

КИРГИЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ 50-ЛЕТИЯ СССР

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра алгебры и геометрии

Борубаев Алтай Асылканович

О ВЗАИМООТНОШЕНИЯХ МЕЖДУ КЛАССАМИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ
ПРОСТРАНСТВ И НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

(01.01.04. геометрия и топология)

Диссертация на соискание ученой
степени кандидата физико-мате-
матических наук.

Научный руководитель — кандидат
физико-математических наук,
доцент ФЕДОРОВ В.Д.

Фрунзе 1976

О Г Л А В Л Е Н И Е

	Стр.
Введение	2
ГЛАВА I. ОБ ОБРАЗАХ НУЛЬМЕРНЫХ, ПАРАКОМПАКТНЫХ И МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ ПРИ РАЗЛИЧ- НЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ.....	12
§ 0. Основные определения и обозначения. Терминология	12
§ 1. Обобщенно баэровские пространства и связанные с ними непрерывные отображения	15
§ 2. Об открытых бикомпактных отображениях	25
§ 3. Об образах метрических пространств при сильно факторных отображениях.....	34
§ 4. Трансфинитная классификация слабых баэз топологических пространств и сильно фак- торных отображений	46
ГЛАВА II. О СВОЙСТВАХ ТИПА КОМПАКТНОСТИ И ПОЛНОТЫ	53
§ 5. О пространствах типа компактности и свя- занных с ними непрерывных отображениях	53
§ 6. О свойствах типа полноты	64
Использованная литература	68

В В Е Д Е Н И Е

Одним из основных направлений в теоретико-множественной топологии является выяснение взаимоотношений, осуществляемых между классами топологических пространств посредством различного рода непрерывных отображений. С этим направлением связана следующая общая проблема, поставленная П.С.Александровым на симпозиуме в Праге в 1961 г. [1]:

а) Каковы те пространства, которые являются образами "хороших" пространств (метрических, нульмерных, паракомпактных и т.д.) при "хороших" непрерывных отображениях (открытых, замкнутых, совершенных и т.д.)?

б) Каковы те пространства, которые можно отобразить на "хорошие" пространства посредством "хороших" непрерывных отображений?

С этой проблемой тесно связан также вопрос о сохранении при тех или иных отображениях тех или иных топологических свойств как при переходе к образу, так и при переходе к прообразу.

Первые конкретные задачи в направлении а) были решены 40-50 лет назад, когда началась теоретико-множественная топология. Теорема П.С.Александрова о представлении произвольного компакта как непрерывного образа канторова совершенного множества, данная Хаусдорфом характеристика произвольных метрических пространств со счетной базой как открытых непрерывных образов подпространств пространства иррациональных чисел, описание локально связных континуумов как непрерывных образов отрезка — эти блестящие результаты, ставшие теперь классическими, вызвали много новых интересных исследований; см. например, [7], [9], [23], [30].

Мощным импульсом для исследований в направлениях

б) явилась следующая гипотеза П.С.Александрова: паракомпакты — это совершенные прообразы метрических пространств.

Этому направлению посвящена значительная литература, см. например, [8] , [22] , [30] , [32] .

Подробный обзор современного состояния теоретико-множественной топологии с постановкой ряда проблем дан в работах П.С.Александрова [1] , [2] , [3] , в работе А.В.Архангельского [6] и в обзоре В.И.Малыхина и В.И.Пономарева [17] .

Содержание настоящей работы составляет несколько циклов результатов, охватываемых указанными выше общими постановками.

В первой главе исследуются образы метрических, паракомпактных, обобщенно баэровских и других пространств при "хороших" непрерывных отображениях, а также рассматриваются и некоторые другие вопросы.

В § I рассматриваются обобщенно баэровские пространства. Под обобщенно баэровским пространством веса τ и характера m мы понимаем тихоновское произведение m экземпляров дискретного пространства мощности τ и обозначим его через B_τ^m (мы всегда предполагаем, что $\tau \geq m \geq \aleph_0$, тогда пространство B_τ^m действительно имеет вес τ и характер m).

Обобщенно баэровские пространства являются нульмерными (в смысле ind) вполне регулярными T_1 - пространствами.

Теорема I.1. Произвольное T_1 - пространство X является открытым непрерывным образом некоторого нульмерного вполне регулярного T_1 - пространства S того же веса и того же характера. При чем можно считать, что $S \subseteq B_\tau^m$, где $\tau = w(X)$, $m = \chi(X)$.

Теорема I.2. Если кратность некоторой базы T_1 - пространства X равна его характеру, то пространство X является образом некоторого нульмерного вполне регулярного T_1 -простран-

ства S того же веса и того же характера при открытом непрерывном m -отображении. При этом можно считать, что $S \subseteq \mathcal{B}_\tau^m$, где $\tau = \mathcal{W}(X)$, $m = \chi(X)$.

В этом же параграфе вводится понятие A_τ^m -системы, обобщающее известное понятие A_τ -последовательности, которая в наших обозначениях будет $A_\tau^{s_c}$ (см. например [3]).

В терминах A_τ^m -системы дается внутренняя характеристика открытых непрерывных и открытых непрерывных бикompактных образов обобщенно бэровских пространств $\mathcal{B}_\tau^m$ (теоремы I.3 и I.5).

Теорема I.4 дает необходимое и достаточное условие для того, чтобы T_1 -пространство X было гомеоморфно обобщенно бэровскому пространству $\mathcal{B}_\tau^m$. Теоремы I.3 и I.5 обобщают соответствующие теоремы А.В.Архангельского [7].

А.В.Архангельским поставлена следующая проблема: каждое ли вполне регулярное слабо паракомпактное пространство является открытым бикompактным образом некоторого паракомпакта?

В связи с этой проблемой представляет интерес внутренняя характеристика открытых бикompактных образов паракомпактов, которая дается в § 2.

Будем говорить, что пространство (X, τ) обладает свойством (ПЮБ) (открытый бикompактный образ паракомпакта), если в (X, τ) существует семейство $\{\mathcal{B}_s : s \in S\}$ центрированных систем открытых множеств, удовлетворяющее следующим условиям:

1°. Для каждого $s \in S$ система $\mathcal{B}_s$ является базой некоторой точки $x \in X$ и $\tau_x = \bigcup \{\mathcal{B}_s : s \in S_x\}$, где $\tau_x = \{\mathcal{U} \in \tau : \mathcal{U} \in x\}$, $S_x = \{s \in S : \mathcal{B}_s \text{ является базой в точке } x\}$.

2°. Для каждого фиксированного $s_0 \in S$ и для любых $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mathcal{B}_{s_0}$ существует $\mathcal{U}_3 \in \mathcal{B}_{s_0}$ такое, что если $\mathcal{U}_3 \in \mathcal{B}_s$, то $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mathcal{B}_s$.

3°. Для любых $s_1, s_2 \in S$, $s_1 \neq s_2$ существуют $u_1 \in B_{s_1}$ и $u_2 \in B_{s_2}$ такие, что $u_1 \notin B_{s_2}$, $u_2 \notin B_{s_1}$.

4°. Для любого открытого покрытия ω , такого, что $\omega \cap B_s \neq \emptyset$ для всех $s \in S$, существует открытое покрытие α , обладающее свойством: $\alpha \cap B_s \neq \emptyset$ для всех $s \in S$ и для каждого фиксированного $s_0 \in S$ найдется $V \in \omega \cap B_{s_0}$ такое, что если $u \in \alpha \cap B_{s_0}$ и $u \in B_s$, то $V \in B_s$.

5°. Для любого $\beta \in \tau_\infty$, такого, что $\beta \cap B_s \neq \emptyset$ для всех $s \in S_\infty$, существует конечная подсистема $\beta_0 \subseteq \beta$, такая, что $\beta_0 \cap B_s \neq \emptyset$ для всех $s \in S_\infty$.

Теорема 2.1. Среди T_1 -пространств пространства, обладающие свойством (ПЮБ), и только они являются образами паракомпактов при открытых непрерывных бикомпактных отображениях.

Теорема 2.2. дает внутреннюю характеристику открытых непрерывных образов паракомпактов.

Охарактеризованы также открытые бикомпактные образы пространств с равномерной базой (теорема 2.3). Комбинируя теорему 2.3 с характеристикой пространств с равномерной базой*) как открытых бикомпактных образов метрических пространств (А.В.Архангельский [7]), получаем внутреннюю характеристику образов метрических пространств при отображениях, являющихся суперпозициями двух открытых бикомпактных отображений.

В § 3 вводятся и изучаются сильно факторные отображения.

Характеризуются образы метрических пространств при сильно факторных $(S-)$ отображениях**). Сильно факторные отображения естест-

*) База B пространства X называется равномерной (П.С.Александров [4]), если для каждой точки $x \in X$ и каждой ее окрестности O_x семейство $\{u \in B : x \in u \text{ и } u \cap (X \setminus O_x) \neq \emptyset\}$ конечно.

**) Отображение называется S -отображением (Ю.М.Смирнов, А.Столун), если прообраз каждой точки обладает счетной базой.

венным образом связаны со слабыми базами топологических пространств. Понятие слабой базы введено А.В.Архангельским в [6] ; оно возникло при изучении факторных отображений метрических пространств.

Отображение $f: X \rightarrow Y$ пространства X на пространство Y называется сильно факторным если:

а) отображение f факторно;

б) для любого $y \in Y$ элементы семейства $\{fB_x\}_{x \in f^{-1}y}$ предфильтров fB_x являются базисами одного и того же фильтра, где $B_x = \{G_x\}$ — произвольная база в точке x , а $fB_x = \{fG_x\}$.

Всякое открытое отображение*) является сильно факторным, обратное, вообще говоря, неверно. Существует замкнутое отображение метрического пространства на паракомпакт, не являющееся сильно факторным отображением (пример 3.II).

Теорема 3.4. Отображение $f: X \rightarrow Y$ пространства X на пространство Y открыто и непрерывно тогда и только тогда, когда f сильно факторно и псевдооткрыто.

Следующие теоремы являются аналогами известной теоремы В.И.Пономарева [2I] о пространствах с первой аксиомой счетности как открытых образов метрических пространств.

Теорема 3.7. Среди T_1 — пространств пространства со слабой первой аксиомой счетности (g_f — аксиомой счетности) и только они являются образами метрических пространств при сильно факторных отображениях.

Теорема 3.8. Среди T_1 — пространств пространства с точечно-счетной слабой базой и только они являются образами метрических пространств при сильно факторных S — отображениях.

С использованием сильно факторных отображений и теоремы 3.8 доказывается следующая

*) Все отображения предполагаются непрерывными.

Теорема 3.12. Хаусдорфово пространство X с точечно-счетной слабой базой обладает точечно-счетной базой тогда и только тогда, когда оно есть пространство точечно-счетного типа.

Теорема 3.12 позволяет доказать следующий результат.

Теорема 3.13. Вполне регулярное секвенциально мезокомпактное p -пространство с точечно-счетной слабой базой метризуем.

В § 4 дается трансфинитная классификация слабых баз топологических пространств и сильно факторных отображений. Трансфинитной рекурсией определяются операторы псевдозамыкания относительно слабой базы топологического пространства, которые в свою очередь позволяют ввести понятия ранга слабой базы топологического пространства и ранга сильно факторного отображения.

В работе А.И.Башкирова [II] в предположении континуум-гипотезы построены секвенциальные бикомпакты произвольных индексов секвенциальности и дается классификация факторных отображений. Оказывается, если пространство X удовлетворяет $g^{\aleph_1}$ -аксиоме счетности, то индекс секвенциальности пространства X совпадает с рангом некоторой слабой базы пространства X и, более того, секвенциальное замыкание произвольного множества совпадает с псевдозамыканием относительно этой слабой базы (теорема 4.12).

Теорема 4.13 показывает, что для каждого ординала $\alpha \leq \omega_1$ существует счетное нормальное пространство X_α со слабой базой, ранг которого в точности равен α .

Теорема 4.14 утверждает, что сильно факторные отображения ранга I открыты и обратно.

Во второй главе изучаются пространства, обладающие свойствами типа компактности и полноты, даются их характеристики в терминах бикомпактных расширений и доказывается их инвариантность (в сторону прообраза) при некоторых непрерывных отображениях; устанавливается точная связь между некоторыми классами топологических пространств.

§ 5 посвящен P - компактным пространствам и связанным с ними непрерывным отображениям.

Пусть P - некоторое свойство системы подмножеств топологического пространства X (например, свойство "быть локально конечным семейством" и "быть консервативным семейством" и т.д.). Свойство P системы подмножеств топологического пространства X называется свойством типа конечности, если выполняются следующие условия:

1°. Всякая конечная система множеств пространства X обладает свойством P .

2°. Если система γ_α подмножеств пространства X обладает свойством P при каждом $\alpha \in A$ и система $\{\tilde{\gamma}_\alpha: \alpha \in A\}$ обладает свойством P , где $\tilde{\gamma}_\alpha$ - тело системы γ_α , то система $\gamma = \bigcup \{\gamma_\alpha: \alpha \in A\}$ обладает свойством P .

3°. Если система γ подмножеств пространства X обладает свойством P , то любая подсистема $\gamma' \subseteq \gamma$ обладает свойством P .

4°. Если $f: Z \rightarrow X$ - непрерывное отображение пространства Z в пространство X и система $\gamma = \{U\}$ подмножеств пространства X обладает свойством P , то система $f^{-1}\gamma = \{f^{-1}U\}$ обладает свойством P .

Пространство X назовем P -компактным, если в любое его открытое покрытие ω можно вписать открытое покрытие γ со свойством P типа конечности.

Отображение $f: X \rightarrow Y$ пространства X на пространство Y назовем P -компактным, если каковы бы ни были точка $y \in Y$ и открытое семейство $\omega = \{G_\alpha: \alpha \in A\} \subset X$ покрывающее множество f_y^{-1} , найдется семейство γ со свойством P типа конечности, вписанное в семейство ω и покрывающее множество f_y^{-1} .

Непрерывное замкнутое P - компактное отображение называется P - совершенным; в частности, когда свойство P типа конечности является свойством "быть локально конечным семейством", то P - совершенное отображение называется парасовершенным.

Следующая теорема является, по существу, схемой топологических теорем.

Теорема 5.5. Пусть $f: X \rightarrow Y$ - P - совершенное отображение пространства X на пространство Y . Если пространство Y является P - компактным, то пространство X тоже является P - компактным.

Следствие 5.6. Топологическое произведение $X \times Y$ P - компактного пространства X на бикомпакт Y является P - компактным пространством.

Из теоремы 5.5. следует многие ранее известные результаты о "переходе" некоторых свойств типа компактности от образа к прообразу, некоторые результаты даже с усилениями (например, следствия 5.7 и 5.8).

Теорема 5.12. Для того, чтобы пространство X можно было P - совершенно отобразить на некоторое метризуемое P - компактное пространство, необходимо и достаточно, чтобы X было P - компактным пространством.

В связи с ранее упомянутой гипотезой П.С.Александрова отметим следующее.

Следствие 5.13. Для того, чтобы пространство X можно было парасовершенно отобразить на некоторое метризуемое пространство, необходимо и достаточно, чтобы пространство X было паракомпактным.

Теорема 5.15. Пусть X - вполне регулярное пространство и βX - его бикомпактное хаусдорфово расширение. Для того, чтобы

пространство X было P -компактным, необходимо и достаточно, чтобы для любого бикompакта F , лежащего в $\beta X \setminus X$, существовало открытое покрытие $\omega = \{U\}$ пространства X со свойством P типа конечности (в X), такое, что $[U]_{\beta X} \cap F = \emptyset$ для всех $U \in \omega$.

Эта теорема содержит некоторые известные результаты, в частности, теорему Тамано [29], доказанную для паракомпактных пространств.

В § 6 вводятся и изучаются D -полные топологические пространства.

Пусть дано пространство X и система $D = \{\omega\}$ его открытых покрытий. Центрированная система $\Phi = \{V\}$ подмножеств пространства X называется D -системой, если для любого $\omega \in D$ существуют $U \in \omega$ и $V_\omega \in \Phi$ такие, что $V_\omega \subseteq [U]$.

Пространство X называется D -полным, если $\bigcap \{[V] : V \in \Phi\} \neq \emptyset$ для любой D -системы $\Phi = \{V\}$.

Если система D состоит из всех открытых покрытий, обладающих свойством P типа конечности, то в этом случае D -полное пространство назовем D_P -полным.

Теорема 6.3. Пусть X - нормальное пространство и βX - расширение Стоуна-Чеха пространства X . Для того, чтобы пространство X было D -полным, необходимо и достаточно, чтобы для любой точки $x_0 \in \beta X \setminus X$ существовало $\omega \in D$ такое, что $[U]_{\beta X} \not\ni x_0$ для всех $U \in \omega$.

Следствие 6.4. Всякое нормальное P -компактное пространство D_P -полно.

Из теоремы 6.3 и одной теоремы Б.А.Пасыникова [19] следует, что D_P -полнота нормальных пространств в случае, когда сис-

теме состоит из всех локально конечных открытых покрытий совпадает с полнотой в смысле Дьедонне.

В классе нормальных пространств при совершенных отображениях D_p — полнота переходит от образа к прообразу (теорема 6.6).

Отдельные результаты данной работы докладывались на четвертой научной конференции по математике и механике Томского государственного университета, на симпозиуме по геометрии и теории чисел в г.Фрунзе в 1974 г., на 16-й, 17-й, 18-й научных конференциях профессорско-преподавательского состава механико-математического факультета Киргизского государственного университета в 1974, 1975 и 1976 гг., на семинарах Московского государственного университета, в Математическом институте АН Грузинской ССР и в Институте математики СО АН СССР.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [12] - [15].

Г Л А В А I

ОБ ОБРАЗАХ НУЛЬМЕРНЫХ, ПАРАКОМПАКТНЫХ И МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

В первой главе исследуются образы метрических, паракомпактных, обобщенно баэровских пространств и других пространств при "хороших" непрерывных отображениях, а также рассматриваются и некоторые другие вопросы.

§ 0. Основные определения и обозначения.

Терминология.

I. Отображения $f: X \rightarrow Y$ топологического пространства X на топологическое пространство Y называется:

факторным, если множество $M \subseteq Y$ замкнуто тогда и только тогда, когда замкнуто множество $f^{-1}M$ (что, эквивалентно: множество $M \subseteq Y$ открыто тогда и только тогда, когда открыто $f^{-1}M$);

псевдооткрытым, если для всякой точки $y \in Y$ и любой окрестности $O f^{-1}y$ множества $f^{-1}y$ в X непременно $y \in \text{Int } fU$;

открытым, если для любого открытого множества $G \subseteq X$ образ fG является открытым множеством пространства Y ;

замкнутым, если для любого замкнутого множества $F \subseteq X$ образ fF является замкнутым множеством пространства Y ;

бикompактным, если прообраз $f^{-1}y$ каждой точки $y \in Y$ бикompактен;

совершенным, если оно непременно, замкнуто и бикompактно;

m - отображением, если вес прообраза любой точки пространства не превосходит кардинала m .

Если $m = \aleph_0$ - первый бесконечный кардинал, то m - отображение называется $\aleph$ - отображением.

Говорят, что семейство Φ подмножеств множества X имеет кратность не более m (m - кардинал), если всякая точка множества X содержится не более чем в m элементах семейства Φ . Семейство кратности, не большей $\aleph_0$, называется точечно-счетным.

Семейство η окрестностей фиксированного множества A в пространстве X называется определяющей системой окрестностей этого множества, если для каждой окрестности U множества A в X существует $V \in \eta$ такая, что $V \subseteq U$. Если множество A состоит из единственной точки x и η - определяющаяся система окрестностей множества A , то говорят, что η - база пространства X в точке x (иногда говорят также, что η - база точки x в X).

Топологическое пространство называется

бикompактным,

финально компактным,

паракомпактным,

сильно паракомпактным,

слабо паракомпактным,

если во всякое открытое покрытие ω этого пространства можно вписать открытое покрытие χ , являющееся соответственно

конечным,

счетным,

локально конечным,

звездно конечным,

точечно конечным.

2. Мощность множества A обозначим через $|A|$.

Наименьшее из кардинальных чисел, являющихся мощностями без пространства X , называется весом и обозначается через $w(X)$.

Характер $\chi(A, X)$ множества A в пространстве X есть наименьшая из мощностей определяющих систем окрестностей множества A в X . Если $A = \{x\}$, где $x \in X$, то вместо $\chi(\{x\}, X)$, мы пишем $\chi(x, X)$; при этом $\chi(x, X)$ называется характером точки x в пространстве X . Характер $\chi(X)$ пространства X — наименьшее из кардинальных чисел τ таких, что $\chi(x, X) \leq \tau$ для всех $x \in X$. Пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности, если $\chi(X) \leq \aleph_0$. Пусть γ — семейство множеств в X и $A \subseteq X$. Звездой множества A относительно γ называется множество $\bigcup \{V \in \gamma : V \cap A \neq \emptyset\}$, обозначаемое всегда через $\gamma(A)$. Если $A = \{x\}$, то мы пишем $\gamma(x)$ вместо $\gamma(\{x\})$. Пустое множество обозначается через $\emptyset$. Замыкание множества A обозначим через $[A]$, а внутренность множества A обозначим через $\text{Int} A$.

3. Покрытие топологического пространства X открытыми, соответственно замкнутыми в нем множествами будет называться открытым, соответственно замкнутым покрытием.

Бикомпактные хаусдорфовы пространства называются для краткости бикомпактами, а некомпактные хаусдорфовы пространства — паракompактами. Метризуемые бикомпакты называются компактными. В диссертационной работе под нульмерным пространством понимается нульмерное пространство в смысле ind . Множество называется счетным, если оно состоит из конечного числа элементов (т.е. конечно, в частности, может быть, пусто), или если существует взаимно однозначное отображение этого множества на множество N всех натуральных чисел.

4. Вполне регулярное пространство X называется перистым (P — пространством), если существует счетное семейство $\mathcal{P}$ по-

критий пространства X множествами, открытыми в его расширении Стоуне-Чеха βX , такое, что $\bigcap \{ \gamma(x) : \gamma \in \mathcal{P} \} \in X$ для каждой точки $x \in X$.

Семейство $\mathcal{X}$ подмножеств пространства X называется би-компактно-конечным (секвенциально-конечным), если со всяким би-компактным подмножеством (со всякой сходящейся последовательностью) пересекается лишь конечное число элементов из $\mathcal{X}$.

Пространство X называется мезокомпактным (секвенциально мезокомпактным), если в любое открытое покрытие можно вписать би-компактно-конечное (секвенциально-конечное) открытое покрытие.

§ 1. Обобщенно бэровские пространства и связанные с ними непрерывные отображения

Под бэровским пространством $\mathcal{B}(\tau)$ веса τ понимается тихоновское произведение счетного множества экземпляров дискретного пространства мощности τ (см. например, [6]). Если $\tau = \aleph_0$, то получаем обычное бэровское пространство $\mathcal{B}_{\aleph_0}^{\aleph_0}$ со счетной базой; известно, что пространство $\mathcal{B}_{\aleph_0}^{\aleph_0}$ гомеоморфно пространству иррациональных чисел (см. например, [10]). А.В.Архангельским [7] охарактеризованы открытые и открытые бикомпактные образы бэровских пространств.

В этом параграфе рассматриваются пространства, полученные посредством тихоновского произведения произвольного множества экземпляров дискретного пространства и их связи с произвольными топологическими T_1 -пространствами, в частности, распространяются выше указанные результаты А.В.Архангельского на эти пространства.

Пусть A - дискретное пространство мощности τ , а C - некоторое множество индексов мощности m . Мы всегда предполагаем, что $\tau \geq m \geq \aleph_0$. Обобщенно бэровским пространством

веса τ с характером m назовем тихоновское произведение экземпляров дискретного пространства A мощности τ и обозначим его через B_τ^m , следовательно, $B_\tau^m = A^c$.

Пусть $\alpha = \{\alpha_c\}_{c \in C}$ — произвольная точка пространства A^c , а κ — произвольное конечное подмножество множества C . Положим $V_{\alpha|\kappa} = \{\alpha = \{\alpha_c\}_{c \in C} \in A^c : \alpha|_\kappa = \alpha^0|_\kappa\}$, где $\alpha|_\kappa$ — сужение отображения $\alpha : C \rightarrow A$ на κ . Множества вида $V_{\alpha^0|\kappa}$ образуют стандартную базу в точке $\alpha^0 = \{\alpha_c^0\}_{c \in C}$ с характером $\chi(\alpha^0; A^c) = |C| = m$; когда α^0 пробегает пространство A^c , то множества $V_{\alpha^0|\kappa}$ образуют базу пространства A мощности τ . Множества вида $V_{\alpha|\kappa}$, продолжая понятие интервала Бэра, назовем интервалами Бэра. Как и обычное бэровское пространство обобщенно бэровское пространство B_τ^m обладает следующими свойствами.

1°. Интервалы Бэра не только открыты в B_τ^m , но и замкнуты, следовательно, пространство B_τ^m индуктивно кульмерно.

2°. Два различных, т.е. $V_{\alpha_1|\kappa}$ и $V_{\alpha_2|\kappa}$, с $\alpha_1 \neq \alpha_2$ интервала Бэра либо не пересекаются, либо один из них содержится в другом.

3°. Обобщенно бэровское пространство B_τ^m метризуемо тогда и только тогда, когда $m \leq \aleph_0$.

4°. Обобщенно бэровское пространство однородно по весу.

5°. Пространство B_τ^m является вполне регулярным нульмерным T_1 -пространством. Эти свойства легко следуют из определения стандартной базы обобщенно бэровского пространства B_τ^m .

II. Пусть задано некоторое топологическое пространство X . Пусть A, C — некоторые множества мощности, соответственно, τ, m , где τ, m — кардиналы и $\tau \geq m \geq \aleph_0$. Обозначим

через $K(C)$ множество всех конечных подмножеств множества C ,
а через A^C — всех отображений $\alpha: C \rightarrow A$. Если $k \in K(C)$
и $\alpha \in A^C$, то положим $A^C(\alpha|_k) = \{\alpha' \in A^C: \alpha'|_k = \alpha|_k\}$, где
 $\alpha|_k$ — сужение отображения $\alpha: C \rightarrow A$ на k .

Предположим, что каждому $\alpha|_k$, где $\alpha \in A^C$, $k \in K(C)$,
поставлено в соответствие открытое множество $V_{\alpha|_k}$ простран-
ства X . При этом это соответствие должно быть таково,
чтобы имело место равенство

$$V_{\alpha|_k} = \bigcup \{V_{\alpha'|_k} \cup \{c\} : \alpha' \in A^C(\alpha|_k)\}$$

для каждого $c \in C \setminus k$.

В этом случае семейство $\mathcal{V} = \{V_{\alpha|_k} : \alpha \in A^C \text{ и } k \in K(C)\}$

называется A^m_τ -системой открытых множеств пространства X .

Для каждого фиксированного $k \in K(C)$ положим

$$\mathcal{V}_k = \{V_{\alpha|_k} : \alpha \in A^C\}.$$

В том случае, когда $\mathcal{V}_k$ — покрытие пространства X для
каждого $k \in K(C)$, A^m_τ -система $\mathcal{V}$ называется A^m_τ -си-
стемой открытых покрытий пространства X .

Если при этом семейство $\{V_{\alpha|_k} : k \in K(C)\}$ образует базу некоторой
точки для любого $\alpha \in A^C$, то семейство $\mathcal{V}$ называется измель-
чающейся A^m_τ — системой открытых покрытий пространства X .

Далее, A^m_τ — система $\mathcal{V}$ открытых покрытий в X на-
зывается полной, если для любого $\alpha^0 \in A^C$ имеем

$$\bigcap \{V_{\alpha^0|_k} : k \in K(C)\} \neq \emptyset.$$

Наконец, A^m_τ — система $\mathcal{V}$ дизъюнктна, если для любого
 $k \in K(C)$ и таких $\alpha', \alpha'' \in A^C$, что $\alpha'|_k \neq \alpha''|_k$,
имеем $V_{\alpha'|_k} \cap V_{\alpha''|_k} = \emptyset$.

Понятие A^m_τ — системы обобщает общеизвестное понятие A_τ -
последовательности, которая в наших обозначениях будет $A^{\mathcal{H}_0}_\tau$.
(См., например, [Ю]).



Следующие теоремы дают связь между обобщенно бэровскими пространствами и произвольными T_1 -пространствами.

ТЕОРЕМА I.1. Всякое T_1 -пространство X является непрерывным открытым образом некоторого нульмерного вполне регулярного T_1 -пространства S одного с ним веса и характера. При этом можно считать, что $S \subseteq B_\tau^m$, где $\tau = w(X)$, $m = \chi(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X — произвольное T_1 -пространство веса $w(X) = \tau$ и с характером $\chi(X) = m$. Пусть $\gamma = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ база пространства X мощности τ . Предположим, что $\alpha_1 \neq \alpha_2$ влечет $U_{\alpha_1} \neq U_{\alpha_2}$. Тогда $|A| = \tau$. Пусть C — некоторое множество индексов мощности m . Положим $A_c = A$ при каждом $c \in C$ и каждое A_c будем рассматривать как дискретное топологическое пространство. Рассмотрим тихоновское произведение $\prod \{A_c : c \in C\} = A^C = B_\tau^m$. Точку $\alpha = \{\alpha_c\}_{c \in C}$ обобщенно бэровского пространства $B_\tau^m = \prod \{A_c : c \in C\}$ назовем отмеченной, если $\{U_{\alpha_c}\}_{c \in C}$ образует базу в некоторой точке x пространства X .

Если $\{U_{\alpha_c}\}_{c \in C}$ образует базу в точке x , то $\bigcap_{c \in C} U_{\alpha_c} = x$ так, как $X - T_1$ -пространство. Множество всех отмеченных точек пространства B_τ^m обозначим через S . Определим отображение $f: S \rightarrow X$ следующим образом: каждой точке $\alpha = \{\alpha_c\}_{c \in C}$ подпространства сопоставим единственную точку $x = f\alpha = \bigcap \{U_{\alpha_c} : c \in C\}$

T_1 -пространства X .

Покажем, что $fS = X$. Действительно, пусть $x \in X$ — произвольная точка, а $\{U_{\alpha_c}\}_{c \in C}$ — некоторая база в точке x . Тогда $\alpha = \{\alpha_c\}_{c \in C} \in S$, следовательно, $f\alpha = \bigcap \{U_{\alpha_c} : c \in C\} = x$. Значит $fS = X$.

Докажем равенство $f(S \cap V_{\alpha^*ik}) = \bigcap_{c \in k} U_{\alpha_c}$, (1.1)
где $S \cap V_{\alpha^*ik} \neq \emptyset$, V_{α^*ik} — интервал Бэра в B_τ^m .

Из определения отображения f следует, что $f(S \cap V_{\alpha^0 k}) \subseteq \bigcap_{c \in K} U_{\alpha^0 k}$.
 Обратно, пусть $x \in \bigcap_{c \in K} U_{\alpha^0 c}$. Дополняем $\{U_{\alpha^0 c}\}_{c \in K}$ до неко-
 торой базы $\{U_{\alpha_c}\}_{c \in C}$ точки x , где $\alpha_c = \alpha^0 c$ для всех
 $c \in K$. Тогда $\alpha = \{\alpha_c\}_{c \in C} \in S \cap V_{\alpha^0 k}$ и $f\alpha = \bigcap_{c \in C} U_{\alpha_c} = x$.
 Следовательно, $x \in f(S \cap V_{\alpha^0 k})$ и $f(S \cap V_{\alpha^0 k}) \supseteq \bigcap_{c \in K} U_{\alpha^0 c}$. Отсюда
 следует равенство $f(S \cap V_{\alpha^0 k}) = \bigcap_{c \in K} U_{\alpha^0 c}$. Покажем, что отображение
 $f: S \rightarrow X$ непрерывно и открыто. Пусть $\alpha^0 = \{\alpha^0 c\}_{c \in C}$ - про-
 извольная точка пространства S . Тогда семейство $\{S \cap V_{\alpha^0 k}\}_{k \in K(C)}$
 является базой в точке $\alpha^0 = \{\alpha^0 c\}_{c \in C}$ в простран-
 стве S , где $K(C)$ множество всех конечных подмножеств мно-
 жества C . Пусть $f\alpha^0 = x_0$, тогда $\{U_{\alpha^0 c}\}_{c \in C}$ образует
 базу в точке x_0 . Тогда $\{\bigcap_{c \in K} U_{\alpha^0 c} = 0_k\}_{k \in K(C)}$ тем более образу-
 ет базу в точке x_0 . В силу равенства $f(S \cap V_{\alpha^0 k}) = \bigcap_{c \in K} U_{\alpha^0 c}$ мы
 утверждаем, что некоторая база точки $\alpha^0 = \{\alpha^0 c\}_{c \in C} \in S$ переходит
 при f в базу точки $x_0 = f\alpha^0$. Учитывая, что точку $\alpha^0 = \{\alpha^0 c\}_{c \in C}$
 мы выбрали произвольно, отсюда заключаем о непрерывности и открыто-
 сти отображения $f: S \rightarrow X$.

Пространство S является нульмерным вполне регулярным
 T_1 -пространством как подпространство обобщенно баэровского про-
 странства B_τ^m . По той же причине $\omega(S) \leq \tau$, $\chi(S) \leq m$. Но
 $\omega(X) = \tau$, $\chi(X) = m$ и $f: S \rightarrow X$ - непрерывное откры-
 тое отображение. Поэтому неравенства $\omega(S) < \tau$, $\chi(S) < m$ не мо-
 гут иметь места, следовательно $\omega(S) = \tau$ и $\chi(S) = m$. теоре-
 ма доказана.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть X - произвольное T_1 -пространст-
 во. Если кратность некоторой базы пространства X равна его харак-
 теру, то пространство X является образом одного с ним веса и
 характера некоторого нульмерного вполне регулярного T_1 -прост-

пространства S при непрерывном открытом m -отображении. При этом можно считать, что $S \subseteq B_\tau^m$, где $\tau = \omega(X)$, $m = \chi(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X - произвольное T_1 -пространство, $\omega(X) = \tau$, $\chi(S) = m$ и γ' - база пространства X с кратностью m . В базе γ' (как и во всякой базе пространства X) содержится подбаза γ мощности τ , и база γ (как подбаза базы γ' с кратностью m) также имеет кратность m . Пусть

x - произвольная точка пространства X , $\{u_{\alpha^x}\}_{\alpha^x \in E}$ - все элементы базы $\gamma = \{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$, содержащие точку x , где

$E \subseteq A$ и $|E| = m$. Обозначим индексы α^x просто через e .

Построим обобщенно бэровское пространство B_τ^m по базе $\gamma =$

$= \{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$, как в доказательстве теоремы I.1. Тогда ясно, что в пространстве $B_\tau^m = A^C$ содержится в качестве подпространства обобщенно бэровское пространство $(B_m^m)_x = E^C$ веса m , состоящее из всех семейств вида $\{e_c\}_{c \in C}$, элементы которых суть какие-нибудь из индексов $e_c = \alpha_c^x$, где $c \in C$.

Построим как в доказательстве теоремы I.1. подпространство S и непрерывное открытое отображение $f: S \rightarrow X$. Тогда легко видеть, что прообраз $f^{-1}x$ точки x при стандартном отображении $f: S \rightarrow X$ содержится в подпространстве $(B_m^m)_x = E^C$. Итак, в рассматриваемом случае, открытое отображение является m -отображением. Теорема I.2 доказана.

ТЕОРЕМА I.3. Произвольное T_1 -пространство X в том и только в том случае является образом обобщенно бэровского пространства B_τ^m при непрерывном открытом отображении, когда в X существует полная измельчающаяся A_τ^m -система открытых покрытий.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $\mathcal{B}_\tau^m = A^c$ — обобщенно бэровское пространство веса τ и с характером m . В пространстве $\mathcal{B}_\tau^m$ определены стандартные базисные множества

$$V_{\alpha_{1k}} = \{\alpha' \in A^c : \alpha'_{1k} = \alpha_{1k}\},$$

где $k \in K(C)$. Для всякого $k \in K(C)$ положим $\Theta_k = \{V_{\alpha_{1k}} : \alpha \in A^c\}$. При каждом $k \in K(C)$, Θ_k является открытым дизъюнктым покрытием пространства $\mathcal{B}_\tau^m$.

Нетрудно убедиться в том, что семейство $\Theta = \{V_{\alpha_{1k}} : \alpha \in A^c, k \in K(C)\}$ удовлетворяет всем условиям полной измельчающейся A_τ^m -системы открытых покрытий и, кроме того, условию дизъюнктивности. Далее, если $f: \mathcal{B}_\tau^m \rightarrow X$ — непрерывное открытое отображение "на", то $f\Theta = \{fV_{\alpha_{1k}} : \alpha \in A^c, k \in K(C)\}$ — полная измельчающаяся A_τ^m -система открытых покрытий пространства X (проверка условий не составляет труда).

Достаточность. Пусть теперь $\gamma = \{U_{\alpha_{1k}} : \alpha \in A^c, k \in K(C)\}$ есть полная измельчающаяся A_τ^m -система открытых покрытий T_1 -пространства X . Положим $\gamma_k = \{U_{\alpha_{1k}} : \alpha \in A^c\}$. Для каждого $k \in K(C)$ система γ_k является открытым покрытием пространства X , причем семейство $\{\gamma_k : k \in K(C)\}$ этих покрытий полно и измельчается. Пусть $\alpha = \{\alpha_s\}_{s \in C}$ — произвольная точка пространства $\mathcal{B}_\tau^m = A^c$.

Рассмотрим семейство множеств $\{U_{\alpha_{1k}} : k \in K(C)\}$ из γ .

Так как X есть T_1 -пространство, а γ — полная измельчающаяся A_τ^m -система, то пересечение $\bigcap \{U_{\alpha_{1k}} : k \in K(C)\}$ непусто и состоит ровно из одной точки, которую обозначим через x . Тогда положим $f\alpha = x$. Здесь $\alpha = \{\alpha_s\} \in \mathcal{B}_\tau^m$ и $x = \bigcap \{U_{\alpha_{1k}} : k \in K(C)\}$. Таким образом, определено отображение $f: \mathcal{B}_\tau^m \rightarrow X$. Рассмотрим в $\mathcal{B}_\tau^m$ произвольное стандарт-

ное базисное множество

$$V_{\alpha^0 k} = \{\alpha = \{\alpha_c\}_{c \in C} \in \mathcal{B}_T^m : \alpha_{1k} = \alpha^0_{1k}\}.$$

а) Докажем равенство

$$\{V_{\alpha^0 k} = \mathcal{U}_{\alpha^0 k}. \quad (1.2)$$

Пусть $x \in \{V_{\alpha^0 k}$. Тогда существует точка $\alpha = \{\alpha_c\}_{c \in C} \in V_{\alpha^0 k}$ такая, что $f_\alpha = x$ и $\alpha_{1k} = \alpha^0_{1k}$. По определению отображения f имеем $f_\alpha = \bigcap \{\mathcal{U}_{\alpha_{1k}} : k \in K(C)\}$.

Но $\bigcap \{\mathcal{U}_{\alpha_{1k}} : k \in K(C)\} \subseteq \mathcal{U}_{\alpha^0 k}$, так как $\alpha_{1k} = \alpha^0_{1k}$.

Следовательно, $x \in \mathcal{U}_{\alpha^0 k}$. Обратно, пусть $x \in \mathcal{U}_{\alpha^0 k}$.

Покажем, что для каждого $k' \in K(C) \setminus \{k\}$, существует элемент

$\mathcal{U}_{\alpha_{1k} \cup k'} \in \mathcal{Y}_{k \cup k'}$ такой, что $\mathcal{U}_{\alpha_{1k} \cup k'} \ni x$ и $\alpha_{1k} = \alpha^0_{1k}$.

Действительно, пусть $k = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$. Так как $\mathcal{Y}$ есть

A_T^m -система, то

$$\mathcal{U}_{\alpha_{1k}} = \bigcup \{\mathcal{U}_{\alpha_{1k} \cup \{c_i\}} : \alpha \in A^C(\alpha^0_{1k})\}.$$

Значит, существует $\mathcal{U}_{\alpha^0_{1k} \cup \{c_i\}} \ni x$, причем $\alpha^x_{1k} = \alpha^0_{1k}$.

Но, в свою очередь,

$$\mathcal{U}_{\alpha^0_{1k} \cup \{c_i\}} = \bigcup \{\mathcal{U}_{\alpha_{1k} \cup \{c_i\} \cup \{c_j\}} : \alpha \in A^C(\alpha^x_{1k} \cup \{c_i\})\}.$$

Опять существует $\mathcal{U}_{\alpha^x_{1k} \cup \{c_i\} \cup \{c_j\}} \ni x$ и $\alpha^x_{1k} = \alpha^0_{1k}$.

Применяя этот процесс еще $n - 2$ раз, мы получим, что существует

$$\mathcal{U}_{\alpha^x_{1k} \cup \{c_i\} \cup \dots \cup \{c_n\}} = \mathcal{U}_{\alpha^x_{1k} \cup k'} \ni x$$

и $\alpha^x_{1k} = \alpha^0_{1k}$. Тогда $\mathcal{U}_{\alpha^x_{1k} \cup k'}$, для которого $\alpha^x_{1k} = \alpha^0_{1k}$, принадлежит $\mathcal{Y}_{k \cup k'}$. Так как семейство $\mathcal{Y}$ измельчается, то

семейство $\{\mathcal{U}_{\alpha^x_{1k} \cup k'} : k' \in K(C)\}$, для которого $\alpha^x_{1k} = \alpha^0_{1k}$

образует базу в точке x . Дополняем эту базу до такой базы

$\{\mathcal{U}_{\alpha^x_{1k'}} : k' \in K(C)\}$, что $\alpha^x_{1k} = \alpha^0_{1k}$. Тогда

$$\bigcap \{\mathcal{U}_{\alpha^x_{1k'}} : k' \in K(C)\} = x = f_{\alpha^x} \text{ и } \alpha^x = \{\alpha^x_c\}_{c \in C} \in V_{\alpha^0 k}.$$

Следовательно, $f_{\alpha^x} = x \in \{V_{\alpha^0 k}$.

Равенство (I.2) доказано.

б) Докажем, что $\{B_{\tau}^m = A^C$. Пусть $x_0 \in X$. Так как γ_k - покрытие для каждого $k \in K(C)$, то существует $U_{\alpha^{x_0} \{c\}} \in \gamma_{\{c\}}$, такое, что $U_{\alpha^{x_0} \{c\}} \ni x_0$, для каждого $\{c\} \in K(C)$. Покажем, что именно точка $\alpha^{x_0} = \{\alpha_c^{x_0}\}_{c \in C}$ отображается в точку x_0 при f . Так как $x_0 \in U_{\alpha^{x_0} \{c\}}$, то рассуждая точно так же, как и выше в пункте а), мы получим базу $\{U_{\alpha^{x_0} \{k\}} : k \in K(C)\}$, причем $\bigcap \{U_{\alpha^{x_0} \{k\}} : k \in K(C)\} = x_0$. Следовательно, $\alpha^{x_0} = \{\alpha_c^{x_0}\} \in B_{\tau}^m$ и $f\alpha^{x_0} = x_0$.

в) Непрерывность и открытость отображения непосредственно следует из равенства

$$fV_{\alpha \{k\}} = U_{\alpha \{k\}}, \alpha \in A^C, k \in K(C),$$

так как база пространства B_{τ}^m переходит при f в базу пространства X . Следовательно, f непрерывно и открыто. Теорема I.3 доказана.

ТЕОРЕМА I.4. Произвольное T_1 - пространство X тогда и только тогда гомеоморфно обобщенно баэровскому пространству

B_{τ}^m , когда в нем существует дизъюнктивная полная измельчающаяся A_{τ}^m - система открытых покрытий.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В теореме I.3 уже показано, что в пространстве B_{τ}^m имеется дизъюнктивная полная измельчающаяся A_{τ}^m - система открытых покрытий. Пусть $\gamma = \{U_{\alpha \{k\}} : \alpha \in A^C, k \in K(C)\}$,

где $|A| = \tau$, $|C| = m$ и γ - дизъюнктивная полная измельчающаяся A_{τ}^m - система открытых покрытий пространства X .

Рассмотрим построенное в теореме I.3 непрерывное открытое отображение f обобщенно баэровского пространства B_{τ}^m на пространство X . Из условия дизъюнктивности A_{τ}^m - системы

Следует, что $U_{\alpha'1K} \cap U_{\alpha''1K} = \emptyset$, если $\alpha'1K \neq \alpha''1K$.
т.е. существует $c_0 \in K$, такое, что $\alpha'_{c_0} \neq \alpha''_{c_0}$.

Если $\alpha' = \{\alpha'_c\}_{c \in C} \in B_\tau^m$, $\alpha'' = \{\alpha''_c\}_{c \in C} \in B_\tau^m$ и $\alpha' \neq \alpha''$, то $\alpha'_{c_0} \neq \alpha''_{c_0}$ для некоторого $c_0 \in C$.

Пусть $\alpha' \neq \alpha''$. Рассмотрим стандартные базисные множества

$V_{\alpha'1\{c_0\}}$ и $V_{\alpha''1\{c_0\}}$ в B_τ^m . Понятно, что
 $V_{\alpha'1\{c_0\}} \cap V_{\alpha''1\{c_0\}} = \emptyset$ и $\alpha' \in V_{\alpha'1\{c_0\}}$, $\alpha'' \in V_{\alpha''1\{c_0\}}$. Имеем

$\{V_{\alpha'1\{c_0\}} = U_{\alpha'1\{c_0\}}, \{V_{\alpha''1\{c_0\}} = U_{\alpha'1\{c_0\}} \cap U_{\alpha''1\{c_0\}} = \emptyset$,
откуда получаем, что $\{\alpha' \neq \alpha''\}$. Следовательно, f — гомеоморфизм. Теорема I.4 доказана.

ТЕОРЕМА I.5. Для того, чтобы произвольное T_1 -пространство X имело полную измельчающуюся A_τ^m -систему точечно-конечных открытых покрытий, необходимо и достаточно, чтобы оно было непрерывным открытым бикompактным образом обобщенно бэровского пространства B_τ^m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть T_1 -пространство X имеет полную измельчающуюся A_τ^m -систему точечно-конечных открытых покрытий. Построим, как в доказательстве теоремы I.3, обобщенно бэровское пространство B_τ^m и непрерывное открытое отображение $f: B_\tau^m \rightarrow X$. Пусть точка $x \in X$ — произвольная. По условию для каждого $K \in K(C)$ покрытие $\gamma_K = \{U_{\alpha1K} : \alpha \in A^C\}$ точно конечно. Через L_C обозначим множество тех α'_c , где $c \in C$, для которых существует такое $U_{\alpha1\{c\}} \in \gamma_{\{c\}}$, что $U_{\alpha1\{c\}} \ni x$. Так как при фиксированном $c \in C$ множество

$$\{U_{\alpha1\{c\}} : U_{\alpha1\{c\}} \ni x\}$$

конечно, то отсюда следует, что множество L_C для каждого $c \in C$

конечно. Но из определения отображения f следует, что

$$f^{-1}_x \subseteq \prod \{L_c : c \in C\} \subseteq B^m_\tau.$$

В силу известной теоремы Тихонова [15] $\prod \{L_c : c \in C\}$ является бикompактом. Множество f^{-1}_x замкнуто в B^m_τ в силу непрерывности f , и тем более замкнуто в B^m_τ .

Следовательно, f^{-1}_x — бикompакт.

Достаточность. Пусть $f : B^m_\tau \rightarrow X$ — непрерывное открытое бикompактное отображение "на". Пусть $\Theta = \{V_{\alpha k} : \alpha \in A^c\}$

и $K \in K(C)$ — стандартная дизъюнктивная полная измельчающаяся A^m_τ — система открытых покрытий в B^m_τ . Пусть

$\Theta_k = \{V_{\alpha k} : \alpha \in A^c\}$. Так как f^{-1}_x , для каждого $x \in X$, бикompактно и покрытие Θ_k дизъюнктивно, то отсюда следует, что множество всех элементов покрытия Θ_k , пересекающихся с множеством f^{-1}_x , конечно. Это означает, что открытое покрытие $\{ \Theta_k = \{fV_{\alpha k} : \alpha \in A^c\} \}$ точечно конечно.

Легко проверить, что $\{ \Theta = \{fV_{\alpha k} : \alpha \in A^c, k \in K(C)\} \}$ удовлетворяет всем условиям полной измельчающейся A^m_τ — системы открытых покрытий.

§ 2. Об открытых бикompактных отображениях.

Известна следующая проблема, поставленная А.В.Архангельским: каждое ли вполне регулярное слабо паракомпактное пространство является открытым бикompактным образом некоторого паракомпакта?

В работе М.М.Чобана [26] доказано, что всякое нормальное слабо паракомпактное p — пространство является открытым бикompактным образом некоторого паракомпактного p — пространства. В связи с этой проблемой представляет интерес внутренняя характеристика открытых бикompактных образов паракомпактов, которая дается ниже.

Будем говорить, что пространство (X, τ) обладает свойством (ПОВ) (открытый бикompактный образ паракомпакта), если в (X, τ) существует семейство $\{\mathcal{B}_s : s \in S\}$ центрированных систем открытых множеств, удовлетворяющее следующим условиям:

1°. Для каждого $s \in S$ система $\mathcal{B}_s$ является базой некоторой точки $x \in X$ и $\tau_x = \bigcup \{\mathcal{B}_s : s \in S_x\}$, где $\tau_x = \{U \in \tau : U \ni x\}$; $S_x = \{s \in S : \mathcal{B}_s \text{ является базой точки } x\}$.

2°. Для каждого фиксированного $s_0 \in S$ и для любых $U_1, U_2 \in \mathcal{B}_{s_0}$ существует $U_3 \in \mathcal{B}_{s_0}$ такое, что если $U_3 \in \mathcal{B}_s$, то $U_1, U_2 \in \mathcal{B}_s$.

3°. Для любых $s_1, s_2 \in S$, $s_1 \neq s_2$ существуют $U_1 \in \mathcal{B}_{s_1}$ и $U_2 \in \mathcal{B}_{s_2}$ такие, что $U_1 \notin \mathcal{B}_{s_2}$, $U_2 \notin \mathcal{B}_{s_1}$.

4°. Для любого открытого покрытия ω такого, что $\omega \cap \mathcal{B}_s \neq \emptyset$ для всех $s \in S$, существует открытое покрытие α , обладающее свойством: $\alpha \cap \mathcal{B}_s \neq \emptyset$ для всех $s \in S$ и для каждого фиксированного $s_0 \in S$ найдется $V \in \omega \cap \mathcal{B}_{s_0}$ такое, что если $U \in \alpha \cap \mathcal{B}_{s_0}$ и $U \in \mathcal{B}_s$, то $V \in \mathcal{B}_s$.

5°. Для любого $\beta \subseteq \tau_x$ такого, что $\beta \cap \mathcal{B}_s \neq \emptyset$ для всех $s \in S_x$, существует конечная подсистема $\beta_0 \subseteq \beta$, такая, что $\beta_0 \cap \mathcal{B}_s \neq \emptyset$ для всех $s \in S_x$.

ТЕОРЕМА 2.1. Среди T_1 -пространств пространства, обладающие свойством (ПОВ), и только они являются образами паракомпактов при открытых бикompактных отображениях.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1°. Пусть $f : (S, \sigma) \rightarrow (X, \tau)$ - открытое бикompактное отображение паракомпакта (S, σ) на пространство (X, τ) . Покажем, что пространство (X, τ) обладает

свойством (ПЮБ). Для каждого $s \in S$ положим $G_s = \{O \in \mathcal{G} : O \ni s\}$. Тогда в силу открытости отображения $\{$ система $\mathcal{B}_s = \{\{O : O \in G_s\}$ является базой точки $\{s = x$ пространства (X, τ) . Семейство $\{\mathcal{B}_s : s \in S\}$ является искомым. Теперь проверим выполнения условий $1^0 - 5^0$.

1^0 . Очевидно, что $\tau_x = \bigcup \{\mathcal{B}_s : s \in S_x = \{x\}\}$.

2^0 . Пусть $s_0 \in S$ фиксировано и $U_1 \in \mathcal{B}_{s_0}, U_2 \in \mathcal{B}_{s_0}$. Тогда существуют $O_1, O_2 \in G_{s_0}$ такие, что $\{O_1 = U_1, \{O_2 = U_2$. Положим $U_3 = \{O_1 \cap O_2\}$. Тогда $U_3 \in \mathcal{B}_{s_0}$. Если $U_3 \in \mathcal{B}_s$, то $O_1 \cap O_2 \in G_s$. Следовательно, $O_1 \in G_s, O_2 \in G_s$. Значит $U_1 \in \mathcal{B}_s, U_2 \in \mathcal{B}_s$.

3^0 . Это следует из того факта, что $(S, \mathcal{G})$ удовлетворяет T_1 -аксиоме отделимости.

4^0 . Пусть открытое покрытие $\omega = \{\{O : O \in \lambda\}$ такое, что $\omega \cap \mathcal{B}_s \neq \emptyset$ для всех $s \in S$. Это означает, что λ является открытым покрытием пространства $(S, \mathcal{G})$.

Так как $(S, \mathcal{G})$ паракомпакт, то существует открытое покрытие $\chi = \{G\}$, вписанное в λ звездно. Так как χ - покрытие пространства $(S, \mathcal{G})$, то $\alpha \cap \mathcal{B}_s = \emptyset$ для всех $s \in S$, где $\alpha = \{ \chi$. Для каждого $s_0 \in S$ существует $O \in \lambda$ такое, что $\chi(s_0) \subseteq O$. Положим $\{O = V$. Тогда $V \in \mathcal{B}_{s_0}$.

Если $U \in \alpha \cap \mathcal{B}_{s_0}$ и $U \in \mathcal{B}_s$, то найдется $G \in \chi$ такое, что $\{G = U$.

Это означает, что $G \in G_{s_0}$ и $s \in G \subseteq O$. Тогда $V \in \mathcal{B}_s$.

5^0 . Это условие следует из того факта, что отображение $\{$ бикомпактно.

2. Обратно, пусть T_1 -пространство (X, τ) обладает свойством (ПЮБ), т.е. в (X, τ) существует семейство

$$\{\mathcal{B}_s : s \in S\}$$

центрированных систем открытых множеств, удовлетворяющее условиям $\Gamma^0 - 5^0$.

Рассмотрим отображение $f: S \rightarrow X$, которое каждому $s \in S$ сопоставляет точку $x = \bigcap \{U : U \in \mathcal{B}_s\}$. Так как (X, τ) удовлетворяет T_1 -аксиоме отделимости, то это отображение однозначно. Из условия Γ^0 следует, что $fS = X$.

Для каждого $U \in \tau$ положим $O_U = \{s \in S : U \in \mathcal{B}_s\}$. Теперь покажем, что семейство $\Gamma = \{O_U : U \in \tau\}$ является базой некоторой топологии на S . Так как $\mathcal{B}_s \neq \emptyset$ для всех $s \in S$, то каждый элемент $s_0 \in S$ содержится по крайней мере в одном $O_U \in \Gamma$. Теперь пусть элемент $s_0 \in S$ содержится и в $O_{U_1} \in \Gamma$ и в $O_{U_2} \in \Gamma$. Тогда $U_1, U_2 \in \mathcal{B}_{s_0}$ и в силу условия 2^0 существует $U_3 \in \mathcal{B}_{s_0}$ такое, что если $U_3 \in \mathcal{B}_s$, то $U_1, U_2 \in \mathcal{B}_s$. Это означает, что если $s \in O_{U_3}$, то $s \in O_{U_1}$ и $s \in O_{U_2}$. Значит $s_0 \in O_{U_3} \subseteq O_{U_1} \cap O_{U_2}$. Следовательно, Γ является базой некоторой топологии. Эту топологию, порожденную семейством Γ , обозначим через $\mathcal{G}$.

а) Покажем, что отображение $f: (S, \mathcal{G}) \rightarrow (X, \tau)$ является открытым отображением. Для этого устанавливаем формулу $fO_U = U$. По построению отображения f имеем $fO_U \subseteq U$. Пусть $x \in U$. Тогда существует $s \in S$ такое, что $U \in \mathcal{B}_s$. Тогда $s \in O_U$. Следовательно, $x \in fO_U$, $x = fs$. Значит $fO_U = U$. Из этой формулы следует, что база пространства $(S, \mathcal{G})$ переходит в базу пространства (X, τ) . Отсюда следует открытость отображения f .

б) Покажем, что отображение f бикомпактно. Пусть $\mathcal{M}$ -произвольное открытое покрытие множества $f^{-1}x$, $x \in X$. Мы можем считать, что элементы покрытия $\mathcal{M}$ имеют вид O_U . Тогда $\beta \cap \mathcal{B}_s \neq \emptyset$ для всех $s \in S_x$, где $\beta = f\mathcal{M}$, $S_x = f^{-1}x$. В силу условия 5^0 существует конечная подсистема $\beta_0 \subseteq \beta$ такая,

что $\beta_0 \cap \beta_s \neq \emptyset$ для всех $s \in S_x$. Это означает, что $\lambda_0 = \{O_u : u \in \beta_0\}$ покрывает $\mathbb{R}^1_x$. Следовательно, отображение f бикомпактно.

в) Покажем, что $(S, \mathcal{G})$ — паракомпакт. Из условия 3° следует, что $(S, \mathcal{G})$ удовлетворяет T_1 -аксиоме отделимости. Пусть γ — произвольное открытое покрытие. Мы можем считать, что элементы покрытия имеют вид O_V т.е. $\gamma = \{O_V : V \in \omega\}$. Тогда ω — покрытие пространства (X, τ) и $\omega \cap \beta_s \neq \emptyset$ для всех $s \in S$. В силу условия 4° существует открытое покрытие α такое, что $\alpha \cap \beta_s \neq \emptyset \forall s \in S$, и для любого $s_0 \in S$ найдется $V \in \omega$ такое, что если $u \in \alpha \cap \beta_{s_0}$ и $u \in \beta_s$, то $V \in \beta_s$. Это означает, что $\bigcup \{O_u : u \in \beta_{s_0} \cap \alpha\} \subseteq O_V$. Отсюда следует, что открытое покрытие $\{O_u : u \in \alpha\}$ звездно вписано в покрытие γ . Следовательно, $(S, \mathcal{G})$ — паракомпакт. Теорема 2.1 доказана.

Будем говорить, что пространство (X, τ) обладает свойством (ПО) (открытый образ паракомпакта), если в (X, τ) существует семейство $\{\beta_s : s \in S\}$ центрированных систем открытых множеств, удовлетворяющее условиям 1°–4° свойство (ПОБ).

Из доказательства теоремы 2.1 следует

Теорема 2.2. Среди T_1 -пространств пространства, обладающие свойством (ПО) и только они являются образами паракомпактов при открытых отображениях.

Отметим, что открытые образы метрических пространств охарактеризованы В.И.Пономаревым [21].

А.В.Архангельский [7] доказал, что T_1 -пространство X обладает равномерной базой (см. [4]) тогда и только тогда, когда оно является открытым бикомпактным образом некоторого метри-

ческого пространства. Ниже дается внутренняя характеристика открытых бикомпактных образов пространств с равномерной базой.

Будем говорить, что пространство (X, τ) обладает свойством (ПРОБ) (открытый бикомпактный образ пространства с равномерной базой), если в (X, τ) существует семейство $\{B_s : s \in S\}$ центрированных систем открытых множеств, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1°. Для каждой точки $x \in X$ существует $s_x \in S$ такое, что B_{s_x} является базой точки x и для любого $s \in S$, B_s является базой некоторой точки x_s .
- 2°. Для каждого фиксированного $s_0 \in S$ и для любых $U_1, U_2 \in B_{s_0}$ существует $U_3 \in B_{s_0}$ такое, что если $U_3 \in B_s$, то $U_1, U_2 \in B_s$.
- 3°. Для любых $s_1, s_2 \in S$, $s_1 \neq s_2$ существуют $U_1 \in B_{s_1}$ и $U_2 \in B_{s_2}$ такие, что $U_1 \notin B_{s_2}$, $U_2 \notin B_{s_1}$.
- 4°. Для любой системы B_{s_0} являющейся базой некоторой точки x_{s_0} и для любого $U_0 \in B_{s_0}$ семейство $\{U \in B_{s_0} : \text{существует } s \in S \text{ такое, что } U \in B_s \text{ и } U_0 \notin B_s\}$ конечно.
- 5°. Для любого $\beta \subseteq \bigcup \{B_s : s \in S_x\}$ такого, что $\beta \cap B_s \neq \emptyset$ для всех $s \in S_x$, существует такая конечная подсистема $\beta_0 \subseteq \beta$, что $\beta_0 \cap B_s \neq \emptyset$ для всех $s \in S_x = \{s \in S : B_s \text{-база точки } x\}$.

ТЕОРЕМА 2.3. Среди T_1 -пространств пространства, обладающие свойством (ПРОБ), и только они являются образами

T_1 -пространств с равномерной базой при открытых бикомпактных отображениях.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Пусть $f : (S, \sigma) \rightarrow (X, \tau)$ - открытое бикомпактное отображение T_1 -пространства (S, σ) с равномерной базой γ на пространство (X, τ) . Для каждого $s \in S'$, положим $\gamma_s = \{0 \in \gamma : 0 \ni s\}$. Теперь покажем, что семейство $\{B_s : s \in S\}$,

где $\mathcal{B}_s = \{ \mathcal{U}_s \}$, удовлетворяет всем условиям $1^0 - 5^0$ свойства (ПРОБ). Все условия, кроме 4^0 проверяются как в доказательстве теоремы I. Проверим выполнение условия 4^0 . Пусть $\mathcal{B}_{s_0}$ является базой некоторой точки x_0 . Тогда $\{s_0\} = x_0$. Так как $\mathcal{U}$ равномерная база, то для любой точки s_0 и её окрестности $O_{s_0} \in \mathcal{U}$ семейство $\{O \in \mathcal{U} : O \in s_0 \text{ и } O \cap (S \setminus O_{s_0}) \neq \emptyset\}$ конечно. Это означает, что для любого $U \in \mathcal{B}_{s_0}$, семейство $\{U \in \mathcal{B}_{s_0} : \text{существует } s \in S \text{ такое, что } U \in \mathcal{B}_s \text{ и } U_0 \notin \mathcal{B}_s\}$ конечно.

2. Обратно, пусть T_1 - пространство (X, τ) обладает свойством (ПРОБ), т.е. в (X, τ) существует семейство $\{\mathcal{B}_s : s \in S\}$ центрированных систем открытых множеств, удовлетворяющее условиям $1^0 - 5^0$.

Рассмотрим отображение $f: S \rightarrow X$, который каждому элементу $s \in S$ поставит в соответствие точку $f_s = x = \bigcap \{U : U \in \mathcal{B}_s\}$. Для каждого $U \in \bigcup \{\mathcal{B}_s : s \in S\}$ положим $O_U = \{s \in S : U \in \mathcal{B}_s\}$. Как и в доказательстве теоремы I, проверяется, что $\mathcal{U} = \{O_U : U \in \bigcup \{\mathcal{B}_s : s \in S\}\}$ база некоторой топологии G , а $f: (S, G) \rightarrow (X, \tau)$ - открытое биомантное отображение. Теперь покажем, что база $\mathcal{U} = \{O_U : U \in \bigcup \{\mathcal{B}_s : s \in S\}\}$ является равномерной базой пространства (S, G) . Пусть $s_0 \in (S, G)$ - произвольная точка, а $O_{u_0} \in \mathcal{U}$ - произвольная окрестность точки s_0 . Тогда в силу условия 4^0 семейство $\{U \in \mathcal{B}_{s_0} : \text{существует } s \in S \text{ такое, что } U \in \mathcal{B}_s \text{ и } U_0 \notin \mathcal{B}_s\}$ конечно. Это означает, что семейство $\{O_U \in \mathcal{U} : O_U \ni s_0 \text{ и } O_U \cap \bigcap (S \setminus O_{u_0}) \neq \emptyset\}$ конечно. Так как $O_{u_0} \in \mathcal{U}$ - произвольный элемент, содержащий точки s_0 , то семейство $\{O_U \in \mathcal{U} : O_U \ni s_0 \text{ и } O_U \cap (S \setminus O_{u_0}) \neq \emptyset\}$ конечно, где O_{u_0} - произвольная окрестность точки s_0 . Теорема 2.3 доказана.

Комбинируя выше приведенные теоремы А.В.Архангельского и теорему 2.3 получим следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2.4. Среди T_1 -пространств пространства, обладающие свойством (ПРОБ), и только они являются образами метрических пространств при отображениях, являющихся суперпозициями двух открытых бикомпактных отображений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Отображение $f: X \rightarrow Y$ пространства X на пространство Y называется χ -отображением, если для любых $y \in Y$ и $x \in f^{-1}y$ имеет место неравенство $\chi(x, X) \leq \chi(y, Y)$.

ТЕОРЕМА 2.6. Все T_1 -пространства с характером τ и только они являются образами (нульмерных) сильно паракомпактных пространств с характером τ при непрерывных почти-открытых χ -отображениях.

Доказательство. 1°. Пусть $f: X \rightarrow Y$ - почти-открытое непрерывное χ -отображение (сильно паракомпактного) пространства X с характером τ на T_1 -пространство Y . В силу почти-открытости отображения f , $\chi(Y) \leq \tau$. Но отображение f является χ -отображением, поэтому $\tau \leq \chi(Y)$. Следовательно, $\chi(Y) = \tau$.

2°. Пусть Y - произвольное непустое T_1 -пространство с характером τ . Для каждой точки $y \in Y$ через X_y обозначим топологическое пространство, которое получается, если все точки пространства Y , кроме y , считать изолированными, а топологию в точке y сохранить, (т.е. топология пространства X_y такова, что для $x \in X_y$, $x \neq y$, фильтром окрестностей точки x является семейство всех частей от Y , содержащих x , а для $y \in Y$ фильтром окрестностей в топологии пространства X_y является фильтр окрестностей точки y в топологии исходного пространства Y). Через X обозначим прямую сумму пространств X_y , т.е. $X = \bigcup \{X_y : y \in Y\}$, $X_{y_1} \cap X_{y_2} = \emptyset$

при $y_1 \neq y_2$ и X_{y_i} открыто-замкнуто в X , $y \in Y$. Очевидно, каждое X_y допускает однозначно определенное естественное отображение f_y на пространство Y , тождественное на множестве точек этих пространств. Семейство этих отображений f_y , когда y пробегает Y , порождает отображение $f: X \rightarrow Y$.

1. Проверим, что X - нульмерное сильно паракомпактное пространство с характером τ . Для доказательства сильной паракомпактности пространства X достаточно показать сильную паракомпактность каждого пространства X_y , $y \in Y$. Тогда пространство X как прямая сумма сильно паракомпактных пространств будет сильно паракомпактным. Пусть $\omega = \{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ - произвольное открытое покрытие пространства X_y , $y \in X_y$. Тогда существует $\alpha_y \in A$ такое, что $V_{\alpha_y} \ni y$, $y \in X_y$. Пусть

ω_y - покрытие, состоящее из всех одноточечных элементов множества $X_y \setminus V_{\alpha_y}$ и множества V_{α_y} . Очевидно, что ω_y является открытым дизъюнктивным покрытием и вписано в покрытие ω . Следовательно, X_y - сильно паракомпактно. Теперь покажем, что $\chi(X) = \tau$.

Из определения топологии в X следует, что $\chi(X) \geq \chi(Y) = \tau$. С другой стороны, каждое $\chi(X_y) \leq \chi(Y) = \tau$, тогда $\chi(X) \leq \tau$. Следовательно, $\chi(X) = \tau$. Нульмерность пространства X очевидна.

2. Проверим, что $f: X \rightarrow Y$ - непрерывное почти - открытое χ - отображение. Пусть $y \in Y$ - произвольная точка из Y . Положим $y^* = f^{-1} \cap X_y$ (это корректно, поскольку f отображает X_y на Y взаимнооднозначно).

Пусть $\{U_\alpha: \alpha \in A_y\}$ - какая-нибудь база окрестностей точки y в Y . Тогда, по определению топологии в X , система

$\{U_\alpha^*, \alpha \in A_y\}$, где $U_\alpha^* = f^{-1}U_\alpha \cap X_y$, $\alpha \in A_y$, образуют базу окрестностей точки y^* в X , причем, очевидно, $fU_\alpha^* = U_\alpha, \alpha \in A_y$. Этим доказано, ввиду произвола в выборе точки $y \in Y$, что отображение $f: X \rightarrow Y$ почти - открыто. Непрерывность отображения f очевидна.

По определению топологии в X , для любых $y \in Y$ и $x \in f^{-1}y$, имеет место неравенство $\chi(x, X) \leq \chi(y, Y)$. Следовательно, f является χ - отображением. Теорема 2.6 полностью доказана.

§ 3. Об образах метрических пространств при сильно факторных отображениях.

В этом параграфе вводятся и изучаются сильно факторные отображения. Характеризуются образы метрических пространств при сильно факторных и сильно факторных $\mathcal{S}$ - отображениях. Сильно факторные отображения естественным образом связаны со слабыми базами топологических пространств. Понятие слабой базы возникло при изучении факторных отображений метрических пространств и введено в работе А.В.Архангельского [6].

Напомним понятие слабой базы.

Пусть каждой точке x множества X поставлена в соответствие некоторая система T_x содержащих ее подмножеств множества X . Предполагается, что пересечение любого конечного множества элементов системы T_x содержит элемент из T_x . Семейство $T_c = \{T_x : x \in X\}$ позволяет определить топологию σ на X следующим стандартным образом: множество $P \subseteq X$ замкнуто в X в том и только в том случае, если для каждой точки $x \in X \setminus P$ существует $Q_x \in T_x$ такое, что $Q_x \cap P = \emptyset$.

Система T_c называется слабой базой топологии $\mathcal{G}$,
а элементы T_c — слабыми окрестностями точки x .

Отметим, что если $T'_c = \{T'_x : x \in X\}$ такое семейство, что
каждый элемент $V'_x \in T'_x$ содержит некоторый элемент $V \in T_x$,
а каждый элемент $V_1 \in T_x$ содержит некоторый элемент $V'_1 \in T'_x$,
то семейства T'_c и T_c порождают одну и ту же топологию $\mathcal{G}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (Архангельский А.В.) 3.1. Говорят, что топологическое пространство X удовлетворяет слабой первой аксиоме счетности (сокращенно $g \uparrow$ — аксиоме счетности), если его топология может быть задана слабой базой $T_c = \{T_x : x \in X\}$ в которой каждая T_x счетна.

Слабая база $T_c = \{T_x : x \in X\}$ называется точечно-счетной, соответственно счетной, если семейство $T = \bigcup \{T_x : x \in X\}$ точно-счетно, соответственно счетно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Отображение $f: X \rightarrow Y$ топологического пространства X на топологическое пространство Y называется сильно факторным, если выполняются следующие условия:

- А) Отображение f факторно;
- Б) Для любого $y \in Y$ все элементы семейства $\{fB_x\}_{x \in f^{-1}y}$ предфильтров fB_x являются базисами одного и того же фильтра, где $B_x = \{G_x\}$ произвольная база в точке x , $fB_x = \{fG_x\}$.

Отметим, что всякое открытое непрерывное отображение является сильно факторным, а сильно факторное отображение, очевидно, является факторным. Обратное, вообще говоря, неверно.

ТЕОРЕМА 3.3. Отображение $f: X \rightarrow Y$ топологического пространства X на топологическое пространство Y открыто и непрерывно тогда и только тогда, когда отображение f сильно факторно и псевдооткрыто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что всякое открытое непрерывное отображение является сильно факторным и псевдооткрытым отображением. Поэтому достаточно доказать, что всякое сильно факторное и псевдооткрытое отображение $f: X \rightarrow Y$ является открытым. Пусть

U — произвольное открытое множество пространства X . Покажем, что fU открыто в Y . Пусть $y \in fU$ — произвольная точка и точка $x_0 \in f_y^{-1} \cap U$ тоже выбрана произвольно. Выберем $U_{x_0} \in \mathcal{B}_{x_0}$ такое, что $U_{x_0} \subseteq U$, где $\mathcal{B}_{x_0}$ — произвольная база точки x_0 . В силу сильной факторности отображения f для любой точки $x \in f_y^{-1}$ существует открытое $U_x \in \mathcal{B}_x$ такое, что $fU_x \subseteq fU_{x_0}$. Тогда $\bigcup \{fU_x : x \in f_y^{-1}\} \subseteq fU_{x_0}$. Но $\tilde{U} = \bigcup \{U_x : x \in f_y^{-1}\} \supseteq f_y^{-1}$ и $\tilde{U}$ открыто в X . Тогда в силу псевдооткрытости отображения f имеем $y \in \text{Int } f\tilde{U}$. Следовательно, $y \in \text{Int } f\tilde{U} \subseteq fU$. Отсюда, в силу произвольности выбора $y \in fU$ заключаем, что fU открыто в Y . Теорема 3.3. доказана.

Из теоремы 3.3 вытекают следующие следствия:

Следствие 3.4. Замкнутое отображение открыто тогда и только тогда, когда оно сильно факторно.

Следствие 3.5. Сильно факторное отображение $f: X \rightarrow Y$ пространства X на пространство Фреше-Урысона Y является открытым.

Следствие 3.6. Всякое сильно факторное почти открытое отображение открыто.

Следующие теоремы являются аналогами известной теоремы В.И.Пономарева о пространствах с первой аксиомой счетности как открытых образах метрических пространств [21].

ТЕОРЕМА 3.7. Пространства со слабой первой аксиомой счетности ($g\mathfrak{f}$ - аксиомой счетности) и только они являются образами метрических пространств при сильно факторных отображениях (в классе T_1 -пространств).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО 1° . Пусть $f: X \rightarrow Y$ - сильно факторное отображение метрического пространства X на T_1 -пространство Y . Для каждой точки $y \in Y$ выберем по точке $x_y \in f^{-1}y$. Пусть $B_{x_y} = \{G_{x_y}^n\}_{n=1}^\infty$ - счетная база в точке x_y . Покажем, что $T_c = \{B_{x_y} : y \in Y\}$ является слабой базой пространства Y , где $B_{x_y} = \{G_{x_y}^n\}_{n=1}^\infty$. Пусть $P \subseteq X$ замкнутое множество и $y \in Y \setminus P$. Тогда $f^{-1}P$ замкнуто в X и $x_y \in X \setminus f^{-1}P$. Поэтому существует $G_{x_y}^{n_0} \in B_{x_y}$, такое, что $G_{x_y}^{n_0} \cap f^{-1}P = \emptyset$. Тогда $fG_{x_y}^{n_0} \cap P = \emptyset$, где $fG_{x_y}^{n_0} \in B_{x_y}$. Обратно, пусть P - такое множество, что для каждой точки $y \in Y \setminus P$ существует $fG_{x_y}^{n_0} \in B_{x_y}$ такое, что $fG_{x_y}^{n_0} \cap P = \emptyset$. Пусть $x \in X \setminus f^{-1}P$ - произвольная точка. В силу сильной факторности отображения f (точнее, по условию Б) существует элемент G_x^* произвольной базы B_x точки x , такой, что $fG_x^* \subseteq fG_{x_y}^{n_0}$, где $f x = y$. Тогда тем более $fG_x^* \cap P = \emptyset$, следовательно, $G_x^* \subseteq X \setminus f^{-1}P$. Так как точку $x \in X \setminus f^{-1}P$ мы выбрали произвольно, то это означает, что множество $X \setminus f^{-1}P$ открыто в X . Тогда в силу факторности f множество P замкнуто в Y . Мы показали, что $T_c = \{B_{x_y} : y \in Y\}$ является слабой базой пространства Y , где каждое $B_{x_y} = \{fG_{x_y}^n\}_{n=1}^\infty$ счетно. Следовательно, пространство Y удовлетворяет $g\mathfrak{f}$ - аксиоме счетности.

*) Другая внешняя характеристика пространств с $g\mathfrak{f}$ - аксиомой счетности дано в работе С.Нёдева [18].

2°. Теперь пусть Y - произвольное T_1 -пространство с $q\mathfrak{f}$ - аксиомой счетности, а $T_c = \{T_y : y \in Y\}$ - слабая база пространства Y , где $T_y = \{V_n^y\}_{n=1}^\infty$. Так как $Y - T_1$ -пространство, то $\bigcap_{n=1}^\infty V_n^y = y$. Положим $T = \{V_\alpha : V_\alpha \in \bigcup_{y \in Y} T_y\}_{\alpha \in M}$, где $T_y \in T_c$, и пусть $|M| = \tau$. Теперь для каждого натурального n положим $M_n = M$ и каждое M_n будем рассматривать как дискретное топологическое пространство. Рассмотрим их тихоновское произведение $\mathcal{B}_\tau^H = \prod_{n=1}^\infty M_n$. Полученное пространство, как известно, называется бэровским пространством веса τ . Оно метризуемо, причем метрику можно определить так: расстояние между точками $\xi = \{\alpha_n\}$ и $\xi' = \{\alpha'_n\}$ пространства $\mathcal{B}_\tau^H$ определяется по формуле $\rho(\xi, \xi') = \frac{1}{K}$, где K есть наименьшее среди таких натуральных чисел n , для которых $\alpha_n \neq \alpha'_n$. Сферическая окрестность $O(\xi, \frac{1}{K}) = O_{\alpha_1^0, \dots, \alpha_K^0}$ точки $\xi^0 = \{\alpha_n^0\}$ состоит из всех точек $\xi = \{\alpha_n\}$, для которых $\alpha_1 = \alpha_1^0, \alpha_2 = \alpha_2^0, \dots, \alpha_K = \alpha_K^0$. В пространстве $\mathcal{B}_\tau^H$ точку $\xi = \{\alpha_n\}$ назовем отмеченной, если пересечение $\bigcap_{n=1}^\infty V_{\alpha_n}$ состоит ровно из одной точки y и семейства $\{V_{\alpha_n}\}_{n=1}^\infty$ и $T_y = \{V_n^y\}_{n=1}^\infty$ является базисами одного и того же фильтра, т.е. для каждого $V_{\alpha_n} \in \{V_{\alpha_n}\}_{n=1}^\infty$ существует $V_{n_0}^y$, такое, что $V_{n_0}^y \subseteq V_{\alpha_n}$ и для каждого $V_n^y \in T_y$, существует $V_{\alpha_{n_1}} \in \{V_{\alpha_n}\}_{n=1}^\infty$, такое, что $V_{\alpha_{n_1}} \subseteq V_n^y$.

Множество всех отмеченных точек обозначим через W . Каждой точке $\xi = \{\alpha_n\}$ множества W соответствует та единственная точка $y \in Y$, для которой $\{V_{\alpha_n}\}_{n=1}^\infty$ и $T_y = \{V_n^y\}_{n=1}^\infty$ являются базисами одного и того же фильтра и которая может быть записана в виде $\bigcap_{n=1}^\infty V_{\alpha_n} = y = \{ \xi \}$. Таким образом определено отображение $f: W \rightarrow Y$.

а) $fW = Y$. Действительно, пусть $y \in Y$ - произвольная точка, а $T_y = \{V_n^y\}_{n=1}^\infty$ - слабые окрестности. Тогда, полагая $V_{\alpha_n}^y = V_n^y$ для каждого n , получим, что $\xi = \{\alpha_n^y\} \in W$ и $f\xi^y = y$.

б) Теперь докажем следующее соотношение

$$f(W \cap O_{\alpha_1^o, \dots, \alpha_k^o}) = \bigcap_{n=1}^k V_{\alpha_n^o}. \quad (3.1)$$

Пусть $y \in f(W \cap O_{\alpha_1^o, \dots, \alpha_k^o})$. Тогда существует

$$\xi = \{\alpha_1^o, \dots, \alpha_k^o, \alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \dots\} \in W \cap O_{\alpha_1^o, \dots, \alpha_k^o}$$

такое, что $f\xi = y = (\bigcap_{n=1}^k V_{\alpha_n^o}) \cap (\bigcap_{n=k+1}^\infty V_{\alpha_n})$.

Следовательно, $y \in \bigcap_{n=1}^k V_{\alpha_n^o}$. Обратно, пусть $y \in \bigcap_{n=1}^k V_{\alpha_n^o}$,

а $T_y = \{V_n^y\}_{n=1}^\infty$ - слабые окрестности точки y .

Положим $V_{\alpha_{k+n}} = V_n^y$ для каждого $n = 1, 2, \dots$.

Тогда, очевидно, $\{V_{\alpha_1^o}, \dots, V_{\alpha_k^o}, V_{\alpha_{k+1}}, V_{\alpha_{k+2}}, \dots\}$ и

$T_y = \{V_n^y\}_{n=1}^\infty$ являются базисами одного и того же фильтра и

$$(\bigcap_{n=1}^k V_{\alpha_n^o}) \cap (\bigcap_{n=1}^\infty V_{\alpha_{k+n}}) = y. \quad \text{Тогда, полагая } \xi = \{\alpha_1^o, \alpha_2^o, \dots, \alpha_k^o,$$

$\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \dots\}$, получим, очевидно, $\xi \in W \cap O_{\alpha_1^o, \dots, \alpha_k^o}$

и $f\xi = y$.

Следовательно, $y \in f(W \cap O_{\alpha_1^o, \dots, \alpha_k^o})$. Соотношение (3.1)

доказано.

Покажем, что отображение $f: W \rightarrow Y$ сильно факторно. Прежде всего проверим выполнение условия (Б).

Пусть $\xi^o = \{\alpha_n^o\} \in f^{-1}y$ - произвольная точка, где

$y \in Y$. Тогда $\{V_{\alpha_n^o}\}_{n=1}^\infty$ и $T_y = \{V_n^y\}$ являются бази-

сами одного и того же фильтра, а поэтому $\{\bigcap_{n=1}^k V_{\alpha_n^o}\}_{k=1}^\infty$ и

$T_y = \{V_n^y\}$ тоже являются базисами одного и того же фильтра. Семейство $B_{\xi} = \{W \cap O_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}\}$ образует базу в точке ξ в подпространстве W , а тогда в силу (3.1) $f(W \cap O_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_{\alpha_n}^{\circ}$. Это означает, что $\{fB_{\xi}\}_{\xi \in f^{-1}y}$ являются базисами одного и того же фильтра.

Теперь докажем, что f факторно. Пусть P — замкнутое множество в Y и $\xi^{\circ} \in W \setminus f^{-1}P$ — произвольная точка. Тогда существует $V_{n_0}^{y_0} \in T_{y_0}$ такое, что $V_{n_0}^{y_0} \cap P = \emptyset$, где $y_0 = f\xi^{\circ}$. Но $\{\bigcap_{n=1}^k V_{\alpha_n}^{\circ}\}_{k=1}^{\infty}$ и $T_y = \{V_n^{y_0}\}_{n=1}^{\infty}$ порождают один и тот же фильтр, то существует k_0 такое, что $\bigcap_{n=1}^{k_0} V_{\alpha_n}^{\circ} \subseteq V_{n_0}^{y_0}$. Тогда в силу (3.1) $f(W \cap O_{\alpha_1, \dots, \alpha_{k_0}}) = \bigcap_{n=1}^{k_0} V_{\alpha_n}^{\circ} \subseteq V_{n_0}^{y_0}$. Следовательно, $(W \cap O_{\alpha_1, \dots, \alpha_{k_0}}) \cap f^{-1}P = \emptyset$. Так как мы выбрали ξ° произвольно, то это означает, что множество $f^{-1}P$ замкнуто в W . Обратно, пусть $f^{-1}P$ замкнуто в W и $y_0 \in Y \setminus P$ — произвольная точка. Тогда существует окрестность $W \cap O_{\alpha_1, \dots, \alpha_{k_0}}$ точки $\xi^{\circ} = \{\alpha_n\} \in f^{-1}y_0$, такая, что $(W \cap O_{\alpha_1, \dots, \alpha_{k_0}}) \cap f^{-1}P = \emptyset$. Тогда $f(W \cap O_{\alpha_1, \dots, \alpha_{k_0}}) = \bigcap_{n=1}^{k_0} V_{\alpha_n}^{\circ}$ и $(\bigcap_{n=1}^{k_0} V_{\alpha_n}^{\circ}) \cap P = \emptyset$. Но так как $\{\bigcap_{n=1}^k V_{\alpha_n}^{\circ}\}_{k=1}^{\infty}$ и $T_{y_0} = \{V_n^{y_0}\}_{n=1}^{\infty}$ являются базисами одного и того же фильтра, то существует $V_{n_0}^{y_0} \in T_{y_0}$ такое, что $V_{n_0}^{y_0} \subseteq \bigcap_{n=1}^{k_0} V_{\alpha_n}^{\circ}$. Тогда тем более $V_{n_0}^{y_0} \cap P = \emptyset$. Факторность отображения f доказана. Тем самым теорема 3.7 полностью доказана.

ТЕОРЕМА 3.8. Пространства с точечно-счетной слабой базой и только они являются образами метрических пространств при сильно факторных S -отображениях (в классе T_1 -пространств).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО 1°. Пусть $Y - T_1$ - пространство с точечно-счетной слабой базой $T_c = \{T_y : y \in Y\}$. Пусть y - произвольная точка пространства Y , а $\{V_{\alpha_1^y}, V_{\alpha_2^y}, \dots, V_{\alpha_n^y}, \dots\}$ - все элементы семейства $T = \{V_\alpha : V_\alpha \in \bigcup_{y \in Y} T_y\}_{\alpha \in M}$, содержащие точку y . Обозначим для краткости индексы $\alpha_1^y, \alpha_2^y, \dots, \alpha_n^y, \dots$ просто через (1), (2), ..., (n), Построим, как в доказательстве теоремы 3.7, баровское пространство $B_T^{H_0}$, его подпространство W и сильно факторное отображение $f: W \rightarrow Y$. Покажем, что отображение f является S -отображением. В пространстве $B_T^{H_0}$ содержится в качестве подпространства обычное пространство Бара B_0^y счетного веса, состоящее из всех последовательностей, элементы которых суть из индексов (1) = α_1^y , (2) = $\alpha_2^y, \dots$, (n) = $\alpha_n^y, \dots$.

Очевидно, прообраз $f^{-1}y$ точки y содержится в этом подпространстве B_0^y со счетной базой. Итак, в рассматриваемом случае, сильно факторное отображение $f: W \rightarrow Y$ является S -отображением.

2°. Всякое метрическое пространство имеет точечно-счетную базу, поэтому достаточно доказать следующее утверждение.

ЛЕММА 3.9. Пусть $f: X \rightarrow Y$ - сильно факторное отображение пространства X на пространство Y , при котором прообраз $f^{-1}y$ каждой точки $y \in Y$ содержит счетное всюду плотное в $f^{-1}y$ подмножество. Тогда если пространство X имеет точечно-счетную базу, то пространство Y имеет точечно-счетную слабую базу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f: X \rightarrow Y$ - сильно факторное отображение пространства с точечно-счетной базой X на пространство Y , при котором прообраз $f^{-1}y$ каждой точки $y \in Y$ со-

держит счетное всюду плотное в $f^{-1}y$ подмножество. Для каждой точки $y \in Y$ выберем по точке $x_y \in f^{-1}y$. Пусть

$$B_{x_y} = \{G_{x_y}^{\alpha_n}\}_{n=1}^{\infty} \quad - \text{база в точке } x_y \text{ и } B_{x_y} \subseteq B,$$

где $B = \{G^{\alpha}\}$ - точечно-счетная база пространства X . Как в доказательстве теоремы 3.7, доказывается, что $T_c = \{f B_{x_y} : y \in Y\}$ образует слабую базу пространства Y , где $f B_{x_y} = \{f G_{x_y}^{\alpha_n}\}$.

Покажем, что она точечно-счетна. Для этого достаточно доказать, что для любого $y \in Y$ множество $f^{-1}y$ пересекается не более, чем со счетным числом множеств G^{α} точечно-счетной базы

$B = \{G^{\alpha}\}$ пространства X . Но по условию $f^{-1}y$ содержит счетное всюду плотное в $f^{-1}y$ множество $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \dots, \alpha_m, \dots\}$. Обозначим через γ_m элементы базы $B = \{G^{\alpha}\}$,

содержащих точку α_m . Тогда система γ_m не более чем счетна. Далее, так как каждое G^{α} , пересекаясь с $f^{-1}y$ и будучи открытым, содержит некоторое $\alpha_m \in A$, то множество всех элементов базы B , пересекающихся с $f^{-1}y$, совпадает со счетной системой $\bigcup_{m=1}^{\infty} \gamma_m$.

ЛЕММА 3.9. доказана, тем самым полностью доказана и теорема 3.8.

Из доказанных теорем непосредственно следует:

СЛЕДСТВИЕ 3.10. Пространства со слабой счетной базой и только они являются образами метрических пространств со счетной базой при сильно факторных отображениях (в классе T_1 - пространств).

Легко видеть, что всякое открытое непрерывное отображение является сильно факторным отображением. Существование сильно факторного отображения, не являющегося открытым отображением, следует

из теоремы 3.7. Однако замкнутые отображения не обязаны быть сильно факторными.

Пример 3.II. Если $f: X \rightarrow Y$ — замкнутое непрерывное отображение метрического пространства X на паракомпактное пространство Y , то отсюда, вообще говоря, не следует сильная факторность отображения f .

Действительно, пусть X — плоскость, $\ell \subset X$ — прямая, Y — пространство разбиения плоскости, единственным неодноточечным элементом которого служит ℓ , $f: X \rightarrow Y$ — естественное отображение. Легко видеть, что f — замкнутое непрерывное отображение. Тогда в силу известной теоремы Майкла (см. [5]) пространство Y является паракомпактом. Однако пространство Y — неметризуемо — в точке $\{\ell\} \in Y$ не выполнена первая аксиома счетности. Но пространство Y является пространством Фреше-Урысона, так как всякое замкнутое непрерывное отображение является псевдооткрытым, а класс псевдооткрытых образов метрических пространств совпадает с классом пространств Фреше-Урысона (см. [9]).

А.В.Архангельский [9] показал, что пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности в том и только в том случае, если оно является пространством Фреше-Урысона и удовлетворяет слабой первой аксиоме счетности.

Предположим, что отображение $f: X \rightarrow Y$ сильно факторно. Тогда пространство Y удовлетворяет слабой первой аксиоме счетности (см. теорему 3.7), а тогда в силу выше приведенного результата А.В.Архангельского пространство Y удовлетворяет первой аксиоме счетности. Но в точке $\{\ell\} \in Y$ нарушается первая аксиома счетности, пришли к противоречию. Следовательно, f — не является сильно факторным отображением.

ТЕОРЕМА 3.12. Хаусдорфово пространство X с точечно-счетной слабой базой обладает точечно-счетной базой тогда и только тогда, когда оно есть пространство точечно-счетного типа*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X - пространство точечно-счетного типа с точечно-счетной слабой базой. Тогда в силу теоремы 3.8 существуют метрическое пространство W и сильно факторное s - отображение $f: W \rightarrow X$ метрического пространства W на пространство точечно-счетного типа X . Поэтому в силу одной теоремы В.В.Филиппова [25] отображение $f: W \rightarrow X$ является псевдооткрытым. Далее, в силу теоремы 3.3 отображение $f: W \rightarrow X$ является открытым. Но точечно-счетная база при открытых s -отображениях сохраняется. Следовательно, пространство X обладает точечно-счетной базой.

Обратно, если X обладает точечно-счетной базой, то X удовлетворяет первой аксиоме счетности, а пространство с первой аксиомой счетности является пространством точечно-счетного типа. Теорема 3.12 доказана.

ТЕОРЕМА 3.13. Вполне регулярное секвенциально мезокомпактное P - пространство с точечно-счетной слабой базой метризуемо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X - вполне регулярное секвенциально мезокомпактное P - пространство с точечно счетной слабой базой. Так как всякое P - пространство является пространством точечно-счетного типа [8], то в силу теоремы 3.12 пространство X обладает точечно-счетной базой. В работе Boone [28]

* Топологическое пространство X называется пространством точечно-счетного типа (А.В.Архангельский), если для каждой точки $x \in X$ найдется содержащий её бикомпакт $\Phi \subseteq X$, характер которого в X счетен.

доказано, что секвенциально мезокомпактное пространство с первой аксиомой счетности является паракомпактным. В.В.Филиппов [24] доказал, что паракомпактное P - пространство с точечно-счетной базой метризуемо. Следовательно, пространство X метризуемо.

Теорема 3.13 доказана.

Следствие (T.Hoshino) 3.14. Бикompакт с точечно-счетной слабой базой метризуем.

ТЕОРЕМА 3.15. Всякая топология со слабой первой аксиомой счетности есть пересечение всех более сильных метрических топологий.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (X, G) пространство со слабой первой аксиомой счетности, топология которого порождена слабой базой $T_c = \{T_x : x \in X\}$, где $T_x = \{Q_n x : n \in N^+\}$.

Через τ обозначим следующую топологию на X ; все точки

$x' \neq x$ объявляются открытыми, а базой точки x служит $T_x = \{Q_n x : n \in N^+\}$. Легко проверяется, что τ_x действительно является топологией. Тогда пространство (X, τ_x) удовлетворяет первой аксиоме счетности. Положим $\tau = \bigcap \{\tau_x : x \in X\}$.

Легко видеть, что $G = \tau_x$ для любого $x \in X$. Следовательно,

$G \subseteq \tau = \bigcap \{\tau_x : x \in X\}$. Теперь покажем, что $G = \tau$. Для этого достаточно показать, что $\tau = G$. Пусть $0 \in \tau$, тогда

$0 \in \tau_x$ для каждого $x \in X$. Тогда для каждого $x \in X$ существует $Q_{n_0} x \subset 0$, где $Q_{n_0} x \in T_x$. Это означает, что 0 открыто в (X, G) , т.е. $0 \in G$. Значит $G = \tau = \bigcap \{\tau_x : x \in X\}$.

В работе R.Lalitha [32] показано, что всякая топология с первой аксиомой счетности есть пересечение всех более сильных

* Более сильная топология обладает большим числом открытых множеств.

метрических топологий, а выше мы доказали, что всякая топология со слабой первой аксиомой счетности является пересечением некоторых топологий с первой аксиомой счетности. Комбинируя эти результаты, можно утверждать, что всякая топология со слабой первой аксиомой счетности есть пересечение некоторых более сильных метрических топологий. Тогда тем более справедливо утверждение теоремы. Теорема 4.15 доказана.

§ 4. Трансфинитная классификация слабых баз топологических пространств и сильно факторных отображений.

Пусть X - топологическое пространство со слабой базой $T_c = \{T_x : x \in X\}$. Трансфинитной рекурсией определим операторы псевдозамыкания относительно слабой базы T_c :

$T_0(M) = M$, где $M \subseteq X$; $T_1(M) = \{x \in X : \text{для любого } Q(x) \in T_x, Q(x) \cap M \neq \emptyset\}$; если α - изолированный ординал, то $T_\alpha(M) = T_1(T_{\alpha-1}(M))$; если α - предельный ординал, то $T_\alpha(M) = \bigcup \{T_\beta(M) : \beta < \alpha\}$.

Ясно, что множество M замкнуто в топологическом пространстве X тогда и только тогда, когда $T_1(M) = M$.

Скажем, что ранг^{*}) слабой базы T_c топологического пространства X не превышает α в точке x и пишем $\tau(x, T_c) \leq \alpha$, если для всякого M , такого, что $x \in [M]$ следует $x \in T_\alpha(M)$. Рангом слабой базы T_c называется $\tau(T_c) = \sup \{\tau(x, T_c) : x \in X\}$. Другими словами ранг слабой базы T_c равен минимальному трансфиниту α , для которого $T_\alpha(M) = T_{\alpha+1}(M)$ (или, эквивалентно, $T_\alpha(M) = [M]$) для всех $M \subseteq X$.

^{*}) Ранг слабой базы, вообще говоря, не совпадает с рангом покрытия, введенным А.И.Башкировым [II] .

Определение 4.1. Теснотой $t_{T_c}(x, X)$ пространства X в точке $x \in X$ относительно слабой базы T_c называется наименьшее из кардинальных чисел τ , удовлетворяющих условию: если $M \subseteq X$ и $x \in T_1(M)$, то существует $P \subseteq M$, для которого $|P| \leq \tau$ и $x \in T_1(P)$. Теснотой $t_{T_c}(X)$ пространства X по T_c называется наименьшее из кардинальных чисел τ таких, что $t_{T_c}(x, X) \leq \tau$ для всех $x \in X$.

Замечание 4.2. Теснота топологического пространства X относительно базы открытых множеств совпадает с обычной теснотой $t(X)$.

ЛЕММА 4.3. Пусть X — пространство со слабой базой T_c и $t_{T_c}(X) = \aleph_0$. Тогда $T_{\omega_1}(M) = \bigcup \{T_\beta(M) : \beta < \omega_1\}$ — множество, замкнутое для любого $M \subseteq X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем вначале, что $T_{\omega_{1+1}}(M) = T_{\omega_1}(M)$.

Действительно, пусть $x \in T_{\omega_{1+1}}(M)$. Так как $t_{T_c}(X) = \aleph_0$, то найдется счетное множество $P \subseteq T_{\omega_1}(M)$ такое, что $x \in T_1(P)$. Но найдется такое $\alpha_0 < \omega_1$, что $P \subseteq T_{\alpha_0}(M)$. Значит

$$x \in T_1(P) \subseteq T_1(T_{\alpha_0}(M)) \subseteq T_{\omega_1}(M), \quad \text{т.е. } x \in T_{\omega_1}(M).$$

Теперь докажем, что $T_{\omega_1}(M)$ замкнуто. Действительно, $T_1(T_{\omega_1}(M)) = T_{\omega_1}(M)$. Это означает, что для любого $x \in X \setminus T_{\omega_1}(M)$ найдется такое $Q(x) \in T_\infty$, что $Q(x) \cap T_{\omega_1}(M) = \emptyset$. Последнее означает (в силу согласования топологии со слабой базой T_c) (замкнутость множества $T_{\omega_1}(M)$). Лемма 4.3 доказана.

Предложение 4.4. Из $t_{T_c}(X) = \aleph_0$ следует $t(X) = \aleph_0$.

Доказательство. Пусть $x \in [M]$. По лемме 4.3 $[M] = \bigcup \{T_\alpha(M) : \alpha < \omega_1\}$. Отсюда следует, что $x \in T_{\alpha_0}(M)$ при некотором $\alpha_0 < \omega_1$. Если $\alpha_0 = \beta_0 + 1$, то $T_{\alpha_0}(M) = T_1(T_{\beta_0}(M))$. Существо-

ет счетное $P \subseteq T_{\beta_0}(M)$ такое, что $x \in T_1(P) \subseteq T_{\omega_1}(M) = [M]$.
Следовательно, $x \in [P] \subseteq T_{\omega_1}(M) = [M]$.

Если α_0 - предельное трансфинитное число, то $T_{\alpha_0}(M) = \bigcup \{T_{\beta}(M) : \beta < \alpha_0\}$. Отсюда следует, что $x \in T_{\beta_0}(M)$, $\beta_0 < \alpha_0$.
Существует счетное множество $P \subseteq T_{\beta_0}(M)$ такое, что $x \in T_1(P) \subseteq T_{\beta_0+1}(M) \subseteq T_{\alpha_0}(M)$. Значит, $x \in [P] \subseteq [M]$. Предложение 4.4 доказано.

ЛЕММА 4.5. Пусть X - пространство со слабой базой $T_c = \{T_x : x \in X\}$ в которой каждая система $T_x = \{Q_n(x) : n \in \mathbb{N}^+\}$ счетна, т.е. пространство X удовлетворяет gf -аксиоме счетности. Тогда $t_{T_c}(X) \leq \aleph_0$.

Доказательство. Пусть $M \subseteq X$ и $x \in T_1(M)$.
Так как $T_x = \{Q_n(x) : n \in \mathbb{N}^+\}$ счетно, то для каждой $Q_n(x) \in T_x$ зафиксируем $\alpha_n \in Q_n(x) \cap M$. Положим $P = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}^+\}$. Тогда $x \in T_1(P)$.

ЛЕММА 4.6. Если $t_{T_c}(X) = \aleph_0$, то $\tau(T) \leq \omega_1$. Это лемма вытекает из леммы 4.3.

Предложение 4.6. Если X - пространство со слабой базой $T_c = \{T_x : x \in X\}$ в которой каждая система T_x счетна, то $\tau(T_c) \leq \omega_1$.

Доказательство следует из лемм 4.3 и 4.5.

Предложение 4.7. Пусть X - пространства со слабой базой $T_c = \{T_x : x \in X\}$. $\tau(T_c) = 1$ тогда и только тогда, когда для любых $x \in X$ и $Q(x) \in T_x$ непременно $x \in \bigcap Q(x)$.

Доказательство. Пусть $\tau(T_c) = 1$. Докажем, что $x \in \bigcap Q(x)$ для любых $x \in X$ и $Q(x) \in T_x$. Предположим, что $x \notin \bigcap Q(x)$. Тогда $x \in [X \setminus Q(x)]$. Так как $\tau(T_c) = 1$, то $x \in [X \setminus Q(x)] = T_1(X \setminus Q(x))$. Но $x \notin T_1(X \setminus Q(x))$ по определению оператора T .

Пришли к противоречию. Следовательно, $x \in \text{Int } Q(x)$. Обратно, если $x \in \text{Int } Q(x)$ для любых $x \in X$ и $Q(x) \in T_x$, то $[M] \subseteq T_1(M)$ для любого M . Но всегда $T_1(M) \subseteq [M]$. Отсюда $[M] = T_1(M)$, следовательно $\tau(T_c) = 1$.

Из предложения 4.7 вытекает

Следствие 4.8. Пусть X — пространство со слабой базой $T_c = \{T_x : x \in X\}$ в которой каждая T_x счетна. Если $\tau(T_c) = 1$, то X удовлетворяет первой аксиоме счетности.

Предложение 4.9. Пусть X — пространство со слабой базой T_c . $\tau(T_c) \leq 2$ тогда и только тогда, когда для любых $x \in X, Q(x) \in T_x$ и для любой $Q(y) \in T_y$ для $y \in Q(x)$ непременно $x \in \text{Int}(\bigcup_{\substack{y \in Q(x) \\ y \neq x}} Q(y) \cup Q(x))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1°. Пусть $\tau(T_c) \leq 2$. Пусть $x_0 \in X$ произвольно. Рассмотрим $Q(x_0) \in T_{x_0}$ и для каждого $x \in Q(x_0), x \neq x_0$ зафиксируем $Q(x) \in T_x$. Положим $P(x_0) = Q(x_0) \cup (\bigcup_{\substack{x \in Q(x_0) \\ x \neq x_0}} Q(x))$ и

$A = X \setminus P(x_0)$. Рассмотрим теперь $T_1(A)$ и $T_1(T_1(A)) = T_2(A)$. Так как $A \cap P(x_0) = \emptyset$, то зафиксированные $Q(x_0)$ и $Q(x)$ для $x \in Q(x_0)$ таковы, что $Q(x_0) \cap A = \emptyset$ и $Q(x) \cap A = \emptyset$ для каждого $x \in Q(x_0)$. Значит $Q(x_0) \cap T_1(A) = \emptyset$. Но тогда $x_0 \notin T_1(T_1(A)) = T_2(A)$.

Так как $T_2(A) = [A]$ (у нас $\tau(T_c) \leq 2$), то $x_0 \in X \setminus [A] \subseteq P(x_0) = Q(x_0) \cup (\bigcup \{Q(x) : x \in Q(x_0), x \neq x_0\})$.

Таким образом $x_0 \in \text{Int } P(x_0) = \text{Int}(\bigcup \{Q(y) : y \in Q(x_0), y \neq x_0\} \cup Q(x_0))$.

2°. Обратно, пусть M — произвольное незамкнутое множество.

Если для любой точки $x \in [M]$ всякое $Q(x) \in T_x$ пересекается

с M , то $T_1(M) = [M]$. Предположим теперь, что имеется

точка $x_0 \in [M]$, у которой некоторое $Q(x_0) \in T_{x_0}$ не пересекается с M .

Тогда $x_0 \in T_1(M)$ и $T_1(M)$ не замкнуто. Нам нужно доказать, что $x_0 \in T_2(M)$. Предположим, что $x_0 \in T_2(M)$.

Тогда имеется такое $Q(x_0) \in T_{x_0}$, что $Q(x_0) \cap T_1(M) = \emptyset$.

Отсюда получаем, что $x \notin T_1(M)$, если $x \in Q(x_0)$.

Зафиксируем для каждой точки $x \in Q(x_0)$ такое $Q(x)$, чтобы

$$Q(x) \cap M = \emptyset. \text{ Рассмотрим } P(x_0) = Q(x_0) \cup (U\{Q(x) : x \in Q(x_0), x \neq x_0\}).$$

Ясно, что $x_0 \in P(x_0)$ и $P(x_0) \cap M = \emptyset$. По условию $x_0 \in \text{Int } P(x_0)$

Тогда тем более $\text{Int } P(x_0) \cap M = \emptyset$, и мы получаем противоречие

с тем, что $x_0 \in [M]$ Итак, $T_2(M) = [M]$, т.е. $\tau(T_c) \leq 2$.

Предложение 4.9 доказано.

Замечание 4.Ю. Аналогично получаются критерии того, чтобы

$$\tau(T_c) \leq \alpha.$$

ЛЕММА 4.11. Пусть $X-T_2$ -пространство со слабой базой $T_c = \{T_x : x \in X\}$ и пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке x_0 .

Тогда для любой $Q(x_0) \in T_{x_0}$ непременно $Q(x_0) \cap \{x_n : n \in N^+\} \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $Q(x_0) \cap \{x_n : n \in N^+\} \neq \emptyset$, то это означает, что $x_0 \notin T_1(\{x_n : n \in N^+\})$ и $x_0 \notin [\{x_n : n \in N^+\}]$.

Это противоречит тому, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к x_0 .

ТЕОРЕМА 4.12. Пусть $X-T_2$ -пространство со слабой базой $T_c = \{T_x : x \in X\}$, в которой каждая T_x счетна (т.е. X удовлетворяет g_1 -аксиоме счетности). Тогда его индекс секвенциальности совпадает с рангом слабой базы T_c и, более того, секвенциальное замыкание множества совпадает с псевдозамыканием множества относительно слабой базы T_c .

Доказательство. Пусть индекс секвенциальности пространства X равен α .

$$[M]_1 = \{x \in X : \exists \{x_n\} \subseteq M, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x\} \text{ -секвенциальное замыкание}$$

чение множества $M \subseteq X$. Трансфинитной рекурсией определяются операторы $[\cdot]_\alpha$. Тогда $[M]_\alpha = [M]$. Надо доказать, что $T_\alpha(M) = [M] = [M]_\alpha$ для любого $M \subseteq X$. Для этого достаточно доказать, что $T_1(M) = [M]_1$ для любого $M \subseteq X$.

а) Пусть $x \in T_1(M)$. Тогда для каждого $Q_n(x) \cap M \neq \emptyset$. Зафиксируем $x_n \in Q_n(x) \cap M$. Тогда $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, следовательно, $x \in [M]_1$.

б) Пусть $x \in [M]_1$; тогда существует $\{x_n\} \subseteq M$ такое, что $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Из леммы 4.11 следует, что $Q_i(x) \cap \{x_n : n \in \mathbb{N}^+\} \neq \emptyset$ для любого $i \in \mathbb{N}^+$. Тогда тем более $Q_i(x) \cap M \neq \emptyset$ для любого $i \in \mathbb{N}^+$, следовательно, $x \in T_1(M)$. Теорема 4.12 доказана.

ТЕОРЕМА 4.13. Для каждого ординала $\alpha \leq \omega_1$ существует счетное нормальное пространство X_α со слабой базой $T_c^\alpha = \{T_x^\alpha : x \in X_\alpha\}$, в которой каждая T_x^α счетна, такое, что $\tau(T_c^\alpha) = \alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО? В совместной работе А.В. Архангельского и С.П. Франкилина [27] были построены счетные нормальные нульмерные секвенциальные пространства X_α ($\alpha < \omega_1$), индекс секвенциальности которых равен α . В.Л. Зубковский [16] доказал, что для любого $\alpha < \omega_1$ пространства X_α вкладывается в счетное нормальное пространство X_{ω_1} со слабой первой аксиомой счетности, как замкнутое множество. Но слабая первая аксиома счетности наследуется по замкнутым множествам. Поэтому для любого $\alpha < \omega_1$ в X существует слабая база $T_c^\alpha = \{T_x^\alpha : x \in X\}$, в которой каждая T_x^α счетна. Тогда в силу выше доказанной теоремы 4.13 $\tau(T_c^\alpha) = \alpha$.

В пространстве X_{ω_1} , есть слабая база T_c такая, что $\tau(T_c) = \omega_1$. Теорема 4.13 доказана.

Пусть $f: X \rightarrow Y$ — сильно факторное отображение пространства X на пространство Y . Для любой точки $y \in Y$ выберем точку $x_y \in f^{-1}(y)$ и базу $\mathcal{B}x_y$ в точке x . Тогда в силу сильной факторности отображения f , $T_c = \{f \mathcal{B}x_y : y \in Y\}$ образует сла-

бую базу пространства X . Причем ранг слабой базы T_c не зависит от выбора точки $x_y \in f^{-1}y$ и ее базы B_{x_y} . Скажем, что ранг сильно факторного отображения $f: X \rightarrow Y$ не больше α в точке y , и пишем $z(y, f) \leq \alpha$, если для всякого множества $B \subseteq Y$ такого, что $y \in [B]$ обязательно $y \in T_\alpha(B)$.

Рангом сильно факторного отображения f называется $z(f) = \sup\{z(y, f) : y \in Y\}$.

Другими словами, ранг сильно факторного отображения $f: X \rightarrow Y$ равен минимальному трансфиниту α , для которого $T_\alpha(B) = T_{\alpha+1}(B)$ для всех $B \subseteq Y$.

ТЕОРЕМА 4.14. Сильно факторное отображение $f: X \rightarrow Y$ является открытым тогда и только тогда, когда $z(f) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — сильно факторное отображение и $z(f) = 1$. Докажем, что f открыто. Так как ранг слабой базы $T_c = \{fB_{x_y} : y \in Y\}$ равен 1, то в силу предложения 4.7 для каждой окрестности O_x произвольной точки $x, f x \in \text{Int } fO_x$. Отсюда следует открытость отображения f . Обратно, если f открыто, то легко видеть, что $z(f) = 1$ и f — сильно факторно.

ГЛАВА II

О СВОЙСТВАХ ТИПА КОМПАКТНОСТИ И ПОЛНОТЫ

В этой главе изучаются пространства, обладающие свойствами типа компактности и полноты, даются их характеристики в терминах бикompактных расширений и доказываются их инвариантность (в сторону прообраза) при некоторых непрерывных отображениях.

§ 5. О пространствах типа компактности и связанных с ними непрерывных отображениях.

Пусть P — некоторое топологическое свойство системы подмножеств топологического пространства X . Например, свойства "локальная конечность", "консервативность" и т.д. Свойство P назовем свойством типа конечности, если выполняются следующие условия:

1°. Всякая конечная система множеств пространства X обладает свойством P .

2°. Если система γ_α подмножеств пространства X обладает свойством P при каждом $\alpha \in A$ и система $\{\tilde{\gamma}_\alpha : \alpha \in A\}$ обладает свойством P , где $\tilde{\gamma}_\alpha$ — тело системы γ_α , то система $\gamma = \bigcup \{\gamma_\alpha : \alpha \in A\}$ обладает свойством P .

3°. Если система γ подмножеств пространства X обладает свойством P , то любая подсистема $\gamma' \subseteq \gamma$ обладает свойством P .

4°. Если $f: Z \rightarrow X$ — непрерывное отображение пространства Z в пространство X и система $\gamma = \{U\}$ подмножеств пространства X обладает свойством P , то система $f^{-1}\gamma = \{f^{-1}U\}$ обладает свойством P .

Определение 5.1. Пространство X называется P -компактным пространством, если в любое его открытое покрытие ω можно

вписать открытое покрытие γ со свойством P типа конечности.

Определение 5.2. Отображение $f: X \rightarrow Y$ топологического пространства X на топологическое пространство Y называется P -компактным, если каковы бы ни были точки $y \in Y$ и открытое семейство $\omega = \{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ в X , покрывающее множество $f^{-1}y$, найдется семейство γ со свойством P типа конечности, вписанное в семейство ω и покрывающее множество $f^{-1}y$.

Непрерывное замкнутое P -компактное отображение называется P -совершенным отображением.

Из условия I^0 свойства типа конечности следует, что всякое бикомпактное пространство является P -компактным пространством, а всякое совершенное отображение является P -совершенным отображением.

Замечание 5.3. Для некоторых свойств P типа конечности P -компактность отображения $f: X \rightarrow Y$ эквивалентна требованию P -компактности подпространств $f^{-1}y$ для каждого $y \in Y$. В дальнейшем убедимся, что в общем случае эти условия не эквивалентны.

Предложение* 5.4. Следующие свойства семейства являются свойствами типа конечности:

- а) быть счетным открытым семейством,
- б) быть локально конечным открытым семейством,
- в) быть точечно-конечным открытым семейством,
- г) быть бикompактно-конечным открытым семейством,
- д) быть секвенциально-конечным открытым семейством.

* Этот перечень свойств типа конечности ни в коем случае не претендует на полноту.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство свойства а) очевидно. Покажем, что свойство б) является свойством семейств типа конечности. Проверим условие 2°. Пусть $\omega = \{G^\alpha\}_{\alpha \in A}$ — произвольное локально конечное семейство открытых множеств в пространстве X . Пусть при каждом фиксированном $\alpha \in A$ семейство $\gamma_\alpha = \{O_\beta^\alpha\}_{\beta \in B_\alpha}$ состоящее из открытых множеств в X тоже локально конечно в X , причем $G^\alpha = \bigcup \{O_\beta^\alpha : \beta \in B_\alpha\}$. Покажем, что тогда семейство $\gamma = \bigcup \{\gamma_\alpha : \alpha \in A\}$, состоящее из открытых множеств в X , локально-конечно в X . Пусть x — произвольная точка пространства X . Так как семейство ω — локально конечно, то существует окрестность O_x точки x такая, что $G^\alpha \cap O_x \neq \emptyset$ лишь для конечного числа индексов $\alpha \in A$. Пусть $G^{\alpha_1}, G^{\alpha_2}, \dots, G^{\alpha_n}$ — все элементы семейства ω , пересекающиеся с O_x . По условию семейство $\gamma_{\alpha_i} = \{O_\beta^{\alpha_i}\}_{\beta \in B_{\alpha_i}}$ $i = 1, 2, \dots, n$ локально-конечно, поэтому существует окрестность $O_x^{\alpha_i}$ точки x такая, что $O_x^{\alpha_i} \cap O_\beta^{\alpha_i} \neq \emptyset$ лишь для конечного числа индексов $\beta \in B_{\alpha_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Положим $O_x^* = O_x \cap \left(\bigcap_{i=1}^n O_x^{\alpha_i} \right)$. Но $G^{\alpha_i} = \bigcup \{O_\beta^{\alpha_i} : \beta \in B_{\alpha_i}\}$ при каждом α_i ($i = 1, 2, \dots, n$), поэтому все элементы семейства $\gamma = \bigcup \{\gamma_\alpha : \alpha \in A\}$, пересекающиеся с O_x^* , содержатся в $\bigcup_{i=1}^n \gamma_{\alpha_i}$. А элементов семейства γ^{α_i} ($i = 1, 2, \dots, n$), пересекающихся с O_x^* , не более, чем конечное число. Следовательно, всех элементов семейства γ , пересекающихся с O_x^* , тоже не более, чем конечное число.

Теперь проверим условие 4°. Пусть $f: Z \rightarrow X$ — непрерывное отображение пространства Z на пространство X , а семейство $\omega = \{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$, состоящее из открытых в X множеств, локально конечно в X . Покажем, что тогда семейство

$f^{-1}\omega = \{f^{-1}G_\alpha\}_{\alpha \in A}$, состоящее из открытых множеств, локально конечно в Z . Пусть z — произвольная точка пространства Z . Тогда существует окрестность O_z точки $fz = x$, такая, что $O_z \cap G_\alpha \neq \emptyset$ лишь для конечного числа индексов $\alpha \in A$. Тогда $f^{-1}O_z$ является искомой окрестностью точки z пространства X . Остальные условия $1^\circ, 3^\circ$ очевидны. Проверка типа конечности свойств в), г), д) проводится аналогично.

Из предложения 5.4, следует, что бикомпактные, финально компактные, паракомпактные, слабо паракомпактные, мезскомпактные, секвенциально мезскомпактные пространства являются P -компактными пространствами.

Следующая теорема является, по существу, схемой топологических теорем.

ТЕОРЕМА 5.5. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — совершенное отображение пространства X на пространство Y . Если пространство Y является P -компактным, то пространство X тоже является P -компактным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольное открытое покрытие $\delta = \{U_\alpha\}_{\alpha \in L}$ пространства X . Так как отображение f является P -компактным, то для любого $y \in Y$ существует семейство $\mathcal{M}_y = \{V_\beta\}_{\beta \in B_y}$, вписанное в покрытие $\delta = \{U_\alpha\}_{\alpha \in L}$, такое, что оно обладает свойством P типа конечности и $f^{-1}y \subseteq \bigcup \{V_\beta : \beta \in B_y\} = \tilde{M}_y$. В силу замкнутости отображения $f: X \rightarrow Y$ существует окрестность O_y точки y , прообраз которой содержится в $\tilde{M}_y = \bigcup \{V_\beta : \beta \in B_y\}$.

В открытое покрытие $\{O_y\}_{y \in Y}$ пространства Y впишем покрытие $\{Q_\alpha\}_{\alpha \in A}$ со свойством P типа конечности.

Тогда, в силу условия 4^0 , покрытие $\omega = \{f^{-1}Q_\alpha = G^\alpha\}_{\alpha \in A}$ пространства X тоже обладает свойством P типа конечности. Каждый элемент покрытия ω содержится хотя бы в одном множестве $\tilde{M}_\gamma$. Выберем для каждого α одно множество $\tilde{M}_\alpha = \tilde{M}_\gamma(\alpha)$, содержащее множество G^α . Пусть $M_\alpha = \{V_\beta^\alpha\}_{\beta \in B_\alpha}$. Положим $O_\beta^\alpha = G^\alpha \cap V_\beta^\alpha$, где $\beta \in B_\alpha$. Тогда, по условию 4^0 , семейство $\gamma_\alpha = \{O_\beta^\alpha\}_{\beta \in B_\alpha}$ при каждом фиксированном $\alpha \in A$ обладает свойством P типа конечности. Легко видеть, что $G^\alpha = \bigcup \{O_\beta^\alpha : \beta \in B_\alpha\}$ при каждом фиксированном $\alpha \in A$. Тогда по условию 2^0 семейство $\gamma = \bigcup \{\gamma_\alpha : \alpha \in A\}$ тоже обладает свойством P типа конечности. Легко видеть, что семейство γ является покрытием пространства X и вписано в покрытие ω . Теорема 5.5 доказана.

Следствие 5.6. Топологическое произведение $X \times Y$ P -компактного пространства X на бикompакт Y является P -компактным пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X есть P -компактное пространство, Y - бикompакт, $X \times Y$ - топологическое произведение и $\pi : X \times Y \rightarrow X$ - естественное проектирование на первый сомножитель, т.е. $\pi(x, y) = x$ для всех $x \in X, y \in Y$. Тогда π - совершенное отображение (см. например, [10]). Поэтому в силу теоремы 5.5 пространство $X \times Y$ является P -компактным. Следствие 5.6 доказано.

J. R. Boone [28] и С. А. Перегудов [20] показали, что совершенный образ секвенциально мезокompактного пространства не обязательно секвенциально мезокompактно. Отсюда следует, что свойство " P -компактность", вообще говоря, при P -совершен-

ных (даже совершенных) отображениях (в сторону образа) не сохраняется.

Если свойство P типа конечности является свойством "быть локально конечным открытым семейством" ("быть точечно конечным открытым семейством"), то P — компактные отображения назовем паракомпактными (слабо паракомпактными) отображениями.

Непрерывные замкнутые паракомпактные (слабо паракомпактные) отображения назовем парасовершенными (слабо парасовершенными) отображениями.

Отметим, что из теоремы 5.5 следуют некоторые ранее известные результаты с усилениями (см. например [5], стр. 86) и следующие новые утверждения.

Следствие 5.7 Пусть $f: X \rightarrow Y$ — парасовершенное отображение пространства X на пространство Y . Если пространство Y паракомпактно, то пространство X тоже паракомпактно.

Следствие 5.8. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — слабо парасовершенное отображение пространства X на пространство Y . Если пространство Y слабо паракомпактно, то пространство X тоже является слабо паракомпактным.

Следующий пример показывает, что в следствии 5.7 (а тогда и в теореме 5.5) вместо паракомпактности (P — компактности) отображения $f: X \rightarrow Y$ нельзя требовать, чтобы для каждого $y \in Y$ подпространство $f^{-1}y$ было паракомпактным (P — компактным).

ПРИМЕР 5.9. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное замкнутое отображение, для которого для каждого $y \in Y$ подпространство $f^{-1}y$ является паракомпактным. Если Y — паракомпакт, а X — впол-

не регулярно, то отсюда, вообще говоря, не следует, что X - паракомпакт.

Пусть Z - пространство Немыцкого (см. [10], [31]), а $R \times R$ - плоскость с фиксированной декартовой системой координат. По определению пространство Z состоит из таких точек $\{(x, y) \in R \times R : y \geq 0\}$ плоскости $R \times R$. Произвольная (открытая) окрестность точки $(x, 0)$, где $x \in R$ является множеством вида $V_2(x, 0) = \{(x, 0)\} \cup \{(u, v) \in Z : (u - x)^2 + (v - 0)^2 < \varepsilon^2\}$.

Окрестностями остальных точек $(x, y) \in Z$, где $y > 0$, являются открытые множества в обычной топологии плоскости, лежащие в $Z_0 = Z \setminus D$, где $D = \{(x, 0) : x \in R\}$.

Известно, что полуплоскость Z с такой топологией вполне регулярна, но не нормальна.

Для каждого $n \in N^+$ положим

$$A_n = \{(\frac{m}{n}, \frac{1}{n}) : m+1 \in N^+\}.$$

Положим $X = (\bigcup_{n \in N^+} A_n) \cup D$ и пусть X имеет индуцированную топологию. Тогда пространство X тоже вполне регулярно. Однако пространство X является сепарабельным, но не нормальным пространством. Через Y обозначим фактор-пространство, полученное из X отождествлением точек из D . Пусть $f: X \rightarrow Y$ - каноническое отображение. Тогда f является непрерывным замкнутым отображением, причем f^{-1}_y паракомпактно для каждого $y \in Y$. Так как пространство X не нормально, то пространство X тем более не паракомпакт. Остается показать, что пространство Y - паракомпакт.

По известному критерию Майкла ([5]), регулярное пространство является паракомпактом, если в каждое открытое покрытие можно вписать $\mathcal{G}$ -локально конечное открытое покрытие. Так как Y есть счетное топологическое пространство, то каждое открытое покрытие имеет счетное подпокрытие. Поэтому достаточно показать, что пространство Y регулярно. Пусть $p \in Y$ и

U - окрестность точки p . Если $p \neq D$, то $\{p\}$ - замкнутая окрестность точки p .

Если $p = D$, то легко проверить, что U есть замкнутая окрестность точки p .

В следствие 5.7 (а тогда и в теореме 5.5), очевидно, нельзя отбросить условие замкнутости отображения f . Тогда пример 5.9 означает, что теорема 5.5 и следствие 5.7 являются окончательными.

ТЕОРЕМА 5.10. Пусть $f: X \rightarrow Y$ - непрерывное отображение пространства X на T_1 -пространство Y . Если пространство X является P -компактным пространством, то отображение f является P -компактным отображением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть y - произвольная точка пространства Y , а $\gamma = \{G^\alpha\}_{\alpha \in A}$ - семейство открытых в X множеств, покрывающих $f^{-1}y$. Так как Y есть T_1 -пространство и f - непрерывно, то $f^{-1}y$ замкнуто в X для любого $y \in Y$. Тогда семейство $\gamma^* = \gamma \cup \{X \setminus f^{-1}y\}$ является открытым покрытием пространства X . В силу P -компактности пространства X , в покрытие γ^* впишем покрытие $\omega = \{O_\beta\}_{\beta \in B}$ со свойством P -типа конечности. Положим $\omega_y = \{O_\beta \in \omega : \text{существует } G^\alpha \in \gamma \text{ такое, что } G_\beta \subseteq G^\alpha\}$.

Очевидно, что ω_y покрывает множество f^{-1}_y и вписано в семейство γ . В силу условия 4⁰ свойства типа конечности, семейство ω_y тоже обладает свойством P типа конечности. Следовательно, отображение f является P -компактным. Теорема 5.10 доказана.

Из этой теоремы следует, что замкнутое подпространство P -компактного пространства P -компактно.

Из этой теоремы и теоремы 5.5 следует следующее следствие.

Следствие 5.11. Пусть $f: X \rightarrow Y$ - непрерывное замкнутое отображение пространства X на P -компактное T_1 -пространство Y . Для того, чтобы пространство X было P -компактным, необходимо и достаточно, чтобы отображение f было P -совершенным.

Следующая теорема является, по существу, модификацией теоремы 5.5.

ТЕОРЕМА 5.12. Для того, чтобы пространство X можно было P -совершенно отобразить на некоторое метризуемое P -компактное пространство, необходимо и достаточно, чтобы X было P -компактным пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f: X \rightarrow Y$ есть P -совершенное отображение пространства X на метризуемое P -компактное пространство Y . Тогда в силу теоремы 5.5 пространство X является P -компактным.

Обратно, если X есть P -компактное пространство, то любое отображение пространства X на одноточечное пространство является P -совершенным. Очевидно, что одноточечное пространство P -компактно и метризуемо. Теорема 5.12 доказана.

На симпозиуме в Праге (1961 г.) П.С.Александровым была выдвинута гипотеза: паракомпакты — это совершенные прообразы метрических пространств. Особый интерес гипотеза П.С.Александрова приобрела после того, как Фролик [32] доказал, — что необходимым и достаточным условием того, чтобы полное в смысле Чеха пространство совершенно отображалось на метрическое пространство, является его паракомпактность. При этом образ допускает введение полной метрики. Однако эта гипотеза не оправдалась (см. [8]). А.В.Архангельским [8] доказано, что совершенные прообразы метрических пространств суть перистые паракомпакты. Независимо от А.В.Архангельского близкую характеристику совершенных прообразов метрических пространств получил В.И.Пономарев [22].

После этих результатов возникают следующие естественные вопросы: При каких непрерывных отображениях паракомпактные и слабо паракомпактные пространства являются прообразами метрических пространств?

На эти вопросы дают ответы следующие следствия, являющиеся частными случаями теоремы 5.12.

Следствие 5.13. Для того, чтобы пространство X можно было парасовершенно отобразить на некоторое метризуемое пространство, необходимо и достаточно, чтобы пространство X было паракомпактным.

Следствие 5.14. Для того, чтобы пространство X можно было слабо парасовершенно отобразить на некоторое метризуемое пространство, необходимо и достаточно, чтобы пространство X было слабо паракомпактным.

Отметим, что повидимому до сих пор не была известна такого рода точная связь между классами метрических и паракомпактных (слабо паракомпактных) пространств.

Следующая теорема дает характеристику вполне регулярных P - компактных пространств в терминах их хаусдорфовых бикомпактных расширений.

ТЕОРЕМА 5.15. Пусть X - вполне регулярное пространство и βX - его бикомпактное хаусдорфово расширение. Для того, чтобы пространство X было P - компактным, необходимо и достаточно, чтобы для любого бикомпакта F лежащего в $\beta X \setminus X$, существовало такое открытое покрытие ω пространства X со свойством P типа конечности (в X), что $[U]_{\beta X} \cap F = \emptyset$ для всех $U \in \omega$.

Доказательства необходимости. Пусть X является P - компактным пространством и F - произвольный бикомпакт лежащий в $\beta X \setminus X$. Для каждой точки $x \in X$ выберем такую окрестность O_x , что $[O_x]_{\beta X} \cap F = \emptyset$. В открытое покрытие $\{O_x \cap X : x \in X\}$ пространства впишем открытое покрытие γ со свойством P типа конечности. Тогда ясно, что $[U]_{\beta X} \cap F = \emptyset$ для любого $U \in \gamma$.

Достаточность. Пусть γ - произвольное открытое покрытие пространства X . Для каждого $U \in \gamma$ зафиксируем открытое в βX множество O_U такое, что $O_U \cap X = U$. Положим $F = \beta X \setminus \bigcup \{O_U : U \in \gamma\}$. Тогда F - бикомпакт, лежащий в $\beta X \setminus X$. По условию, существует открытое покрытие ω пространства X со свойством P типа конечности (в X) такое, что $[G]_{\beta X} \cap F = \emptyset$ для $G \in \omega$. Множество $[G]_{\beta X}$ - бикомпакт и $[G]_{\beta X} \subseteq \bigcup \{O_U : U \in \gamma\}$. Поэтому существует конечная система $\{O_{U_1}, O_{U_2}, \dots, O_{U_{n(G)}}\}$ такая, что $\bigcup_{i=1}^{n(G)} O_{U_i} \supseteq [G]_{\beta X}$. Тогда $(\bigcup_{i=1}^{n(G)} O_{U_i}) \cap X = \bigcup_{i=1}^{n(G)} (X \cap O_{U_i}) = \bigcup_{i=1}^{n(G)} U_i = X \cap [G]_{\beta X} = G$.
Значит, для каждого $G \in \omega$ существует конечное подсистема γ_G покрытия γ такая, что $\bigcup \{U : U \in \gamma_G\} \supseteq G$. Мы фиксируем для

дальнейшего такое χ_G при всех $G \in \omega$. Положим $\omega_G = \{G \cap U : U \in \chi_G\}$. Тогда ω_G — конечное семейство открытых в X множеств, вписанное в χ , объединение элементов которого равно в точности G . В силу условия 1^о система ω_G обладает свойством P типа конечности, а в силу условия 2^о система $\{ \omega_G : G \in \omega \}$ обладает свойством P типа конечности. Следовательно, $\xi = \bigcup \{ \omega_G : G \in \omega \}$ — открытое покрытие пространства X со свойством P типа конечности и вписанное в χ . Значит X является P — компактным пространством.

Замечание 5.16. В доказательстве теоремы 5.15 использованы только первые два условия типа конечности, следовательно, теорема 5.15 справедлива и для " P — компактных" пространств, определяемых только первыми двумя условиями свойства типа конечности.

Отметим, что теореме 5.15 впервые для паракомпактных пространств доказана японским математиком Тамано [29], а для финально-компактных пространств отмечена в работе [19].

§ 6. 0 свойствах типа полноты

В этом параграфе вводится понятие D — полноты топологического пространства, дается характеристика нормальных D — полных пространств в терминах их максимальных бикompактных расширений, а также доказывается, что свойство D_P — полноты переходит от образа к прообразу при совершенных отображениях.

Определение 6.1. Пусть дано пространство X и система $D = \{ \omega \}$ его открытых покрытий. Центрированная система $\Phi = \{ V \}$ подмножеств пространства X называется D — системой, если

для любого $\omega \in D$ существуют $U \in \omega$ и $V_\omega \in \Phi$ такие, что $V_\omega \subseteq [U]$.

Определение 6.2. Пространство X называется D -полным, если $\bigcap \{[V] : V \in \Phi\} \neq \emptyset$ для любой D -системы Φ .

Если система D состоит из всех открытых покрытий, обладающих свойством P типа конечности, то в этом случае D -полное пространство назовем D_P -полным.

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть X - нормальное пространство и βX - расширение Стоуна-Чеха пространства X . Для того, чтобы пространство X было D_P -полным, необходимо и достаточно, чтобы для любой точки $x_0 \in \beta X \setminus X$ существовало $\omega \in D$ такое, что $[U]_{\beta X} \not\ni x_0$ для всех $U \in \omega$.

Доказательство необходимости. Пусть X есть D_P -полное нормальное пространство и $x_0 \in \beta X \setminus X$. Предположим, что для любого $\omega \in D$ существует $U_\omega \in \omega$ такое, что $[U_\omega]_{\beta X} \ni x_0$. Пусть $\mathcal{U} = \{O_{x_0}\}$ система всех окрестностей точки x_0 в βX . Тогда $O_{x_0} \cap U_\omega \neq \emptyset$ для всех $O_{x_0} \in \mathcal{U}$ и $\omega \in D$. Положим $\mathcal{G} = \{O_{x_0} \cap X : O_{x_0} \in \mathcal{U}\}$. Теперь покажем, что $\Phi = \{[U_\omega] : \omega \in D\} \cup \{O_{x_0} \cap X : O_{x_0} \in \mathcal{U}\}$ является D -системой. Для этого достаточно доказать, что система $\Psi = \{[U_\omega] : \omega \in D\}$ является центрированной. Пусть $\{[U_{\omega_1}] = F_{\omega_1}, [U_{\omega_2}] = F_{\omega_2}, \dots, [U_{\omega_s}] = F_{\omega_s}\}$ - произвольная конечная система. Тогда в силу нормальности X имеет равенство $\bigcap [F_{\omega_i}]_{\beta X} = [\bigcap_{i=1}^s F_{\omega_i}]_{\beta X}$. Но $x_0 \in \bigcap_{i=1}^s [F_{\omega_i}]_{\beta X}$. Следовательно, $\bigcap_{i=1}^s F_{\omega_i} \neq \emptyset$. Значит Φ - центрированная система, так как $\mathcal{G}$ центрировано и $(O_{x_0} \cap X) \cap [U_\omega] \neq \emptyset$ для всех $O_{x_0} \in \mathcal{U}$ и $\omega \in D$. Из построения самого Φ следует, что Φ является D -системой. Но $\bigcap \{[V] : V \in \Phi\} \subseteq \{[O_{x_0} \cap X] : O_{x_0} \in \mathcal{U}\} = \emptyset$ так как

$\bigcap \{ [O_{x_0}]_{\beta X} : O_{x_0} \in \mathcal{U} \} = x_0$. Пришли к противоречию, вопреки D_P -полноте пространства X . Следовательно, существует $\omega \in D$ такое, что $[U]_{\beta X} \neq x_0$ для всех $U \in \omega$.

Достаточность. Пусть $\mathcal{P}$ - произвольная D -система пространства X . Тогда $\bigcap \{ [V]_{\beta X} : V \in \mathcal{P} \} \neq \emptyset$, как центрированная система в бикompакте βX . Для доказательства D_P -полноты пространства X достаточно показать, что $\bigcap \{ [V]_{\beta X} : V \in \mathcal{P} \} \subseteq X$. Предположим, что это не так, т.е. существует $x_0 \in \beta X \setminus X$ такое, что $x_0 \in \bigcap \{ [V]_{\beta X} : V \in \mathcal{P} \}$. Тогда по условию теоремы существует $\omega \in D$ такое, что $[U]_{\beta X} \neq x_0$ для всех $U \in \omega$. Но $\mathcal{P}$ D -система, то существует $V_\omega \in \mathcal{P}$, такое, что $V_\omega \subseteq [U]$. Тогда $[V_\omega]_{\beta X} \subseteq [U]_{\beta X} = [U]_{\beta X} \neq x_0$. Следовательно, $x_0 \notin \bigcap \{ [V]_{\beta X} : V \in \mathcal{P} \}$. Пришли к противоречию. Значит $\bigcap \{ [U]_{\beta X} : U \in \mathcal{P} \} \subseteq X$. Тогда $\bigcap \{ [V]_{\beta X} : V \in \mathcal{P} \} = \bigcap \{ [V]_{\beta X} \cap X : V \in \mathcal{P} \} = X \cap (\bigcap \{ [V]_{\beta X} : V \in \mathcal{P} \}) = \bigcap \{ [V]_{\beta X} : V \in \mathcal{P} \} \neq \emptyset$.

Следствие 6.4. Всякое нормальное P -компактное пространство D_P -полно.

Замечание 6.5. В работе Б.А.Пасынкова [19] доказано, что полнота в смысле Дьедона пространства эквивалентно следующему условию: для любой точки $x_0 \in \beta X \setminus X$ существует такое нормальное локально конечное открытое покрытие ω пространства X , что $[U]_{\beta X} \neq x_0$ для всех $U \in \omega$.

Всякое локально конечное открытое покрытие нормального пространства является нормальным покрытием. Поэтому в силу теоремы 6.3, D -полнота нормальных пространств, в случае, когда D есть система всех локально конечных открытых покрытий

совпадает с полнотой в смысле Дьёдонне. Тем самым оправдано понятие D -полноты.

ТЕОРЕМА 6.6. Пусть $f: X \rightarrow Y$ - совершенное отображение нормального пространства на нормальное пространство Y . Тогда, если Y является D_p -полным пространством, то X тоже является D_p -полным пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть βX и βY - расширения Стоуна-Чеха пространств X и Y , а $\bar{f}: \beta X \rightarrow \beta Y$ - единственное непрерывное продолжение отображения $f: X \rightarrow Y$. Известно, что совершенность отображения f эквивалентна тому, что $\bar{f}(\beta X \setminus X) = \beta Y \setminus Y$ (см. например [10]). Пусть $x_0 \in \beta X \setminus X$. Тогда $\bar{f}x_0 \in \beta Y \setminus Y$. Так как Y является D_p -полным нормальным пространством, то в силу теоремы 6.3 существует открытое покрытие δ пространства Y со свойством P типа конечности такое, что $[u]_{\beta Y} \not\subseteq \bar{f}x_0$ для всех $u \in \delta$. В силу условия 4^0 свойства типа конечности открытое покрытие $\{X \cap \bar{f}^{-1}u : u \in \delta\}$ пространства X обладает свойством P типа конечности. Тогда $[X \cap \bar{f}^{-1}u]_{\beta X} \subseteq \bar{f}^{-1}[u]_{\beta Y} \not\subseteq \bar{f}^{-1}x_0$ для всех $u \in \delta$. Следовательно, в силу теоремы 6.3, пространство X является D_p -полным пространством.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. П.С.Александров, On some results concerning Topological spaces and their continuous mappings, *Proc. Symp. Gen. Topology*, 1961, 41-54.
2. П.С.Александров, О некоторых результатах в теории топологических пространств, полученных за последние 25 лет, *УМН*, 15, вып.2 (1960), 25- 95.
3. П.С.Александров, О некоторых основных направлениях в общей топологии, *УМН*, 19, вып.6 (1964), 3- 46.
4. П.С.Александров, О метризации топологических пространств, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math.*, 8, № 3, 1960, 135- 140.
5. П.С.Александров, Б.А.Пасынков, Введение в теорию размерности. М., 1973.
6. А.В.Архангельский, Отображения и пространства, *УМН*, 21, вып.4 (1966), 133- 184.
7. А.В.Архангельский, Отображения открытые и близкие к открытым. Связи между пространствами, *Труды Моск. матем. о-ва*, 15 (1966), 181- 223.
8. А.В.Архангельский, Об одном классе пространств, содержащем все метрические и все локально бикompактные пространства, *Матем.сборник*, (109):1 (1965), 55- 85.
9. А.В.Архангельский, Некоторые типы факторных отображений и связи между классами топологических пространств, *ДАН СССР*, 153, № 4 (1965), 743- 746.
10. А.В.Архангельский, В.И.Пономарев, Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974.

11. А.И.Башкиров, О классификации факторных отображений и секвенциальных бикомпактов, ДАН СССР, 217, № 4(1974), 745- 748.
12. А.А.Борубаев, Образы метрических пространств при факторных отображениях с дополнительными условиями, Труды молодых ученых, вып. IV, Фрунзе(1975), 14- 20.
13. А.А.Борубаев, О некоторых соотношениях между пространствами, Труды молодых ученых, вып. IV Фрунзе, (1975), 42- 46.
14. А.А.Борубаев, О прообразах метрических пространств при P - совершенных отображениях, Труды КирГУ им.50-летия СССР, серия матем. наук, вып. II (1976), 22- 24.
15. А.А.Борубаев, Обобщенно Бэровские пространства и связанные с ними непрерывные отображения, Труды молодых ученых, вып. IV, Фрунзе, (1975), 3- 13.
16. В.Л.Зубковский, Пример секвенциального счетного однородного пространства без первой аксиомы счетности, Вестн.Моск.у-та, Матем.мех. № 5, (1973), 33- 35.
17. В.И.Малыхин, В.И.Пономарев, Общая топология, Итоги науки сер.Алгебра. Геометрия. Топология, т. I3 (1975), 149-229.
18. С.И.Недев, О метризуемые пространства, Труды Моск.матем. о-ва, 24 (1971), 201-236.
19. Б.А.Пасынков О спектральной разложимости топологических пространств, Матем.сборник, т.66, № I (1965), 35- 79.

20. С.А. Перегудов, О некоторых свойствах топологических пространств, лежащих между паракомпактностью и слабой паракомпактностью, Вест. Моск. ун-та, Матем. мех., № 1 (1975), 71-77.
21. В.И. Пономарев, Аксиома счетности и непрерывные отображения. *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math.*, 8, № 3 (1960), 127-134.
22. В.И. Пономарев, О метрических пространствах и связанных с ними непрерывных отображениях, ДАН СССР, 153, № 5 (1963), 1013-1016.
23. В.И. Пономарев, Паракомпакты, их проекционные спектры и непрерывные отображения, Матем. сборник, 60 (1965), 89-119.
24. В.В. Филиппов, О перистых паракомпактах, ДАН СССР, 178, № 3 (1968), 555-558.
25. В.В. Филиппов, О факторных S -отображениях, ДАН СССР, 181, № 6 (1968), 1343-1345.
26. М.М. Чобан, К теории p -пространств, ДАН СССР, 194, № 3 (1970), 528-531.
27. A.V. Arhangel'ski, S.P. Franklin, Ordinal invariants for topological spaces, *Mich. Math. J.*, 15, № 3 (1968), 313-320.
28. J.R. Boone, Some characterization of paracompactness in k -spaces, *Fundam. math.*, 72 (1971), 145-153.
29. H. Tamano, On paracompactness, *Pacif. J. Math.*, 10 (1960), 1043-1047.

30. H.H. Wicke, On the Hausdorff open continuous images of Hausdorff paracompact P -spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 22, №1 (1969), 136-140.
31. H.L. Shapiro, Closed maps and paracompact spaces, Canad. J. Math., 20, №3 (1968), 513-519.
32. Z. Frolik, On the topological product of paracompact spaces, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math., 8, №11 (1960), 747-750.
33. R. Lalitha, A note in the lattice structure of T_1 -topologies on an infinite set, Math. Stud., 35, №1 (1969), 29-33.
34. T. Hoshina, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, V.A10 (1970), 263-274.

A. Borykh.