электродов. После длительной работы не обнаружено внешних изменений электродов. Зависимость интенсивности сплошного спектра излучения аргона от температуры в длине волны 428, 5 нм рассчитывалась при условии локального термодинамического равновесия [4]. При таких параметрах плазма оптически тонкая [5] и погрешность в измеряемых температурах определяется точностью эксперимента (10%) [2].

Для исследования стабильности горения дуги по диаметру канала проводились временные развертки изображения диаметра на киноленту без разложения излучения по спектру. Из рис. 2, 3 видно, что интенсивность излучения меняется с частотой 300 Гц в фазе с колебаниями тока дуги. Наблюдаются также нестабильности в форме спирали, которые появляются всегда в определенной фазе изменения тока и, по-видимому, связаны с этими изменениями, а их частота зависит от скорости потока газа.

На рис. 4 в столбик помещены по 10 последовательно записанных сигналов, полученных описанным методом. Стрелками показаны сигналы от реперных лампочек L_1 и L_2 , между ними — радиальное распределение интенсивности излучения плазмы. Время записи радиального профиля 600 мкс, промежуток времени между двумя последовательно записанными профилями 6,6 мс. Для уменьшения сигнала от дуги при больших токах диафрагмировалась линза L_1 .

Видно, что дуга наиболее нестабильна при малых токах, однако, несмотря на это, она остается симметричной в каждый отдельный момент времени. Поэтому использовался обычный абелевский пересчет интенсивности по диаметру [6]. Пересчет велся сначала с правой стороны профиля до точки, соответствующей максимальной интенсивности, потом с левой. Для получения температурных профилей (рис. 5) использовалась зависимость коэффициента излучения сплошного спектра Ag на данной длине волны от температуры [5] в условиях локального термодинамического равновесия. Кружками обозначены точки на каж-

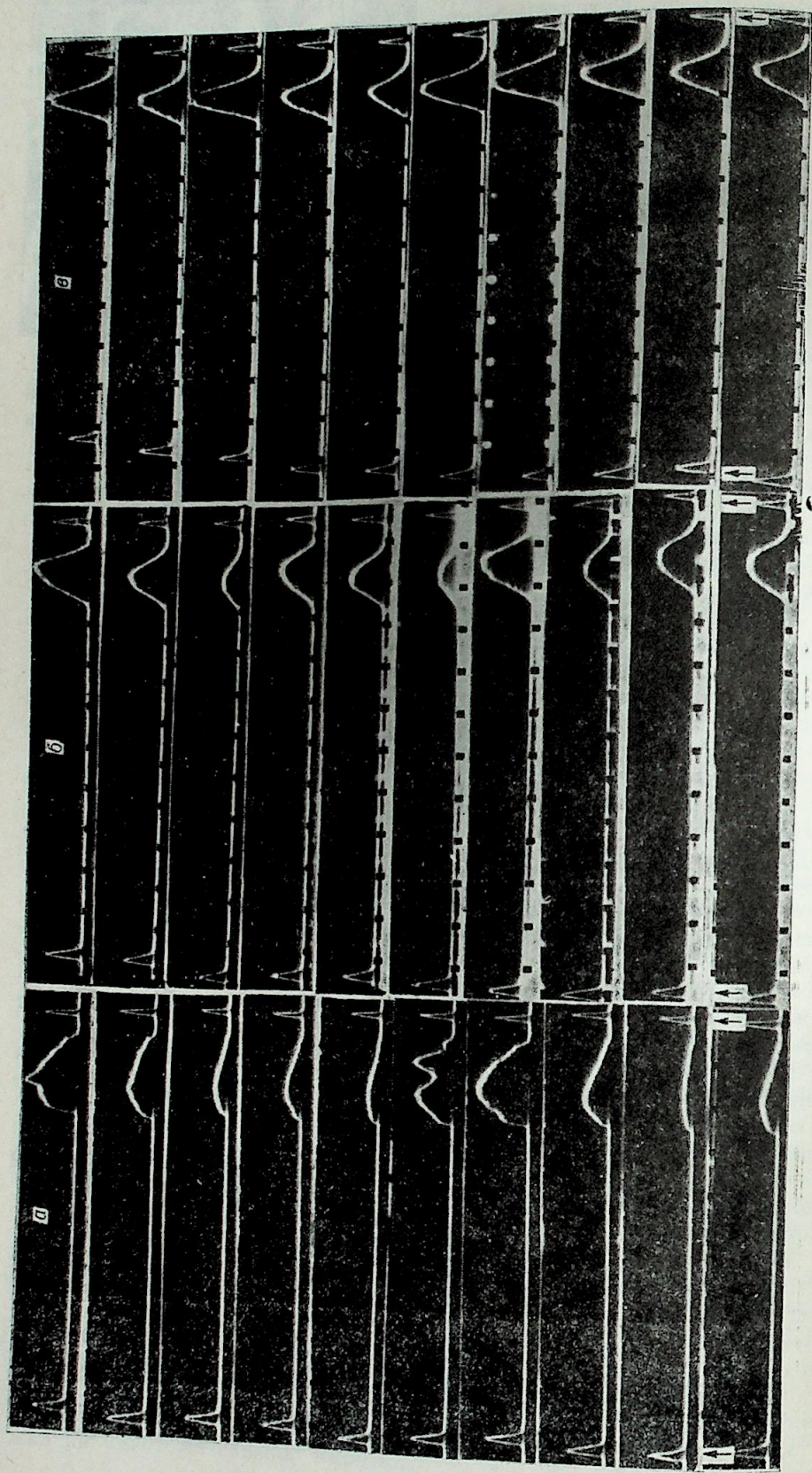


Рис. 4. Интенсивность излучения по диаметру канала для токов дуги.

а — 50 А; б — 88 А; в — 158 А. Стрелками показаны реперные лампочки.

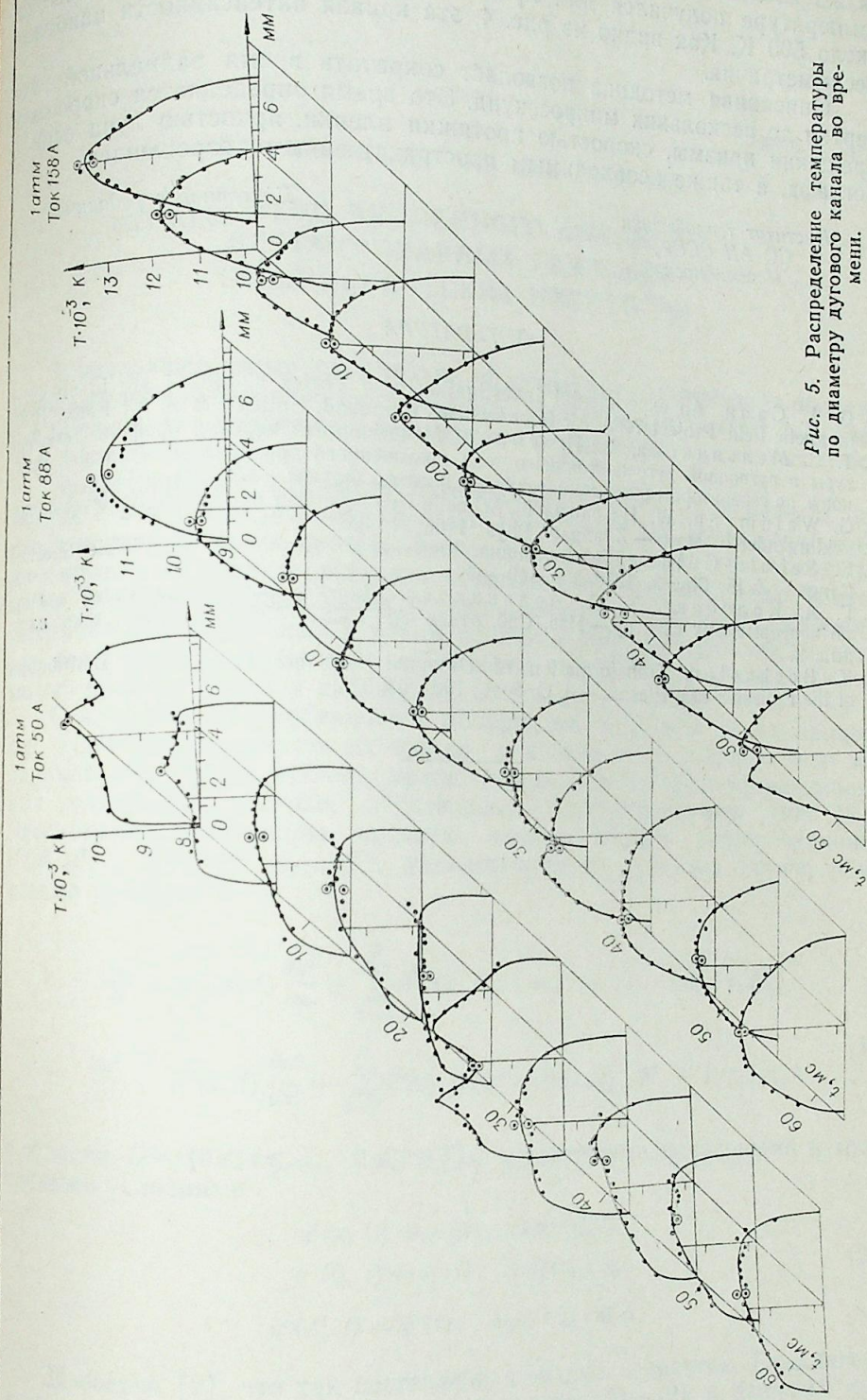


Рис. 5. Распределение температуры по диаметру дугового канала во времени.

дом профиле для максимальной интенсивности, которые получены пересчетом справа и слева. Видно, что разброс их по температуре находится в пределах точности эксперимента (10%). Наибольший разброс по температуре получился для кривой 1 при токе 88 А. Он составляет около 500 К. Как видно из рис. 4, эта кривая интенсивности наиболее несимметрична.

Описанная методика позволяет сократить время радиальной развертки до нескольких микросекунд. Это время определяется скоростью вращения призмы, скоростью протяжки пленки, яркостью луча осциллографа, а также необходимым пространственным разрешением.

Институт теплофизики
СО АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
15/III 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. G. L. Cann. An experimental investigation of a Vortex stabilized arc in an axial magnetic field. Project 7065. Air force systems command. United States Air Force, 1973.
2. Т. С. Мельникова, В. Н. Фокин. Мгновенные измерения профиля температуры в аргоновой дуге постоянного тока повышенного давления. Тез. докл. 6 Всес. конф. по генераторам низкотемпературной плазмы. Фрунзе, 1974, 381—384.
3. G. Waidmann, W. Norman. Schnelle Registrierung der Leuchtdichteverteilung abklingender Plasmen.—Z. angew. Phys., 1966, 21, 480.
4. E. Schulz-Gulde. The Continuous Emission of Argon in the Visible Spectral Range.—Z. für Physik., 1970, 230, 449—459.
5. Г. А. Колобова, Т. С. Мельникова. Диагностика поглощающей плазмы по непрерывному спектру.—Изв. Сиб. отдел. АН СССР, 1976, № 8, сер. техн. наук, вып. 2.
6. K. Bockasten. Transformation of Observed Radiance into Radial Distribution of the Emission of a Plasma.—J. O. S. A., 1961, 51, 943.

Н. Д. ДЕМИДЕНКО, Е. А. АЛЕКСАНДРОВА

МЕТОД ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА НЕСТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

В настоящее время значительно расширяется традиционная область использования математических моделей. При этом происходит усложнение моделей, что неизбежно приводит к использованию численных методов при работе с ними.

Моделирование химико-технологических систем охватывает в основном статические режимы их работы и служит для технологического проектирования таких систем. Поэтому, интересуясь в первую очередь динамическими характеристиками объектов, интересующая в первую очередь динамическими характеристиками объектов с точки зрения задач управления ими, рассмотрим метод исследования нестационарных режимов. В химической технологии к таким объектам относятся ректификационные колонны, реакторы, теплообменники и др. Предлагаемый метод можно применить и для анализа динамики других процессов.

Отвлекаясь от особенностей конкретных технологических процессов, будем рассматривать их только как объекты с распределенными параметрами. Такой процесс можно описать системой дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа [1]. Рассмотрим следующую краевую задачу. Найти вектор-функцию $U(u^1, u^2, \dots, u^{N_0}, u^{N_0+1}, \dots, u^N)$, удовлетворяющую системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^i}{\partial t} - w^i(x, t) \frac{\partial u^i}{\partial x} + \sum_{j=1}^N k^{ij}(x, t) u^j &= f^i(x, t), \quad 1 \leq i \leq N_0, \\ \frac{\partial u^i}{\partial t} + w^i(x, t) \frac{\partial u^i}{\partial x} + \sum_{j=1}^N k^{ij}(x, t) u^j &= f^i(x, t), \quad N_0 + 1 \leq i \leq N \end{aligned} \quad (1)$$

в области $D = \{0 \leq x \leq X; 0 \leq t \leq T\}$, с заданными начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} u^i(x, 0) &= \varphi^i(x), \quad 1 \leq i \leq N, \\ u^i(0, t) &= \psi^i(t), \quad 1 \leq i \leq N_0, \\ u^i(X, t) &= \psi^i(t), \quad N_0 + 1 \leq i \leq N. \end{aligned} \quad (2)$$

Известно [2], что так поставленная задача корректна. Предлагаемый метод позволяет свести решение задачи (1)—(2) к решению системы алгебраических уравнений. При этом необходимо решить два вопроса: о разрешимости системы алгебраических уравнений, получающейся при дискретизации задачи (1)—(2), и о сходимости полученного решения дискретной задачи к решению задачи (1)—(2).

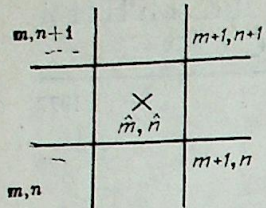


Рис. 1.

Предположим, что функции $\omega^i(x, t)$, $u^i(x, t)$ и $f^i(x, t)$ ограничены и неотрицательны, а $k^{ij}(x, t)$ ограничены. Покроем область D равномерной прямоугольной сеткой $\omega_{h,n} = \{(x_m = mh, t_n = nk); m = 0, 1, \dots, M; n = 0, 1, \dots, L; hM = X; kL = T\}$ и вместо функций непрерывного аргумента $u^i(x, t)$, $\omega^i(x, t)$, $f^i(x, t)$ и $k^{ij}(x, t)$ будем рассматривать функции дискретного аргумента, приняв $u_{m,n}^i = u^i(mh, nk)$, $\omega_{m,\hat{n}}^i = \omega^i(m + 1/2)h, (n + 1/2)k$,

$$f_{m,\hat{n}}^i = f^i((m + 1/2)h, (n + 1/2)k), \quad k_{m,\hat{n}}^{ij} = k^{ij}((m + 1/2)h, (n + 1/2)k).$$

Воспользовавшись четырехточечным шаблоном (рис. 1), заменим дифференциальную задачу (1)–(2) разностной. Для этого во внутренних точках сетки положим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^i}{\partial t} \Big|_{m,\hat{n}} &= \frac{u_{m,n+1}^i + u_{m+1,n+1}^i - u_{m,n}^i - u_{m+1,n}^i}{2k}, \quad i = 1, \dots, N, \\ \frac{\partial u^i}{\partial x} \Big|_{m,\hat{n}} &= \frac{u_{m+1,n}^i + u_{m+1,n+1}^i - u_{m,n}^i - u_{m,n+1}^i}{2h}, \\ u_{m,\hat{n}}^i &= \frac{u_{m,n}^i + u_{m+1,n}^i + u_{m,n+1}^i + u_{m+1,n+1}^i}{4}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\frac{u_{m,n+1}^i + u_{m+1,n+1}^i - u_{m,n}^i - u_{m+1,n}^i}{2k} - \omega_{m,\hat{n}}^i \frac{u_{m+1,n}^i + u_{m+1,n+1}^i - u_{m,n}^i - u_{m,n+1}^i}{2h} + \\ &+ \sum_{j=1}^N k_{m,\hat{n}}^{ij} \frac{u_{m,n}^j + u_{m+1,n}^j + u_{m,n+1}^j + u_{m+1,n+1}^j}{4} = f_{m,\hat{n}}^i, \quad 1 \leq i \leq N_0, \quad (3) \\ &\frac{u_{m,n+1}^i + u_{m+1,n+1}^i - u_{m,n}^i - u_{m+1,n}^i}{2k} + \omega_{m,\hat{n}}^i \frac{u_{m+1,n}^i + u_{m,n}^i - u_{m,n}^i - u_{m,n+1}^i}{2h} + \\ &+ \sum_{j=1}^N k_{m,\hat{n}}^{ij} \frac{u_{m,n}^j + u_{m+1,n}^j + u_{m,n+1}^j + u_{m+1,n+1}^j}{4} = f_{m,\hat{n}}^i, \quad N_0 + 1 \leq i \leq N. \end{aligned}$$

В результате дискретизации начальных и граничных условий (2) получим

$$\begin{aligned} u_{m,0}^i &= \Phi_m^i, \quad m = 0, 1, \dots, M; \\ u_{0,n}^i &= \Psi_n^i, \quad 1 \leq i \leq N_0; \quad u_{M,n}^i = \Psi_n^i, \quad N_0 + 1 \leq i \leq N, \quad n = 0, 1, \dots, L. \end{aligned} \quad (4)$$

Для доказательства разрешимости системы (3)–(4) введем обозначения

$$\begin{aligned} U^1 &= [u^1, u^2, \dots, u^{N_0}, 0, \dots, 0], \quad U^2 = [0, \dots, 0, u^{N_0+1}, \dots, u^N], \\ F^1 &= [f^1, f^2, \dots, f^{N_0}, 0, \dots, 0], \quad F^2 = [0, \dots, 0, f^{N_0+1}, \dots, f^N], \end{aligned}$$

$$W = \begin{pmatrix} -\omega^1 & 0 & & & \\ & 0 & -\omega^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -\omega^{N_0} & 0 \\ & & & & & 0 & +\omega^{N_0+1} \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \omega^N \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} k^{11}, k^{12}, \dots, k^{1N} \\ k^{21}, k^{22}, \dots, k^{2N} \\ \dots \\ k^{N1}, k^{N2}, \dots, k^{NN} \end{pmatrix}.$$

Представим систему (3)–(4) в виде

$$\begin{aligned} A_{m,\hat{n}}^1 U_{m,n+1}^1 + A_{m,\hat{n}}^2 U_{m+1,n+1}^1 + B_{m,\hat{n}}^1 U_{m,n+1}^2 + B_{m,\hat{n}}^2 U_{m+1,n+1}^2 &= \Phi_{m,\hat{n}}^1, \\ A_{m,\hat{n}}^1 U_{m,n+1}^2 + A_{m,\hat{n}}^2 U_{m+1,n+1}^2 + B_{m,\hat{n}}^1 U_{m,n+1}^1 + B_{m,\hat{n}}^2 U_{m+1,n+1}^1 &= \Phi_{m,\hat{n}}^2, \end{aligned} \quad (5)$$

$$U_{m,0} = U_{m,0}^1 + U_{m,0}^2 = \Phi_m,$$

$$U_{0,n}^1 = \Psi_n^1, \quad U_{M,n}^2 = \Psi_n^2. \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} A_{m,\hat{n}}^1 &= \left(\frac{E}{k} + \frac{W}{h} - \frac{K}{2} \right)_{m,\hat{n}}, \quad A_{m,\hat{n}}^2 = \left(\frac{E}{k} - \frac{W}{h} - \frac{K}{2} \right)_{m,\hat{n}}, \\ B_{m,\hat{n}}^1 &= B_{m,\hat{n}}^2 = -\frac{K_{m,\hat{n}}}{2}, \quad C_{m,\hat{n}}^1 = \left(\frac{E}{k} - \frac{W}{h} + \frac{K}{2} \right)_{m,\hat{n}}, \\ C_{m,\hat{n}}^2 &= \left(\frac{E}{k} + \frac{W}{h} + \frac{K}{2} \right)_{m,\hat{n}}, \quad D_{m,\hat{n}}^1 = D_{m,\hat{n}}^2 = \frac{K_{m,\hat{n}}}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{m,\hat{n}}^1 &= C_{m,\hat{n}}^1 U_{m,n}^1 + C_{m,\hat{n}}^2 U_{m+1,n}^1 + D_{m,\hat{n}}^1 U_{m,n}^2 + D_{m,\hat{n}}^2 U_{m+1,n}^2 + F_{m,\hat{n}}^1, \\ \Phi_{m,\hat{n}}^2 &= C_{m,\hat{n}}^1 U_{m,n}^2 + C_{m,\hat{n}}^2 U_{m+1,n}^2 + D_{m,\hat{n}}^1 U_{m,n}^1 + D_{m,\hat{n}}^2 U_{m+1,n}^1 + F_{m,\hat{n}}^2. \end{aligned}$$

Для решения системы (5)–(6) предлагается метод прогонки, который отличается от известных тем, что граничные условия заданы на правом и левом конце отрезка $[0, X]$ одновременно. При $m=0$, умножив первое уравнение (5) на $(B_{1/2,\hat{n}}^1)^{-1}$, а второе — на $(A_{1/2,\hat{n}}^1)^{-1}$ и сложив их, получим

$$\begin{aligned} U_{1,n+1}^1 &= - \left[(B_{1/2,\hat{n}}^1)^{-1} A_{1/2,\hat{n}}^2 - (A_{1/2,\hat{n}}^1)^{-1} B_{1/2,\hat{n}}^2 \right]^{-1} \left[(B_{1/2,\hat{n}}^1)^{-1} B_{1/2,\hat{n}}^2 - \right. \\ &- \left. (A_{1/2,\hat{n}}^1)^{-1} A_{1/2,\hat{n}}^2 \right] U_{1,n+1}^2 + \left[(B_{1/2,\hat{n}}^1)^{-1} A_{1/2,\hat{n}}^2 - (A_{1/2,\hat{n}}^1)^{-1} B_{1/2,\hat{n}}^2 \right] \times \\ &\times \left\{ (B_{1/2,\hat{n}}^1)^{-1} \Phi_{1/2,\hat{n}}^1 - (A_{1/2,\hat{n}}^1)^{-1} \Phi_{1/2,\hat{n}}^2 - \left[(B_{1/2,\hat{n}}^1)^{-1} - \right. \right. \\ &- \left. \left. (A_{1/2,\hat{n}}^1)^{-1} B_{1/2,\hat{n}}^1 \right] U_{0,n+1}^1 \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Аналогичное выражение можно получить для $U_{0,n+1}^2$. Продолжая этот процесс для $m=1, 2, \dots, M$, будем иметь

$$\begin{aligned} U_{m+1,n+1}^1 &= P_{m,\hat{n}}^{11} U_{m+1,n+1}^2 + P_{m,\hat{n}}^{12}, \\ U_{m,n+1}^2 &= P_{m,\hat{n}}^{21} U_{m,n+1}^1 + P_{m,\hat{n}}^{22}, \end{aligned} \quad (8)$$

где матрицы $P_{m,\hat{n}}^{11}$, $P_{m,\hat{n}}^{21}$ и векторы $P_{m,\hat{n}}^{12}$, $P_{m,\hat{n}}^{22}$ определяются так:

$$\begin{aligned} P_{m,\hat{n}}^{11} &= - \left[(A_{m,\hat{n}}^1 \cdot P_{m-1,\hat{n}}^{11} + B_{m,\hat{n}}^1)^{-1} A_{m,\hat{n}}^2 - (B_{m,\hat{n}}^1 \cdot P_{m-1,\hat{n}}^{11} + A_{m,\hat{n}}^1)^{-1} \times \right. \\ &\times \left. B_{m,\hat{n}}^2 \right]^{-1} \left[(A_{m,\hat{n}}^1 \cdot P_{m-1,\hat{n}}^{11} + B_{m,\hat{n}}^1)^{-1} \cdot B_{m,\hat{n}}^2 - (B_{m,\hat{n}}^1 \cdot P_{m-1,\hat{n}}^{11} + \right. \\ &\left. + A_{m,\hat{n}}^1)^{-1} \cdot A_{m,\hat{n}}^2 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{m,\hat{n}}^{12} &= \left[(A_{m,\hat{n}}^{11} \cdot P_{m-1,\hat{n}}^{11} + B_{m,\hat{n}}^1)^{-1} A_{m,\hat{n}}^2 - (B_{m,\hat{n}}^1 \cdot P_{m-1,\hat{n}}^{11} + A_{m,\hat{n}}^1)^{-1} \times \right. \\
&\quad \left. \times B_{m,\hat{n}}^2 \right]^{-1} \left[(A_{m,\hat{n}}^1 \cdot P_{m-1,\hat{n}}^{11} + B_{m,\hat{n}}^1)^{-1} (\Phi_{m,\hat{n}}^1 - A_{m,\hat{n}}^1 \cdot P_{m-1,\hat{n}}^{12}) - \right. \\
&\quad \left. - (B_{m,\hat{n}}^1 \cdot P_{m-1,\hat{n}}^{11} + A_{m,\hat{n}}^1) (\Phi_{m,\hat{n}}^2 - B_{m,\hat{n}}^1 \cdot P_{m-1,\hat{n}}^{12}) \right], \\
P_{m,\hat{n}}^{21} &= - \left[(A_{m,\hat{n}}^2)^{-1} (A_{m,\hat{n}}^1 \cdot P_{m-1,\hat{n}}^{11} + B_{m,\hat{n}}^1) - (B_{m,\hat{n}}^2)^{-1} (B_{m,\hat{n}}^1 \cdot P_{m-1,\hat{n}}^{11} + \right. \\
&\quad \left. + A_{m,\hat{n}}^1) \right]^{-1} \left[(A_{m,\hat{n}}^2)^{-1} B_{m,\hat{n}}^2 - (B_{m,\hat{n}}^2)^{-1} A_{m,\hat{n}}^2 \right], \quad (9) \\
P_{m,\hat{n}}^{22} &= \left[(A_{m,\hat{n}}^2)^{-1} (A_{m,\hat{n}}^1 \cdot P_{m-1,\hat{n}}^{11} + B_{m,\hat{n}}^1) - (B_{m,\hat{n}}^2)^{-1} (B_{m,\hat{n}}^1 \cdot P_{m-1,\hat{n}}^{11} + \right. \\
&\quad \left. + A_{m,\hat{n}}^1) \right]^{-1} \left[(A_{m,\hat{n}}^2)^{-1} (\Phi_{m,\hat{n}}^1 - A_{m,\hat{n}}^1 \cdot P_{m-1,\hat{n}}^{12}) - (B_{m,\hat{n}}^2)^{-1} (\Phi_{m,\hat{n}}^2 - \right. \\
&\quad \left. - B_{m,\hat{n}}^1 \cdot P_{m-1,\hat{n}}^{12}) \right].
\end{aligned}$$

Итак, решение системы (5) — (6) можно получить с помощью следующего алгоритма:

1) вначале определяем по формулам (9) коэффициенты $P_{m,\hat{n}}^{ij}$ ($i, j = 1, 2$) для $m=0, 1, \dots, M$, используя граничное условие для функции U^1 на левом конце отрезка $[0, X]$ (прямая прогонка);

2) затем находим значения функций U^1, U^2 для $m=M, M-1, \dots, 0$ по формулам (8), используя граничное условие для функции U^2 на правом конце (обратная прогонка).

Теперь докажем, что решение дискретной задачи при достаточно малых k и h близко к решению дифференциальной системы, т. е. имеет место сходимость. Для этого покажем, что решение системы (1) — (2) почти точно удовлетворяет разностной системе (аппроксимация) и что для решения разностной системы имеет место оценка $\|u_h\| \leq M_1 \|f_h\|$, где $\|u_h\|, \|f_h\|$ — какие-либо нормы разностного решения u_h и правой части; M_1 — постоянная, не зависящая от h (устойчивость). Чтобы показать аппроксимацию, достаточно установить равенство $L_h u - Lu = O(h)$, где L_h — разностный оператор, а L — дифференциальный. Разложив в ряд Тейлора функции $u_{m,n}^i, u_{m+1,n}^i, u_{m+1,n+1}^i, u_{m,n+1}^i$ и подставив эти разложения в систему (3), после несложных преобразований получим, что $L_h u - Lu = O(h^2 + k^2)$, т. е. имеет место аппроксимация со вторым порядком по отношению h и k . При наличии устойчивости такая аппроксимация вполне удовлетворительна для практических целей.

Покажем теперь устойчивость разностной схемы. Для этого используем так называемый энергетический метод, который состоит в том, что, выбирая подходящую норму для решения системы, стараются получить оценку вида

$$\|u\|_U^2 \leq C_1 \|u\|_{U_0}^2 + C_2 \|u\|_{U_{лев}}^2 + C_3 \|u\|_{U_{прав}}^2 + C_4 \|f\|_F^2, \quad (*)$$

где $\|u\|_{U_0}$ — норма начального условия; $\|u\|_{U_{лев}}, \|u\|_{U_{прав}}$ — нормы граничных условий; $\|f\|_F$ — норма правой части; C_1, C_2, C_3, C_4 — постоянные, не зависящие от h и k .

Считая, что $1 \leq i \leq N_0$, умножим уравнение i -е системы (3) на $2(u_{m,n}^i + u_{m+1,n+1}^i)$, а уравнение $N_0 + 1 \leq i \leq N$ на $2(u_{m+1,n}^i + u_{m,n+1}^i)$. Для упрощения записи введем следующие обозначения:

$$Q_{m,n}^i = (u_{m,n}^i + u_{m+1,n}^i)^2 - \lambda \omega_{m,\hat{n}}^i (u_{m,n}^i + u_{m+1,n}^i)^2,$$

$$P_{m,n}^i = (u_{m,n}^i - u_{m+1,n}^i)^2 - \lambda \omega_{m,\hat{n}}^i (u_{m,n}^i + u_{m+1,n}^i)^2,$$

$$\sigma^i = \begin{cases} -1, & \text{если } 1 \leq i \leq N_0 \\ 1, & \text{если } N_0 + 1 \leq i \leq N, \quad \lambda = \frac{k}{h}. \end{cases}$$

Тогда исходную систему уравнений (3) можно записать

$$\begin{aligned}
& Q_{m,n+1}^i - Q_{m,n}^i - \sigma^i P_{m+1,n}^i + \sigma^i P_{m,n}^i = \\
& = \frac{k}{2} \left[\left(\sum_{j=1}^N k_{m,\hat{n}}^{ij} (u_{m,n}^j + u_{m+1,n}^j + u_{m,n+1}^j + u_{m+1,n+1}^j) + 4f_{m,\hat{n}}^i \right) \times \right. \\
& \quad \times (u_{m,n}^i + u_{m,n+1}^i) + O(h) \left(\sum_{j=1}^N k_{m,\hat{n}}^{ij} (u_{m,n}^j + u_{m+1,n}^j + u_{m,n+1}^j + \right. \\
& \quad \left. \left. + u_{m+1,n+1}^j) + 4f_{m,\hat{n}}^i \right) \right], \quad 1 \leq i \leq N, \quad (10)
\end{aligned}$$

причем в правой части последнего соотношения сделана замена

$$u_{m+1,n+1}^i = u_{m,n+1}^i + O(h), \quad u_{m+1,n}^i = u_{m,n}^i + O(h).$$

Для $Q_{m,n}^i$ в предположении, что $\lambda \max_{x,t,i} \omega^i(x,t) \leq 1$, нетрудно получить следующую оценку:

$$\gamma_2 [(u_{m,n}^i)^2 + (u_{m+1,n}^i)^2] \leq Q_{m,n}^i \leq \gamma_1 [(u_{m,n}^i)^2 + (u_{m+1,n}^i)^2], \quad (11)$$

где

$$\gamma_1 = 2 \max_{x,t,i} (1, \lambda \max_{x,t,i} \omega^i(x,t)), \quad \gamma_2 = 2 \left(1 - \sqrt{\lambda \max_{x,t,i} \omega^i(x,t)} \right)^2.$$

Введем обозначение $Q_n^i = \sum_{m=0}^{L-1} Q_{m,n}^i$. Просуммируем левую и правую части (10) по m и найдем выражение Q_n^i через Q_0^i

$$\begin{aligned}
Q_n^i &= Q_0^i + \sigma^i \sum_{p=0}^n (P_{M,p}^i - P_{0,p}^i) + \frac{k}{2} \sum_{p=0}^n \sum_{m=0}^{M-1} \left[\sum_{j=1}^N k_{m,\hat{p}}^{ij} (u_{m,p}^j + u_{m,p+1}^j + \right. \\
&\quad \left. + u_{m+1,p}^j + u_{m+1,p+1}^j) + 4f_{m,\hat{p}}^i \right] (u_{m,p}^i + u_{m,p+1}^i) + O(h) \frac{k}{2} \sum_{p=0}^n \sum_{m=0}^{M-1} \times \\
&\quad \times \left[\sum_{j=1}^N k_{m,\hat{p}}^{ij} (u_{m,p}^j + u_{m+1,p}^j + u_{m,p+1}^j + u_{m+1,p+1}^j) + 4f_{m,\hat{p}}^i \right].
\end{aligned}$$

В силу неравенства (11), из которого следует, что

$$Q_{m,0}^i \leq \gamma_1 [(u_{m,0}^i)^2 + (u_{m+1,0}^i)^2],$$

$$Q_{m,n}^i \geq \gamma_2 [(u_{m,n}^i)^2 + (u_{m+1,n}^i)^2],$$

можем записать, суммируя по i и n одновременно,

$$\begin{aligned}
& \gamma_2 \sum_{i,n,m} [(u_{m,n}^i)^2 + (u_{m+1,n}^i)^2] \leq \gamma_1 \sum_{i,m,n} [(u_{m,0}^i)^2 + (u_{m+1,0}^i)^2] + \\
& + \sum_{i,n} \sum_{p=0}^n (P_{M,p}^i - P_{0,p}^i) + 2k \sum_{i,m,n} \sum_{p=0}^n \left(\sum_{j=1}^N k_{m,\hat{p}}^{ij} u_{m,\hat{p}}^j + f_{m,\hat{p}}^i \right) \times \\
& \times (u_{m,p}^i + u_{m,p+1}^i) + O(h) 2k \sum_{i,m,n} \sum_{p=0}^n \left[\sum_{j=1}^N k_{m,\hat{p}}^{ij} u_{m,\hat{p}}^j + f_{m,\hat{p}}^i \right]. \quad (12)
\end{aligned}$$

Для второго слагаемого в правой части (12) можно получить оценку

$$\sum_{i,n} \sum_{p=0}^n (P_{M,p}^i - P_{0,p}^i) \leq 2M \sum_{n=0}^L \sum_{i=1}^N (u_{M,n}^i)^2 + 2\lambda M \max_{i,x,t} \omega^i(x,t) \sum_{n=0}^L \sum_{i=1}^N (u_{0,n}^i)^2. \quad (13)$$

Для гиперболической системы в канонической форме всегда можно предполагать диссипативность граничных условий, т. е.

$$\sum_{i=N_0+1}^N \omega_{0,\hat{n}}^i (u_{0,n}^i)^2 \geq \sum_{i=1}^{N_0} \omega_{0,\hat{n}}^i (u_{0,n}^i)^2, \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^{N_0} \omega_{M,\hat{n}}^i (u_{M,n}^i)^2 \geq \sum_{i=N_0+1}^N \omega_{M,\hat{n}}^i (u_{M,n}^i)^2. \quad (15)$$

Из неравенства (14) и (15) получим

$$\sum_{i=1}^{N_0} (u_{0,n}^i)^2 \leq \frac{\max_{i,x,t} \omega^i}{\min_{i,x,t} \omega^i} \sum_{i=N_0+1}^N (u_{0,n}^i)^2 \leq \beta \sum_{i=N_0+1}^N \sum_{m=0}^M (u_{m,n}^i)^2, \quad (14')$$

$$\sum_{i=N_0+1}^N (u_{M,n}^i)^2 \leq \frac{\max_{i,x,t} \omega^i}{\min_{i,x,t} \omega^i} \sum_{i=1}^{N_0} (u_{M,n}^i)^2 \leq \beta \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{m=0}^M (u_{m,n}^i)^2. \quad (15')$$

С учетом последних неравенств (13) примет вид

$$\sum_{i,n} \sum_{p=0}^n (P_{M,p}^i - P_{0,p}^i) \leq \max\{4M\beta, 8\lambda M\beta\} \sum_{i=1}^N \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^L (u_{m+1,n}^i)^2. \quad (16)$$

Оценку для третьего слагаемого в правой части (12) можно получить, применяя неравенство Коши — Буняковского

$$\begin{aligned} 2k \sum_{i,m,n} \sum_{p=0}^n \left(\sum_{j=1}^N k_{m,p}^{ij} u_{m,p}^j + f_{m,\hat{n}}^i \right) (u_{m,p}^i + u_{m,p+1}^i) &\leq \\ &\leq 2k \sqrt{M \sum_{i,j,m,n} (k_{m,p}^{ij})^2} \cdot \sqrt{MN \sum_{j,m,n} (u_{m,n}^j)^2} + \\ &+ 2 \sqrt{M \sum_{i,m,n} (f_{m,\hat{n}}^i)^2} \cdot \sqrt{2M \sum_{i,m,n} [(u_{m,n}^i)^2 + (u_{m,n+1}^i)^2]}. \end{aligned} \quad (17)$$

Аналогично можно оценить последнее слагаемое правой части в (12)

$$\begin{aligned} O(h) 2k \sum_{i,m,n} \sum_{p=0}^n \left[\sum_{j=1}^N k_{m,p}^{ij} u_{m,p}^j + 4f_{m,\hat{n}}^i \right] &\leq O(h) 2k \sqrt{M \sum_{i,j,m,n} (k_{m,n}^{ij})^2} \times \\ &\times \sqrt{MN \sum_{i,m,n} (u_{m,n}^i)^2} + O(h) 2kM \sum_{i,m,n} f_{m,\hat{n}}^i. \end{aligned} \quad (18)$$

Введем нормы для решения системы $u(x, t)$, правой части и начальных условий

$$\|u\|^2 = \sum_{i,m,n} h k (u_{m,n}^i)^2, \quad \|u\|_0^2 = \sum_{i,m} h (u_{m,0}^i)^2, \quad \|f\|^2 = \sum_{i,m,n} h k (f_{m,\hat{n}}^i)^2.$$

Теперь воспользуемся ε -неравенством $\|a\| \|b\| \leq \varepsilon \|a\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|b\|^2$, где $\varepsilon > 0$ любое. Обозначив $\gamma_3 = \max\{4M\beta, 8\lambda M\beta\}$ и воспользовавшись неравенствами (16) — (18), окончательно получим

$$\begin{aligned} \gamma_2 \|u\|^2 &\leq \gamma_1 \|u\|_0^2 + \gamma_3 \|u\|^2 + 4\sqrt{MN} \|K\| \cdot \|u\|^2 + \\ &+ 4\varepsilon \|f\|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|u\|^2 + O(h) \sqrt{N\varepsilon} \|K\| + \frac{O(h)}{4\varepsilon} \|u\|^2 + F, \end{aligned}$$

откуда следует требуемая оценка

$$\|u\|^2 \leq C_1 \|u\|_0^2 + C_2 \|f\|^2 + C_3.$$

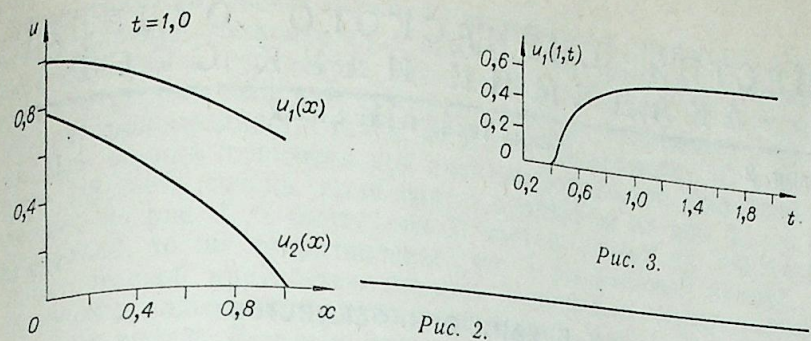


Рис. 2.

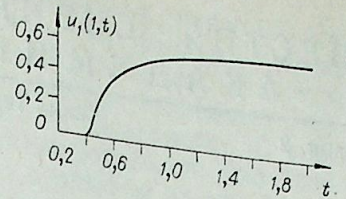


Рис. 3.

На рис. 2 и 3 приведены результаты расчетов для двух уравнений, описывающих процесс в противоточном теплообменнике с параметрами $\alpha_1 = \frac{k_1}{w_1} = 0,5$; $\alpha_2 = \frac{k_2}{w_2} = 1,5$; $\tau_1 = \frac{1}{w_1} = 0,5$; $\tau_2 = \frac{1}{w_2} = 0,5$. Расчетные данные хорошо согласуются с экспериментальными [3, 4]. Метод применяется при расчете многокомпонентной ректификации [4].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данный численный метод решения системы квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа позволяет с минимальными затратами времени ЭЦВМ получать статические и динамические характеристики химико-технологических аппаратов. Таким образом, метод моделирования тепло- и массообменных процессов на основе уравнений в частных производных [1] является эффективным в инженерной практике при анализе нестационарных режимов и синтезе систем управления, поскольку он, во-первых, отражает распределенный характер управляемых химико-технологических процессов, во-вторых, достаточно строго математически обоснован [4] и позволяет разработать быстродействующий алгоритм для расчета переходных режимов промышленных объектов.

Вычислительный центр
СО АН СССР,
Красноярск

Поступила в редакцию
25/X 1976

ЛИТЕРАТУРА

- Н. Д. Демиденко, С. В. Ушанов. Моделирование, распределенный контроль и распределенное управление процессами ректификации.— Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1975, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.
- С. К. Годунов. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1971.
- Б. Н. Девятков, Н. Д. Демиденко, Б. А. Фейст. Экспериментальное исследование распределенного контроля и управления противоточного теплообменного аппарата.— Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1972, № 8. Сер. техн. наук, вып. 2.
- Б. Н. Девятков, Н. Д. Демиденко, В. А. Охорзин. Динамика распределенных процессов в технических аппаратах, распределенный контроль и управление. Красноярское кн. изд.-во, 1976.

К. Б. КАНН, В. Н. ФЕКЛИСТОВ

ОБ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ
ГАЗОЖИДКОСТНЫХ ЭМУЛЬСИИ И ПЕН

Электропроводность пены зависит от электропроводности раствора, из которого она получена, и от объемного газосодержания φ , под которым понимается отношение объема газовой фазы к объему пены. Практически при изучении пен пользуются другим понятием — кратностью (K), которая представляет собой отношение объема пены к объему содержащейся в ней жидкости. Между этими параметрами существует простая зависимость: $\varphi = 1 - 1/K$.

Некоторые авторы [1, 2, 3] успешно использовали результаты измерения электропроводности газожидкостных смесей для определения их газосодержания. При этом предполагалось, что удельное сопротивление смеси ρ_0 растет прямо пропорционально газосодержанию. В терминах кратности это можно выразить так:

$$\rho_0 = K\rho_0, \quad (1)$$

где ρ_0 — удельное сопротивление жидкости, входящей в состав смеси. Измеренные газосодержания находились в пределах 20 ÷ 70% (кратность 1,25 ÷ 3,5). В указанных пределах такое предположение не приводило к каким-либо противоречиям. Однако при больших газосодержаниях отклонения от линейности становятся существенными, что отмечено в [2]. Граница применимости соотношения (1) совпадает с областью перехода газожидкостной эмульсии в пену. Действительно, кратность $K=3,855$ ($\varphi \approx 74\%$) соответствует плотной упаковке соприкасающихся газовых пузырьков шаровой формы; при газосодержании $\varphi > 74\%$ шаровые пузырьки деформируются, и газожидкостная смесь приобретает пенную (полиэдрическую) структуру.

В работах по определению кратности пен по их электропроводности (например, [4]) авторы пользуются соотношением, предложенным Манегольдом [5],

$$\rho_n = 3/2 K\rho_0, \quad (2)$$

где ρ_n и ρ_0 — удельная электропроводность пены и раствора, из которого она получена.

Коэффициент 3/2 получен из геометрических соображений для модели пены с кубическими ячейками. Бикерман [6], несколько изменив модель, получил значение этого коэффициента 2,25. Рассмотренные модели весьма далеки от структуры реальной пены. Таким образом, метод определения кратности пен по их электропроводности в настоящее время нельзя считать теоретически обоснованным.

В данной работе сделана попытка получить аналитическую зависимость электропроводности пены от важнейших ее характеристик — кратности и дисперсности.

Рассмотрим эмульсию газовых пузырьков в жидкости. Из двух вариантов плотной упаковки (для наших целей равнозначных) возьмем вариант кубической структуры, элементарной ячейкой которой является гранецентрированный куб (рис. 1, а). Ниже приведен упрощенный расчет электропроводности такой ячейки в зависимости от газосодержания. Для оценки относительной электропроводности достаточно рассмотреть 1/8 часть ячейки, выделенную пунктиром на рис. 1, б (остальные 7 частей в зависимости от газосодержания, то же сопротивление, что и выделенный кубик). Электрической кратностью назовем отношение электросопротивления R_n кубика, содержащего газовые пузырьки (рис. 1, б), к сопротивлению того же кубика $R_0 = \rho_0/a$, заполненного жидкостью с удельным сопротивлением ρ_0 :

$$K_0 = R_n/R_0 = R_n a/\rho_0 = \rho_n/\rho_0. \quad (3)$$

где $\rho_n = R_n a$ — удельное сопротивление газожидкостной смеси. Фактическая кратность — это отношение объема кубика к объему содержащейся в нем жидкости:

$$K_\phi = \frac{a^3}{a^3 - 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi r_0^3} = \frac{3a^3}{3a^3 - 2\pi r_0^3} \quad (4)$$

$$K_\phi = 3/3 - 2\pi \epsilon^3,$$

или $\epsilon \equiv r_0/a$.

Из рис. 1, в, на котором представлена передняя грань рассмотренного кубика, видно, что в интервале $0 < \epsilon < 0,5$ ($1 < K_\phi < 1,355$) сопротивление кубика R_n может быть представлено как

$$R_n = 2\rho_0 \left(\int_0^{r_0} \frac{dl}{s} + \frac{a/2 - r}{a^2} \right).$$

В полярных координатах $dl = r_0 \cos \alpha \cdot d\alpha$, $S = a^2 - \frac{\pi r_0^2}{2} \cos^2 \alpha$

$$R_n = 2\rho_0 \int_0^{\pi/2} \frac{r_0 \cos \alpha \cdot d\alpha}{a^2 - \frac{\pi r_0^2}{2} \cos^2 \alpha} + \rho_0 \frac{a - 2r_0}{a^2}. \quad (5)$$

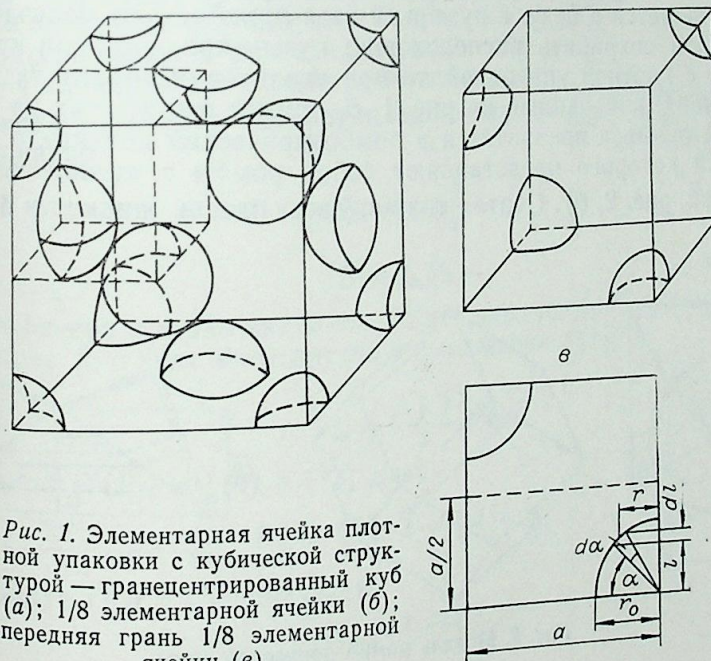


Рис. 1. Элементарная ячейка плотной упаковки с кубической структурой — гранецентрированный куб (а); 1/8 элементарной ячейки (б); передняя грань 1/8 элементарной ячейки (в).

Интегрирование и подстановка в (3) дают следующее выражение для электрической кратности:

$$K_э = \frac{4}{\pi \sqrt{\frac{2}{\pi} - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{2}{\pi} - \varepsilon^2}} - 2\varepsilon + 1. \quad (6)$$

В интервале $0,5 < \varepsilon < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ($1,355 < K_ф < 3,855$) сопротивление $R_п$ описывается выражением

$$R_п = 2\rho_0 \left(\int_0^{\arcsin\left(\frac{a}{r_0} - 1\right)} \frac{r_0 \cos \alpha \cdot d\alpha}{a^2 - \frac{\pi r_0^2}{2} \cos^2 \alpha} + \int_{\arcsin\left(\frac{a}{r_0} - 1\right)}^{\arcsin\left(\frac{a}{2r_0}\right)} \frac{r_0 \cos \alpha \cdot d\alpha}{a^2 + \pi(r_0^2 \sin^2 \alpha - r_0 a \sin \alpha - r_0^2 + 0,5a^2)} \right)$$

и соответственно

$$K_э = \frac{4}{\pi \sqrt{\frac{2}{\pi} - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{1 - \varepsilon}{\sqrt{\frac{2}{\pi} - \varepsilon^2}} + \frac{4}{\pi \sqrt{1 + \frac{4}{\pi} - 4\varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{2\varepsilon - 1}{\sqrt{1 + \frac{4}{\pi} - 4\varepsilon^2}}. \quad (7)$$

Ниже приводятся некоторые значения $K_э$, рассчитанные по формулам (6) и (7) в сравнении с $K_ф$ (формула (4)) для различных $0 < \varepsilon < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

ε	$K_э$	$K_ф$	$B = K_э/K_ф$	ε	$K_э$	$K_ф$	$B = K_э/K_ф$
0,1	1,0021	1,0021	1,0000	0,644	2,3215	2,2694	1,0230
0,3	1,0638	1,0599	1,0037	0,680	2,9837	2,9282	1,0199
0,5	1,3868	1,3546	1,0237	0,698	3,5429	2,4744	1,0197
0,572	1,6898	1,6446	1,0275	0,707	3,9355	3,8475	1,0229

Как видим, электрическая кратность газожидкостной эмульсии ненамного превышает фактическую. Поэтому и ошибка от применения формулы (3) для этого интервала кратностей незначительна.

С ростом газосодержания кратность растет, газожидкостная эмульсия превращается в пену, а пузырьки газа приобретают полиэдрическую форму. Если сохранить расположение пузырьков, как при кубической структуре с плотной упаковкой, то при увеличении объема газового пузырька кубик, показанный на рис. 1, б, примет форму, как на рис. 2, а, а газовый пузырек превратится в ромбоэдрический додекаэдр (12-гранник, грани которого представляют собой ромбы с отношением диагоналей $1 : \sqrt{2}$, рис. 2, б). Считая толщину всех пленок жидкости δ постоян-

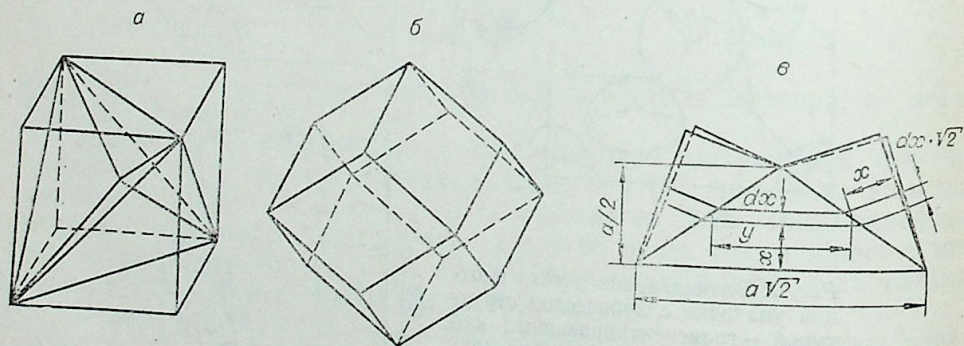


Рис. 2. Модель ромбоэдрической пены.

ной, найдем электросопротивление фигуры рис. 2, а. (Предполагается, что удельное сопротивление жидкости в пленке такое же, как и в объеме.)

На рис. 2, в приведена развертка нижней половины фигуры рис. 2, а, верхняя половина фигуры равна нижней и, следовательно, имеет то же сопротивление. Из рисунка видно, что дифференциал в выбранных координатах равен

$$dR = \frac{\rho_0}{\delta} \cdot \frac{dx \sqrt{2}}{4x + y \sqrt{2}}. \quad (8)$$

Подставляя сюда значение $y = \sqrt{2}(a - 2x)$, находим сопротивление фигуры рис. 2, а

$$R_п = 2 \int_0^{a/2} dR = 2 \frac{\rho_0}{a\delta} \int_0^{a/2} \frac{dx}{\sqrt{2}} = \frac{\rho_0}{\delta \sqrt{2}} = 0,708 \frac{\rho_0}{\delta}. \quad (9)$$

Подставив это значение в (3), получим

$$K_э = 0,708 \frac{a}{\delta}. \quad (10)$$

Фактическая кратность может быть подсчитана, как отношение объема кубика к объему жидкости ($V_ж$), содержащейся в пленках,

$$K_ф = \frac{a^3}{V_ж} = \frac{a^3}{2\delta \left(3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \sqrt{2} \cdot \frac{a}{2}\right)} = 0,471 \frac{a}{\delta}. \quad (11)$$

Важно отметить, что электрическая и фактическая кратности зависят не от размеров пузырька, а лишь от отношения характерного размера к толщине пленки. Это позволяет распространить выводы настоящего рассмотрения на полидисперсную пенную структуру.

Отношения (10) и (11) дают структурный коэффициент электросопротивления

$$B = \frac{K_э}{K_ф} = 1,5. \quad (12)$$

Рассмотрим второй крайний случай, когда вся жидкость, содержащаяся в пене, сконцентрирована в так называемых «каналах Гиббса» — на стыке пузырьков. Тогда фигура рис. 2, а переходит в фигуру рис. 3, а вся жидкость, содержавшаяся ранее в пленках, соберется в 4 каналаца треугольного сечения длиной $l = a\sqrt{3}/2$ каждый. Сопротивление такой фигуры равно

$$R_п = \rho_0 \frac{l}{S}, \quad (13)$$

$$S = V_ж/4l - \quad (14)$$

где поперечное сечение каналаца. Объем жидкости $V_ж$, содержащейся в кубике рис. 2, а (см. знаменатель в выражении (11))

$$V_ж = \frac{3\sqrt{2}}{2} a^2 \delta. \quad (15)$$

Подстановка (15) и (14) в (13) дает

$$R_п = \frac{\rho_0}{\delta} \sqrt{2} = 1,414 \frac{\rho_0}{\delta}. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (3), получаем

$$K_э = 1,414 \frac{a}{\delta}. \quad (17)$$

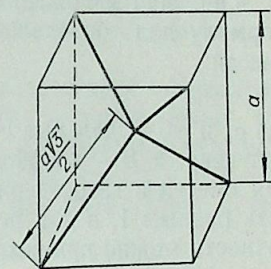


Рис. 3. Конфигурация каналов Гиббса в ромбоэдрической пене.

В. Г. БОГДЕВИЧ, Н. К. РУБАН

ВСПЛЫТИЕ СФЕРИЧЕСКОГО ПУЗЫРЬКА С РАСТВОРЕНИЕМ В ПОКОЯЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Решению задачи о всплытии пузырьков с растворением в жидкости под действием градиента гидростатического давления посвящен ряд работ. Так, в работе [1] описано всплытие пузырька в тяжелой идеальной жидкости, в [2] выведено уравнение состояния газового пузырька, обтекаемого ламинарным потоком жидкости. При решении рассматривалось уравнение установившейся конвективной диффузии при $Re > 10^{-2}$, когда на поверхности пузырька образуется тонкий диффузионный слой. Приведены результаты эксперимента по наблюдению за ростом и растворением воздушного пузырька в воде при различных скоростях обтекания. Давление и скорость потока в эксперименте были постоянными. В [3] приведены результаты расчетов и экспериментов по изменению радиуса пузырька при постоянном внешнем давлении и давлении, изменяющемся по синусоидальному закону. В [4] сообщалось о расчете радиусов пузырьков газа в воде при медленно меняющемся давлении без приведения результатов расчета.

В настоящей работе рассмотрена задача о всплытии сферического пузырька в поле гидростатического давления с растворением под действием диффузии газов с течением времени и приведены результаты расчетов для различных начальных радиусов пузырьков, начальных глубин и коэффициентов насыщения воды растворенным газом, а также для различных газов, наполняющих пузырек.

УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ

Выберем в качестве оси x вертикаль, направленную снизу вверх. Будем рассматривать прямолинейное движение пузырька вдоль оси x . Пусть $v(t)$ — скорость сферического газового пузырька в вертикальном направлении в момент времени t . Тогда уравнение движения в покоящейся жидкости запишется

$$\frac{d}{dt}(m + m_1)v = (\rho_0 - \rho)g \frac{4}{3}\pi R^3 - C_D \pi R^2 \frac{1}{2} \rho_0 v |v| - 6R^2 \sqrt{\pi v} \rho \int_0^t \frac{v'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau. \quad (1)$$

Первый член в правой части уравнения (1) — архимедова сила, второй — сила сопротивления, третий — «сила Бассе», учитывающая влияние отклонения картины течения от установившегося состояния. Так как время процесса достаточно велико, а теплоемкости воды и га-

Отношения (17) и (11) дают значение структурного коэффициента

$$B = K_0/K_\phi = 3,0. \quad (18)$$

В реальной пене жидкость распределена между пленками и каналами Гиббса, причем, начиная с момента получения, она постепенно вытекает из пленок в межпузырьковое пространство и по каналам Гиббса вытекает из пены (синерезис).

Поэтому для реальной пены следовало ожидать значения структурного коэффициента в интервале значений (12) и (18), т. е. $1,5 < B < 3,0$.

Теоретически пенные ячейки должны иметь форму не ромбоэдрических, а пентагональных додекаэдров [5]. Однако ячейки реальной пены имеют форму самых разнообразных, преимущественно неправильных полиэдров — весьма далекую от теоретической. Представляло интерес получить экспериментально значение структурного коэффициента для реальной пены.

Нами проведены многочисленные измерения соотношения между электрической и фактической кратностью пен [7]. Пены получались разными способами, из различных растворов и отличались кратностью ($K_\phi = 20 \div 300$) и степенью дисперсности (средний диаметр пузырька изменялся от десятых долей миллиметра до 3—5 мм). Эксперименты показали, что для наших условий коэффициент B для реальной пены лежит в интервале $2,0 \div 2,2$.

Результаты измерений, выполненных в [8], практически совпадают с нашими. Из кривой зависимости фактической кратности от электрической, приведенной в этой работе, следует, что коэффициент B приближается к 2 уже при кратности $K_\phi \approx 10$. В интервале $3,855 < K < 10$ коэффициент B плавно изменяет свое значение от 1 до 2. Это, по-видимому, и явилось причиной отклонения от линейности, отмеченной в работах [1] и [2].

Обобщая изложенные результаты, можно предложить следующую формулу для определения фактической кратности газожидкостных смесей:

$$K_\phi = K_0/B = 1/B \cdot \rho_n/\rho_0, \quad (19)$$

где ρ_n и ρ_0 — удельные сопротивления пены и раствора, из которого она получена, а B — коэффициент, зависящий от структуры смеси, причем для смесей с газосодержанием $\phi < 75\%$ этот коэффициент можно считать равным 1, а для пен с кратностью $K > 10$ с достаточной степенью точности можно принимать $B = 2,1$.

Институт теплофизики
СО АН СССР,
Новосибирск

Поступила в редакцию
20/X 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Сорокин, А. Г. Кирдяшкин, В. И. Сорокин, Б. Г. Покусаев. Исследование режимов течения газожидкостной смеси методом электропроводности. — В кн.: Котлотурбостроение. Тр. ЦКТИ, 1965, вып. 59.
2. Е. М. Сорокин, С. А. Логвинов, А. В. Некрасов и др. Применение электромагнитного расходомера для измерения истинного газосодержания в двухфазном потоке. — В кн.: Котлотурбостроение. Тр. ЦКТИ, 1965, вып. 59.
3. Ю. И. Азимов, О. В. Маминов. Экспериментальное определение газосодержания двухфазных потоков. — Изв. вузов. Химия и химическая технология, 1967, № 1. ЖПХ, 1966, 39, № 7, 1499—1504.
4. П. М. Кругляков, П. Р. Таубе. Закономерности стекания жидкости из пен. — Е. Manegold. Schaum. Heidelberg, 1953.
5. J. Vikegman. Foams. Springer — Verlag, N.-Y., 1973, p. 228.
6. В. И. Феклистов, К. Б. Канн, С. А. Дружинин. Кондуктометрическое измерение локальных кратностей пен. — Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1975, № 3, сер. техн. наук, вып. 1.
7. N. Ciark. Conductivity of foams. Trans. Faraday Soc., 1948, 44, 13.

зов намного различаются, рассматривался изотермический процесс. Давление газа в пузырьке можно выразить с помощью равенства

$$P = P_{\infty} - P_d + 2\sigma/R. \quad (2)$$

Уравнение (1) с учетом (2) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \left(P_{\infty} - P_d + \frac{4\sigma}{3R} + \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\rho_a} \cdot P_a \right) \frac{dR}{dt} + \frac{R}{3} \frac{dP_{\infty}}{dt} + \\ + \left(P_{\infty} - P_d + \frac{2\sigma}{R} + \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\rho_a} P_a \right) \frac{R}{3v} \frac{dv}{dt} = \\ = \left(\frac{\rho_0}{\rho_a} P_a - P_{\infty} + P_d - \frac{2\sigma}{R} \right) \frac{gR}{3v} - \frac{C_D}{8} \frac{\rho_0}{\rho_a} \cdot P_a \cdot |v| - \\ - \frac{3}{2} \frac{P_a}{\rho_a} \sqrt{\frac{v}{\pi}} \left[\frac{\rho_a}{P_a} \left(P_{\infty} - P_d + \frac{2\sigma}{R} \right) \right] \int_0^t \frac{v'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau. \quad (3) \end{aligned}$$

Коэффициент сопротивления C_D взят в виде $C_D = \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{3}{16} Re^{2/3} \right)$.

Эта формула справедлива для широкого диапазона чисел Re (до 800) при условии $R < 2$ мм и отсутствии деформации пузырька [5]. Таким образом, получилось нелинейное (относительно v) интегро-дифференциальное уравнение.

УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ

Зависимость для диффузии газа из пузырька проверена экспериментально [2] для пузырька, обтекаемого потоком, причем при теоретической оценке предполагалось $Re > 10^{-2}$, т. е. для $R > 10^{-5}$ м. Приведенные в настоящей работе расчеты проводились с учетом этой оценки, расчет прекращался при достижении пузырьком радиуса $R = 10^{-5}$ м.

$$\frac{dm}{dt} = 4\pi RD \left[1 + 0,46 \left(\frac{Rv}{D} \right)^{1/2} \right] (C_0 - C_s). \quad (4)$$

Концентрация насыщения на границе пузырька по закону Генри выражается формулой

$$C_s = \frac{P}{P_a} C_{sa} = \left(P_{\infty} - P_d + \frac{2\sigma}{R} \right) \frac{C_{sa}}{P_a} \quad (5)$$

и связана с объемным газосодержанием соотношением

$$C_0 = \rho_g \alpha_0 \frac{P_a}{P_r} = \rho_a \alpha_0. \quad (6)$$

Для массы газа в пузырьке запишем равенство

$$m = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho (R). \quad (7)$$

Дифференцируя (7), получим

$$\frac{dm}{dt} = \frac{4}{3} \pi \frac{\rho_a}{P_a} \left\{ 3R^2 \left(P_{\infty} - P_d + \frac{2\sigma}{R} \right) \frac{dR}{dt} + R^3 \left(\frac{dP_{\infty}}{dt} - \frac{2\sigma}{R^2} \frac{dR}{dt} \right) \right\}. \quad (8)$$

Уравнение (8) с учетом (4)–(6) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \left(P_{\infty} - P_d + \frac{4\sigma}{3R} \right) \frac{dR}{dt} + \frac{R}{3} \frac{dP_{\infty}}{dt} = \frac{\alpha_{sa} \cdot D}{R} \left[1 + 0,46 \left(\frac{Rv}{D} \right)^{1/2} \right] \times \\ \times \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_{sa}} P_a - P_{\infty} + P_d - \frac{2\sigma}{R} \right). \quad (9) \end{aligned}$$

Уравнения движения (3) и состояния (9) дополним уравнением гидростатики

$$P_{\infty} = P_a + \gamma(H-x). \quad (10)$$

Для определения величин R , v , x решалась совместно система уравнений (3), (9), (10), имеющая вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(v), \\ \frac{dR}{dt} &= f_2(v, v^{1/2}), \\ \frac{dv}{dt} &= f_3(v, t, v^2, R). \quad (11) \end{aligned}$$

Начальные условия были выбраны следующими: при $t=0$ $R(0)=R_0$; $v(0)=0$; $x(0)=0$.

Интегро-дифференциальное уравнение (3) решалось методом последовательных приближений, причем процесс вычислений продолжался до тех пор, пока в пределах заданной точности ϵ не совпадали два соседних приближения. Система (11) решалась методом Рунге—Кутты на машине БЭСМ-6. Шаг в методе Рунге—Кутты варьировался в зависимости от точности, с которой требовалось получить конечный результат.

Рассчитаны варианты для различных газов. Значения плотности (ρ_a), коэффициента диффузии (D) и насыщающего газосодержания (α_{sa}) были взяты из [6]:

Газ	ρ_a , кг/м ³	D , м ² /с	α_{sa}
Воздух	1,25	$2,00 \cdot 10^{-9}$	0,0213
Водород	0,00919	$5,85 \cdot 10^{-9}$	0,0185
Углекислый газ	2,017	$1,96 \cdot 10^{-9}$	1,036

При расчетах коэффициент насыщения растворенным газом окружающей пузырек жидкости принимался равным $f=0, 0,5, 1$. На рис. 1 приведены расчеты изменения радиуса (R) воздушного пузырька при различных начальных радиусах для всплытия с глубины $H=10$ м ($f=0,5$). Начальный радиус пузырька варьировался в пределах $R_0 = 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-4}, 10^{-4}, 2 \cdot 10^{-5}$ м. Только относительно крупные сферические пузырьки ($R_0 = 10^{-3}$ м) всплывают, практически не изменяя своего радиуса. На рис. 2 показана картина всплытия пузырька с различными газами (углекислый газ, водород, воздух) с глубины $H=10$ м, при этом изменялся коэффициент насыщения воды. Интересно, что при полном насыщении воды растворенным воздухом ($f=1$), перед выходом на поверхность пузырек замедляет свое движение. На рис. 3 дано сопоставление изменения радиуса пузырька с $R_0 = 10^{-4}$ м в зависимости от x при всплытии с различных начальных глубин ($f=0,5$), с которых поднимался пузырек ($H=0,1; 0,25; 0,5; 1; 10$ м). Роль гидростатического давления сводится к тому, что при большем давлении пузырек растворяется более интенсивно.

При рассмотрении всплытия пузырьков с малой скоростью возникает вопрос, насколько существенна роль силы Бассе, которая проявляется на участках ускорения и замедления пузырьков. С целью выяснения этого вопроса проведены расчеты без учета силы Бассе. В этом случае вместо уравнения (1) рассматривалось

$$\frac{d}{dt} (m + m_1) v = (\rho_0 - \rho) g \frac{4}{3} \pi R^3 - C_D \pi R^2 \frac{1}{2} \rho_0 v |v|. \quad (12)$$

Результаты расчетов приведены на рис. 4. Из рисунка видно, что расчет без силы Бассе приводит к более медленному изменению характере

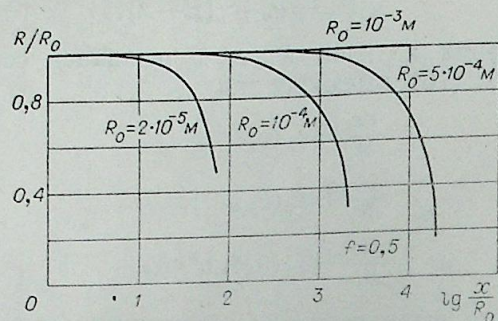


Рис. 1.

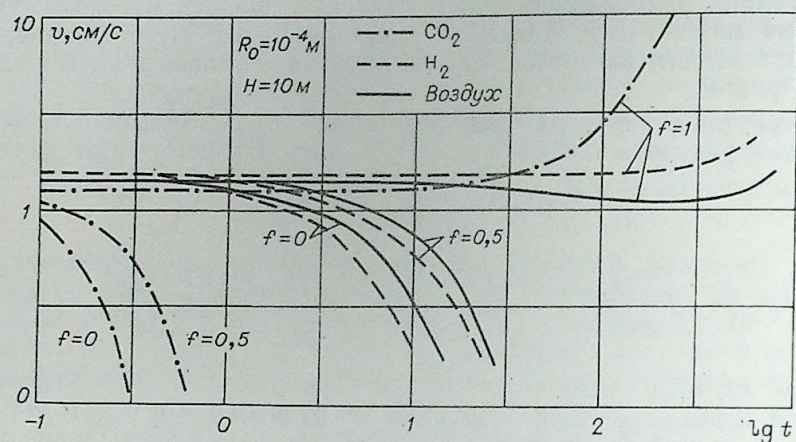


Рис. 2.

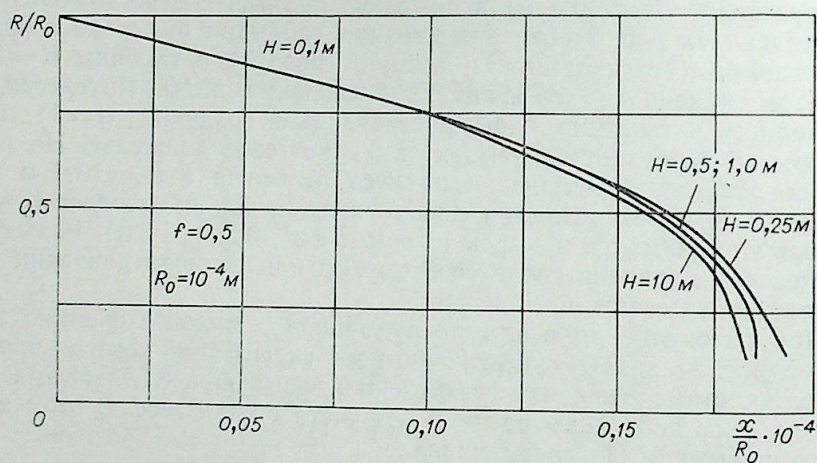


Рис. 3.

растик пузырька и к большому времени его жизни. Различие составляет 10—20%.

Интересно также сопоставить результаты расчетов по уравнению (12) с результатами расчетов по квазистационарному приближению без учета инерционных сил.

Расчеты показывают, что если не учитывать силы инерции, то при $R_0 = 5 \cdot 10^{-4}$ м скорость больше на 65%, радиус — на 41%, а путь меньше на 3%. При $R_0 = 10^{-3}$ м эти величины соответственно могут достигать 75, 98 и 15%. Это свидетельствует о том, что роль инерционных сил возрастает с увеличением радиуса пузырька. Расчеты показали, что можно пренебречь инерционными силами при радиусе пузырька меньше 10^{-4} м. Ошибки при этом составляют всего 2—5%.

Институт теплофизики СО АН СССР
Новосибирск

Поступила в редакцию
20/IV 1976

ЛИТЕРАТУРА

- И. М. Чернык. К задаче динамики пузырьковых течений в газожидкостном сопле. — В кн.: Гидромеханика, вып. 21, «Наукова думка», 1972, 12—19.
- Ю. Н. Калашников. Влияние относительной скорости газового пузырька в жидкости на изменение его размеров. — ПМТФ, 1964, 3, 105—112.
- А. Д. Перник. Проблемы кавитации. Л., «Судостроение», 1966.
- Ю. С. Зайцева, Ю. Н. Калашников. О существовании газовых пузырьков в тяжелой жидкости со свободной поверхностью. Тез. докл. к XX всес. научн.-техн. конф. по теории корабля (Крыловские чтения), вып. 156. Л., «Судостроение», 1971.
- С. С. Кутателадзе, М. А. Стырикович. Гидравлика газожидкостных систем. М.—Л., Госэнергоиздат, 1958.
- Дж. Перри. Справочник инженера химика, т. 1. Л., «Химия», 1969.

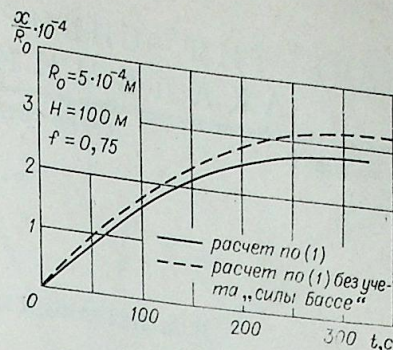


Рис. 4.

И. А. ПЕТРАКОВСКИЙ, Р. Г. ХЛЕБОПРОС
МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ И АНАЛИЗА
СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК
ПРИРОДНЫХ ОБРАЗОВАНИЙ

В последнее время в изучении состава и состояния земной поверхности наряду с аэрофотометодами интенсивно развиваются методы спектральных исследований. Это связано прежде всего со значительным упрощением процесса получения и обработки информации. Опыт работ в этом направлении [1, 2] существенно расширил возможности решения обратной задачи оптики ландшафтов, особенно в сочетании с аэрофотосъемкой.

Сущность спектральных исследований подстилающей поверхности с летательных аппаратов заключается в установлении однозначного соответствия между спектральными характеристиками исследуемого объекта и его физико-географическим содержанием [3]. При установлении такого соответствия трудно трансформировать электромагнитное излучение атмосферой Земли. Кроме того, отмечается зависимость отраженной подстилающей поверхности световой энергии от положения Солнца. Последнее обусловлено, с одной стороны, изменением коэффициента отражения поверхности при изменении положения Солнца, а с другой — тем, что в поле зрения спектрального прибора непрерывно меняется соотношение площадей поверхности, освещенных прямыми лучами и затененных [2, 4—6].

Многие параметры атмосферы, ответственные за распространение электромагнитного излучения, меняются неконтролируемо в широких пределах, что затрудняет применение аналитических методов учета вызываемых ими искажений. Необходимо разработать такие методы получения спектральных характеристик, которые бы уже в момент измерений исключали влияние большинства или, по крайней мере, некоторых трудно учитываемых факторов.

В работе проводится анализ отражательных свойств подстилающей поверхности на примере спектрального альбеда. Однако аналогичные результаты могут быть получены и при использовании других спектральных характеристик, например коэффициентов спектральной яркости.

Получение спектральных характеристик. Под спектральным альбедо A_λ исследуемого объекта мы понимаем отношение потока радиации, отраженного поверхностью P_λ^\uparrow , к потоку радиации, падающему на эту поверхность P_λ^\downarrow , в интервале длин электромагнитных волн от λ до $\lambda+d\lambda$, т. е.

$$A_\lambda = P_\lambda^\uparrow / P_\lambda^\downarrow. \quad (1)$$

Рассеивающие свойства отражающей поверхности будем характеризовать функцией распределения ориентаций составляющих ее микроплощадок $f(\theta, \varphi)$, где θ — угол между нормалью к микропло-

щадке и плоскости макро-
поверхности; φ — азиму-
тальный угол проекции
микро нормали на пло-
щадь макроповерхности.
Микроповерхность пред-
ставляется гладкой опти-
ческой поверхностью, ха-
рактеризующейся френе-
левским коэффициентом
отражения $R(\theta)$, где θ —
угол падения излучения,
отсчитываемый от норма-
ли к макроповерхности,
на которой выполняются
законы геометрической
оптики.

Все дальнейшее рас-
смотрение ведется в пло-
скости падения электро-
магнитного излучения, что
справедливо при нали-
чии азимутальной сим-
метрии.

Освещающую поверхность радиации запишем в виде

$$P_\lambda^\downarrow = S_\lambda(t) + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} D_\lambda(t, \alpha) d\alpha, \quad (2)$$

где $S_\lambda(t)$ — поток радиации прямого солнечного света в интервале длин волн $\lambda \div \lambda + d\lambda$; $D_\lambda(t, \alpha)$ — поток радиации рассеянного излучения, освещающий поверхность под углом α ; t — время.

Рассмотрим более подробно структуру выражения (2). Прежде всего предположим, что это выражение описывает освещающий поток непосредственно вблизи исследуемой поверхности. Причины, вызывающие перераспределение прямого и рассеянного потока, не конкретизируем, считаем, что переменная t указывает на возможные перераспределения этих величин во время измерений.

Легко показать, что в этих обозначениях поток радиации, отраженный поверхностью в направлении β , запишется в виде

$$P_\lambda^\uparrow = R\left(\frac{\beta - \theta}{2}\right) f\left(\frac{\theta + \beta}{2}\right) S_\lambda(t) + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R_\lambda\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) f\left(\frac{\beta + \alpha}{2}\right) D_\lambda(t, \alpha) d\alpha, \quad (3)$$

где θ — угол стояния Солнца (рис. 1).

Предположим, что поток рассеянного излучения, освещающего поверхность, изотропен, и рассмотрим два типа отражающих поверхностей, для которых соответственно.

- 1) $f_1(\theta) = \text{const}_1$,
- 2) $f_2(\theta) = \text{const}_2 \cdot \cos \theta$.

Тогда поток, отраженный поверхностью радиации, для этих двух случаев отражения запишется в виде

$$P_{i\lambda}^\uparrow = R_{i\lambda}'\left(\frac{\beta - \theta}{2}\right) S_\lambda(t) + D_\lambda(t) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R_{i\lambda}'\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) d\alpha, \quad (4)$$

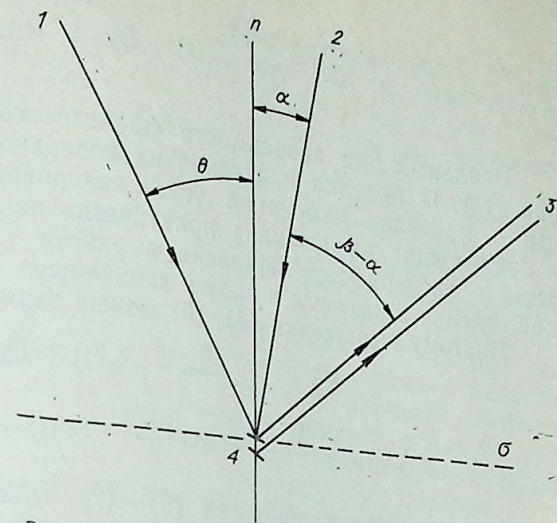


Рис. 1. Формирование отраженной радиации в направлении β .
 n — нормаль к плоскости подстилающей поверхности σ . 1 — направление прямой солнечной радиации; 2 — одно из направлений рассеянной радиации; 3 — направление регистрации отраженной радиации; 4 — микроповерхности, формирующие отраженную радиацию в направлении β .

$$P_{2\lambda}^{\uparrow} = R_{2\lambda} \left(\frac{\beta - \theta}{2} \right) \cos \frac{\beta + \theta}{2} S_{\lambda}(t) + D_{\lambda} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R'_{2\lambda} \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right) \cos \frac{\beta + \alpha}{2} d\alpha. \quad (5)$$

Реальный вид зависимости френелевского коэффициента отражения от угла падения излучения на поверхность позволяет заключить, что в пределах изменения угла визирования $|\beta| < \pi/6$ интегралы в предыдущих выражениях практически не зависят от β . Выполнение этого в эксперименте показано в работе [7]. Такие значения углов наблюдения и имеются в виду в дальнейшем рассмотрении.

Поэтому выражения (4), (5) можно записать в виде

$$P_{1\lambda}^{\uparrow} = R'_{1\lambda} \left(\frac{\beta - \theta}{2} \right) S_{\lambda}(t) + D_{\lambda}(t) R''_{1\lambda}, \quad (6)$$

$$P_{2\lambda}^{\uparrow} = R'_{2\lambda} \left(\frac{\beta - \theta}{2} \right) \cos \frac{\beta + \theta}{2} \cdot S_{\lambda}(t) + R''_{2\lambda} D_{\lambda}(t) \cos \frac{\beta}{2}. \quad (7)$$

Рассматривая выражения (6)–(7), можно прийти к выводу, что если регистрацию отраженной энергии вести таким образом, чтобы выполнялось условие

$$(\beta - \theta)/2 = \Phi = \text{const}, \quad (8)$$

то в выражении (6) зависимость от высоты стояния Солнца исчезнет, а выражение (7) примет вид

$$P_{2\lambda}^{\uparrow} = R'_{2\lambda} \cos(\Phi + \theta) S_{\lambda}(t) + R''_{2\lambda} D_{\lambda}(t) \cos \left(\frac{2\Phi + \theta}{2} \right). \quad (9)$$

Выполнение условия $(\theta + \beta)/2 = \text{const}$ нежелательно, о чем еще будет сказано ниже.

Таким образом, в выражении (9) исчезает зависимость от одного из углов — θ или β . Однако, зная величину θ , можно легко ввести необходимые поправки, исходя из функциональной зависимости (9). Это будет предполагаться в дальнейшем. Обобщая (6), (9), при условии (8) запишем

$$P_{\lambda}^{\uparrow} = R'(\lambda) \cdot S_{\lambda}(t) + R''(\lambda) D_{\lambda}(t). \quad (10)$$

Выполнение условия (8) на практике означает, что при изменении положения Солнца на небосводе необходимо изменять и угол регистрации отраженного излучения по отношению к плоскости исследуемого объекта. Пусть $\Delta\theta'$ — изменение угла стояния Солнца, тогда необходимое для выполнения условия (8) изменение угла наблюдения $\Delta\beta'$ находится из выражения

$$\Delta\beta' = \frac{\cos \beta \cos \theta'}{\cos \beta' \cos \theta} \cdot \frac{n^{\downarrow}(t)}{n^{\uparrow}(t)} \Delta\theta', \quad (11)$$

где θ' — угол, под которым прямые солнечные лучи доходят до места, в котором находится летательный аппарат; β' — угол, под которым регистрируется отраженное излучение; θ — угол падения прямых солнечных лучей на исследуемый объект; β — угол отражения электромагнитного излучения от объекта при регистрации под углом β' ; $n^{\downarrow}(t)$ и $n^{\uparrow}(t)$ — коэффициент преломления света в атмосфере для падающего и отраженного луча соответственно; t — время (рис. 2). Поскольку $n^{\downarrow}(t)$ и $n^{\uparrow}(t)$ подвержены неконтролируемым изменениям независимо (что связано с непостоянством плотности атмосферы), для выполнения условия (8) положим*

$$(\beta - \theta)/2 = 0. \quad (12)$$

* Искажения за счет непостоянства коэффициента преломления света в атмосфере много меньше в сравнении с другими искажениями, рассматриваемыми в настоящей работе, равенство (11) показывает, что принципиально можно учесть и их.

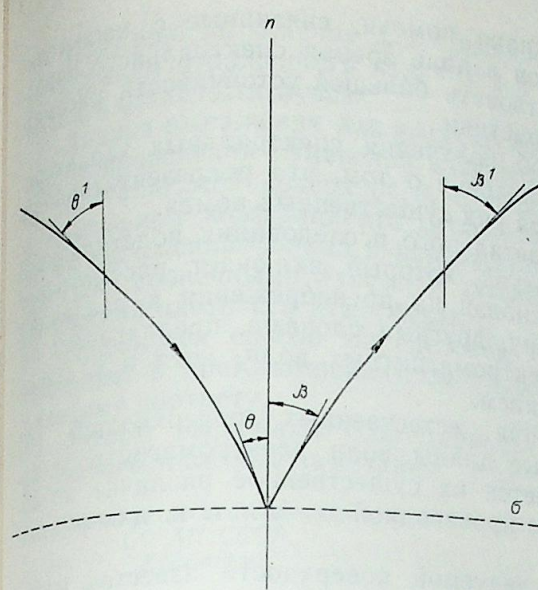


Рис. 2. Схема распространения солнечных лучей в атмосфере.

n — нормаль к плоскости подстилающей поверхности σ .
1 — падающий солнечный луч; 2 — отраженный солнечный луч.

Последнее означает, что регистрация ведется из направления освещения. При этом будет регистрироваться энергия, отраженная от микрощадинок только нормально. К тому же в поле зрения спектрального прибора будут попадать лишь участки, не затененные соседними объектами. Это снимет помехи, связанные с непостоянством площади затененных участков, и как бы увеличит энергоотдачу регистрируемого объекта.

Таким образом, альбедо подстилающей поверхности имеет вид

$$A_{\lambda} = \gamma_{\lambda}^{\downarrow}(t) R'(\lambda) + \gamma_{\lambda}^{\uparrow}(t) R''(\lambda). \quad (13)$$

Здесь $\gamma_{\lambda}^{\downarrow}(t)$ и $\gamma_{\lambda}^{\uparrow}(t)$ — соответственно доли прямого и рассеянного освещения поверхности.

Классификация природных образований. В [8] предложена одномерная система кодирования спектров природных образований. Сущность этого способа заключается в выборе наиболее информативных и статистически устойчивых точек спектра и в применении алгоритмов кодирования, исключающих в значительной степени зависимость спектральных характеристик от высоты стояния Солнца. В указанной работе используются цветовые коэффициенты, общий вид которых

$$K_{ij} = \Gamma_{\lambda_i} / \Gamma_{\lambda_j}, \quad (14)$$

где Γ_{λ_i} — КСЯ в определенном интервале длин электромагнитных волн.

В рамках рассмотренной выше теории, без учета рассеянного света, КСЯ природного образования может быть представлен в виде

$$\Gamma(\beta, \theta, \lambda_i) = f \left(\frac{\beta + \theta}{2} \right) \Gamma \left(\frac{\beta - \theta}{2}, \lambda_i \right), \quad (15)$$

где $\Gamma(\beta, \theta, \lambda_i)$ — КСЯ природного образования; $\Gamma \left(\frac{\beta - \theta}{2}, \lambda_i \right)$ — КСЯ элементарной площадки природного образования; остальные обозначения совпадают с введенными ранее. Тогда цветовые коэффициенты (14) с учетом (15) примут вид

$$K_{ij} = \frac{\Gamma \left(\frac{\beta - \theta}{2}, \lambda_i \right)}{\Gamma \left(\frac{\beta - \theta}{2}, \lambda_j \right)}. \quad (16)$$

Из (16) видно, что при выполнении условия (8) или (12), т. е. при проведении измерений указанным выше методом, цветовые коэффициенты не будут зависеть от высоты стояния Солнца. Сделанный вывод получен для случая отсутствия рассеянного небосводом освеще-

ния исследуемого объекта. Однако помехи, связанные с непостоянством площади теневых участков в поле зрения спектрального прибора, исчезнут, что будет способствовать большей устойчивости рассматриваемой спектральной характеристики.

Предложенный выше способ получения спектральных характеристик позволяет сделать предположение о том, что репрезентативность их повысится, поскольку снимется ряд существенных помех.

В связи с этим для более детального исследования подстилающей поверхности мы предлагаем метод, который включает рассмотрение рассеянной радиации. Метод основан на пренебрежении к различиям в рассеянии радиации по спектру, другими словами, предлагается использовать участки спектра электромагнитных волн, хотя и с произвольным, но одинаковым рассеянием.

Спектральная классификация естественных поверхностей [9] позволяет выбрать определенные длины волн электромагнитного излучения, при которых наблюдается их существенное различие по абсолютной величине, по величине производной по λ и т. д. для различных природных образований.

Предположим, что для исследуемой поверхности известен набор составных компонентов (например, породы деревьев, типы почв и т. д.), а также имеются коэффициенты их отражения в прямом и рассеянном свете, определенные выше. При этом интенсивность альbedo поверхности, отвечающая длине волны, аддитивно складывается из интенсивностей альbedo* участвующих компонент с определенными весами, связанными с относительным содержанием этих компонент на поверхности. Другими словами, если мы имеем n компонент, то

$$A(\lambda_j) = \sum_{i=1}^n \gamma'(t) \beta_i R_i'(\lambda_j) + \sum_{i=1}^n \gamma''(t) \beta_i R_i''(\lambda_j) + \epsilon_j, \quad (17)$$

где β_i — относительная доля компоненты в формировании спектра отражения; ϵ_j — случайная помеха измерения. В равенстве (17) имеем $2n$ неизвестных величин $\{\beta_i \gamma'(t)\}$ и $\{\beta_i \gamma''(t)\}$, связанных условием

$$\sum_{i=1}^n \beta_i \gamma'(t) + \sum_{i=1}^n \beta_i \gamma''(t) \equiv 1. \quad (18)$$

Появление $2n-1$ неизвестных обусловлено тем, что в освещении спектрометрируемого объекта участвует прямой и рассеянный свет. Причем в силу возможного перераспределения $S(t)$ и $D(t)$ во время эксперимента $\beta_i \gamma'(t)$ и $\beta_i \gamma''(t)$ зависят от времени, однако при этом

$$\beta_i \gamma'(t) + \beta_i \gamma''(t) \equiv \beta_i. \quad (19)$$

Нужно иметь в виду, что за время отдельного измерения величины $\gamma'(t)$ и $\gamma''(t)$ предполагаются неизменными, тогда как от измерения к измерению они могут и изменяться. Решение системы (17) возможно, например, методом наименьших квадратов.

ВЫВОДЫ

Возможность распознавать лишь крупные природные образования связана с тем, что искажения спектральных характеристик за счет передаточной функции атмосферы, а также помехи, обусловленные высотой стояния Солнца, зачастую превышают полезный сигнал об изменениях в составе и состоянии подстилающей поверхности. Для более детального распознавания необходимо исключить часть помех во время измерений.

* За время подготовки работы к печати была опубликована статья [10], в которой автор также использует свойство аддитивности спектрального портрета.

Получено выражение для альbedo подстилающей поверхности при регистрации отраженного излучения в направлении, антипараллельном прямому солнечному лучам.

Анализ выражения для альbedo позволил дать рекомендации к методике проведения измерений электромагнитной радиации, отраженной от подстилающей поверхности, с целью исключения помех, связанных с изменением коэффициента отражения микроповерхностей при изменении положения Солнца и перераспределением площадей, освещенных прямыми солнечными лучами и затененных, а также с непостоянством оптической плотности атмосферы.

Предложен способ определения процентного состава заданных компонент в многокомпонентном природном образовании по его спектральному портрету.

Авторы выражают благодарность О. Б. Васильеву за обсуждение работы и ценные замечания.

Институт леса и древесины
СО АН СССР,
Красноярск

Поступила в редакцию
23/VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Nagy. State of the Art in Pattern Recognition.—Proc. of the IEEE, May 1968, 56, No. 5.
2. Исследования природной среды с пилотируемых орбитальных станций. Л., Гидрометеониздат, 1972.
3. Ю. С. Толчельников. Оптические свойства ландшафтов. Л., «Наука», 1974.
4. Ю. К. Юцевич, М. В. Тихомирова. Влияние высоты стояния Солнца на коэффициент яркости земных образований.—В кн.: Исследование оптических свойств природных объектов и их аэрофотографического изображения. Л., «Наука», 1970.
5. В. Е. Зуев. Распространение видимых и инфракрасных волн в атмосфере. М., «Советское радио», 1970.
6. М. С. Малкевич, А. С. Гурвич. Оценка роли атмосферы в задаче изучения природных ресурсов Земли из космоса по измерениям излучения со спутников «Космос».—В кн.: Исследование природной среды космическими средствами. Т. 3. М., 1974.
7. П. П. Федченко. О влиянии высоты стояния Солнца на отражательные свойства некоторых почв.—Экспресс информация (метеорология), 11 (43). Обнинск, 1975.
8. К. Я. Кондратьев, О. Б. Васильев, З. Ф. Миронова. К методике кодирования оптических спектров природных образований.—В кн.: Проблемы физики атмосферы, вып. 10. Изд. ЛГУ, 1972.
9. Е. Л. Кринов. Спектральная отражательная способность природных образований. М.—Л., Гостехиздат, 1974.
10. О. М. Покровский, С. И. Быков. Выбор оптимальных спектральных интервалов для измерений отраженной солнечной радиации в области 0,4—0,85 мкм с целью идентификации природных образований.—Метеорология и гидрология, 1975, № 12.

Г. Г. СЧАСТЛИВЫЙ, А. И. ТИТКО

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ
В ПРОВОДЯЩЕЙ ШИНЕ С ВОЗДУШНЫМ ОКНОМ

Рассмотрим задачу определения характеристик поля в области, (см. рис. 1). Область $a_1 > y > -a_1$, $h_1 < z < h_1 + h_0$, является воздушным окном. Все другие области (I—IV) — проводящие с параметрами σ_i , μ_i . Такой неоднородный брус может находиться внутри прямоугольной обмотки с током либо являться проводящей шиной, по которой течет ток в направлении Oy . Размеры бруса в направлении x , y значительно превосходят $h = h_1 + h_2 + h_0$. Тогда можно считать, что рассматриваемая область бесконечна в направлении x и y .

Данная задача представляет интерес для исследования особенностей электромагнитного поля, которые вызывают такие неоднородности, как непроводящая среда 0, а также среды I и II с различными электромагнитными параметрами. Во многих практических задачах необходимо знать, каким образом перераспределить магнитный поток, чтобы уменьшить выделяемые локальные потери. Для этого делают наплавку с высокопроводящего материала*. Важное значение имеет теоретический анализ данного явления. Рассматриваемая задача в этом смысле общая, так как области I, II, III и IV имеют различные параметры σ_i , μ_i .

Пусть H_x на границе равна $I/2l$, где I — ампер-витки обмотки либо ток в шине; l — линейный размер шины в направлении оси Ox .

Приведем аналитическое решение и исследуем поле в такой области. Если область шины однородная, то существуют лишь составляющие характеристик поля H_x и E_y . В случае наличия воздушного окна и других разнородных подобластей появляется составляющая напряженности электрического поля E_z . Это вытекает из системы уравнений Максвелла с учетом того, что магнитное поле изменяется в направлении осей Oy и Oz .

Итак, рассматривается краевая задача Дирихле.

Запишем дифференциальное уравнение для H_x :

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} - \beta_i^2 H_x = 0, \quad (1)$$

где $\beta_i^2 = j\omega\mu_i\sigma_i$, $i = 3, 4$.

В областях III и IV решения запишутся в виде

$$H_x = \frac{2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_{in} e^{(-1)^i \gamma_{in} y} + \frac{n\pi}{h} (-H_i^h \cos n\pi + H_i^0) \right] \sin \frac{n\pi}{h} z, \quad (2)$$

* В. В. Каруллин, Г. Г. Счастливы, И. И. Лычко, В. И. Шевченко. Повышение термостойкости электрических машин. Киев, УкрНИИТИ, 1971.

где $\gamma_{in}^2 = \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 + j\omega\mu_i\sigma_i$, H_i^0 — значение H_x при $z=0$; H_i^h — значение H_x при $z=h$.
Вводятся различные значения H_x на поверхностях для того, чтобы иметь возможность их варьировать.
В области $-a_1 < y < a_1$ уравнение (1) решается с применением T -интегрального преобразования.
Из уравнений Максвелла следует

$$E_y = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_x}{\partial z}, \quad E_z = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_x}{\partial y}, \quad H_x = \frac{1}{j\omega\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right). \quad (3)$$

На границе $z=h_1$, h_1+h_2 выполняются граничные условия:

$$H_x^+ = H_x^-, \quad \frac{1}{\sigma^-} \frac{\partial H_x^-}{\partial z} = \frac{1}{\sigma^+} \frac{\partial H_x^+}{\partial z}, \quad (4)$$

Построим T -интегральное преобразование. Весовая функция имеет вид

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{\sigma_1}, & 0 < z < h_1, \\ 1, & h_1 < z < h_0 + h_1, \\ \frac{\sigma_0}{\sigma_2}, & h_0 + h_1 < z < h. \end{cases} \quad (5)$$

Собственные числа λ_{kn} суть корни уравнения

$$-\gamma_{0n}^2 \sin \gamma_{1n} h_1 \sin \gamma_{0n} h_0 \sin \gamma_{2n} h_2 + \gamma_{0n} \sigma_0 \frac{\gamma_{1n}}{\sigma_1} \cos \gamma_{1n} h_1 \cos \gamma_{0n} h_0 \sin \gamma_{2n} h_2 + \\ + \gamma_{0n} \sigma_0 \cdot \frac{\gamma_{2n}}{\sigma_2} \cdot \sin \gamma_{1n} h_1 \cos \gamma_{0n} h_0 \cos \gamma_{2n} h_2 + \frac{\gamma_{1n} \gamma_{2n}}{\sigma_1 \sigma_2} \times \\ \times \sigma_0^2 \cos \gamma_{1n} h_1 \sin \gamma_{0n} h_0 \cos \gamma_{2n} h_2 = 0, \quad (6)$$

где $\gamma_{kn}^2 = \lambda_{kn}^2 - j\omega\mu_k\sigma_k$, $k = 0, 1, 2$.

Неортонормированные собственные функции запишутся в виде

$$\Psi_n(z) = \begin{cases} \sin \gamma_{1n} z \sin \gamma_{2n} h_2 & 0 < z < h_1, \\ \left[\sin \gamma_{1n} h_1 \cos \gamma_{0n} (-h_1 + z) + \frac{\gamma_{1n}}{\gamma_{0n}} \cdot \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \cos \gamma_{1n} h_1 \sin \gamma_{0n} (z - h_1) \right] \times \\ \times \sin \gamma_{2n} h_2, & h_1 < z < h_1 + h_0, \\ \left(\sin \gamma_{1n} h_1 \cos \gamma_{0n} h_0 + \frac{\gamma_{1n}}{\gamma_{0n}} \cdot \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \cdot \cos \gamma_{1n} h_1 \sin \gamma_{0n} h_0 \right) \sin \gamma_{2n} (h - z), \\ & h_1 + h_0 < z < h. \end{cases} \quad (7)$$

При $\sigma_0 \rightarrow 0$ получим три системы собственных чисел

$$\gamma_{kn} = \frac{n\pi}{h_k}; \quad k = 0, 1, 2; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

Для рассматриваемого источника поля и граничных условий (4) три соответствующих системы ортонормированных функций примут вид

$$\Psi_n^0(z) = 0; \quad (9)$$

$$\Psi_n^I(z) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{h_1}} \sin \gamma_{1n} z & \text{при } 0 < z < h_1, \\ 0 & \text{при } h_1 < z < h_1 + h_0, \\ 0 & \text{при } h_1 + h_0 < z < h; \end{cases} \quad (9')$$

$$\Psi_n^{\text{II}}(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < z < h_1, \\ 0 & \text{при } h_1 < z < h_1 + h_0, \\ \sqrt{\frac{2}{h_2}} \sin \gamma_{2n} (h-z) & \text{при } h_1 + h_0 < z < h; \end{cases} \quad (9'')$$

$n=1, 2, \dots$

Так как вектор H не должен быть бесконечным, то $\Psi_n^0(z) = 0$, за исключением $n=0$. Выражения (9') и (9'') учитывают тот факт, что постоянные интегрирования уравнения (1) после применения к нему рассмотренного интегрального преобразования имеют вид постоянной, умноженной на σ_0/σ_n . Из выражения (3) видно, что в области воздушного окна $H_x = C$.

Это происходит потому, что размеры окна принимаются значительно меньшими, чем длина и высота обмотки возбуждения электромагнитного поля в рассматриваемой области. Однако, методом интегрального преобразования в воздушном окне решается задача Неймана, и поэтому решение получается с точностью до постоянной.

Из выражения (7) при $k=0$ следует, что в области $h_1 < z < h_1 + h_0$ H_x разлагается по $\cos \frac{n\pi}{h_0} z$, а так как H_x здесь равна постоянной C , то в разложении по $\Psi_n^0(z)$ существует только постоянная составляющая. Это согласуется с (9). Постоянную составляющую для частного решения можно определить, решив прямым способом задачу поля в области, которая состоит из двух проводящих полос, разделенных воздушной средой:

$$C = H_1 \text{ch } \gamma_1 h_1 + \frac{H_2 \text{ch } \gamma_2 h_2 - H_1 \text{ch } \gamma_1 h_1 - A_1 \text{sh } \gamma_2 h_2}{\text{sh } \gamma_1 h_1 + \left(\text{sh } \gamma_1 h_1 \cdot j\omega\mu_0 h_0 + \text{ch } \gamma_1 h_1 \frac{\gamma_1}{\sigma_1} \right) \frac{\text{sh } \gamma_2 h_2}{\text{ch } \gamma_2 h_2} \frac{\sigma_2}{\gamma_2}} \text{sh } \gamma_1 h_1, \quad (10)$$

где

$$A_1 = \left[j\omega\mu_0 h_0 H_1 \text{ch } \gamma_1 h_1 + \frac{\gamma_2}{\sigma_2} H_2 \text{sh } \gamma_2 h_2 + H_1 \frac{\gamma_1}{\sigma_1} \text{sh } \gamma_1 h_1 \right] \frac{\sigma_2}{\gamma_2} \frac{1}{\text{ch } \gamma_2 h_2},$$

$$\gamma_i^2 = j\omega\mu_i \sigma_i, \quad i = 1, 2;$$

$$\Psi_0^0(z) = \begin{cases} \frac{\sin \gamma_{10} z}{\sin \gamma_{10} h_1} & \text{при } 0 < z < h_1, \\ 1 & \text{при } h_1 < z < h_1 + h_0, \\ \frac{\sin \gamma_{20} (h-z)}{\sin \gamma_{20} h_2} & \text{при } h_1 + h_0 < z < h. \end{cases} \quad (10')$$

После применения конечного T -интегрального преобразования к уравнению (1) и некоторых преобразований H_x в области $-a_1 \leq y \leq a_1$ запишется в виде суммы общего решения и частного, определяемого (10) и (10'):

$$H_x = \sum_{k=0}^2 \sum_{n=0}^{\infty} [C_{3n}^k \text{ch } \lambda_{kn} y + C_{4n}^k \text{sh } \lambda_{kn} y] \Psi_n^k(z) + H_{0x}, \quad (11)$$

где H_{0x} — частное решение.

Составляющие напряженности электрического поля находятся по (3). При этом необходимо учитывать предельные переходы в (7) при $\sigma_0 \rightarrow 0$.

Составляющие напряженности электрического поля

$$\begin{aligned} E_y &= \sum_{k=0}^2 \sum_{n=0}^{\infty} (C_{3n}^k \text{ch } \lambda_{kn} y + C_{4n}^k \text{sh } \lambda_{kn} y) \Psi_{ny}^k(z) + E_{0y}, \\ E_z &= - \sum_{k=0}^2 \sum_{n=0}^{\infty} (C_{3n}^k \text{sh } \lambda_{kn} y + C_{4n}^k \text{ch } \lambda_{kn} y) \lambda_{kn} \cdot \Psi_{nz}^k(z). \end{aligned} \quad (12)$$

Приведем выражение $\Psi_{ny,z}(z)$ для симметричного случая, когда по проводящей шине с симметрично расположенным воздушным окном протекает ток в направлении Oy . Тогда $C=0$, и так как E_z равно 0 при $z=h/2$, то для $k=0$ нулевой со-ставляющей не будет. В этом случае будет лишь две системы собствен-ных чисел и собственных функций:

$$\Psi_{ny}^{\text{I}}(z) = \begin{cases} \cos \gamma_{1n} z \cdot \frac{\gamma_{1n}}{\sigma_1} & \text{при } 0 < z < h_1, \\ \cos \gamma_{1n} h_1 \cdot \frac{\gamma_{1n}}{\sigma_1} \cdot \frac{\cos \gamma_{0n} \left(\frac{h}{2} - z \right)}{\cos \gamma_{0n} \cdot \frac{h_0}{2}} & \text{при } h_1 < z < \frac{h}{2}; \end{cases}$$

$$\Psi_{ny}^0(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < z < h_1, \\ \sin \gamma_{0n} (h_1 - z) \cdot \gamma_{0n} & \text{при } h_1 < z < \frac{h}{2}; \end{cases} \quad (13)$$

$$\Psi_{nz}^{\text{I}}(z) = \begin{cases} \sin \gamma_{1n} z \frac{1}{\sigma_1} & \text{при } 0 < z < h_1, \\ - \cos \gamma_{1n} h_1 \cdot \frac{\gamma_{1n}}{\sigma_1 \gamma_{0n}} \cdot \sin \gamma_{0n} \left(\frac{h}{2} - z \right) & \text{при } h_1 < z < \frac{h}{2}; \end{cases}$$

$$\Psi_{nz}^0(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < z < h_1, \\ \cos \gamma_{0n} (h_1 - z) & \text{при } h_1 < z < \frac{h}{2}. \end{cases} \quad (13')$$

В области III и IV с учетом, что при $y \rightarrow \infty$ $\frac{\partial E_y}{\partial z} \rightarrow j\omega\mu H_1^0$, где H_1^0 — частное решение в (2),

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{2}{\sigma_i h} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{n\pi}{h} C_{in} e^{(-1)^i \gamma_{in} y} - \frac{j\omega\mu_i \sigma_i}{\gamma_{in}^2} (H_i^0 - H_i^h \cos n\pi) \right] \cos \frac{n\pi}{h} z, \\ E_z &= \frac{2}{\sigma_i h} \sum_{n=0}^{\infty} C_{in} e^{(-1)^i \gamma_{in} y} \cdot (-1)^{i+1} \gamma_{in} \sin \frac{n\pi}{h} \cdot z, \quad i=3,4. \end{aligned} \quad (14)$$

Для $n=0$ в выражениях (14) множитель $1/h$.

Постоянные интегрирования определяются из граничных условий при $y = \pm a_1$:

$$\sigma^+ E_y^+ = \sigma^- E_y^-, \quad E_z^+ = E_z^-. \quad (15)$$

Чтобы удовлетворить условиям (15), необходимо выражения (12) — (14) привести к одному виду разложения по собственным функциям. Рационально за основу взять разложения в ряд по собственным функциям:

$$\sin \frac{n\pi}{h} z \text{ и } \cos \frac{n\pi}{h} z.$$

В данном случае получаем две системы уравнений. Нахождение постоянных интегрирования приводит к решению бесконечной системы алгебраических уравнений, которая может быть решена методом ре-дукции.

Таким образом, найдено решение задачи электромагнитного поля в проводящей шине с воздушным окном и по полученным выражениям может быть рассчитано поле при любых параметрах сред.

Проведем исследование электромагнитного поля в электропровод-ной шине с симметрично расположенной внутренней непроводящей прямоугольной областью (рис. 1) при различных толщинах шины h , высоте непроводящей области $2a_1$ и при различных параметрах об-

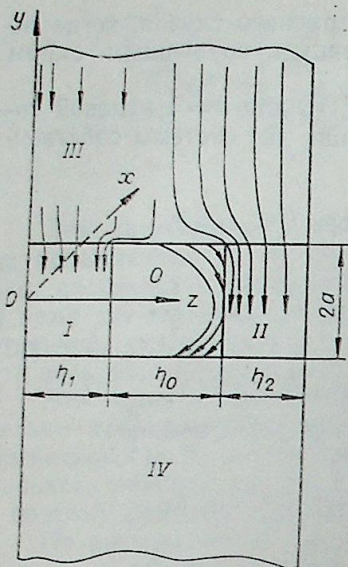


Рис. 1. Линии напряженности электрического поля в проводящей шине с внутренней непроводящей областью.

ластей 1, 2, 3. Пусть напряжение, которое подключено к шине, создает продольный ток δ_y и тангенциальную составляющую напряженности магнитного поля на поверхности шины $H_x = 1000$ а/м. Расчеты проводились с помощью ЭВМ М-222 и на вычисление H_x, E_y, E_z в одной точке затрачивалось 15 с.

Для суммы ряда (2) n изменялось от 2 до 40, и дальнейшее увеличение n практически не изменяло результат. В рассматриваемом случае внутри непроводящей области $H_x = 0$. Как исходный вариант электропроводности σ_3 и σ_1 выбирались равными $0,11 \cdot 10^7$ Ом·м, т. е. рассматривался материал конструкционной стали.

Графики кривых напряженности электрического поля (рис. 2—4) приведены для плоскостей, в которых стыкуются две разнородные области. На рис. 2, 3, 4, б в области $h_1 < z < h/2$ кривые приведены со стороны непроводящей области, на рис. 4, а — со стороны проводящей.

Для анализа взаимовлияния полей в областях I, IV и II, III в таблице приведены значения E_y в однородных в направлении y областях для различных вариантов:

- I. $\sigma_3 = \sigma_1 = \sigma_{\text{меди}}$, $h = 0,11$ м, $h_1 = 0,0271$ м;
- II. $\sigma_3 = \sigma_1 = \sigma_{\text{стали}}$, $h = 0,11$ м, $h_1 = 0,271$ м;
- III. $\sigma_3 = \sigma_1 = \sigma_{\text{стали}}$, $h = 0,0093$ м, $h_1 = 0,0023$ м;
- IV. $\sigma_3 = \sigma_1 = \sigma_{\text{стали}}$, $h = 0,031$ м, $h_1 = 0,0076$ м;
- V. $\sigma_3 = \sigma_{\text{меди}}$, $h = 0,031$ м, $h_1 = 0,0076$ м;
- VI. $\sigma_3 = \sigma_{\text{меди}}$, $h = 0,0093$ м, $h_1 = 0,0023$ м.

При этом вариант а относится к области, состоящей из двух проводящих полос, разделенных воздушной средой, вариант б — к однородной проводящей шине. Из таблицы видно, что в варианте а плотность тока увеличивается при постоянном значении силы тока по отношению к варианту б. Варианты I, V, VI показывают появление явно выраженного поверхностного эффекта в высокопроводящей среде при определенных толщинах шины, причем как в вариантах а, так и вариантах б. Эти два фактора влияют на особенности единого электромагнитного поля в рассматриваемой области (см. рис. 1). Первый фак-

Составляющая E_y [в/м] в однородных в направлении Oy областях

Варианты	z	o		
		o	h_1	$\frac{h}{2}$
I	a	$0,367 \cdot 10^{-2}$	$0,278 \cdot 10^{-3}$	$0,278 \cdot 10^{-3}$
	б	$0,272 \cdot 10^{-2}$	$0,13 \cdot 10^{-3}$	$0,115 \cdot 10^{-4}$
II	a	$0,336 \cdot 10^{-1}$	$0,335 \cdot 10^{-1}$	$0,335 \cdot 10^{-1}$
	б	$0,173 \cdot 10^{-1}$	$0,165 \cdot 10^{-1}$	$0,158 \cdot 10^{-1}$
III	a	0,395	0,395	0,395
	б	0,291	0,223	$0,811 \cdot 10^{-1}$
IV	a	0,123	0,123	0,123
	б	$0,587 \cdot 10^{-1}$	$0,586 \cdot 10^{-1}$	$0,586 \cdot 10^{-1}$
V	a	$0,245 \cdot 10^{-2}$	$0,215 \cdot 10^{-2}$	$0,215 \cdot 10^{-2}$
VI	a	$0,737 \cdot 10^{-2}$	$0,737 \cdot 10^{-2}$	$0,737 \cdot 10^{-2}$

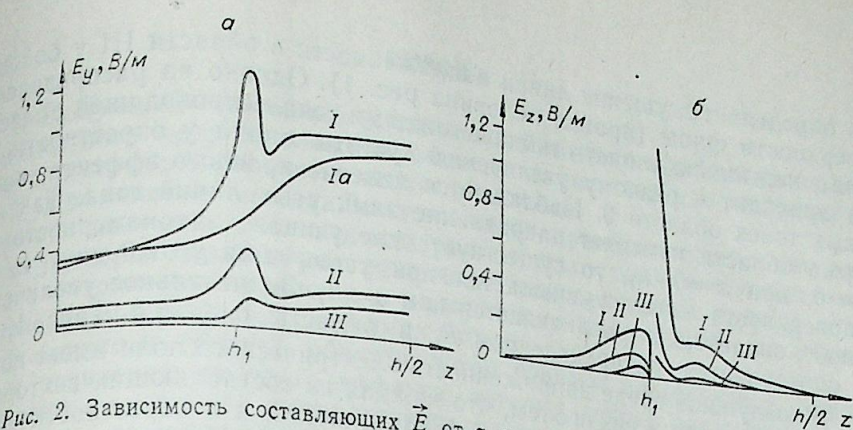


Рис. 2. Зависимость составляющих \vec{E} от z при различной толщине шины для $y = a_1$. I — при $h = 0,0093$ м; II — при $h = 0,031$ м; III — при $h = 0,11$ м; Ia — при $y = 0, h_1 = 0,0093$ м.

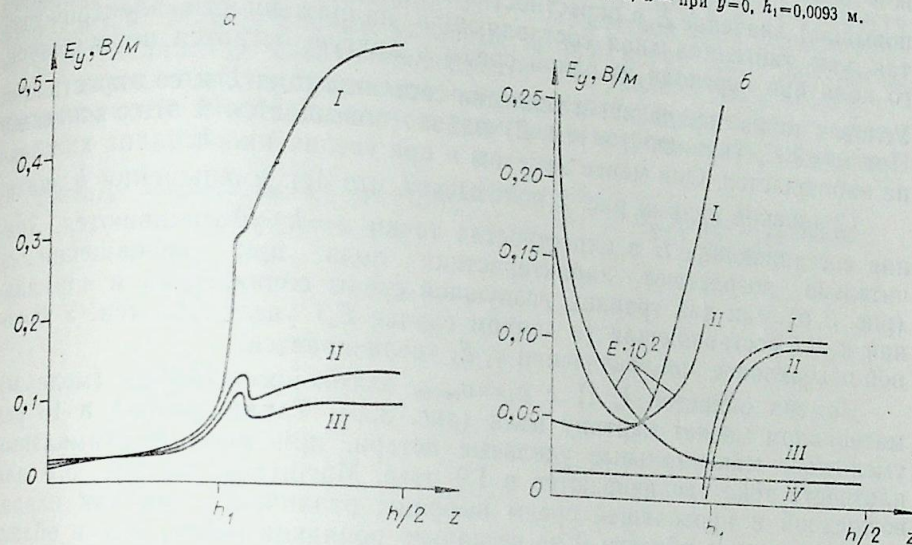


Рис. 3. Зависимость E_y от z . а) при различной высоте непроводящей области для $y = a_1$: I — при $a_1 = 0,001$ м, II — при $a_1 = 0,005$, III — при $a_1 = 0,008$ м; б) при $\sigma_1 = \sigma_{\text{меди}}$, $h = 0,11$, $a_1 = 0,005$ м, I — при $y = a_1$, II — при $y = 0$.

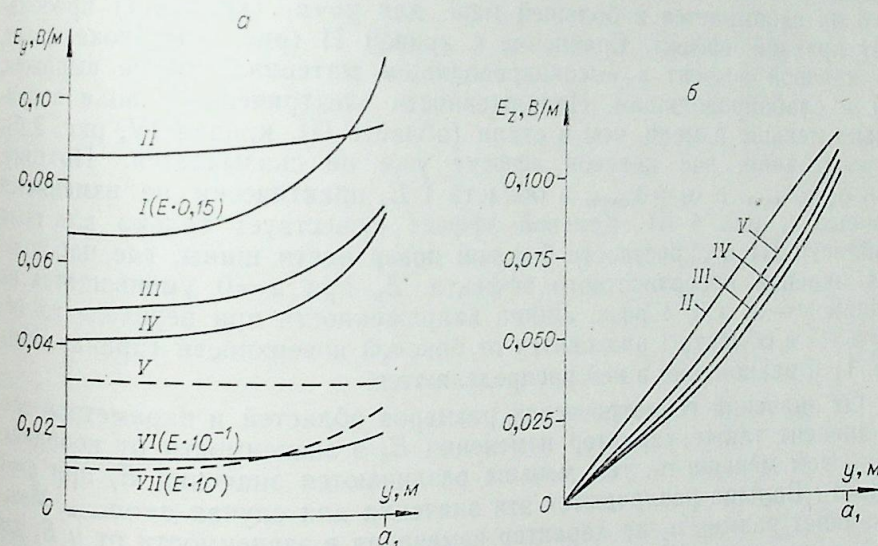


Рис. 4. Зависимость составляющих \vec{E} от y при различной высоте непроводящей области ($z = h_1$). I — при $h = 0,0093$, $a_1 = 0,001$ м; II — при $h = 0,11$, $a_1 = 0,001$ м; III — при $h = 0,11$, $a_1 = 0,005$ м; IV — при $h = 0,11$, $a_1 = 0,008$ м; V — при $h = 0,031$, $a_1 = 0,005$ м; VI — при $h = 0,031$, $a_1 = 0,005$ м; VII — $\sigma_1 = \sigma_{\text{меди}}$, $h = 0,11$, $a_1 = 0,005$ м.

тор определяет сгущение линий напряженности в области III у боковой поверхности шины (правая половина рис. 1). Однако на распределение поля значительно влияет огибание линиями тока непроводящей области, что приводит к резкому увеличению густоты линий у окрестности угловых точек области 0. Наблюдается явление краевого эффекта, когда форма области изменяет направление замкнутых линий тока. Так как $E_z=0$, при $z=0$, h_1 , то существует следующая закономерность: E_y у поверхности шины уменьшается при увеличении y от 0 до a_1 и, наоборот, значительно увеличивается при $z=h_1$. Значительное увеличение E_y определяется распределением E_z в области $0 < z < h_1$ (рис. 1, а).

В воздушной среде напряженность электрического поля имеет повышенные значения в связи с тем, что каждая из составляющих вектора E является нормальной к проводящей поверхности, и в окрестности угловой точки в области 0 E_y равно приблизительно E_z . Это, в свою очередь, повышает значение E в окрестности угловой точки в проводящей среде, так как тангенциальная составляющая напряженности электрического поля при переходе из одной среды в другую остается непрерывной. Угловая точка определяет и всплески составляющих E в ее окрестности. При $y=0$ E_y (кривая I, а рис. 2) плавно повышается и этих всплесков не наблюдается. Они менее заметны и при увеличении h .

Сравнение кривых рис. 2 показывает, что при уменьшении h значения составляющих E в окрестностях точки $z=h_1$ увеличиваются. Значительно возрастают характеристики поля при уменьшении a_1 (рис. 3, а), так как границы воздушной среды сближаются и нормальная к ней составляющая (в данном случае E_y) увеличивается. У боковой поверхности при увеличении a_1 E_y увеличивается.

Замена областей I, II с $\sigma_1 = \sigma_{\text{стали}}$ высокопроводящим (медным) материалом меняет картину поля (рис. 3, б). Такая замена в 16 раз уменьшает максимальные удельные потери, при этом максимальные плотности тока увеличиваются в 1,9 раза. Масштабы на рис. 3, б для воздушной и проводящей среды выбраны различные, так как напряженность поля в области 0 на несколько порядков выше, чем в областях I, II. Поведение поля в области I определяется не только краевым эффектом, но и выраженным поверхностным эффектом в высокопроводящей области, однородной в направлении Oy (кривая III). Для $y=0$ он сказывается в большей мере, для $y=a_1$ (кривая I) преобладает краевой эффект. Сравнение с кривой II (рис. 3, а) показывает, что краевой эффект в высокопроводящем материале более выражен, чем в слабопроводящем. Напряженность электрического поля значительно меньше в меди, чем в стали (область III, кривая IV, рис. 3, б), на расстоянии, где краевой эффект уже не сказывается. Поэтому, если $\sigma_3 = \sigma_{\text{меди}}$, а $\sigma_1 = \sigma_{\text{стали}}$, в области I E_y практически не изменяется (кривые V, рис. 4, а). Краевой эффект существует только для поля в области III в окрестности боковой поверхности шины, где наблюдается явление поверхностного эффекта. E_y при $z=0$ уменьшается на границе $y=a_1$ в 3, 4 раза. Линии напряженности при переходе из области III в область I расходятся от боковой поверхности (правая часть рис. 1) и равномерно в ней распределяются.

От значений геометрических размеров областей и параметров среды зависит также характер изменения E_y в зависимости от координаты y . Чем меньше a_1 , тем меньше различаются значения E_y при $y=0$ и $y=a_1$. Больше различаются эти значения для случая $\sigma = \sigma_{\text{меди}}$. Меньше влияет размер a_1 на характер изменения в зависимости от y E_z для $z=h_1$ со стороны воздушной среды.

Увеличение силы тока в шине практически не изменяет характера поля, увеличивая только абсолютные значения характеристик поля.

ВЫВОДЫ

1. Полученная методика позволяет исследовать особенности электромагнитного поля в сложной области, в том числе в проводящей шине с внутренними непроводящими областями.
2. Применение метода T -интегральных преобразований дает возможность получить решение электромагнитного поля в сложных областях, которые моделируют различные конструктивные узлы и детали в электрических машинах и аппаратах, а также провести анализ их поведения в различных режимах работы.
3. Сложные границы области, в том числе и многосвязной, приводят к появлению краевого эффекта, который может оказывать определяющее влияние на распределение характеристик электромагнитного поля и локальные удельные потери. Явление краевого эффекта зависит от геометрических размеров границ, дифференцируемости функции, описывающей границы, и от параметров сред односвязных подобластей. Максимальные удельные потери могут быть уменьшены за счет увеличения электропроводности материала в окрестности угловых точек, однако градиенты напряженности поля в этом случае увеличиваются. Необходимость в этом часто встречается в электротехнических аппаратах.

Институт электродинамики АН УССР,
Киев

Поступила в редакцию
12/IV 1976

УДК 621.314.5

А. Л. БАРАННИКОВ, П. Ю. ПЕКШЕВ
ГАЗОРАЗРЯДНЫЕ ПРИБОРЫ
С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

В последние годы ведется интенсивное изучение газоразрядных приборов с термоэмиссионным катодом, заполненных парами цезия или цезия и бария (бинарное наполнение). Дюды и триоды такого типа могут эффективно использоваться в силовых цепях низкого напряжения [1—6].

Экспериментально обнаружено, что в ряде режимов приборы этого класса имеют на статической вольт-амперной характеристике (ВАХ) участок отрицательной проводимости. Следовательно, их можно считать сильноточными газоразрядными аналогами полупроводникового туннельного диода, хотя физические процессы, происходящие в них, различны по своей природе.

Термоэмиссионные приборы в найденных режимах с отрицательной проводимостью могут использоваться как активные элементы, способные компенсировать потери во внешней цепи, что позволяет значительно расширить область их применения и в ряде случаев существенно упростить схемные решения.

ТЕРМОЭМИССИОННЫЕ ПРИБОРЫ
С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

На рис. 1, 2 представлены снятые при проведении экспериментов статические ВАХ цезий-бариевого и цезиевого триодов. Характеристики подобного вида наблюдались также для цезий-бариевого диода и приведены в работе [4]. Таким образом, было обнаружено, что при низких давлениях наполнителей существует некоторая максимальная плотность тока разряда $j_{\text{крит}}$, при достижении которой и появляется участок отрицательной проводимости ОП (рис. 1), характеризующийся уменьшением тока с ростом напряжения. Явление существования предельного тока разряда может быть объяснено нарушением равновесия между скоростью ионизации нейтральных атомов, происходящей в объеме, и скоростью деионизации заряженных частиц на поверхностях, находящихся в разрядном промежутке. В случае цезиевого и цезий-бариевого триодов с увеличением тока разряда увеличивается рекомбинация ионов на деионирующих поверхностях. Рост же электронной температуры, происходящий при этом, может компенсировать потери заряженных частиц лишь до известного предела, так как при некотором ее значении скорость ионизации достигает максимума, а затем начинает падать (из-за наличия максимума на кривой относительной ионизации и снижения концентрации нейтральной компоненты плазмы с ростом T_e). Таким образом, ток разряда будет уменьшаться [7, 8]. Существует предельный ток $I_{\text{крит. макс}}$ не только максимальный, но и минимальный, при котором

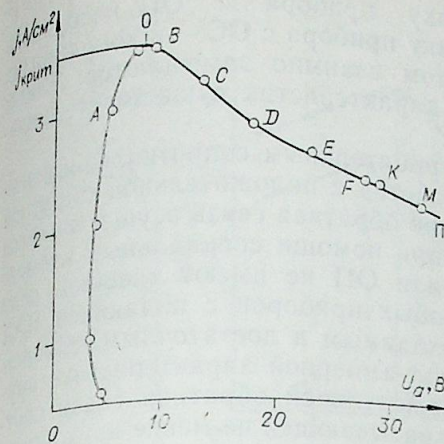


Рис. 1. Статическая вольт-амперная характеристика термоэмиссионного триода, заполненного парами цезия и бария. $T_{\text{к}} = 1162^\circ\text{C}$, $P_{\text{Cs}} = 1 \cdot 10^{-3}$ тор, $P_{\text{Ba}} = 1,4 \times 10^{-4}$ тор.

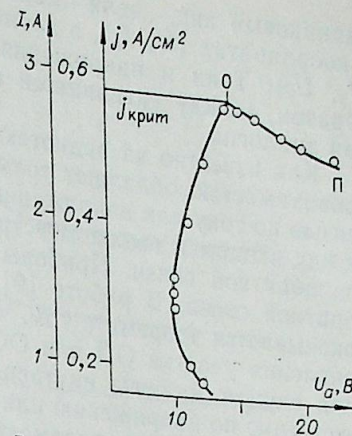


Рис. 2. Статическая вольт-амперная характеристика термоэмиссионного триода, заполненного парами цезия. $P_{\text{Cs}} = 1,5 \cdot 10^{-3}$ тор, $T_{\text{к}} = 1120^\circ\text{C}$.

может гореть разряд. Наличие минимального предельного тока $I_{\text{крит}}$ в сеточных приборах объясняется «срастанием» тонких оболочек, делающим невозможным дальнейшее существование разряда [7]. Важный принцип, этот случай в данной работе мы не рассматриваем.

У приборов с падающим участком на ВАХ существенно различие терминов «отрицательное сопротивление» (ОС) и «отрицательная проводимость» (ОП), так как они имеют разные свойства как элементы электрической цепи [9]. Это определяет различие в способах их применения и включения в схемы, а при анализе схем необходимо пользоваться различной системой параметров. Так, приборы с отрицательной проводимостью ($G^{(-)} = -\Delta I_p / \Delta U_a$) управляются напряжением, поскольку ток, протекающий через них, является однозначной функцией приложенного напряжения $I_p = f(U_a)$, т. е. каждому значению напряжения соответствует только одно значение тока. Приборы же с ОС управляются током.

Зажигание дуги в газоразрядных приборах с подогревным катодом сопровождается появлением участка отрицательного сопротивления ($R^{(-)} = -\Delta U_a / \Delta I_p$) на вольт-амперной характеристике; падение напряжения на разряде уменьшается с ростом тока. В этом случае характеристики термоэмиссионных диодов и триодов подобны характеристикам тиристоров, что дает возможность использовать их в качестве переключателей в схемах преобразования постоянного тока в переменный (рис. 3) [5, 6].

На участке ОС могут самопроизвольно возникать колебания тока и плотности плазмы в межэлектродном промежутке, имеющие широкий спектр в области ионнозвуковых частот [10]. Вольт-амперные характеристики с участком ОП и ОС имеют в принципе

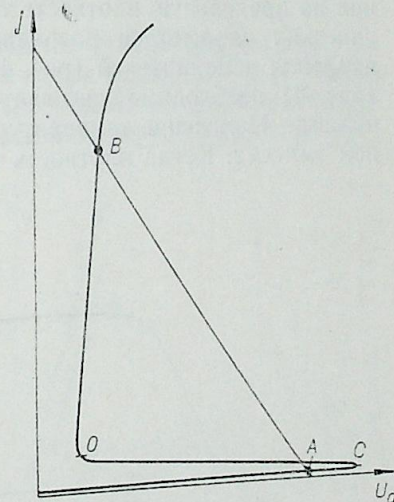


Рис. 3. Типичная вольт-амперная характеристика термоэмиссионного диода с ОС в режиме переключения с линией нагрузки. Точки А и В — устойчивые положения равновесия. А — «закрыто», В — «открыто».

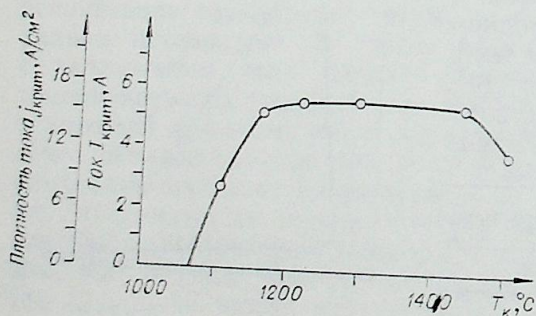
одинаковый вид, если характеристику прибора с ОП изобразить в координатах (U_a, I_p) , а характеристику прибора с ОС — в координатах (I_p, U_a) . Токи и напряжения при этом взаимно замещаются. Таким образом, между указанными видами характеристик существует дуальная аналогия.

Как известно из радиотехники, отрицательным сопротивлением или проводимостью обладают только устройства с положительной обратной связью по току или напряжению. Обычно обратная связь осуществляется между входом и выходом устройства при помощи специальных элементов обратной связи. Приборы с ОС или ОП не имеют внешней цепи обратной связи. В работе [9] для любых приборов с падающей ВАХ доказывается теорема о том, что необходимым и достаточным условием появления участка ОП или ОС на вольт-амперной характеристике прибора служит наличие внутренней положительной обратной связи соответственно по напряжению или току, охватывающей не менее двух источников изменения проводимости. Наличие внутренней положительной обратной связи означает, что любое изменение тока или напряжения должно вызывать дальнейшее их изменение в том же направлении.

К источникам изменения проводимости у газоразрядных приборов относятся эмиссионная способность катода, соотношение скоростей ионизации нейтральных атомов и рекомбинации заряженных частиц, подвижность носителей заряда, сечение прохождения тока. Эти «объекты» и охватываются внутренней обратной связью в термоэмиссионных приборах в режимах с ОС или ОП.

Критическая плотность тока разряда. Как указывалось выше, критерием появления участка отрицательной проводимости на статической ВАХ термоэмиссионного прибора при пониженных давлениях наполнителей является достижение критической плотности тока разряда. Поэтому проводилось тщательное экспериментальное исследование условий достижения $j_{крит}$ и влияния на нее различных параметров газоразрядного прибора.

Исследования проводились на термоэмиссионном триоде с цезий-бариевым наполнением. Конструкция позволяла менять размеры анодно-сеточной области при фиксированном зазоре между катодом и сеткой. Максимальный ток дуги измерялся при снятии вольт-амперных характеристик прибора статическим и динамическим методами. В первом случае прибор питался от источника регулируемого постоянного напряжения, а во втором на анод прибора подавалось синусоидальное напряжение частотой 50 Гц. С помощью осциллографа измерялась величина критического тока. Основные результаты экспериментов — установление влияния на предельную плотность тока разряда температуры катода, геометрических параметров разрядного промежутка (зазора анод — сетка), давления наполнителей (рис. 4—6). Для объяснения влияния T_k на $j_{крит}$ (рис. 4) необходимо учитывать явления, происходящие в прикатодной области. Изменение температуры катода меняет уровень термоэлектронной эмиссии. Когда плотность тока в разряде начинает превышать мак-



симальную плотность тока термоэмиссии ($j_{RS} = A_{120} T_k^2 \times e^{\frac{\phi_k}{kT_k}}$, где $\phi_k = f \cdot (T_k/T_{Ba})$, возле катода возникает положительный скачок потенциа-

Рис. 4. Влияние температуры катода T_k на критическую плотность тока разряда.

$P_{Cs} = 1,6 \cdot 10^{-3}$ тор, $P_{Ba} = 1,6 \cdot 10^{-4}$ тор, зазор анод — сетка $d_{a-c} = 1,1$ мм.

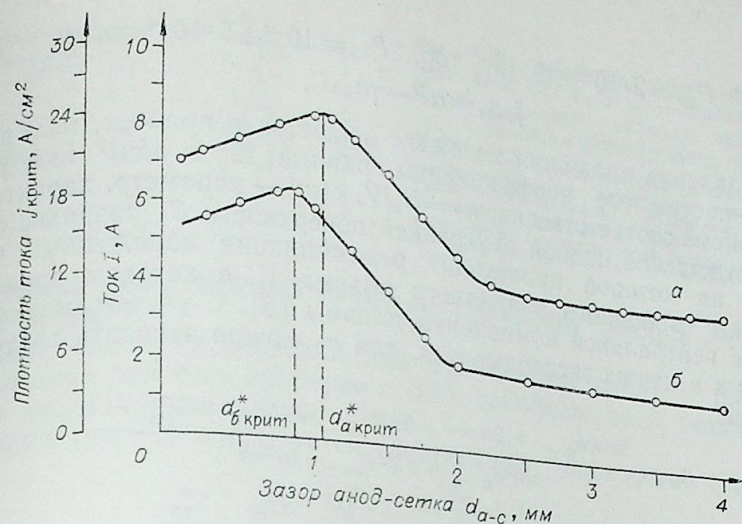


Рис. 5. Влияние зазора анод — сетка d_{a-c} на критическую плотность тока разряда.

а) $P_{Cs} = 2,25 \cdot 10^{-3}$ тор, б) $P_{Cs} = 1,6 \cdot 10^{-3}$ тор, $P_{Ba} = 1,6 \cdot 10^{-4}$ тор.

ла, что приводит к дополнительному увеличению энергии электронов и усилению эффекта снижения интенсивности процессов ионизации из-за наличия максимума на кривой относительной ионизации. При этом чем меньше эмиссионная способность катода (j_{RS} уменьшается с уменьшением T_k и с увеличением ϕ_k при высокой T_k), тем сильнее выражается этот эффект и $j_{крит}$ достигается при меньших значениях плотности тока разряда, но при гораздо больших напряжениях на аноде. Это связано, вероятно, с уменьшением эффекта ограничения тока отрицательным объемным зарядом электронов в прикатодной области. Влияние размеров анодно-сеточной области на предельное значение плотности тока в разряде можно объяснить воздействием торцевой поверхности сетки, обращенной к аноду, на процесс рекомбинации заряженных частиц, с одной стороны, и влиянием объема анодно-сеточной области на интенсивность процессов ионизации — с другой (рис. 5).

Предложенная модель нуждается в дополнительной экспериментальной проверке.

Зависимости $I_{крит} = f(P_{Cs})$ при различных геометрических параметрах разрядного промежутка (рис. 6) позволяют сделать вывод, что с уменьшением давления наполнителей максимальный ток разряда уменьшается.

Полученные экспериментальные данные с учетом результатов работы [8] позволили составить полуэмпирическое выражение для оценки критической плотности тока и, следовательно, описать условия появления участка отрицательной проводимости на вольт-амперной характеристике цезий-бариевого триода, в том диапазоне давлений наполнителей, при котором возможен режим полного управления разрядным током с помощью сетки в вентиле, т. е. при

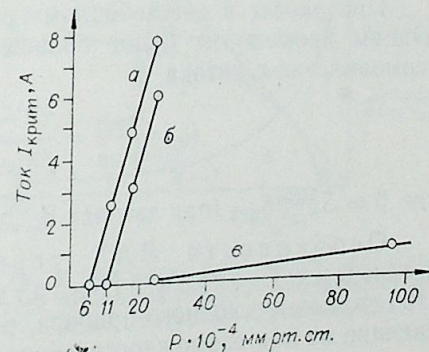


Рис. 6. Влияние давления цезия на критическую плотность тока при $T_k = 1473^\circ\text{C}$, $P_{Ba} = 1,6 \cdot 10^{-4}$ тор, $d_{k-c} = 0,8$ мм, геометрические параметры сеток и зазор d_{a-c} .

а) $l = 12$ шт., $\phi = 1,9$ мм, $h = 2$ мм, $d_{a-c} = 1,25$ мм;
б) $l = 12$ шт., $\phi = 1,9$ мм, $h = 2$ мм, $d_{a-c} = 1,75$ мм;
в) $l = 1$ шт., $\phi = 1,0$ мм, $h = 2$ мм, $d_{a-c} = 0,3$ мм.

$$P_{cs} = 2 \cdot 10^{-3} \div 9 \cdot 10^{-3} \text{ тор}, \quad P_{Ba} = 10^{-4} \div 5 \cdot 10^{-4} \text{ тор},$$

$$j_{\text{крит}} = \alpha P - \gamma n_s \cdot i_e, \quad (1)$$

где P — давление плазмообразующего вещества в приборе, мкм рт. ст.; α и γ — постоянные коэффициенты, равные 12, 8 а/см² мкм рт. ст. и 0,8 а·см/см² соответственно; $n_s = S_p/V$, см⁻¹, — параметр, характеризующий соотношение полной внутренней поверхности S_p разрядного промежутка, на которой происходит рекомбинация заряженных частиц и величины свободного разрядного объема V , в котором происходит ионизация нейтральной компоненты плазмы [8]. С учетом результатов, полученных в наших экспериментах, для n_s можно записать следующее выражение:

$$n_s = \frac{2\pi R d_{k-c} + 2\pi r h n + 2\pi R d_{a-c} + S_{\text{ТПС}}^a + S_{\text{ТПС}}^k}{\pi R^2 d_{k-c} + \pi R^2 d_{a-c} + \pi r^2 h n} =$$

$$= \frac{\frac{2}{R} (d_{k-c} + d_{a-c}) + 2D \frac{h}{r} + \frac{S_{\text{ТПС}}^a}{\pi R^2} + \frac{S_{\text{ТПС}}^k}{\pi R^2}}{d_{k-c} + Dh + d_{a-c}}; \quad (2)$$

Здесь r — радиус сеточного отверстия; h — высота, равная толщине сетки; n — число «работающих» сеточных отверстий; d_{k-c} и d_{a-c} — катодно-сеточный и анодно-сеточный зазоры; R — радиус рассверленной части сетки, который в наших экспериментах равен радиусу катода, но в принципе может быть больше или меньше его; D — прозрачность сетки; S_k — площадь катода; $S_{\text{ТПС}}^k$ — торцевая поверхность сетки со стороны катода; $S_{\text{ТПС}}^a$ — торцевая поверхность сетки, обращенная к аноду.

$$S_{\text{ТПС}}^a = (\pi R_c^{*2} - \pi r^2 n) \left(\frac{d_{a-c}}{d_{a-c \text{ крит}}} - 1 \right) \geq 1,$$

$$S_{\text{ТПС}}^a \text{ макс} = \pi (R_c^{*2} - r^2 n), \quad (3)$$

$$\frac{d_{a-c \text{ крит}}}{r} = aPr.$$

Здесь R_c^* — радиус полной торцевой поверхности сетки, $a = 0,4 \div 0,51$ /мкм. рт. ст. мм² (из экспериментов).

В выражении (1) i_e — безразмерный параметр, характеризующий режимы работы термокатода и позволяющий учесть уменьшение $j_{\text{крит}}$ при «несвободном» режиме работы. При «свободном» режиме, когда плотность тока в разрядном промежутке вплоть до предельного значения $j_{\text{крит}}$ меньше или равна плотности тока термоэмиссии с катода, при заданных T_k и φ_k ; $i_e = I$, $j_{\text{крит}} = \alpha P - \gamma n_s$

$$j_{\text{крит}} = 12,8P - 0,8 n_s.$$

При работе в «несвободном» режиме, когда плотность тока в разрядном промежутке будет больше максимальной плотности тока j_{RS} термоэмиссии с катода

$$i_e = \frac{j_{\text{крит}}}{\beta j_{\text{RS}}} = \frac{\alpha P - \gamma n_s}{\beta A_{120} T_k^2 \cdot e} e^{-\frac{e\varphi_k}{kT_k}} > 1, \quad (4)$$

где $\beta = S_k^{\text{эф}}/S_{\text{отв}}$ (при зазорах $d_{k-c} > 1$ мм, $\beta_{\text{max}} = S_k/S_{\text{отв}}$).

Особенности ВАХ термоэмиссионных приборов, имеющих участок отрицательной проводимости. Свойства термоэмиссионного прибора, работающего в режиме с ОП, и вытекающие из них возможности применения становятся ясными из анализа

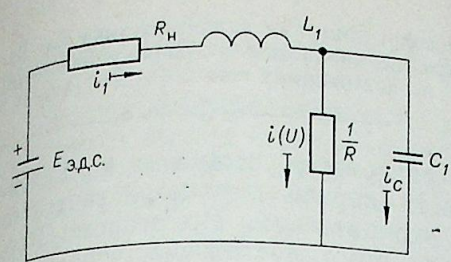


Рис. 7. Эквивалентная схема нагруженного прибора с ОП L_1 и C_1 — общая индуктивность и емкость, включая индуктивность и емкость газоразрядного прибора. R_n — общее активное сопротивление нагрузки с учетом внутреннего сопротивления источника питания; $i(U)$ — активная составляющая тока, протекающего через прибор (вольт-амперная характеристика); U — напряжение на приборе; $R=1/G$ — дифференциальное сопротивление прибора.

устойчивости эквивалентной схемы нагруженного прибора с ОП, показанной на рис. 7.

Такой анализ проводился для туннельного диода в работе [9] и справедлив для всех приборов с ВАХ подобного вида, независимо от физики явлений, протекающих в них.

Схема (рис. 7) описывается следующими уравнениями Кирхгоффа:

$$E = i_1 R_n + L_1 \frac{di_1}{dt} + U,$$

$$i_1 = C_1 \frac{dU}{dt} + i(U). \quad (5)$$

Для анализа устойчивости схемы из условия равенства нулю фазовых скоростей определяются положения равновесия на ВАХ прибора и их устойчивость. Положив $di(U)/dt=0$ и $dU/dt=0$ и решив эти уравнения совместно с (5), можно получить

$$i(U) = \frac{E - U}{R_n}. \quad (6)$$

Следовательно, положением равновесия являются точки пересечения ВАХ прибора с нагрузочной прямой. Таких точек может быть либо три, либо одна (рис. 8). Об устойчивости положения равновесия судят по решению дифференциальных уравнений (5):

$$x^2 + \sigma x + p = 0, \quad (7)$$

где

$$\sigma = \frac{1}{RC_1} + \frac{R_n}{L_1}, \quad (8)$$

$$p = \frac{R_n/R + 1}{L_1 C_1}, \quad (9)$$

$$x_{1,2} = -\frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} - p}. \quad (10)$$

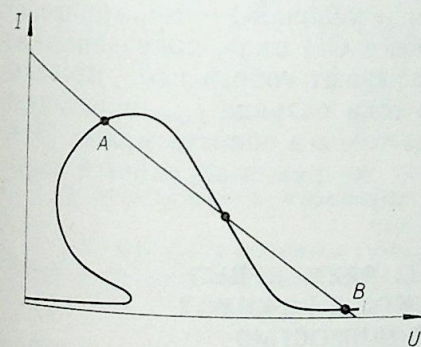


Рис. 8. Возможные состояния устойчивости термоэмиссионных приборов, имеющих участок ОП на статической ВАХ.

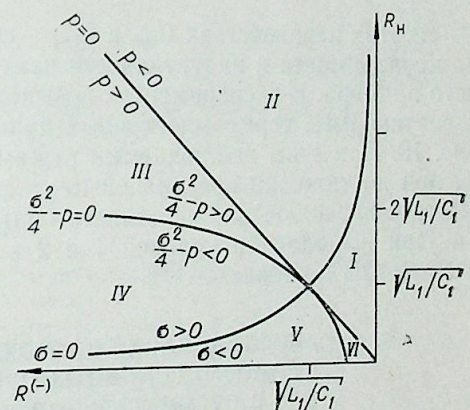


Рис. 9. Диаграмма устойчивости, определяющая возможные режимы работы термоэмиссионного прибора с участком ОП.

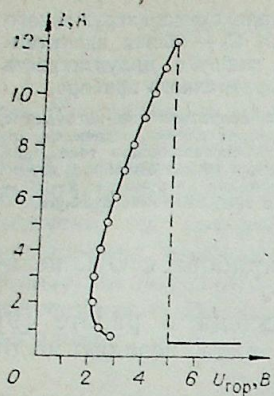


Рис. 10. Типичная вольт-амперная характеристика Cs—Ва-триода, снятая при невыполнении условия устойчивости по постоянному току.

Положения равновесия устойчивы, когда действительные части корней характеристического уравнения (7) отрицательны. По теореме Рауса—Гурвица для этого достаточно, чтобы выполнялись одновременно условия

$$\sigma > 0; \rho > 0. \quad (11)$$

При рассмотрении различных соотношений σ и ρ [9], зависящих от параметров схемы, получают диаграмму устойчивости, которая делится на шесть областей (рис. 9).

В областях I и II схема будет работать в режиме переключения. В области III схема может работать в качестве нелинейного элемента (детектора, смесителя, ограничителя) с усилением. В области IV, как и III, одно положение равновесия, но корни x_1 и x_2 — комплексные числа с отрицательной действительной частью. Следовательно, схема будет работать в режиме усиления. В области V единственное неустойчивое положение равновесия, а корни комплексные с положительной действительной частью. Схема работает в режиме генерации синусоидальных колебаний. В области VI при единственном неустойчивом положении равновесия корни действительные и положительные. Здесь схема генерирует релаксационные колебания.

Таким образом, режимы работы с участком отрицательной проводимости на статической ВАХ цезиевых и цезий-бариевых приборов с термоэмиссионным катодом позволяют применять их в любом из названных режимов работы при соответствующем подборе величин R_H и $G^{(-)}$.

Участок отрицательной проводимости ВАХ может быть снят по точкам или импульсно лишь при соблюдении условий устойчивости, получаемых из указанного анализа:

- 1) по постоянному току (для предотвращения переключения)

$$G_{\text{сум}} > |G^{(-)}|,$$

- 2) по переменному току (для предотвращения генерации)

$$G_{\text{сум}} < \frac{L_{\text{сум}}}{|G^{(-)}|C}.$$

В этих неравенствах $G_{\text{сум}}$ и $L_{\text{сум}}$ — суммарные величины соответственно проводимости и индуктивности измерительной цепи и термоэмиссионного прибора. В экспериментах невыполнение условия 1 обычно приводит к снятию ВАХ термоэмиссионных приборов с ОП вида, показанного на рис. 10. При этом наблюдаемый режим называют «обрывным», поскольку при достижении предельной плотности тока разряда $j_{\text{крит}}$ происходит быстрое переключение из области больших токов в область малых [3, 4, 7]. При выполнении условий 1 и 2 в этих же режимах удается снять участок ОП по точкам.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНЫХ ПРИМЕНЕНИЙ ТЕРМОЭМИССИОННЫХ ПРИБОРОВ В РЕЖИМАХ С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

Работа прибора с ОП в ключевом режиме. Развиваемый для ряда режимов подход к термоэмиссионным приборам, как к приборам, имеющим участок отрицательной проводимости на стати-

ческой ВАХ, дает возможность с этих позиций рассмотреть исследования Cs—Ва-триода. Из анализа устойчивости положений равновесия, приведенного выше, следует вывод: переключение прибора осуществляется при условии, что линия нагрузки касается ВАХ на участке ОП, и, следовательно, параметры переключения зависят от линии нагрузки, и, следовательно, справедливо и для режимов приборов с ОС (см. рис. 3) с учетом дуальной аналогии с ОП. Таким образом, для работы прибора в режиме переключения необходимо, чтобы происходила периодическая взаимная деформация ВАХ по линии нагрузки до их касания в точках переключения. Очевидно, что условия переключения могут достигаться деформацией ВАХ, и линии нагрузки.

Рассмотрим Cs—Ва-триод в качестве вентиля, проводимость которого управляется сеткой.

При подаче отрицательного смещения на сетку напряжение горения U_a разряда увеличивается (рис. 11, б, а) особенно сильно при токах, близких к предельным, а диапазон возможных токов разряда уменьшается. То есть максимальное значение тока $I_{\text{крит. max}}$ уменьшается, а минимальное $I_{\text{крит. min}}$ увеличивается. На рис. 11, а, показаны ВАХ прибора, снятые при различных отрицательных потенциалах сетки. При

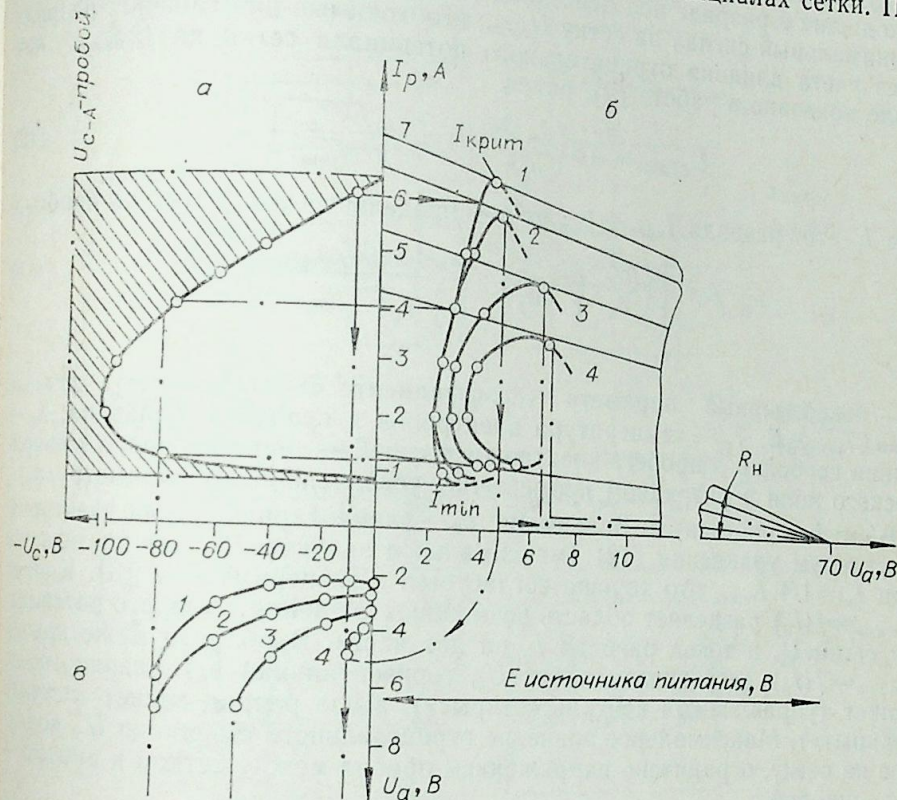


Рис. 11. а) Вольт-амперная характеристика прибора при различных потенциалах, подаваемых на сетку.

U_c (В): при «плавающем» потенциале сетки (1); -10 (2); -50 (3); -80 (4).

б) Зависимость анодного падения напряжения в разряде U_a от отрицательного потенциала сетки U_c при различных токах разряда.

I_p (А): 1,2 (1); 4 (2); 5 (3); 6 (4).

б). Зависимость напряжения гашения сетки от тока разряда: $U_c \text{ гаш} = f(I_p)$.
 $T_H = 1160^\circ\text{C}$, $P_{Cs} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ тор}$; $1,6 \cdot 10^{-3} \text{ тор}$; зазоры анод—сетка $d_{a-c} = 0,5 \text{ мм}$, катод—сетка $d_{k-c} = 1 \text{ мм}$, напряжение, подаваемое на анод от источника питания $U_a = 70 \text{ В}$. В области ниже кривой $U_c \text{ гаш} = f(I_p)$ разряд гореть может, выше разряд гаснет (заштрихованная область $U_c \text{ max} U_c - A$ пробой).

этом если в результате деформации ВАХ под действием отрицательного смещения, поданного на сетку, ток разряда, определяемый точкой пересечения линии нагрузки и ВАХ, снятой при плавающем потенциале сетки, становится больше максимального тока разряда при отрицательном потенциале сетки $I_{крит. макс}$ или меньше минимального $I_{крит. мин}$, то под действием этого потенциала разряд погаснет. Например, токи разряда $I_p > 4$ А и $I_p < 1,2$ А прерываются потенциалом $U_c = -80$ В.

Деформация ВАХ может достигаться и с помощью поперечного магнитного поля. Этот случай представляет интерес как с точки зрения возможности совместного сеточно-магнитного управления, так и воздействия собственного магнитного поля на работу сильноточных приборов данного типа.

Особенности изменения ВАХ исследуемого прибора при подаче отрицательного смещения на сетку и существование двух предельных токов разряда при плавающем потенциале сетки определяют характер изменения гасящего потенциала сетки $U_{с гаш.}$ от разрядного тока. Зависимость $U_{с гаш.} = f(I_p)$ имеет явно выраженный максимум. При токах разряда, близких к предельным $I_p = I_{max}$ и I_{min} , гашение разряда облегчается (рис. 11, в).

Данные экспериментов позволили описать основные процессы, происходящие в разряде под действием сетки, и выбрать критерий гашения. Минимальный сигнал на сетку $U_{с гаш.}$, необходимый для гашения разряда (без учета влияния отрицательного потенциала сетки на $j_{крит. макс}$) как было показано в работе [2], равен

$$U_{с гаш.} = AB \left(\frac{I_p}{n} \right)^{2/3} \left(1 - \sqrt{\frac{I_p}{I_{крит}}} \right)^{4/3}, \quad (12)$$

где I_p — ток разряда, $I_{крит} = j_{крит} \pi r^2 n$ — предельный ток разряда в приборе;

$$A = \left[\left(\frac{0,5}{\pi} \sqrt{\frac{T_e}{M_i}} \right)^{1/2} \frac{(M_i)^{1/4}}{\left(\frac{4}{9} \varepsilon_0 \right)^{1/2} (2e_0)^{1/4}} \right]^{4/3}; \quad (13)$$

B — безразмерный параметр (коэффициент «хаотичности»), равный $B = kT_e / e_0 \lambda_e E$; T_e — температура электронов в градусах Кельвина; λ_e — длина свободного пробега электронов в см; E — напряженность электрического поля в разрядном промежутке, усредненная по параметру n_s^{-1} , в В/см; k — постоянная Больцмана; e_0 — элементарный заряд электрона. Экстремум уравнения (12) (максимальное значение $U_{с гаш.}$) достигается при $I_p = 1/4 I_{крит}$, что хорошо согласуется с экспериментом [3]. Кривая $U_{с гаш.} = f(I_p)$ разделяет область возможных значений гасящего потенциала сетки U_c и токов разряда I_p на две части. В области ниже кривой $U_{с гаш.} = f(I_p)$ (вертикальная ось U_c , горизонтальная I_p) разряд горит («открыт»), выше разряд гаснет (вентиль «закрыт»). Максимальное значение отрицательного смещения U_c , поданное на сетку, ограничено напряжением пробоя между сеткой и анодом — $U_{с-А}$ пробой.

Результаты, полученные в настоящей работе, показывают, что для управления разрядным током в приборах ОП можно использовать в принципе управляющие сигналы и положительной полярности, подаваемые на анод. В этом случае в результате увеличения тока под действием управляющего сигнала также произойдет прерывание основного разряда в момент, когда ток разряда достигнет критического значения.

Генерирование колебаний с помощью термоэмиссионного прибора с ОП. Описываемые выше свойства схем приборов, имеющих участок ОП на ВАХ, объясняют экспериментально обнаруженный факт: при включении трехэлектродного термоэмиссионного

цезий-бариевого прибора при плавающем потенциале сетки в колебательный контур возникают интенсивные незатухающие сетки в колебания, амплитуда которых может превышать разрядный ток. В данном случае для поддержания устойчивых колебаний не требовалось введения внешней цепи обратной связи.

Проведенный эксперимент наглядно иллюстрирует связь наблюдавшихся колебаний с отрицательной проводимостью плазмы дугового разряда. На рис. 12 представлены осциллограммы тока через триод в различных точках падающего участка статической ВАХ (см. рис. 1). Амплитуда росла по мере продвижения по участку ОП в область больших напряжений. Устойчивая генерация с частотой в диапазоне 31 КГц наблюдалась в точках D, E, F, M (рис. 12). Увеличение амплитуды, очевидно, связано с уменьшением R_n и изменением $G^{(-)}$. Внешней цепи обратной связи не требовалось, поскольку прибор на участке ОП обладает внутренней положительной обратной связью по напряжению.

Параметры прибора (температура катода T_k , расстояние анод — сетка, напряжение, подаваемое на сетку прибора) значительно меняют

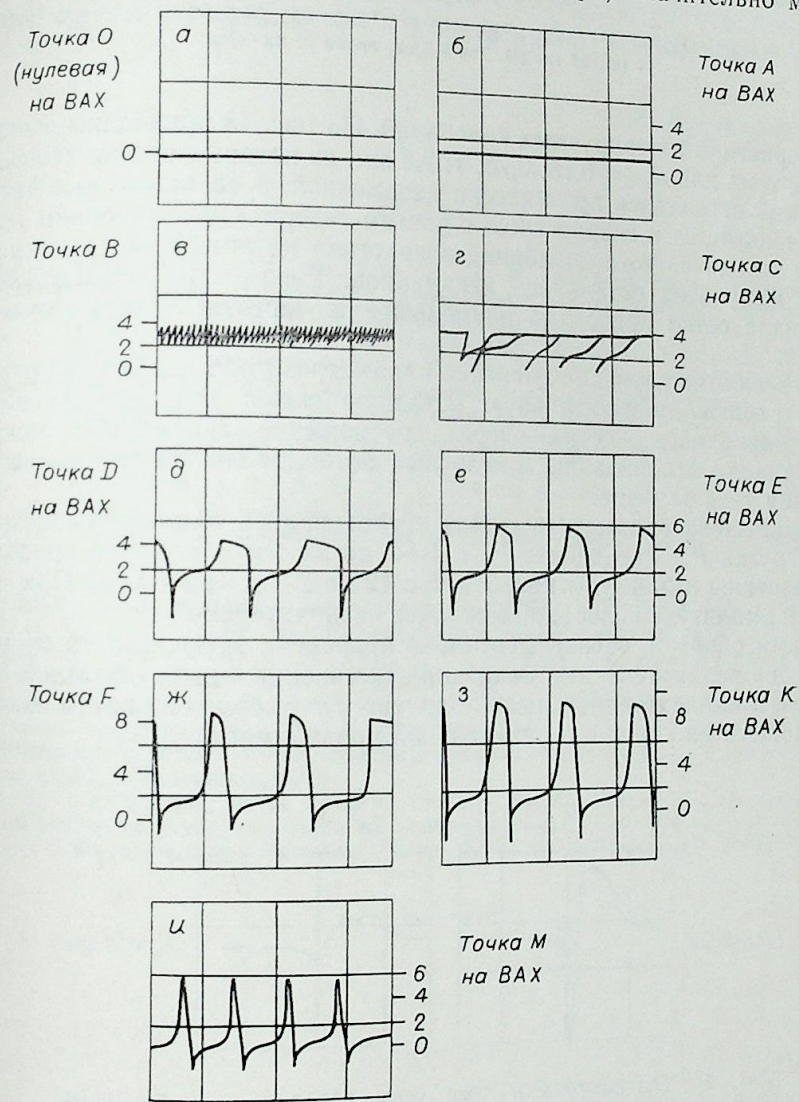


Рис. 12. Осциллограммы тока через Cs—Ba-триод в различных точках участка ОП ВАХ (см. рис. 1). Ток 2 А/см, время 10 мк · с/см.

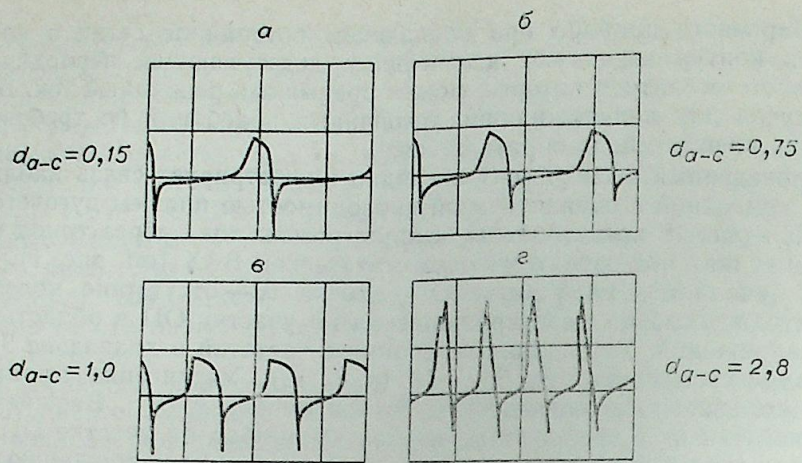


Рис. 13. Осциллограммы тока через цезий-бариевый термоэмиссионный триод.
 $T_K = 1140^\circ\text{C}$, $P_{Cs} = 1 \cdot 10^{-3}$ тор, $P_{Ba} = 1,8 \cdot 10^{-4}$ тор, $d_{a-c} = 0,15$ мм (а); 0,75 (б); 1 (в); 2,8 мм (г). Ток 2 А/см, время 10 мк · с/см.

характеристики генерируемых колебаний. На рис. 13 приведены осциллограммы тока для $d_{a-c} = 0,15; 0,75; 1; 2,8$ мм, из которых видно, что форма колебаний оставалась практически неизменной, в то время как частота имела тенденцию к возрастанию с ростом зазора. С увеличением температуры катода частота колебаний возрастала по линейной зависимости. Форма импульсов оставалась неизменной. Увеличение отрицательного потенциала сетки приводило к уменьшению частоты генерируемых колебаний.

Во всех этих случаях изменение параметров прибора воздействовало на внутреннюю положительную обратную связь: температура катода и расстояние анод — сетка — через соотношение скоростей процессов рекомбинации и ионизации, а сеточный потенциал — через сечение прохождения тока разряда.

Из внешних параметров схемы исследовалось влияние сопротивления нагрузки R_n . Увеличение R_n с $1 \div 2$ до 20 Ом в контуре приводило к уменьшению амплитуды колебаний с 12 до 2,4 А (рис. 14). При этом форма и амплитуда колебаний менялись незначительно.

Таким образом, экспериментально проверена возможность создания генератора релаксационных колебаний без внешней цепи обратной связи на основе трехэлектродного цезий-бариевого термоэмиссионного прибора, работающего на участке отрицательной проводимости.

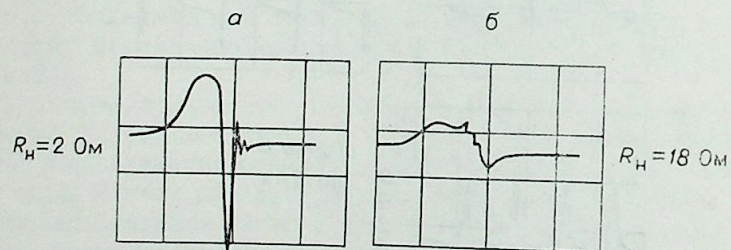


Рис. 14. Осциллограммы тока через триод с цезий-бариевым наполнением.
 $T_K = 1130^\circ\text{C}$; $P_{Cs} = 1 \cdot 10^{-3}$ тор; $P_{Ba} = 1,8 \cdot 10^{-4}$ тор; $R_n = 2,0$ Ом (а); 18 Ом (б). Ток 2 А/см, время 5 мк · с/см.

ВЫВОДЫ

1. В ряде режимов при низких давлениях наполнителей термоэмиссионной вольт-амперной характеристике и триоды имеют на статической характеристике участок обусловлено отрицательной проводимостью, появление которого обусловлено существованием внутренней положительной обратной связи по напряжению.

2. В указанных режимах приборы этого класса являются высокоточными газоразрядными аналогами полупроводникового туннельного диода.

3. Особенности вольт-амперных характеристик в этих случаях позволяют использовать цезиевые и цезий-бариевые газоразрядные диоды и триоды с термоэмиссионным катодом (при соответствующем соотношении сопротивления нагрузки и отрицательной проводимости) в любом из известных режимов работы: усиление, генерация синусоидальных и релаксационных колебаний, переключение, преобразование с усилением, детектирование и т. д.

В заключение авторы выражают благодарность В. В. Яминскому, под руководством которого выполнялась настоящая работа, и Б. К. Феоктистову за полезные советы и участие в обсуждении результатов экспериментов.

Поступила в редакцию
25/V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. В. З. Кайбышев, Г. А. Кузин, В. М. Мельников. О возможности использования термоэмиссионного преобразователя для управления током в электрических цепях.— ЖТФ, 1972, XLII, вып. 6, 1265.
2. А. Л. Баранников, Б. К. Феоктистов, В. В. Яминский. К вопросу об управлении разрядным током в Cs—Ba полностью управляемом вентиле.— Электронная техника. Сер. 3. «Газоразрядные приборы», 1976, вып. 3.
3. А. Л. Баранников, Б. А. Сироткин, К. Б. Феоктистов, В. В. Яминский. Некоторые результаты экспериментального исследования Cs—Ba полностью управляемого вентиля.— ЖТФ, 1976, XLVII, вып. 6.
4. В. З. Кайбышев, Г. А. Кузин. Влияние третьего электрода на обрыв тока в низковольтной дуге.— ЖТФ, 1975, XLVI, вып. 2.
5. С. С. Люберс. Высокотемпературный диод-переключатель.— ППТЭ и ТЭ, 1971, № 11.
6. N. Pasch, W. Kleinkauf, W. Rash. Характеристики цезиевого термоэмиссионного диода в режиме переключателя.— ППТЭ и ТЭ, 1973, № 4 (129).
7. В. Л. Грановский. Электрический ток в газе. М., «Наука», 1971.
8. О. Р. Коненко, А. Л. Мусин, С. Ф. Утенкова. Разряд низкого давления в гетерогенной среде.— ЖТФ, 1973, XLIII, вып. 8.
9. С. А. Горяинов, И. Д. Абезгауз. Полупроводниковые приборы с отрицательным сопротивлением. М.—Л., «Энергия», 1966.
10. Физические основы термоэмиссионного преобразования энергии. Под ред. И. П. Стаханова, М., «Атомиздат», 1973.
11. В. В. Анташов, А. Л. Баранников, П. Ю. Пекшев. Управление газовым разрядом путем изменения его вольт-амперной характеристики и линии нагрузки.— «Энергетические установки». Сб. тр. МВТУ им. А. Э. Баумана. М., 1978.

Б. Н. СТИХАНОВСКИЙ

ОБ ОДНОМ МЕХАНОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПРОЦЕССЕ,
СОПРОВОЖДАЮЩЕМ УДАР ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Возникновение электрических полей при ударном воздействии на ферромагнетики объясняется доменным эффектом; при воздействии на металлы, полупроводники и диэлектрики ультразвуковых волн — магнитострикцией и пьезоэффектом; при больших скоростях удара (порядка нескольких сотен и тысяч метров в секунду) — изменением объема и плотности соударяемых тел и термодинамическими эффектами: ударным нагревом, фазовыми превращениями, ионизацией и прочими явлениями.

Носителями электрического тока в металлах, электронных полупроводниках и диэлектриках являются свободные электроны. При инерционном разделении зарядов в проводнике возникает электрическое поле с напряженностью $E = u_0/l$, где l — длина проводника, а u_0 — разность потенциалов на концах его ($u_0 = iR_0$, R_0 — полное сопротивление цепи, i — ток). Электрическое поле уменьшает количество движения каждого элементарного носителя заряда (в данном случае электрона) до нуля, e и m — заряд и масса электрона. Импульс силы $F \cdot dt = eE_0 dt$ равен изменению количества движения электрона mdv , т. е.

$$mdv = eE_0 dt = \frac{R_0 i}{l} \cdot dt;$$

$$i = \frac{m}{e} \cdot \frac{l}{R_0} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{m}{e} \cdot \frac{s}{\rho} \cdot \frac{dv}{dt},$$

где $R_0 = \rho \frac{l}{s}$; ρ — удельное сопротивление; s — площадь поперечного сечения проводника. В системе СИ можно записать

$$i = 5,7 \cdot 10^{-12} \frac{s}{\rho} \cdot \frac{dv}{dt}. \quad (1)$$

В опытах Стюарта и Толмэна катушка с большим числом витков тонкой проволоки приводилась в быстрое вращательное движение вокруг своей оси и затем резко тормозилась. Выводы катушки были замкнуты на чувствительный баллистический гальванометр. Общая длина обмотки составляла примерно 500 м, а линейная скорость движения проволоки достигала $300 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$. С помощью этих опытов доказывалось, что носителями электрического тока в металлах являются свободные электроны, а также определялось отношение m/e . При обычных же механических воздействиях металлических тел с размерами от сантиметра до нескольких метров и скоростями сближения от нескольких сантиметров до нескольких десятков метров в секунду наличие достаточно заметного электрического поля не предполагалось.

В работах [1, 2] было сообщено об обнаружении электрического поля, сопровождающего ударный импульс при его распространении в электропроводящих стержнях, и указаны некоторые возможные практические

применения этого механоэлектрического процесса. Возникновение электрического поля на первом этапе исследований объяснялось инерционным разделением зарядов согласно классическим опытам Мандельштама и Папалекси, Толмена и Стюарта. В отличие от первой серии опытов [1], в которых с помощью трансформаторов тока в соударяющихся телах определялась величина производной тока di/dt , в данной работе разность потенциалов u измеряется при непосредственном электрическом контакте измерительной цепи с испытуемым телом и с помощью емкостного датчика (рис. 1).

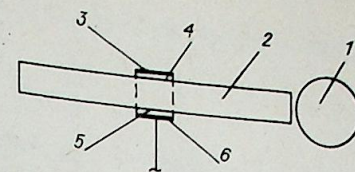


Рис. 1.

При инерционном разделении зарядов возникает макроскопическая область локального нарушения электронейтральности, распространяющаяся с ударным импульсом. При этом имеем спектр частот от килогерц до десятков килогерц, в связи с чем заряд распространяется в основном в поверхностном слое. Значит, у поверхности испытываемого тела вследствие скин-эффекта заметно возрастает электрическое поле, сопровождающее волны деформаций. Например, эффективная глубина проникновения заряда от поверхности тела при частоте 10^4 Гц для медных, алюминиевых и стальных стержней круглого сечения составляет $0,1 \div 0,7 \text{ мм}$. Концентрация зарядов в поверхностном слое при ударе тел позволяет определять механические параметры удара способами, схематически изображенными на рис. 1.

Изменение заряда во времени в емкостном датчике или в скользящем электрическом контакте (см. рис. 1), т. е. величина тока $i_e = dq_e/dt$, эффекта при достаточно близком расстоянии сечений тела. Из-за скин-эффекта в нем возникает практически такой же по величине заряд, что и на поверхности тела напротив него. Датчик соединен с входным сопротивлением R усилителя. Следовательно, сигнал на входе усилителя равен $u = \frac{dq_e}{dt} R$, где q_e — заряд, наведенный в емкостном датчике. Заряд распространяется по поверхности проводника вместе с волной деформации со скоростью упругой продольной волны a и охватывает емкостной датчик длиной l за время $\tau_a = l/a$. При этом если длина датчика l много меньше продольной деформированной зоны ударного импульса, то для поверхностного заряда q_n у емкостного датчика, охватывающего тело по всему его поперечному периметру, можно записать

$$q_n = \frac{dq}{dt} \tau_a.$$

При одинаковых зарядах у поверхности испытываемого тела и емкостного датчика, т. е. $q_n = q_e$, имеем сигнал на входе усилителя:

$$u = \tau_a \frac{dq_e}{dt} \cdot R = \frac{l}{a} i R. \quad (2)$$

Учитывая (1), (2) и то, что емкостный датчик может полностью не охватывать поперечный контур испытываемого тела, получим

$$u = 5,7 \cdot 10^{-12} \frac{slbR}{ab_0\rho} \cdot \frac{d^2v}{dt^2}, \quad (3)$$

где b_0 — длина полного замкнутого контура вокруг поперечного сечения тела, b — поперечный размер емкостного датчика $b \leq b_0$.

Ускорения поперечных сечений, нормальных продольной волне, скорости v , относительные деформации ϵ , давление σ , сила F в моменты времени τ равны

$$\frac{dv}{dt} = A \int_0^{\tau} u dt; \quad (4)$$

$$v = A \int_0^{\tau} \left[\int_0^{\tau} u dt \right] dt, \quad (5)$$

$$\epsilon = v/a, \quad \sigma = \epsilon E, \quad F = \sigma s,$$

где $A = 1,76 \cdot 10^{11} \frac{ab_0 p}{sbbR}$, E — модуль упругости.

При электрическом контакте входа усилителя с металлическим испытуемым телом последнее не заземляется, чтобы не закоротить вход усилителя. Это приводит к заметным наводкам и помехам в испытуемом теле и измерительной цепи, хотя такого рода подсоединение к телу наиболее просто и наглядно (см. рис. 1). Электрический контакт при этом должен быть скользящим, что исключает ударные ускорения соединительных проводов и кабеля, идущего ко входу усилителя.

При схеме измерения, показанной на рис. 1, все металлические тела лучше заземлять, чтобы не запускать осциллограф от разности потенциалов, существующей между металлами бойка 1 и стержня 2, до их контакта. Емкостный датчик 4 представляет собой медное кольцо 3 диаметром, большим диаметра стержня 2 на двойную толщину диэлектрической пленки, с малым коэффициентом трения скольжения. Пленка позволяет датчику свободно скользить относительно стержня, а при ее высокой диэлектрической проницаемости электрические заряды практически без искажения индуцируются на металлической пластине емкостного датчика 6 через диэлектрик 5. Испытуемые тела в месте подсоединения датчика должны иметь относительно гладкую поверхность. Диэлектрическая пленка скольжения должна быть весьма податливой в поперечном направлении и относительно свободно скользящей по поверхности тела, чтобы сам датчик и пленка ускорялись в десятки и сотни раз меньше, чем испытуемое тело, иначе на пленке будут возникать паразитные поляризаационные заряды. В то же время нельзя, чтобы в процессе измерений были существенные радиальные сдвиги датчика относительно тела, приводящие к появлению дополнительных сигналов за счет изменения емкости датчика. Что же касается изменения расстояния из-за поперечных деформаций испытуемого тела, вызывающих появление дополнительного емкостного потенциала, то им можно пренебречь, так как величина сигнала при этом составляет $\Delta u/u \approx \epsilon = 10^{-2} \div 10^{-3}$ относительно рабочего сигнала u , где ϵ_n — относительная деформация толщины пленки. Поэтому при фиксированном положении датчика емкостным эффектом от поперечных деформаций самого испытуемого тела можно пренебречь.

При ударе по полупроводниковым и диэлектрическим телам в них происходят процессы поляризации, диффузии носителей тока, увеличения проводимости в 10^{10} и более раз и другие эффекты.

На поверхностях, ограничивающих конечный объем диэлектрика, возникают поляризаационные заряды, распределенные с поверхностной плотностью $\sigma_p = \epsilon_0 E_0$, где ϵ_0 — электрическая постоянная, ϵ_1 — относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика, E_0 — электрическое поле, поляризующее диэлектрик. На обкладках пластин, прилегающих к диэлектрику, поверхностный заряд равен $\sigma_{ep} = \epsilon_0 \epsilon_1 E_0$. Учитывая, что ускорение поверхности стержня в μ раз меньше, чем ускорение соответствующего поперечного сечения, нормального к распространению продольной волны, где μ — коэффициент Пуассона, и что $E_0 = \frac{m_1}{q_1} \cdot \frac{dv}{dt}$, где q_1 — свободные и слабо связанные с молекулами диэлектрика заряды и заряды диполей, поляризованные под воздействием волны деформаций,

m_1 — масса подвижных зарядов и диполей, получим для заряда на пластине емкостного датчика с площадью s_1

$$q = s_1 \cdot \sigma_{ep} = \epsilon_0 \epsilon_1 s_1 \mu \frac{m_1}{q_1} \cdot \frac{dv}{dt}. \quad (6)$$

Сигнал на входе усилителя для диэлектрика, так же как и для других материалов, пропорционален dq/dt на пластине емкостного датчика и входному сопротивлению R , т. е.

$$u = \epsilon_0 \epsilon_1 s_1 \mu R \frac{m_1}{q_1} \cdot \frac{d^2v}{dt^2}. \quad (7)$$

Ускорения поперечных сечений, нормальных к продольной волне, равны

$$\frac{dv}{dt} = B \int_0^{\tau} u dt, \quad (8)$$

где $B = \left(\epsilon_0 \epsilon_1 s_1 \mu R \frac{m_1}{q_1} \right)^{-1}$. Аналогично (5) находятся скорости v , относительные деформации ϵ , давление σ и сила F в различные моменты времени t .

Величину m_1/q_1 , характеризующую материал тел, для различных диэлектриков можно найти, определив ускорение каким-либо независимым способом, например с помощью показаний тензометрического моста. Схема измерительного тракта показана на рис. 2.

Боек 1 ударяет по стержню-волноводу 2, по которому распространяется волна деформации, которая доходит в определенные моменты времени до емкостного и тензометрического датчиков 3 и 4, сигнал в датчиках усиливается в усилителях 5 и 6 и регистрируется двухлучевым осциллографом 7; тензометрический мост имеет источник питания 8. В качестве волноводов использовались стержни из капрона, текстолита, гетинакса и других материалов. Бойками служили текстолитовые, стальные и алюминиевые шары и молотки. Тензометрический мост собран по схеме Уитсона.

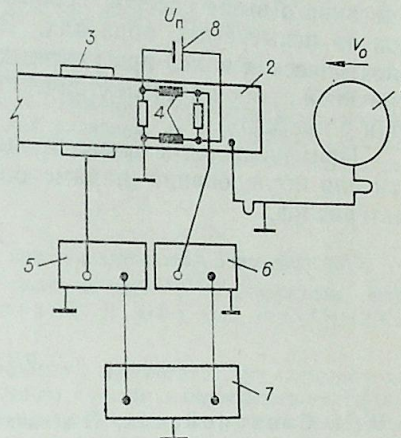


Рис. 2.

Величина ускорения поперечных сечений, нормальных распространению продольной волны, исходя из показаний чистого полумоста, равна

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2a}{k_t \cdot u_n} \cdot \frac{\Delta u_t}{\Delta t_t}, \quad (9)$$

где u_n — напряжение источника питания 8; k_t — паспортный коэффициент тензочувствительности тензосопротивления датчиков; Δu_t — напряжение с тензодатчика, отнесенного ко времени Δt_t ; a — скорость распространения продольной волны. Величина $\Delta u_t / \Delta t_t$ — максимальная производная кривой осциллограммы, поэтому при измерениях важно лишь правильно определить наклон в точках максимальной крутизны кривой и знать вертикальный и горизонтальный масштаб входа осциллографа. Приравнявая (8) и (9), получим

$$\frac{m_1}{q_1} = \frac{k_t u_n \Delta t_t}{2a \epsilon_1 \epsilon_0 \mu s_1 R \Delta u_t} \int_0^{\tau} u dt. \quad (10)$$

С точностью до порядка произведена оценка величины m_1/q_1 для текстолитовых, гетинаксовых и капроновых стержней при ударе по ним со скоростью $1 \div 5$ м·с⁻¹, при этом величина m_1/q_1 находилась в интервале $10^{-3} \div 10^{-4}$ кг·К⁻¹.

Для полупроводников с заметным количеством свободных носителей электрического тока и обладающих поляризационными свойствами можно записать, исходя из (4) и (8)

$$\frac{dv}{dt} = (A + B) \int_0^{\tau} u dt. \quad (11)$$

Учет скин-эффекта при ударе по металлическим телам и поляризации при ударе по диэлектрикам дает возможность теоретически описать механоэлектрический процесс, сопровождающий удар твердых тел при малых и средних скоростях взаимодействия, когда термодинамическими превращениями можно пренебречь.

Механоэлектрический процесс позволяет использовать материалы тел в качестве первичных измерительных преобразователей; при этом можно определять ускорение, силу, деформацию и другие параметры удара при больших скоростях, температурах, вращательно-поступательном движении и тому подобных состояниях, когда известные способы измерений неприемлемы или дают большую погрешность. Однако и при обычных условиях соударения тел измерение величины $u(t)$ с помощью описанного выше способа освобождает от жесткого закрепления датчиков на испытуемых образцах. Возможно, появление дополнительных электрических полей при ударных и динамических перегрузках является причиной пробоя в диэлектрических и полупроводниковых элементах машин и приборов.

Применение описанного процесса открывает также новые возможности для исследований параметров ударных взаимодействий и свойств материалов.

Новосибирский электротехнический институт

Поступила в редакцию
13/II 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Н. Стихановский. О возникновении электрического тока при ударе по металлическим и полупроводниковым телам.— Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1973, № 8, сер. техн. наук, вып. 2, с. 60—65.
2. Б. Н. Стихановский. Способ измерения импульса силы при ударе металлических тел. Авт. свид. № 380971. Бюлл. изобр. № 21, 1973.

УДК 535.44

Излучательные свойства кристалло-ориентированного пиролитического графита при высоких температурах. Рубцов Н. А., Тарасов А. Г. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1977, № 8, сер. техн. наук, вып. 2.

В работе рассматривается методика исследования спектральных полусферических коэффициентов излучения. Получены данные по излучательным характеристикам пирографита в широком интервале длин волн и температур в атмосферном воздухе. Подтверждена анизотропия свойств пиролитического графита по излучательным характеристикам. Рис. 7, библиограф. 4.

УДК 536.3.001.2

Обобщенный зональный метод исследования и расчета лучистого теплообмена в поглощающей и рассеивающей среде. Суринов Ю. А. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1977, № 8, сер. техн. наук, вып. 2.

Работа посвящена развитию обобщенного зонального метода теории лучистого теплообмена. В основе этого метода лежат конечные линейные системы алгебраических уравнений, аппроксимирующие системы интегральных уравнений для основных разрешающих характеристик излучения.

Рассматриваются две формы представления указанного метода, тесно связанные между собой. Библиограф. 6.

УДК 536.24 : 621.175

Объемный коэффициент теплоотдачи при конденсации водяного пара в проточном динамическом двухфазном слое. Хозе А. Н., Захаров А. С. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1977, № 8, сер. техн. наук, вып. 2.

В работе рассматриваются гидродинамика и тепло-массообмен при конденсации водяного пара в проточном динамическом двухфазном слое. Получены расчетные зависимости для определения газосодержания и сопротивления динамического слоя. Установлены основные факторы, влияющие на интенсивность процесса конденсации. Дается зависимость среднего объемного коэффициента теплоотдачи от влияющих факторов. Рис. 2, библиограф. 3.

УДК 536.252 : 532.517.6

Массоотдача в окрестности лобовой точки в пульсирующем потоке. Боголюбов Ю. Е., Смирнова Л. П. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1977, № 8, сер. техн. наук, вып. 2.

В статье рассматривается нестационарная массоотдача при обтекании осесимметричного тела вращения пульсирующим потоком в окрестности критической точки. В математической постановке задача сводится к решению системы уравнений, состоящей из уравнений динамического и диффузионного пограничных слоев.

Решение проведено численно методом пристрелки по граничным условиям. В результате получена передаточная функция датчика называемого датчиком типа «лобовая точка», а также найдена зависимость сдвига фаз от частоты. Рис. 6, табл. 1, библиограф. 7.

УДК 532.526.4

Экспериментальное исследование эффективности газовой завесы в сверхзвуковом осесимметричном сопле. Волчков Э. П., Козьменко В. К., Лебедев В. П. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1977, № 8, сер. техн. наук, вып. 2.

Проведены экспериментальные исследования эффективности газовой завесы при вдуве воздуха на входе в сопло через кольцевую тангенциальную щель. Давление торможения основного потока изменялось в пределах $5 \cdot 10^5$ — $15 \cdot 10^5$ н/м². Отношение массовой скорости вторичного и основного потоков составляло в опытах 0,05—0,30. Число Маха потока на срезе сопла равно 3,4. Эксперименты показали, что изоэнергетический вдув воздуха через щель на входе в сопло не изменяет коэффициент восстановления температуры и статическое давление на стенке. Экспериментальные данные об эффективности завесы в сверхзвуковом сопле отличаются от полученных опытных данных в цилиндре и удовлетворительно обобщаются зависимостью, учитывающей градиент скорости и сжимаемость потока. Рис. 6, библиограф. 6.

УДК 533.601.15+533.601.312

Экспериментальное исследование сопротивления крыльев при сверхзвуковых скоростях. Бродецкий М. Д., Косорыгин В. С., Рафаэлянц А. А., Черемухин Г. А. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1977, № 8, сер. техн. наук, вып. 2.

Излагается метод экспериментального исследования составляющих лобового сопротивления тонких крыльев со сверхзвуковой передней кромкой. Метод построен на результатах весовых испытаний серии моделей крыльев, имеющих одинаковую форму в плане, но различные толщины профилей и углы раствора конических утолщений, предназначенных для крепления моделей на хвостовой державке. Наличие нескольких толщин профилей и углов раствора конических утолщений дает возможность с помощью экстраполяции зависимостей выделить различные составляющие сопротивления.

Приведены экспериментальные значения коэффициентов сопротивления турбулентного трения трапециевидной пластины и волнового сопротивления трапециевидного крыла, имеющего параболический профиль с относительными толщинами $\bar{c}=1,5, 2, 3, 4,12$ и $4,93\%$ в диапазоне чисел $M=2\div 4$. Дается сравнение результатов эксперимента с расчетом. Рис. 5, библи. 8.

УДК 532.529.2

Устойчивость стратифицированных потоков. Сообщение I. Невязкое двухслойное течение. Головачев Ю. Г., Маренникова О. Н., Тарнавский А. А. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1977, № 8, сер. техн. наук, вып. 2.

В работе исследуется связь неустойчивости Гельмгольца с неустойчивостью Тейлора для двухслойной модели течения при различных условиях стратификации по плотности и профилям скорости основного потока и в зависимости от направления возмущенного движения. Применением метода малых возмущений решение дифференциального уравнения для нейтральной устойчивости с помощью особой интерполяции профиля скорости основного потока и условия несмешиваемости слоев сводится к решению алгебраического уравнения. Это позволяет записать решение в аналитическом виде.

Найдены кривые нейтральной устойчивости для различных профилей скорости при различных условиях стратификации по плотности и в зависимости от направления вектора возмущения. Показано, что на кривой нейтральной устойчивости фазовая скорость моногармонического возмущения $c_r \sim \cos \Theta$; критическое число Ричардсона $Ri^* \sim \cos^2 \Theta$, где Θ — угол между направлением возмущения и скоростью основного потока. Роль стратификации по плотности не сводится только к уменьшению (или к увеличению при «отрицательной» стратификации) зоны устойчивости и наиболее «опасными» являются возмущения, направленные перпендикулярно или навстречу скорости основного потока. Рис. 14, библи. 6.

УДК 533.6.011

Ограничная скорость изотермического скольжения при тчении бинарной смеси слаборазреженного газа вдоль твердой поверхности. Маркев Б. М. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1977, № 8, сер. техн. наук, вып. 2.

На основе модифицированного метода полупространственных моментов получено выражение для изотермического скольжения бинарной смеси разреженного газа при куэттовском течении между двумя плоскостями. Закон взаимодействия частиц газа между собой и с поверхностью считается произвольным. Рис. 2, библи. 20.

УДК 533.6.011.55 : 51

Торможение сверхзвукового потока за криволинейной ударной волной с предшествующим изэнтропическим сжатием. Дулов В. Г., Щепановский В. А. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1977, № 8, сер. техн. наук, вып. 2.

Рассмотрены пространственные сверхзвуковые течения идеальной среды в окрестности тел, построенных вырезкой по линиям тока из осесимметричного течения. Неравномерное течение состоит из двух областей: зоны изэнтропического сжатия и зоны завихренного течения. Для описания течения в завихренной области используется точное коническое решение с переменной энтропией. В области непрерывного течения решение строится приближенно путем разложения решения в ряд по малому параметру. Сопряжение областей осуществляется через криволинейный скачок. Исследовано влияние формы вырезки и величины завихренности течения на поджатие струи и коэффициент потерь полного давления. Рис. 4, библи. 4.

УДК 629.735.33.015.3 : 533.682

Нелинейная задача о движении профиля вблизи волнистой стенки. Шумский Г. М. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1977, № 8, сер. техн. наук, вып. 2.

Рассматривается задача о неустановившемся движении тонкого профиля вблизи волнистой стенки. Профиль и стенка моделируются системой вихревых осебенностей. Вихревой след за профилем выстраивается в процессе решения задачи. В качестве примера приводятся результаты расчетов аэродинамических характеристик пластинки, движущейся с постоянной скоростью вблизи волнистой стенки. Рис. 6, библи. 9.

УДК 532.5.031

Радиальное сопло. Драч В. А., Кудрявцев О. А. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1977, № 8, сер. техн. наук, вып. 2.

В статье рассматривается задача профилирования пространственного канала, осуществляющего заданное преобразование поля скоростей от равномерного плоскостного на входе в равномерное радиальное на выходе для идеального совершенного газа. Предполагается, что высота канала мала и все параметры по высоте не меняются. Рассмотрены примеры профилирования канала для дозвуковых и сверхзвуковых скоростей на выходе из канала. Рис. 2, библи. 3.

УДК 537.527

Автомодельные свойства электрической дуги, горящей в турбулентной струе. Урюков Б. А., Хайтман С. М. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1977, № 8, сер. техн. наук, вып. 2.

Получено автомодельное решение для электрической дуги, горящей в турбулентной затопленной струе. Основные допущения: зависимости проводимости и плотности плазмы от энтальпии степенные, энтальпия на границе струи равна нулю. Показано, что форма профилей энтальпии и скорости слабо зависит от вида зависимости проводимости от энтальпии. Профиль энтальпии имеет резкий пик вблизи оси, а профиль скорости — заполненный. Угол раствора струи составляет примерно 25° . Вольт-амперная характеристика дуги может быть как падающей, так и в принципе возрастающей. Рис. 2, библи. 3.

УДК 532.546

Исследование эффективности пористого охлаждения стабилизирующего канала плазмотрона. Курочкин Ю. В., Пустогаров А. В., Старшинов В. И., Уколов В. В. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1977, № 8, сер. техн. наук, вып. 2.

В работе проведен расчет течения и теплообмена в пористой стенке стабилизирующего канала плазмотрона в условиях высоких лучистых тепловых потоков из плазмы дуги на внутреннюю поверхность стенки и высоких удельных вдувов рабочего тела. Рассматривается осесимметричный стационарный случай в предположении неравенства температур материала и охлаждения. Расчеты проведены для пористых стенок из стали 1Х18Н10Т, керамики Al_2O_3 и вольфрама при разных значениях пористости. Экспериментально определены вязкостный и инерционный коэффициенты потерь давления. В качестве охладителя рассмотрены воздух, водород и аргон. Проведен анализ влияния свойств материала стенки и охладителя, уровня расхода, геометрии канала на эффективность пористого охлаждения. Показано, что наиболее существенное влияние оказывает интенсивность внутреннего теплообмена между пористым материалом и вдуваемым газом, величина вдува охладителя и его теплоемкость. Рис. 3, табл. 1, библи. 16.

УДК 621.039.66

Измерение радиального распределения температуры в нестационарной дуге во времени. Мельникова Т. С. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1977, № 8, сер. техн. наук, вып. 2.

Предлагается метод измерения радиального профиля температуры в нестационарной дуговой плазме во времени. Приведены профили температуры, измеренные в аргоновой дуге, стабилизированной стенкой. Время записи одного профиля интенсивности 600 мкс, время между двумя последовательно записанными профилями 6,6 мс. За 1 с последовательно записывалось до 120 профилей. В принципе метод позволяет регистрировать радиальное распределение интенсивности за несколько микросекунд в зависимости от требуемого пространственного разрешения, а также от возможностей используемой аппаратуры. Рис. 5, библи. 6.

Метод численного анализа нестационарных режимов технологических процессов. Демиденко Н. Д., Александрова Е. А. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1977, № 8, сер. техн. наук, вып. 2.

В работе предлагается численный метод анализа статических и динамических характеристик противоточных химико-технологических аппаратов. Разработан алгоритм, в основу которого положен метод прогонки. Показана аппроксимация и устойчивость примененной разностной схемы. По составленной программе сделан ряд расчетов для промышленных ректификационных колонн. Рис. 3, библи. 4.

УДК 541.182.45

Об электропроводности газожидкостных эмульсий и пен. Канн К. Б., Феклистов В. Н. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1977, № 8, сер. техн. наук, вып. 2.

В данной работе аналитически рассчитана зависимость электропроводности от газосодержания. При газосодержании $\varphi < 74\%$ (кратности $K < 3,855$) эта зависимость с достаточной степенью точности может считаться линейной, а коэффициент пропорциональности (структурный коэффициент B) близок к единице. Развивая модель плотной упаковки для случая полиэдрической (пенной) структуры, авторы пришли к ромбо-додекаэдрической модели, довольно близкой к структуре реальной пены.

Проведен расчет электропроводности пены для двух крайних случаев ромбо-додекаэдрической модели и получена формула зависимости фактической кратности от удельного электросопротивления пены. Структурный коэффициент B для реальной пены должен лежать в пределах $1,5 < B < 3$. Рис. 3, библи. 8.

УДК 532.529

Всплытие сферического пузырька с растворением в покоящейся жидкости. Богдевич В. Г., Рубан Н. К. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1977, № 8, сер. техн. наук, вып. 2.

В статье рассматривается совместное решение уравнений движения и состояния сферического газового пузырька с учетом диффузии и растворения в покоящейся жидкости.

Система интегрированных дифференциальных уравнений численно решается на ЭВМ. Радиус, скорость и положение центра всплывающего газового сферического пузырька получены как функции времени начального радиуса и начальной глубины для различных газов. Рис. 4, библи. 6.

УДК 62.503.53+551.521.14

Метод получения и анализа спектральных характеристик природных образований. Петраковский И. А., Хлебопрос Р. Г. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1977, № 8, сер. техн. наук, вып. 2.

В работе рассмотрена изменчивость спектральных характеристик подстилающей поверхности из-за помех, связанных с высотой стояния Солнца. Предлагается способ регистрации отраженной радиации, существенно уменьшающий шумы, обусловленные изменением коэффициента отражения природного образования при изменении положения Солнца и перераспределением площадей подстилающей поверхности, освещенных прямыми лучами и затененных. Показана возможность выделения составных компонент при анализе спектральных характеристик многокомпонентных образований. Рис. 2, библи. 10.

УДК 621.3

Задача определения характеристик электромагнитного поля в проводящей шине с воздушным окном. Счастливый Г. Г., Титко А. И. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1977, № 8, сер. техн. наук, вып. 2.

Методом конечного T -интегрального преобразования решена задача определения характеристик поля в проводящей шине, по которой протекает ток, с воздушным окном, обтекаемым током. Приведены аналитические выражения для векторов E и H и проведено расчетное исследование особенностей распределения характеристик электромагнитного поля в рассматриваемой многосвязной области с вариацией ее размеров и параметров сред. Рис. 4, библи. 1.

УДК 621.314.5

Газоразрядные приборы с отрицательной проводимостью. Баранников А. Л., Пекшев П. Ю. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1977, № 8, сер. техн. наук, вып. 2.

В экспериментах замечено, что при низких давлениях наполнителей термоэмиссионные диоды и триоды имеют на статической вольт-амперной характеристике участок отрицательной проводимости (ОП), появление которого обусловлено существованием в приборе внутренней положительной обратной связи по напряжению, охватывающей не менее двух источников изменения проводимости. Это делает приборы данного класса сильноточными газоразрядными аналогами туннельного диода. Использование особенностей вольт-амперных характеристик в найденных режимах позволяет применять термоэмиссионные приборы в любом из известных режимов работы: усиление, генерация синусоидальных и релаксационных колебаний, переключение, преобразование с усилением, детектирование.

Экспериментально исследованы работа Cs—Ва-триода в качестве ключевого элемента, управляемого сеткой, и перспективная схема генератора релаксационных колебаний без внешней цепи обратной связи на основе этого прибора, работающего на падающем участке вольт-амперной характеристики. Рис. 14, библи. 7.

УДК 531.6

Об одном механоэлектрическом процессе, сопровождающем удар твердых тел. Стихановский Б. Н. «Изв. Сиб. отд. АН СССР», 1977, № 8, сер. техн. наук, вып. 2.

При ударе по стержню возникает макроскопическая область локального нарушения электронейтральности, распространяющейся с ударным импульсом. Наличие этой области обнаруживается по индикации сопровождающего ее электрического поля.

Учет скин-эффекта при ударе по проводникам и поляризации при ударе по диэлектрикам дает возможность в какой-то мере теоретически описать механоэлектрический процесс, сопровождающий удар твердых тел при малых и средних скоростях взаимодействия, когда термодинамическими превращениями можно пренебречь.

Электрическое поле, распространяющееся с волной деформации, позволяет использовать материалы тел в качестве первичных измерительных преобразователей; при этом можно определять ускорение, силу, деформацию и другие параметры удара при больших температурах, вращательно-поступательном движении и тому подобных состояниях.

Применение описанного процесса открывает также новые возможности для исследований параметров ударных взаимодействий и свойств материалов. Рис. 2, библи. 2.